

جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

# جامع ریاضیات تجربی + موج آزمون

کازم اجلالی، ارشک حمیدی



**انتگرالگو**

◆ فصل اول: پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

پاسخ دست‌گرمی‌ها ..... ۲

◆ فصل دوم: پاسخ آزمون‌ها

پاسخ آزمون‌های فصل اول ..... ۳۴

پاسخ آزمون‌های فصل دوم ..... ۶۷

پاسخ آزمون‌های فصل سوم ..... ۹۸

پاسخ آزمون‌های فصل چهارم ..... ۱۱۲

پاسخ آزمون‌های فصل پنجم ..... ۱۳۰

پاسخ آزمون‌های فصل ششم ..... ۱۴۶

پاسخ آزمون‌های فصل هفتم ..... ۱۶۰

پاسخ آزمون‌های فصل هشتم ..... ۱۸۲

پاسخ آزمون‌های فصل نهم ..... ۱۸۵

پاسخ آزمون‌های فصل دهم ..... ۱۹۱

پاسخ آزمون‌های فصل یازدهم ..... ۲۰۱

پاسخ آزمون‌های فصل دوازدهم ..... ۲۱۴

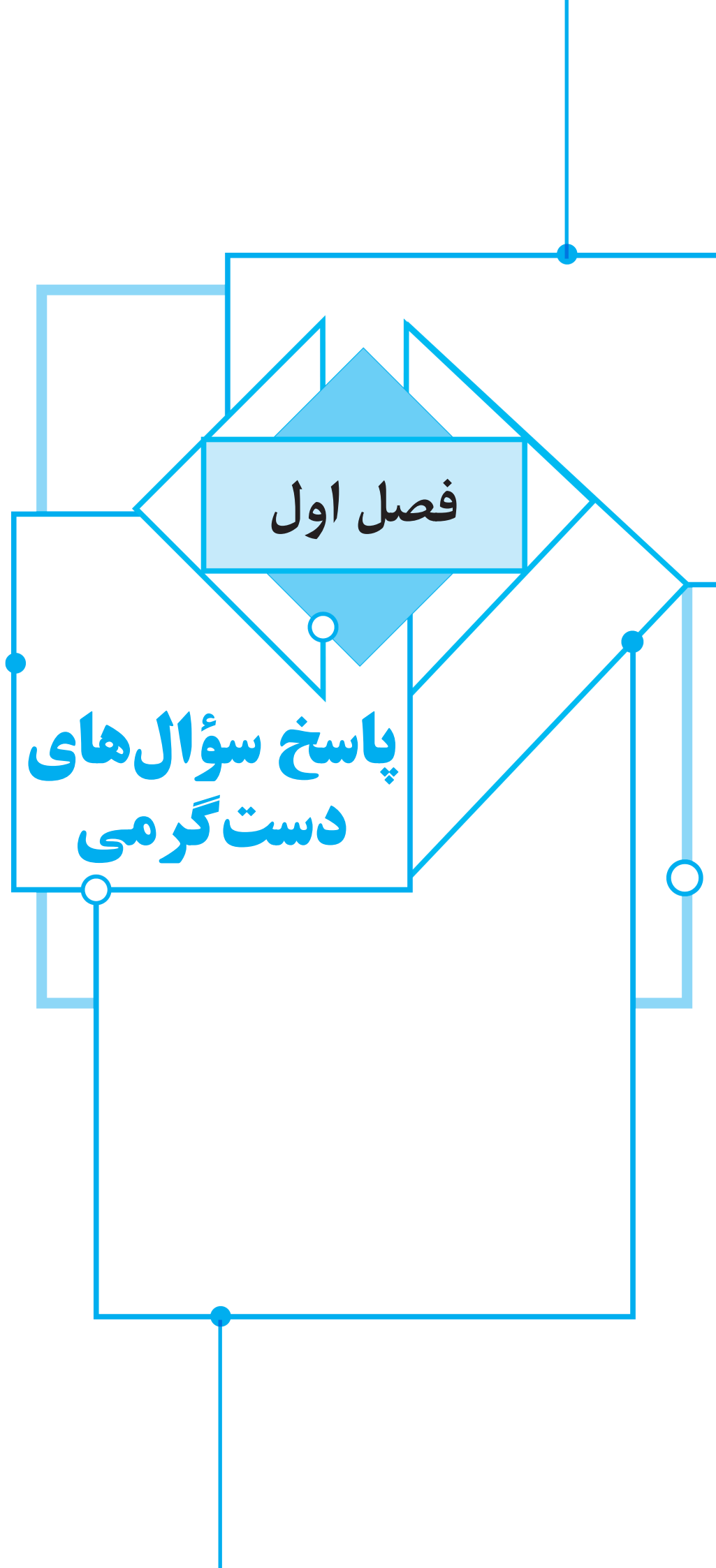
پاسخ آزمون‌های فصل سیزدهم ..... ۲۲۵

پاسخ آزمون‌های فصل چهاردهم ..... ۲۳۸

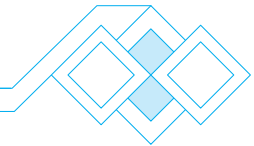
پاسخ آزمون‌های فصل پانزدهم ..... ۲۵۲

# فصل اول

پاسخ سؤال‌های  
دست‌گرمی



## پاسخ سؤال‌های دست گرمی



۱- گزینه ۲ از تساوی دو زوج مرتب نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+2b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a-b=2$$

۲- گزینه ۳ از هریک از عددهای ۱ و ۲ دو پیکان خارج شده است، پس  $a+b=2$  و  $a-b=6$  که نتیجه می‌شود  $a=4$  و  $b=-2$ . بنابراین  $ab=-8$ .

۳- گزینه ۱ با توجه به زوج‌های مرتب  $(3, 4)$  و  $(3, m^2)$  نتیجه می‌شود  $m^2=4$ . پس  $m=\pm 2$ . با توجه به زوج‌های مرتب  $(4, m+n)$  و  $(4, 2n+1)$  نتیجه می‌شود  $m+n=2n+1$ . پس  $n=m-1$ . اگر  $m=2$ ، آن‌گاه  $n=1$  و  $f=\{(3, 4), (3, 2), (4, 3)\}$  که به خاطر دو زوج مرتب  $(3, 2)$  و  $(3, 4)$  که عضو رابطه هستند، این رابطه، تابع نیست. اگر  $m=-2$ ، آن‌گاه  $n=-3$  و  $f=\{(3, 4), (-9, -2), (4, -5)\}$ . بنابراین رابطه  $f$ ، تابع است، پس  $mn=6$ .

۴- گزینه ۱ برای اینکه برد تابع  $f$  تک‌عضوی باشد باید اعداد  $3m$  و  $2m+n$  یکسان باشند:

$$3m=6 \Rightarrow m=2, \quad 2m+n=6 \xrightarrow{m=2} 4+n=6 \Rightarrow n=2$$

بنابراین  $mn=4$ .

۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x)=4x+4 \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{x}{2})=4(\frac{x}{2})+4=2x+4 \\ f(\frac{x}{4})=4(\frac{x}{4})+4=x+4 \end{cases}$$

$$\text{بنابراین } f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4})=2x+4-(x+4)=x$$

۶- گزینه ۳ اگر فرض کنیم  $\frac{2}{x-1}=t$ ، آن‌گاه  $t \neq 0$  و  $\frac{x-1}{2}=\frac{1}{t}$

$$\text{پس } x=\frac{2+t}{t}+1=\frac{2+t}{t}$$

$$f(\frac{2+t}{x-1})=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(t)=\frac{t}{\frac{2+t}{t}-1}=\frac{2+t}{2}=t+1$$

بنابراین اگر  $x \neq 0$ ، آن‌گاه  $f(x)=x+1$ .

۷- گزینه ۴ چون  $f(2)-f(4)=\frac{2}{5}$ ، پس ابتدا مقادیر  $f(2)$  و  $f(4)$  را حساب می‌کنیم:

$$2 < 4 \Rightarrow f(2)=k \times 2 + 4 = 2k + 4, \quad 4 \geq 4 \Rightarrow f(4)=\frac{2}{5} \times 4 = \frac{8}{5}$$

بنابراین

$$f(2)-f(4)=\frac{2}{5} \Rightarrow 2k+4-\frac{8}{5}=\frac{2}{5} \Rightarrow 2k=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}-4=-2$$

پس  $2k=-2$ ، یعنی  $k=-1$ .

۸- گزینه ۳ برای اینکه تابع ثابت باشد، باید فقط یک عضو در برد آن

وجود داشته باشد. با توجه به آنکه  $f(1)=2$ ، پس  $\begin{cases} a-b=2 \\ 3a-7b=2 \end{cases}$ . بنابراین  $a=3$  و  $b=1$ . در نتیجه  $a+b=4$ .

۹- گزینه ۲ راه‌حل اول توجه کنید که چون تابع  $f$  همانی است، پس  $f(x-4)=x-4$  بنابراین

$$(2a-7)x+b+1=x-4 \Rightarrow \begin{cases} 2a-7=1 \Rightarrow a=4 \\ b+1=-4 \Rightarrow b=-5 \end{cases}$$

در نتیجه  $f(a+b)=f(-1)=-1$ .

راه‌حل دوم اگر در تساوی داده شده قرار دهیم  $x=\frac{1}{2}$ ، به دست می‌آید

$$f(-\frac{1}{2})=(2a-7)x+b+1 \Rightarrow -\frac{1}{2}=a-\frac{1}{2}+b+1 \Rightarrow a+b=-1$$

۱۰- گزینه ۳ ضابطه تابع  $f$  به صورت زیر است:

$$f(x)=ax^2-3ax+x^2-bx+b=(a+1)x^2-(3a+b)x+b$$

برای اینکه تابع  $f$  خطی باشد، باید ضابطه آن یک چندجمله‌ای درجه اول باشد. پس  $a+1=0 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow f(x)=(3-b)x+b$

$$\text{در نتیجه } f(1)=3-b+b=3$$

۱۱- گزینه ۲ مقادیر  $x=0$  و  $x=2$ ،  $x=3$ ،  $x=0$  را در ضابطه تابع قرار می‌دهیم:

$$f(3)=9a+3b+c, \quad f(2)=4a+2b+c, \quad f(0)=c$$

بنابراین

$$f(3)-2f(2)+2f(0)=9a+3b+c-8a-4b-2c+2c=a-b+c=f(-1)$$

۱۲- گزینه ۴ تساوی را به شکل  $2x+f(x)=4x \times f(x)-12$

$$\text{می‌نویسیم. در نتیجه } (4x-1) \times f(x)=2x+12 \text{، پس } f(x)=\frac{2x+12}{4x-1}$$

۱۳- گزینه ۲ طول رأس سهمی  $f(x)=ax^2+bx+c$ ،  $x=-\frac{b}{2a}$

است. بنابراین طبق معادله داده شده  $x=-\frac{2}{2a}$  طول رأس سهمی است. پس

$$\frac{-2}{2a}=1 \text{ و در نتیجه } a=-1. \text{ مختصات رأس سهمی در معادله آن صدق می‌کند، پس}$$

$$-1=a+2+b \xrightarrow{a=-1} -1=-1+2+b \Rightarrow b=-2$$

بنابراین  $ab=2$ .

۱۴- گزینه ۱ چون سهمی در نقاطی به طول  $-1$  و  $5$  محور طول‌ها را

قطع کرده است، این نقاط عرض یکسان دارند. پس معادله محور تقارن به صورت

$$x=\frac{5-1}{2}=2 \text{ است که نقاط } (5, 0) \text{ و } (-1, 0) \text{ نسبت به آن قرینه یکدیگرند.}$$

۱۵- گزینه ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که  $c=5$ . همچنین با توجه به

$$\text{معادله داده شده، طول رأس سهمی برابر } x=-\frac{b}{2} \text{ است، پس } -\frac{b}{2}=-2$$

بنابراین  $b=4$ ، در نتیجه  $b-c=-1$ .

۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که محور تقارن سهمی مورد نظر خط

$$x=-\frac{b}{2a} \text{ است. چون علامت } a \text{ و } b \text{ فرق می‌کند، پس } -\frac{b}{2a} > 0 \text{ و در نتیجه}$$

محور تقارن از ناحیه‌های اول و چهارم می‌گذرد (گزینه‌های (۱) و (۳)). همچنین،

اگر سهمی از مبدأ مختصات بگذرد، آن‌گاه  $c=0$ ، که درست نیست. بنابراین سهمی مورد نظر می‌تواند به صورت گزینه (۳) باشد.

**۲۲- گزینه ۳ راه حل اول** از  $-4 \leq x \leq 4$  نتیجه می‌گیریم  $-8 \leq -2x \leq 8$ ، پس  $-5 = 3 - 8 \leq 3 - 2x \leq 3 + 8 = 11$  بنابراین برد تابع  $f$  بازه  $[-5, 11]$  است.

**راه حل دوم** چون  $f(x) = -2x + 3$  یک تابع خطی است که ضریب  $x$  در آن منفی است برد آن با توجه به دامنه برابر  $[f(4), f(-4)]$  است که برابر  $[-5, 11]$  می‌شود.

**۲۳- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که  $f(x) = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$  از طرف دیگر، اگر  $x \in [-4, 5]$  آن‌گاه

$$-4 \leq x \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x+1 \leq 6 \Rightarrow 0 \leq (x+1)^2 \leq 36 \Rightarrow -3 \leq (x+1)^2 - 3 \leq 33$$

بنابراین بزرگ‌ترین عضو برد  $f$  برابر ۳۳ است.

**۲۴- گزینه ۴** در مورد گزینه (۴)،  $D_f = D_g = [0, 1]$  و اگر  $x \in [0, 1]$

آن‌گاه  $f(x) = g(x)$ ، بنابراین این دو تابع برابرند. در مورد گزینه‌های دیگر، یا دامنه تابع‌ها برابر نیست، یا  $f(x) \neq g(x)$ .

**گزینه (۱)**  $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ،  $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

**گزینه (۲)**  $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ،  $f(x) = |x|$ ،  $g(x) = x \Rightarrow f(x) \neq g(x)$

**گزینه (۳)**  $D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ،  $D_g = [1, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

**۲۵- گزینه ۱** توجه کنید که  $S = \pi r^2$  و در نتیجه  $r = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}$  بنابراین

$$P = 2\pi r = 2\pi \left( \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}} \right) \Rightarrow P(S) = 2\sqrt{\pi} \sqrt{S} = 2\sqrt{\pi} S$$

**۲۶- گزینه ۱** اگر طول ضلع مربع را  $a$  فرض کنیم، شعاع دایره  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  و

محیط مربع برابر  $4a$  می‌شود. بنابراین

$$P = 4a \Rightarrow a = \frac{P}{4}, \text{ مساحت مربع} = \pi \frac{a^2}{4}, \text{ مساحت دایره} = \frac{P^2}{16}$$

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = a^2 \left( \frac{4-\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{P^2}{16} \left( \frac{4-\pi}{4} \right) = \left( \frac{4-\pi}{64} \right) P^2$$

**۲۷- گزینه ۳** معادله نیم دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \xrightarrow{y \geq 0} y = \sqrt{1 - x^2}$$

بنابراین طول مستطیل  $2x$  و عرض آن  $\sqrt{1 - x^2}$  می‌شود و محیط آن برابر

$$\text{است با } P(x) = 2(2x + \sqrt{1 - x^2}) = 4x + 2\sqrt{1 - x^2}$$

**۲۸- گزینه ۳** توجه کنید که

$$\begin{aligned} (f+g)(2) &= f(2) + g(2) = -1 - 2 = -3 \Rightarrow \frac{(f+g)(2)}{(f-g)(1)} = \frac{-3}{3} = -1 \\ (f-g)(1) &= f(1) - g(1) = 2 - (-1) = 3 \end{aligned}$$

**۲۹- گزینه ۱** توجه کنید که

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x | x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0\} = \{1, 2, 3\}$$

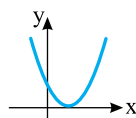
بنابراین

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{6}{-1} = -6, \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{3}{1} = 3$$

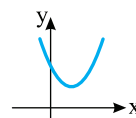
$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{0}{9} = 0$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع  $\frac{f}{g}$  برابر  $-3$  است.

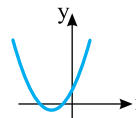
**۱۷- گزینه ۳** نمودار تابع در حالت‌های زیر از ناحیه چهارم نمی‌گذرد:



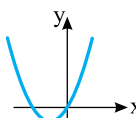
$$\Delta = 0$$



$$\Delta < 0$$



$$\Delta > 0, \frac{c}{a} > 0, -\frac{b}{a} < 0$$



$$\Delta > 0, c = 0, -\frac{b}{a} < 0$$

بنابراین  $\Delta$  را حساب می‌کنیم:  $\Delta = m^2 - 4(4 - m^2) = 5m^2 - 16$ . اکنون توجه کنید که

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 5m^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}} \leq m \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow 5m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m < -\frac{4}{\sqrt{5}} \text{ یا } m > \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow 4 - m^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq m \leq 2 \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -m < 0 \Rightarrow m > 0 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک گیری از بازه‌های به دست آمده}} \frac{4}{\sqrt{5}} < m \leq 2$$

اجتماع محدوده‌های به دست آمده در همه حالت‌ها برابر است با

$$-\frac{4}{\sqrt{5}} \leq m \leq 2$$

**۱۸- گزینه ۲** محیط شکل برابر است با

$$4x + 4y = 40 \Rightarrow y = 10 - x$$

مساحت شکل برابر است با

$$S = 2xy + xy = 3xy = 3x(10 - x) = -3x^2 + 30x$$

بیشترین مقدار این عبارت درجه دوم برابر  $-\frac{\Delta}{4a}$  است. بنابراین

$$S_{\max} = -\frac{900}{4(-3)} = 75$$

**۱۹- گزینه ۳** اعدادی که جواب معادله  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشند، در دامنه

تابع  $f$  قرار ندارند. با توجه به معادله مجموع این اعداد برابر  $S = -\frac{b}{a} = 3$  است.

**۲۰- گزینه ۴** اگر دامنه این تابع  $\mathbb{R}$  باشد، باید مخرج  $f(x)$  به ازای

تمام مقادیر حقیقی  $x$  مخالف صفر باشد، پس

$$x^2 + kx + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \Delta = k^2 - 4 < 0$$

$$k^2 < 4 \Rightarrow |k| < 2 \Rightarrow -2 < k < 2$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینه (۴) درست است.

**۲۱- گزینه ۲** توجه کنید که

$$D_f = \{x | 9 - x^2 \geq 0, x^2 - 1 > 0\}$$

$$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

از اشتراک ناحیه‌های فوق معلوم می‌شود که  $D_f = [-3, -1) \cup (1, 3]$  پس

عددهای صحیح  $\pm 3$  و  $\pm 2$  در دامنه تابع هستند.

۳۰- گزینه ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 3x + 2) - (x^2 + 2x + 1) = x + 1$$

بنابراین  $(f-g)(x-1) = x - 1 + 1 = x$ .

راه‌حل دوم چون  $f(1) = 6$  و  $g(1) = 4$ ، پس  $(f-g)(1) = 6 - 4 = 2$ . اکنون اگر در عبارت  $(f-g)(x-1)$  به جای  $x$  قرار دهیم ۲،  $(f-g)(1)$  به دست می‌آید که برابر ۲ است. تنها در عبارت گزینه (۱)، با قرار دادن  $x = 2$  حاصل ۲ می‌شود.

۳۱- گزینه ۲ راه‌حل اول دامنه تابع  $f$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} 8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8 \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{cases} \Rightarrow 3 < x \leq 8 \Rightarrow D_f = (3, 8]$$

دامنه تابع  $g$  به صورت زیر به دست می‌آید

$x$	$-\infty$	$3$	$5$	$+\infty$
$\frac{x-3}{5-x}$		-	+	-

$\Rightarrow D_g = [3, 5)$

بنابراین دامنه تابع  $f \times g$  به صورت زیر است

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = (3, 8] \cap [3, 5) = (3, 5)$$

راه‌حل دوم با توجه به گزینه‌ها امتحان می‌کنیم که آیا عدد ۶ در دامنه تابع  $f \times g$  قرار دارد یا نه. چون  $x = 6$  عبارت زیر رادیکال در تابع  $g$  را منفی می‌کند، پس  $x = 6$  در دامنه تابع  $g$  نیست و در نتیجه در دامنه  $f \times g$  هم نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نمی‌توانند جواب باشند.

۳۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 2x-1-(x-1) & x \geq 1 \\ 3x+1-(-x+1) & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$$

۳۳- گزینه ۳ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(gof)(1) = g(f(1)) = g(-1) = 2$$

$$(gof)(2) = g(f(2)) = g(-1) = 2$$

$$(gof)(-1) = g(f(-1)) = g(3) = 2$$

$$(gof)(3) = g(f(3)) = g(-2) = 4$$

بنابراین  $gof = \{(1, 2), (2, 2), (-1, 2), (3, 4)\}$

۳۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $(fof)(3) = f(f(3))$ . از طرف دیگر،

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13, \quad f(f(3)) = f(13) = \frac{13-1}{2} = 6$$

بنابراین  $(fof)(3) = 6$

۳۵- گزینه ۳ ابتدا  $(fog)(a)$  و  $(gof)(a)$  را به دست می‌آوریم

$$(fog)(a) = f(g(a)) = f(3a-2) = 2(3a-2) + 3 = 6a-1$$

$$(gof)(a) = g(f(a)) = g(2a+3) = 3(2a+3) - 2 = 6a+7$$

بنابراین معادله زیر به دست می‌آید

$$6a-1+6a+7=2a \Rightarrow 10a = -6 \Rightarrow a = -\frac{3}{5}$$

۳۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2x) = a(x^2 + 2x) + 1 = ax^2 + 2ax + 1$$

بنابراین باید مجموعه جواب‌های معادله  $ax^2 + 2ax + 1 = 2$  دو عضوی باشد.

یعنی باید  $\Delta$  معادله  $ax^2 + 2ax - 1 = 0$  مثبت باشد:

$$\Delta = (2a)^2 - 4a(-1) = 4a^2 + 4a > 0 \Rightarrow 4a(a+1) > 0 \Rightarrow a > 0 \text{ یا } a < -1$$

۳۷- گزینه ۱ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(fog)(-3) = f(g(-3)) = f(1) = \sqrt{3}$$

$$(fog)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 2$$

$$(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = \sqrt{3}$$

$$(fog)(1) = f(g(1)) = f(3) \text{ تعریف نشده}$$

بنابراین  $fog = \{(-3, \sqrt{3}), (-2, 2), (-1, \sqrt{3})\}$

۳۸- گزینه ۲ دامنه تابع  $fog$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{0 \leq x \leq 2, -1 \leq 5-2x \leq 3\}$$

از نامعادله  $-1 \leq 5-2x \leq 3$  نتیجه می‌شود  $-2 \leq -2x \leq -6$  پس  $1 \leq x \leq 3$ .

بنابراین  $D_{fog} = \{0 \leq x \leq 2, 1 \leq x \leq 3\} = [1, 2]$

۳۹- گزینه ۳ دامنه تابع‌های  $f$  و  $g$  به ترتیب  $D_f = [1, +\infty)$  و

$D_g = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  است. بنابراین

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \mid x \geq 1, -\sqrt{3} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{3}\}$$

از نامعادله  $-\sqrt{3} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{3}$  نتیجه می‌شود  $x-1 \leq 3$  پس  $x \leq 4$ .

بنابراین  $D_{gof} = \{x \mid x \geq 1, x \leq 4\} = [1, 4]$

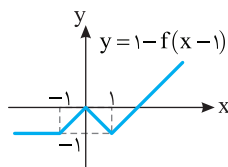
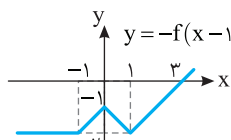
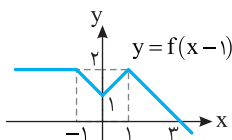
۴۰- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست انتقال

می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = f(x-1)$  به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را

نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -f(x-1)$  به دست بیاید.

در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع

$y = 1 - f(x-1)$  به دست بیاید.

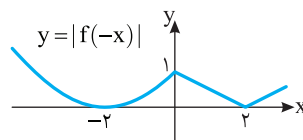
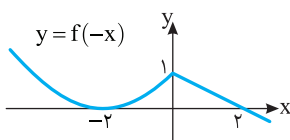


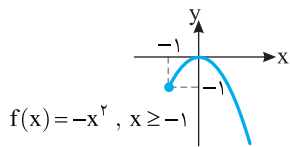
۴۱- گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع  $y = f(-x)$  را رسم می‌کنیم. برای این کار،

قرینه نمودار  $f$  را نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم نمودار تابع

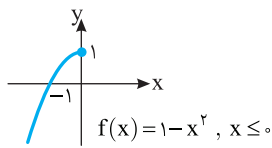
$y = |f(-x)|$ ، قرینه قسمتی از نمودار تابع  $y = f(-x)$  را که زیر محور  $x$  است

نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم.

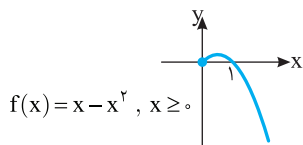




گزینه (۲)



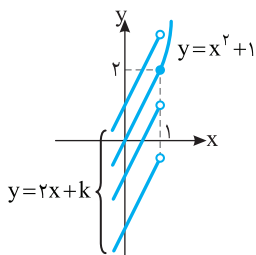
گزینه (۳)



گزینه (۴)

۴۸- گزینه (۴) راه‌حل اول نمودار تابع به ازای مقادیر مختلف  $k$  به

شکل زیر است



واضح است که بیشترین مقدار تابع  $y = 2x + k$  به ازای  $x < 1$  نباید از ۲

بیشتر باشد، پس

$$2 + k \leq 2 \Rightarrow k \leq 0$$

راه‌حل دوم اگر  $x \geq 1$ ، آن‌گاه تابع  $g(x) = x^2 + 1$  یک‌به‌یک است و

$R_g = [2, +\infty)$  و اگر  $x < 1$ ، آن‌گاه تابع  $h(x) = 2x + k$  یک‌به‌یک است و

$R_h = (-\infty, 2 + k)$ . در نتیجه برای اینکه تابع  $f$  یک‌به‌یک باشد باید

$$R_g \cap R_h = \emptyset$$

$$2 + k \leq 2 \Rightarrow k \leq 0$$

۴۹- گزینه (۳) تابع گزینه (۱) اکیداً نزولی نیست، زیرا  $-3 < -1$ ، اما

$f(-3) < f(-1)$ . تابع گزینه (۲) اکیداً نزولی نیست، زیرا  $0 < 1$ ، اما

$f(0) = f(1)$ . تابع گزینه (۳) اکیداً نزولی است، زیرا  $-3 < -1 < 1$  و

$f(-3) > f(-1) > f(1)$ . تابع گزینه (۴) اکیداً نزولی نیست، زیرا  $-2 < -1$ ،

$$f(-2) = f(-1)$$
 اما

۵۰- گزینه (۳) چون تابع  $f$  نزولی است و  $1 < 2 < 3$ ، پس

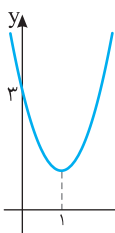
$$f(1) \geq f(2) \geq f(3) \Rightarrow 2a + 1 \geq a - 2 \geq 2 - a$$

اکنون توجه کنید که

$$2a + 1 \geq a - 2 \Rightarrow a \geq -3 \quad (1)$$

$$a - 2 \geq 2 - a \Rightarrow a \geq 2 \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود  $a \geq 2$ .



۵۱- گزینه (۲) طول رأس سهمی  $y = 2x^2 - 4x + 3$

برابر است با  $-\frac{b}{2a} = 1$ . از روی نمودار تابع  $f$  معلوم است

که این تابع روی بازه  $[1, +\infty)$  و هر زیر مجموعه آن اکیداً

صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازه  $(1, 2)$

زیرمجموعه بازه  $[1, +\infty)$  است.

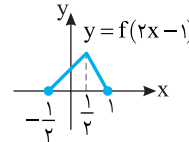
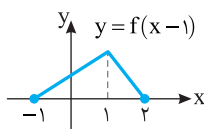
۴۲- گزینه (۲) برای رسم نمودار تابع  $y = f(2x - 1)$  کافی است ابتدا

نمودار تابع  $y = f(x)$  را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع

$y = f(x - 1)$  رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم

می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(2x - 1)$  به دست آید. توجه کنید که با این کار

نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود.



۴۳- گزینه (۲) اگر نمودار تابع  $g(x) = f(2x) - 1$  را یک واحد به سمت

راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(2(x - 1)) - 1$  به دست می‌آید. اگر طول

نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع  $y = f(2(2x - 1)) - 1 = f(4x - 2) - 1$

به دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع

$y = 2(f(4x - 2) - 1)$  به دست می‌آید. پس ضابطه تابعی که نمودار آن

به دست آمده به صورت  $y = 2f(4x - 2) - 2$  است.

۴۴- گزینه (۱) ابتدا نمودار تابع  $y = |x|$  را رسم می‌کنیم و آن را دو

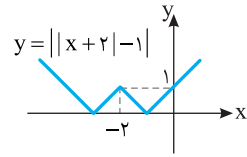
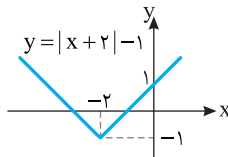
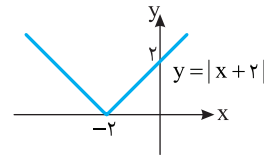
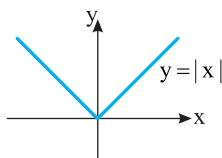
واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = |x + 2|$  به دست آید. این

نمودار را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = |x + 2| - 1$  رسم

شود. اکنون قسمتی از این نمودار را که زیر محور  $x$  است نسبت به این محور

قرینه می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع

$y = ||x + 2| - 1|$  رسم شود.



۴۵- گزینه (۳) در تابع  $\{(1, 3), (2, 4), (5, 7), (6, 1)\}$  هر مؤلفه دوم

متناظر دقیقاً یک مؤلفه اول است. یعنی هیچ دو زوج مرتبی مؤلفه دوم یکسان

ندارند، پس این تابع یک‌به‌یک است.

۴۶- گزینه (۲) چون مؤلفه دوم زوج مرتب‌های  $(a, 1)$  و  $(4 - a, 1)$

یکسان هستند، پس باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشند.

$$4 - a = a \Rightarrow a = 2$$

به همین ترتیب باید مؤلفه اول دو زوج مرتب  $(1, 3)$  و  $(1 + b, 3)$  برابر باشند،

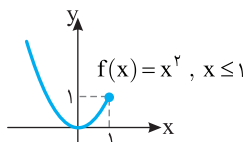
$$1 = 1 + b \Rightarrow b = 0$$

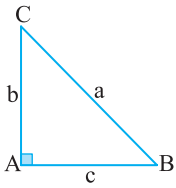
$$a + b = 11$$

۴۷- گزینه (۳) با توجه به نمودار تابع‌های داده شده، واضح است که تابع

$f(x) = 1 - x^2, x \leq 0$  یک‌به‌یک است.

گزینه (۱)





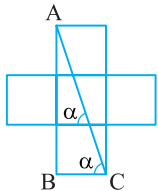
۵۹- گزینه ۲ با توجه به شکل،

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{6}}{a} a$$

اکنون طبق قضیه فیثاغورس،

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{a}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 25 + \frac{24}{a^2}$$

$$\frac{25}{49} a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$



۶۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید

که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،  
 $\alpha = \hat{ACB}$  در نتیجه،

$$\tan \alpha = \tan \hat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{1} = 3$$

۶۱- گزینه ۲ ابتدا شکل را به

صورت مقابل کامل می‌کنیم. اکنون

توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در

مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$$

در نتیجه،  $\Delta ABC: \sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

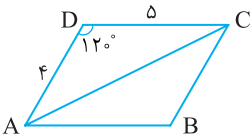
۶۲- گزینه ۴ صورت کسر برابر است با

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

بنابراین  $A = 0$ .

۶۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= 2S_{ADC} \\ &= 2\left(\frac{1}{2} DC \times AD \times \sin \hat{D}\right) \\ &= 5 \times 4 \times \sin 120^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$



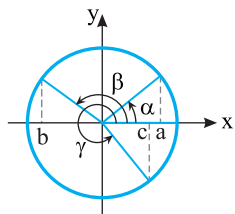
۶۴- گزینه ۲ اگر  $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$

در ناحیه سوم قرار دارد.

۶۵- گزینه ۳ از روی شکل

مقابل معلوم می‌شود که  $b < 0$  و  $a > c$ .

بنابراین  $a > c > b$ .



۶۶- گزینه ۳ با توجه به  $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ ، مشخص است که

مقادیر  $\sin \alpha$  و  $\cos \alpha$  هم‌علامت هستند. با توجه به  $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ ،

مشخص است که مقادیر  $\cos \alpha$  و  $\cot \alpha$  مختلف‌العلامت هستند. بنابراین

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ناحیه سوم قرار دارد. در این ناحیه،

$$\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0, \cot \alpha > 0$$

۶۷- گزینه ۱ چون  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ، پس  $0 \leq \sin \alpha \leq 1$  و در نتیجه

$$0 \leq \frac{m}{2} - 1 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{m}{2} \leq 2 \Rightarrow 2 \leq m \leq 4$$

۵۲- گزینه ۴ اگر نمودار تابع  $y=f(x)$  را یک واحد به سمت راست

انتقال دهیم، نمودار تابع  $y=f(x-1)$  به دست می‌آید. بنابراین، اگر نمودار

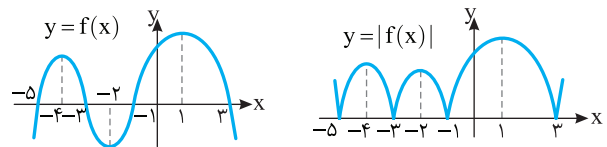
تابع  $y=f(x-1)$  را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع

$y=f(x)$  به دست می‌آید. اکنون اگر قرینه قسمتهایی از این نمودار را که زیر

محور X است، نسبت به محور X رسم کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور X

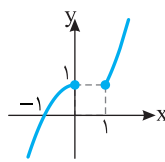
است حذف کنیم، نمودار تابع  $y=|f(x)|$  به دست می‌آید. از روی این نمودار

معلوم است که تابع  $y=|f(x)|$  روی بازه  $(-2, -1)$  اکیداً نزولی است.



۵۳- گزینه ۱ با توجه به نمودار، تابع f

صعودی است.



۵۴- گزینه ۳ برای اینکه تابعی وارون‌پذیر باشد، باید یک‌به‌یک باشد.

تابع گزینه (۱) یک‌به‌یک نیست، زیرا  $f(1)=f(3)=2$ . تابع گزینه (۲)

یک‌به‌یک نیست، زیرا  $f(2)=f(5)=3$ . تابع گزینه (۳) یک‌به‌یک است، زیرا

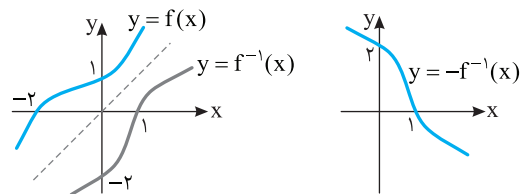
$f(1)=-1, f(2)=-2, f(3)=-4, f(4)=-5$ ، بنابراین مقادیر تابع f

متمايزند. تابع گزینه (۴) هم یک‌به‌یک نیست، زیرا  $f(1)=f(3)=0$ .

۵۵- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع  $f^{-1}$  را رسم می‌کنیم. برای این کار باید

قرینه نمودار f را نسبت به خط  $y=x$  رسم کنیم. سپس نمودار تابع  $f^{-1}$  را رسم

می‌کنیم. برای این کار باید قرینه نمودار تابع  $f^{-1}$  را نسبت به محور X رسم کنیم.



۵۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1) = 4$$

$$(g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(4) = 3$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۵۷- گزینه ۲ توجه کنید که  $f(1)=2$ ، پس  $f^{-1}(2)=1$ . به این

ترتیب،  $f(1)+f^{-1}(2)=3$ .

۵۸- گزینه ۱ راه‌حل اول ابتدا ضابطه تابع f را به صورت

$$y = (x-2)^2 - 4$$

$$(x-2)^2 = y+4 \Rightarrow |x-2| = \sqrt{y+4} \Rightarrow x < 2 \Rightarrow$$

$$2-x = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y+4} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+4}$$

راه‌حل دوم چون نمودار تابع f از نقطه  $(-3, 21)$  عبور می‌کند، پس نمودار تابع

$f^{-1}$  از نقطه  $(21, -3)$  عبور می‌کند. اکنون گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱)  $f^{-1}(21) = 2 - \sqrt{25} = -3$

گزینه (۲)  $f^{-1}(21) = -2 + \sqrt{25} = 3$

گزینه (۳)  $f^{-1}(21) = 2 - \sqrt{17}$

گزینه (۴)  $f^{-1}(21) = 2 + \sqrt{17}$



**راه حل دوم** اگر در عبارت داده شده به جای  $\theta$  مقدار  $30^\circ$  را قرار دهیم، مقدار

عبارت برابر است با  $3 = 9 - 4 - 9 = 16 - 4 - 9$ . اگر در گزینه‌ها به جای  $\theta$

$$\frac{1}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{16}$$

مقدار  $30^\circ$  را قرار دهیم، فقط  $\theta$  برابر ۳ می‌شود. تنها گزینه (۴) می‌تواند درست باشد.

**گزینه ۷۵ - ۳** طرفین تساوی  $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$  را به توان دو

می‌رسانیم:  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha = 9$

چون  $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ ، پس

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = 9 \Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$$

**گزینه ۷۶ - ۱** دو طرف تساوی داده شده را بر  $\sin x$  تقسیم می‌کنیم:

$$3 + \frac{2 \cos x}{\sin x} = \frac{3}{\sin x} \Rightarrow 3 + 2 \cot x = \frac{3}{\sin x}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$9 + 12 \cot x + 4 \cot^2 x = \frac{9}{\sin^2 x} = 9(1 + \cot^2 x)$$

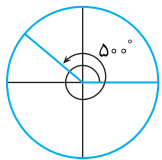
$$9 + 12 \cot x + 4 \cot^2 x = 9 + 9 \cot^2 x \Rightarrow \Delta \cot^2 x - 12 \cot x = 0$$

$$\cot x = 0, \cot x = \frac{12}{5}$$

چون  $\cos x \neq 0$ ، پس  $\cot x \neq 0$  و در نتیجه  $\cot x = \frac{12}{5}$

**گزینه ۷۷ - ۴** در تساوی  $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$  قرار می‌دهیم  $D = 75^\circ$ :

$$\frac{75^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{12}$$



**گزینه ۷۸ - ۲** **راه حل اول**  $50^\circ$  را می‌توان

۵ تا  $90^\circ$  به علاوه  $50^\circ$  در نظر گرفت. ۵ تا  $90^\circ$

یعنی ۵ تا ربع دایره، پس انتهای کمان روبه‌رو به

زاویه  $50^\circ$  در ناحیه دوم قرار دارد.

**راه حل دوم**  $50^\circ = 36^\circ + 14^\circ$  و  $90^\circ \leq 14^\circ \leq 180^\circ$ ، پس انتهای کمان

روبه‌رو به زاویه مرکزی  $50^\circ$  در ناحیه دوم قرار دارد.

**گزینه ۷۹ - ۳** ابتدا اندازه زاویه مرکزی AOB را برحسب رادیان

حساب می‌کنیم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{2^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{9}$$

طول مسیر ماهواره برابر طول کمان AB است که برابر است با

$$l = r \times \theta \Rightarrow \widehat{AB} = 36000 \times \frac{\pi}{9} = 4000\pi \text{ کیلومتر}$$

**گزینه ۸۰ - ۱** ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

بنابراین

$$A = \frac{-2 \sin \alpha - 4 \sin \alpha}{-3 \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{-6 \sin \alpha}{-2 \cos \alpha} = 3 \tan \alpha$$

**گزینه ۶۸ - ۴** می‌دانیم  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، بنابراین  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ ،

پس  $0 \leq 3 \sin^2 x \leq 3$  و در نتیجه  $2 \leq 2 + 3 \sin^2 x \leq 5$ . بنابراین کمترین مقدار عبارت ۲ و بیشترین مقدار آن ۵ است، که حاصل ضرب آن‌ها ۱۰ می‌شود.

**گزینه ۶۹ - ۱** با توجه به اینکه محور طول‌ها با خط مورد نظر زاویه

مثلثاتی  $30^\circ$  تشکیل می‌دهد، شیب خط برابر  $\tan 30^\circ$  یا همان  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  است.

پس معادله آن به صورت  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$  است و چون خط از نقطه  $(6, \sqrt{3})$

می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کنند:

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 6 + b \Rightarrow b = -\sqrt{3}$$

پس معادله خط  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$  یا همان  $x - \sqrt{3}y - 3 = 0$  است.

**گزینه ۷۰ - ۱** توجه کنید که

$$\frac{1 - \tan x}{\tan x} = 2 \Rightarrow 1 - \tan x = 2 \tan x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{3}$$

بنابراین  $\cot x = \frac{1}{\tan x} = 3$ . در نتیجه  $\frac{\cot x}{\cot x - 1} = \frac{3}{3 - 1} = \frac{3}{2}$

**گزینه ۷۱ - ۲** با توجه به رابطه  $\tan \alpha \cot \alpha = 1$  می‌توان نوشت

$$\left(\frac{1}{2m-1}\right)(m+2) = 1 \Rightarrow 2m-1 = m+2 \Rightarrow m = 3$$

بنابراین  $\tan \alpha = \frac{1}{5}$  و  $\cot \alpha = 5$  در نتیجه

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{1}{25} + 25 = \frac{626}{25}$$

**گزینه ۷۲ - ۴** با توجه به رابطه  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  می‌توان نوشت

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

با توجه به اینکه  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، مقدار  $\cos \alpha$  باید منفی باشد، پس

$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ . با توجه به رابطه  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ، به دست می‌آید

$$\tan \alpha = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \tan \alpha - \cos \alpha = -\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{1}{20}$$

**گزینه ۷۳ - ۱** با استفاده از اتحادهای  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$A = \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cot^2 x}{\sin^2 x} = \tan^2 x \cos^2 x + \cot^2 x \sin^2 x$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \times \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

**گزینه ۷۴ - ۴** **راه حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = 0$$

## ۸۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\alpha) &= -\cos \alpha, & \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, & \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) &= \sin \alpha\end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{-\cos \alpha - \cos \alpha}{-\sin \alpha - \sin \alpha} = \frac{-2 \cos \alpha}{-2 \sin \alpha} = \cot \alpha$$

## ۸۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sin 135^\circ &= \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 120^\circ &= \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\sin 135^\circ - \cos 120^\circ}{\sin 135^\circ + \cos 120^\circ} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

## ۸۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sin \frac{7\pi}{6} &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \tan \frac{5\pi}{4} &= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\ \cot \frac{7\pi}{4} &= \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1 \\ \cos \frac{5\pi}{3} &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

بنابراین  $A = -\frac{1}{2} \times 1 - 1 \times \frac{1}{2} = -1$ 

## ۸۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\lambda} + \frac{7\pi}{\lambda} &= \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{\lambda} = -\cos \frac{7\pi}{\lambda} \\ \frac{2\pi}{\lambda} + \frac{5\pi}{\lambda} &= \pi \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{\lambda} = -\cos \frac{5\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\cos^3 \frac{\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{2\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{5\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{7\pi}{\lambda} \\ = -\cos^3 \frac{7\pi}{\lambda} - \cos^3 \frac{5\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{5\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{7\pi}{\lambda} = 0\end{aligned}$$

۸۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $\sin \alpha$  مقداری منفی است. پس

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{1}{3} = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{3}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (غ.ق.ق.)}\end{aligned}$$

۸۶- گزینه ۲ توجه کنید که  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ 

$$\begin{aligned}\frac{1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x} &= \frac{\cos 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\cos x} \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = 2 \sin x\end{aligned}$$

## ۸۷- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} &= \frac{\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ} \\ &= \frac{1}{(\sin 15^\circ \cos 15^\circ)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 30^\circ\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16\end{aligned}$$

۸۸- گزینه ۱ با توجه به اینکه  $\frac{3\pi}{8}$  رادیان، نصف  $\frac{3\pi}{4}$  رادیان است،در تساوی  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  قرار می‌دهیم  $\alpha = \frac{3\pi}{8}$  و در نتیجه

$$\begin{aligned}\cos\left(2 \times \frac{3\pi}{8}\right) &= 2 \cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 \\ \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) &= 2 \cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 \\ 2 \cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ \cos \frac{3\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

## ۸۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned}3 \cos^2 105^\circ + \sin^2 105^\circ &= 3 \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ \\ &= 2 \sin^2 15^\circ + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 2 \sin^2 15^\circ + 1 \\ &= 1 - \cos(2 \times 15^\circ) + 1 = 2 - \cos 30^\circ = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

## ۹۰- گزینه ۴ راه‌حل اول می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\frac{\sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ} - \frac{\cos 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ} &= \frac{\sin^2 22/5^\circ - \cos^2 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ \times \cos 22/5^\circ} \\ &= \frac{-\cos(2 \times 22/5^\circ)}{\frac{1}{2} \sin(2 \times 22/5^\circ)} = \frac{-\cos 45^\circ}{\frac{1}{2} \sin 45^\circ} = -2\end{aligned}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم  $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ . بنابراین

$$\begin{aligned}\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ &= -(\cot 22/5^\circ - \tan 22/5^\circ) \\ &= -2 \cot 45^\circ = -2\end{aligned}$$

## ۹۱- گزینه ۲ راه‌حل اول عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{\sin 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} &= \frac{\sin 15^\circ}{1 + \frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}} = \frac{\sin 15^\circ \cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

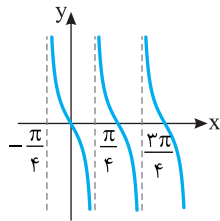
پس  $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$  می‌دانیم

$$\frac{\tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$$

۹۶- گزینه ۱ تابع  $f(x) = -\tan 2x$  روی بازه‌های به صورت

$(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$  که  $k \in \mathbb{Z}$  اکیداً نزولی است. بنابراین تابع  $f$  روی بازه

$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



۹۷- گزینه ۲ توجه کنید که تابع تنازنت روی بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  اکیداً

صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{4}) < \tan x < \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \tan x < 1$$

$$-1 < \frac{2m-3}{5} < 1 \Rightarrow -1 < m < 4$$

۹۸- گزینه ۲ معادله را به صورت  $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x$  می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  را مشخص می‌کنیم:

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{17\pi}{8}$

(غ.ق.ق.)

بنابراین معادله دو جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد.

۹۹- گزینه ۱ توجه کنید که  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ . بنابراین معادله مورد نظر

می‌شود

$$\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{6} - 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = -k\pi - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۱۰۰- گزینه ۴ جایی که نمودار تابع  $f$  خط  $y = -1$  را قطع می‌کند.

$f(x) = -1$  است، پس

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = -k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$  عبارت‌اند از

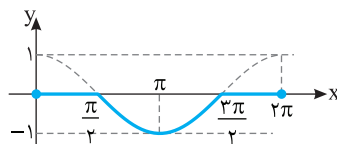
k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$

بنابراین نمودار تابع خط  $y = -1$  را در پنج نقطه از بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$  قطع می‌کند.

۹۲- گزینه ۲ توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos x}{2} & \cos x \geq 0 \\ \frac{\cos x + \cos x}{2} & \cos x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ \cos x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل



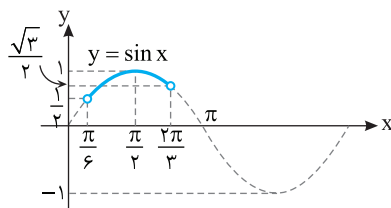
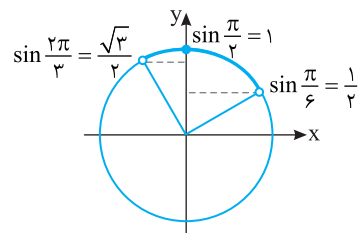
روبه‌رو رسم می‌شود:

۹۳- گزینه ۲ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر

$$\frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \text{، آن‌گاه } \frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \Rightarrow 2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow 3 < m \leq 5$$

بنابراین  $m$  می‌تواند مقادیر صحیح ۴ و ۵ باشد.



۹۴- گزینه ۳ می‌دانیم دوره تناوب توابع  $y = a \sin(bx+c)$  و

$y = a \cos(bx+c)$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است. پس  $T_f = \frac{2\pi}{2} = \pi$

بنابراین  $T_g = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|a|}$

$$T_f = 2T_g \Rightarrow \pi = 2 \cdot \frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

۹۵- گزینه ۱ چون  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ، پس

$$f(x) = \sin^2 x + 12 = \frac{1 - \cos 2x}{2} + 12 = \frac{25 - \cos 2x}{2}$$

بنابراین دوره تناوب تابع  $f$  برابر است با  $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$ .

نکته دوره تناوب توابع  $y = a \sin^2(bx+c)$  و  $y = a \cos^2(bx+c)$  برابر

$T = \frac{\pi}{|b|}$  است.

۱۰۵- گزینه ۴ اگر  $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه  $f(x) \rightarrow (-1)^-$ . بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-1)^-} f(t) = 2$$

۱۰۶- گزینه ۴ مقادیر حد راست و حد چپ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2x) = 8 + 4 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x) = 4 - 6 = -2$$

بنابراین مقدار حد راست تابع در  $x=2$ ،  $12$  واحد از مقدار حد چپ آن در این نقطه بیشتر است.

۱۰۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+a}{2x-3} = \frac{3 \times 2 + a}{2 \times 2 - 3} = 6 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = 2^2 + a(2) + b = 4 + 2a + b$$

چون  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ ، پس هر یک از حدهای بالا برابر با  $4$  است:

$$\begin{cases} 6+a=4 \\ 4+2a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+b=2$$

۱۰۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضایای حد.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

وجود دارد. از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1 - xf(x)) = 6 \Rightarrow (-1)^2 - (-1) + 1 - (-1) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$$

۱۰۹- گزینه ۲ اگر  $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه  $\sqrt{2x} \rightarrow 2\sqrt{2}^+$ . در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x\sqrt{2x}) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x) = 4 \text{ پس } [\sqrt{2x}] = 2$$

۱۱۰- گزینه ۲ عامل  $x-3$  را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم،

سپس حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۱۱۱- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت  $\frac{0}{0}$  است. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 64} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x^2 + 4x + 16)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x^2 + 4x + 16} = \frac{4+4}{4^2 + 4 \times 4 + 16} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

۱۱۲- گزینه ۱ وقتی  $x$  از سمت چپ به  $1$  نزدیک می‌شود،  $3x-4$  از

سمت چپ به  $-1$  نزدیک می‌شود، پس  $3x-4 = -2$ . از طرف دیگر وقتی

$x$  از سمت چپ به  $1$  نزدیک می‌شود،  $-(x-1) = -|x-1|$ . بنابراین حد مورد

نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{3x-4}{3x-4} + \frac{|x-1|}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -2 + \frac{-(x-1)}{x-1} \right) = -2 - 1 = -3$$

۱۰۱- گزینه ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

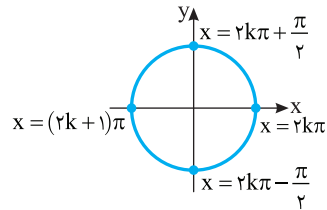
$$\sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x (\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نقاط انتهایی کمان‌های نظیر جواب‌ها را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله را می‌توان به صورت  $x = \frac{k\pi}{2}$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  نوشت.



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow -\sin x \cos^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌ها به صورت مضارب زوج و مضارب فرد  $\frac{\pi}{2}$  هستند که می‌توان

آنها را به صورت جواب کلی  $x = \frac{k\pi}{2}$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  نوشت.

۱۰۲- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x = 4 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

$$(\cos x - 2)(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 2, \cos x = \frac{1}{2}$$

معادله  $\cos x = 2$  جواب ندارد، پس  $\cos x = \frac{1}{2}$ . جواب‌های معادله که در

بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند،  $\frac{\pi}{3}$  و  $2\pi - \frac{\pi}{3}$  هستند که مجموع آنها برابر  $2\pi$  است.

۱۰۳- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2 \sin x \cos^2 x = \sin x$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x \cos 2x = 0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  عبارت‌اند از  $\frac{\pi}{4}$ ،  $\frac{3\pi}{4}$ ،  $\frac{5\pi}{4}$  و  $\frac{7\pi}{4}$ .

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۱۰۴- گزینه ۱ در یک همسایگی محذوف  $1$ ، مقادیر  $f$  منفی هستند،

بنابراین در این همسایگی  $|f(x)| = -f(x)$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{-f(x)} = -1$$

**۱۱۹- گزینه ۱** توجه کنید که وقتی  $x$  از سمت چپ به  $-۲$  نزدیک می‌شود،  $x+۲$  از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$$

**۱۲۰- گزینه ۴**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[-x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[-x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

**۱۲۱- گزینه ۱** اگر  $x \rightarrow ۳$ ، آن‌گاه  $(x-۳)^۲ \rightarrow 0^+$ ، بنابراین برای اینکه حاصل حد  $-\infty$  شود، باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$$\lim_{x \rightarrow ۳} (ax^۳ + ۳) < 0 \Rightarrow ۲۷a + ۳ < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{9}$$

**۱۲۲- گزینه ۴** برای اینکه نمودار تابع شبیه شکل مورد نظر شود، وقتی  $x \rightarrow ۲^-$  و  $x \rightarrow ۲^+$ ، باید  $f(x) \rightarrow -\infty$  فقط در گزینه (۴).

$$\lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = -\infty$$

**۱۲۳- گزینه ۳** توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow ۱^+} x^۲ = ۱$  و اگر  $x \rightarrow ۱^+$ ، مقادیر

$x-۱$  مثبت‌اند و به صفر میل می‌کنند. بنابراین  $\lim_{x \rightarrow ۱^+} \frac{x^۲}{x-۱} = +\infty$ .

همین‌طور  $\lim_{x \rightarrow ۱^-} x^۲ = ۱$  و اگر  $x \rightarrow ۱^-$ ، مقادیر  $x-۱$  منفی‌اند و به صفر

میل می‌کنند. بنابراین  $\lim_{x \rightarrow ۱^-} \frac{x^۲}{x-۱} = -\infty$ . به این ترتیب، نمودار تابع  $f$  در همسایگی نقطه  $x=۱$  به شکل گزینه (۳) است.

**۱۲۴- گزینه ۲** توجه کنید که اگر  $x \rightarrow ۱^-$ ، آن‌گاه  $\frac{1}{x} \rightarrow ۱^+$  پس

$$t = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow t \rightarrow ۲^+$$

$$\lim_{x \rightarrow ۱^-} f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow ۲^+} f(t) = +\infty$$

**۱۲۵- گزینه ۲** از روی شکل معلوم است که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ۲$ .

**۱۲۶- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow ۱^+} f(x) = +\infty$ . بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow ۱^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow ۱^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = ۲$$

**۱۲۷- گزینه ۴** بزرگ‌ترین جمله  $(x+۱)^۲$  برابر  $x^۲$  است. همچنین

بزرگ‌ترین جمله  $(x+۱)^۳$  و  $(x-۱)^۳$  برابر  $x^۳$  است. پس

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۲x(x+۱)^۲}{(x+۱)^۳ + (x-۱)^۳} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۲x^۳}{۲x^۳} = ۱$$

**۱۲۸- گزینه ۴** توجه کنید که وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر  $x+۱$  و  $x-۳$

به ترتیب منفی و مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a|x+۱| + ۳x-۱}{|۳-x| + ax-۱۵} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a(-x-۱) + ۳x-۱}{۳-x+ax-۱۵}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-a+۳)x - a - ۱}{(a-۱)x - ۱۲} = \frac{۳-a}{a-۱}$$

در نتیجه  $\frac{۳-a}{a-۱} = ۲$ ، بنابراین  $a = \frac{۳}{۲}$ .

**۱۱۳- گزینه ۲** حد مورد نظر به صورت  $\frac{0}{0}$  است. توجه کنید که بنا بر

اتحاد مزدوج،  $x-۹ = (\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۳)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow ۹} \frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹} &= \lim_{x \rightarrow ۹} \frac{\sqrt{x}-۳}{(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۳)} = \lim_{x \rightarrow ۹} \frac{1}{\sqrt{x}+۳} \\ &= \frac{1}{\sqrt{۹}+۳} = \frac{1}{۳+۳} = \frac{1}{۶} \end{aligned}$$

**۱۱۴- گزینه ۱** با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow ۷} \frac{\sqrt[۳]{x+۱}-۲}{x^۲-۴۹} &= \lim_{x \rightarrow ۷} \left( \frac{\sqrt[۳]{x+۱}-۲}{x^۲-۴۹} \times \frac{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + ۲\sqrt[۳]{x+۱} + ۴}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + ۲\sqrt[۳]{x+۱} + ۴} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow ۷} \left( \frac{x+۱-۸}{(x-۷)(x+۷)} \times \frac{1}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + ۲\sqrt[۳]{x+۱} + ۴} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow ۷} \frac{1}{(x+۷)(\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + ۲\sqrt[۳]{x+۱} + ۴)} = \frac{1}{۱۴(۴+۴+۴)} = \frac{1}{۱۶۸} \end{aligned}$$

**۱۱۵- گزینه ۱** توجه کنید که  $f(۲) = ۱$  و

$$\lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^+} \left( x - \frac{x-۲}{x-۲} \right) = ۲ - ۱ = ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} \left( x + \frac{x-۲}{x-۲} \right) = ۲ + ۱ = ۳$$

بنابراین تابع در  $x=۲$  فقط پیوستگی راست دارد.

**۱۱۶- گزینه ۴** چون تابع در نقطه ۳ پیوسته است، حدهای چپ و راست

تابع در این نقطه با هم برابرند:

$$\lim_{x \rightarrow ۳^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۳^-} (۱۶ - ax^۲) = ۱۶ - ۹a$$

$$\lim_{x \rightarrow ۳^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۳^+} (۲x + a) = ۶ + a$$

بنابراین  $۱۶ - ۹a = ۶ + a$  و در نتیجه  $a = ۱$ . به این ترتیب

$$f(x) = \begin{cases} ۲x+۱ & x \geq ۳ \\ ۱۶-x^۲ & x < ۳ \end{cases}$$

در نتیجه  $\lim_{x \rightarrow ۱} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۱} (۱۶ - x^۲) = ۱۶ - ۱^۲ = ۱۵$ .

**۱۱۷- گزینه ۳** باید مخرج هیچ‌جا صفر نشود، در نتیجه باید دلتای

معادله  $x^۲ - ۲mx + m + ۶ = 0$  منفی باشد

$$\Delta = (-۲m)^۲ - ۴(m+۶) < 0 \Rightarrow ۴m^۲ - ۴(m+۶) < 0$$

$$m^۲ - m - ۶ < 0 \Rightarrow (m-۳)(m+۲) < 0 \Rightarrow -۲ < m < ۳$$

بنابراین تابع  $f$  به ازای چهار مقدار صحیح  $-۱$ ،  $۰$ ،  $۱$  و  $۲$  برای  $m \in \mathbb{R}$  پیوسته است.

**۱۱۸- گزینه ۱** در نقاطی که مقدار  $\frac{1}{x}$  عددی صحیح شود، تابع  $y = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

ناپیوسته است. این نقاط به صورت زیر هستند:

$$\frac{1}{x} = k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{1}{k}$$

در بازه  $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1})$

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{x} < \frac{1}{k-1} \Rightarrow 1 < k < 10 \Rightarrow ۲ \leq k \leq ۹$$

یعنی در هشت نقطه تابع ناپیوسته است.

**۱۳۷- گزینه ۳** تابع  $f$  در نقطه‌های  $-۳$ ،  $۱$  و  $۵$  پیوسته نیست. پس در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. همین‌طور، در نقطه‌های  $-۱$  و  $۳$  مشتق چپ و مشتق راست تابع  $f$  برابر نیستند. پس تابع  $f$  در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. تابع  $f$  در نقطه‌های  $-۲$  و  $۴$  مشتق‌پذیر است. بنابراین تابع  $f$  در پنج نقطه صحیح از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست.

**۱۳۸- گزینه ۴** بنابر تعریف مشتق،  $g(x) = f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$\text{بنابراین } g(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$$

**۱۳۹- گزینه ۳** بنابر قاعده تقسیم،

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

پس  $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = \frac{f'(-1)g(-1) - g'(-1)f(-1)}{g^2(-1)}$  از طرف دیگر،

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x - 1 \\ f'(x) = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -3 \\ f'(-1) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ g'(x) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(-1) = 2 \\ g'(-1) = -2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = \frac{4 \times 2 - (-2)(-3)}{(2)^2} = -1 \quad \text{بنابراین}$$

**۱۴۰- گزینه ۱** ابتدا ضابطه تابع را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) \\ &= x(x^4 - 1) = x^5 - x \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین } f'(x) = 5x^4 - 1 = 9x^4 - 1 \quad \text{پس } f'\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = 9\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4 - 1 = 0$$

**۱۴۱- گزینه ۲** توجه کنید که مقدار عبارت  $4x - x^2$  در اطراف نقطه  $x = -2$  منفی است و مقدار عبارت  $x + 1$  هم در اطراف  $x = -2$  منفی است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x) = x^2 - 4x - x - 1 = x^2 - 5x - 1$$

$$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(-2) = -9$$

همچنین توجه کنید که در یک همسایگی نقطه  $x = 5$  مقدار عبارت‌های

$$4x - x^2 \quad \text{و} \quad x + 1 \quad \text{به ترتیب منفی و مثبت است. پس در اطراف این نقطه}$$

$$f(x) = x^2 - 4x + x + 1 = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(5) = 7$$

$$\text{در نتیجه } f'(5) + f'(-2) = -2$$

**۱۴۲- گزینه ۲** توجه کنید که  $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 4(2x^2 + 3)'(2x^2 + 3)^{4-1} = 4(4x)(2x^2 + 3)^3 = 16x(2x^2 + 3)^3$$

$$\text{بنابراین } f'(-1) = 16(-1)(2(-1)^2 + 3)^3 = -16 \times 5^3$$

**۱۴۳- گزینه ۳** توجه کنید که  $(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f'(2) = \frac{3 \times 4}{2\sqrt{9}} = 2$$

**۱۲۹- گزینه ۳** برای آنکه حد مورد نظر برابر صفر شود، باید درجهٔ مخرج بیشتر از درجهٔ صورت باشد. مخرج از درجهٔ اول است، پس باید ضریب جملات درجهٔ دوم و سوم در صورت برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ 2a - b = 0 \Rightarrow 2a = b \end{cases} \Rightarrow b = 2$$

بنابراین  $a + b = 3$ .

**۱۳۰- گزینه ۱** توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \right] = [0] = 0$$

از طرف دیگر، اگر  $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه  $-1 < \frac{1}{x} < 0$ ، بنابراین  $\left[\frac{1}{x}\right] = -1$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$$

است.  $-1$

**۱۳۱- گزینه ۳** شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه  $x = 3$  برابر  $f'(3) = 2$  است. پس شیب خط عمود بر این خط، که همان خط مماس بر نمودار تابع در نقطه  $x = -1$  است، برابر  $-\frac{1}{2}$  است. پس  $f'(-1) = -\frac{1}{2}$ .

**۱۳۲- گزینه ۴** شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه‌های  $x = a$  و  $x = c$  صفر، در نقطه  $x = b$  منفی و در نقطه  $x = d$  مثبت است.

**۱۳۳- گزینه ۲** با توجه به تعریف مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$ ،

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) + 2}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} (-2) = -1$$

**۱۳۴- گزینه ۱** تعریف مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x = 5$  را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)(x-2) \cdots (x-5)}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} ((x-1)(x-2)(x-3)(x-4)) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \end{aligned}$$

**۱۳۵- گزینه ۲** می‌دانیم اگر تابع  $f$  در نقطه  $x_0$  مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + mh) - f(x_0 + nh)}{h} = (m-n)f'(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2-2h)}{3h} = \frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2-2h)}{h}$$

$$= \frac{1}{3} (2 - (-2))f'(2) = \frac{4}{3} f'(2)$$

**۱۳۶- گزینه ۳** با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+1)}{x-1} = -1$$

بنابراین مقدار مشتق راست تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  به اندازهٔ ۲ واحد از مشتق چپ تابع در این نقطه بیشتر است.

۱۵۰- گزینه ۳ چون تابع  $f$  در نقطه  $x=3$  مشتق پذیر نیست، پس

$$\text{مقدار } x^2 + ax - 12 \text{ به ازای } x=3 \text{ صفر است:} \\ 9 + 3a - 12 = 0 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین  $f(x) = |x^2 + x - 12|$  در نزدیکی نقطه  $-2$  علامت عبارت  $x^2 + x - 12$  منفی است، بنابراین

$$f(x) = -(x^2 + x - 12) \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \Rightarrow f'(-2) = 3$$

۱۵۱- گزینه ۲ فرض کنید نقطه مورد نظر  $(x_0, y_0)$  باشد. شیب

خط مماس بر نمودار تابع  $f$  در این نقطه برابر با  $f'(x_0)$  است، که چون خط مماس موازی محور  $x$  است، پس  $f'(x_0) = 0$ . اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$$

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 3(x_0 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

بنابراین  $y_0 = f(x_0) = f(1) = -1$

۱۵۲- گزینه ۳ شیب خط مماس مورد نظر برابر  $f'(-2)$  است:

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(-2) = 2$$

از طرف دیگر  $f(-2) = 4$ ، پس خط مماس از نقطه  $(-2, 4)$  می‌گذرد. بنابراین معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$y - 4 = 2(x + 2) \Rightarrow y = 2x + 8$$

۱۵۳- گزینه ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطه  $(x_0, y_0)$  بر نمودار

تابع، که سهمی است، مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق  $f$  به ازای  $x = x_0$  برابر با شیب خط  $y = x + 5$  است. بنابراین

$$y' = 4x - 4 \Rightarrow 4x_0 - 4 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{4}$$

چون نقطه  $(x_0, y_0)$  روی سهمی  $y = 2x^2 - 4x + 6$  است، پس

$$y_0 = 2x_0^2 - 4x_0 + 6 = 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{5}{4} + 6 = \frac{33}{8}$$

بنابراین خط مورد نظر از نقطه  $\left(\frac{5}{4}, \frac{33}{8}\right)$  می‌گذرد و شیب آن ۱ است، پس

$$\text{معادله اش به صورت } y - \frac{33}{8} = x - \frac{5}{4} \text{، یعنی } 8y - 8x - 23 = 0 \text{ است.}$$

۱۵۴- گزینه ۲ نقطه تماس را  $\left(a, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$  فرض می‌کنیم. شیب خط

مماس را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت  $y - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}(x - a)$  است.

نقطه  $(3, 0)$  را در معادله جای گذاری می‌کنیم:

$$0 - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}(3 - a) \Rightarrow 2a = 3 - a \Rightarrow a = 1$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  است. در نتیجه

عرض از مبدأ خط مماس برابر  $\frac{3}{2}$  است.

۱۴۴- گزینه ۱ بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{(9x^2 - 4x)(x+1)^2 - 2(x+1)(3x^3 - 2x^2 + 1)}{(x+1)^4}$$

$$\text{در نتیجه } f'(1) = \frac{3}{4}$$

۱۴۵- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی  $f(-3x+5) = 2x^3 + 4x - 6$

طبق قاعده زنجیری مشتق بگیریم به دست می‌آید:

$$(-3x+5)f'(-3x+5) = 6x^2 + 4$$

$$-3f'(-3x+5) = 6x^2 + 4 \xrightarrow{x=1} -3f'(2) = 10 \Rightarrow f'(2) = -\frac{10}{3}$$

۱۴۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(2x)g'(f(2x)) = \frac{1}{y}(g(f(2x)))' = \left(\frac{1}{y}g(f(2x))\right)'$$

بنابراین ضابطه تابع  $y = \frac{1}{y}g(f(2x))$  را به دست می‌آوریم و مشتق آن را

حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{y}g(f(2x)) = \frac{1}{y}g(8x^3 + 1) = \frac{1}{y}\sqrt[3]{1 - (8x^3 + 1)} = \frac{1}{y}\sqrt[3]{-8x^3} = -x$$

در نتیجه  $y' = -1$

۱۴۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ 3x^2 + 2 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{بنابراین } f'(-1) + f'(2) = -3 + 14 = 11$$

۱۴۸- گزینه ۴ شرط لازم برای مشتق پذیری، پیوستگی است:

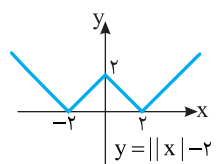
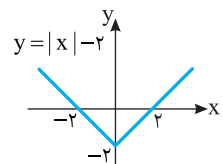
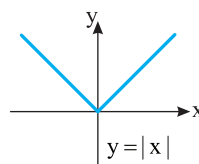
$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + 2 = 1 + 2b \Rightarrow a - 2b = -1$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 2 & x > 1 \\ 3x^2 + 2b & x < 1 \end{cases} \Rightarrow 2a + 2 = 3 + 2b \Rightarrow 2a - 2b = 1$$

$$\begin{cases} a - 2b = -1 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{7}{2}$$

۱۴۹- گزینه ۴ نمودار تابع  $f$  به صورت زیر رسم می‌شود:



در نقاط  $x = 0$ ،  $x = 2$  و  $x = -2$  نمودار تابع نقطه گوشه‌ای دارد و تابع در

این نقاط مشتق ندارد. پس  $D_{f'} = \mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$

۱۵۵- گزینه ۲ مقدار دو آهنگ تغییر را حساب می‌کنیم:

$$A_1 = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3} = A_1$$

$$A_2 = \frac{f(4/41) - f(4)}{4/41 - 4}$$

$$= \frac{\frac{1}{41} - 1}{\frac{4}{41} - 4} = \frac{\frac{1 - 41}{41}}{\frac{4 - 164}{41}} = \frac{-40}{-160} = \frac{1}{4} = A_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = \frac{4 \times 21}{3 \times 21} = \frac{28}{7} = 4$$

۱۵۶- گزینه ۱ مقدار آهنگ تغییر متوسط را در بازه [۱, ۲] حساب می‌کنیم:

$$A = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - (1)}{1} = 0$$

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطه مورد نظر همان مشتق تابع در این نقطه است که باید برابر ۲ باشد. پس

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} = 2 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

۱۵۷- گزینه ۳ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع همان مشتق آن است. پس

مشتق تابع  $f$  را پیدا می‌کنیم:  $f'(x) = -3x^2 + 6x - 6$ . بیشترین مقدار تابع

درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a < 0$ ) برابر  $-\frac{\Delta}{4a}$  است. پس بیشترین مقدار

$$A = -\frac{36 - 4(-3)(-6)}{4(-3)} = -\frac{36 - 72}{-12} = \frac{36}{12} = 3$$

۱۵۸- گزینه ۴ مشتق اول و دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a$$

بنابراین

$$f''(2) = -2 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

$$f'(2) = -2 \Rightarrow 4a + b = -2 \Rightarrow b = 2$$

در نتیجه  $a - b = -3$ .

۱۵۹- گزینه ۳ مشتق دوم تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 2 \Rightarrow f''(x) = 12x + 6$$

بنابراین

$$f''(a) = 0 \Rightarrow 12a + 6 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۱۶۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(-1) = -2$$

۱۶۱- گزینه ۲ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{x^3 + 3x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 - 6x}{3x^2 + 6x} = \frac{6 + 6}{3 - 6} = -4$$

۱۶۲- گزینه ۳ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - x}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}} - 1}{2x - 7} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{9}} - 1}{6 - 7} = \frac{1}{2}$$

۱۶۳- گزینه ۴ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$L = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(1+h) + f'(1-h)}{1} = f'_+(1) + f'_-(1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 1 \\ 4x^3 & x < 1 \end{cases}$$

واضح است که  $f'_-(1) = 4$  و  $f'_+(1) = 3$  و بنابراین  $L = 3 + 4 = 7$ .

۱۶۴- گزینه ۳ می‌دانیم اگر  $f'(x) \geq 0$  و نقاطی که  $f'(x) = 0$

تشکیل یک بازه ندهند تابع اکیداً صعودی است. روی بازه  $(-\infty, 3]$  نمودار

تابع مشتق بالای محور  $x$  یا مماس بر آن است و فقط در نقطه  $x = 1$  و  $x = 3$  مشتق برابر صفر است. پس تابع روی بازه  $(-\infty, 3]$  اکیداً صعودی است.

بنابراین بیشترین مقدار ممکن  $a$  برابر ۳ است.

۱۶۵- گزینه ۱ توجه کنید که  $f'(x) = x^2 - 1$  پس

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1$$

بنابراین تابع  $f$  روی بازه‌های  $(-\infty, -1]$  و  $[1, +\infty)$  اکیداً صعودی است. پس

روی بازه  $(-1, 2)$  اکیداً صعودی نیست.

۱۶۶- گزینه ۲ توجه کنید که  $f'(x) = -3x^2 + 2x = x(-3x + 2)$

x	$-\infty$	۰	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	-

در نتیجه تابع  $f$  روی بازه  $(\frac{2}{3}, 2)$  اکیداً صعودی است. بنابراین بیشترین

مقدار ممکن  $a$  برابر  $\frac{2}{3}$  است.

۱۶۷- گزینه ۴ مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = -x^3 + mx^2 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2mx - 12$$

باید مشتق تابع نامثبت باشد، یعنی  $f'(x) \leq 0$ . در نتیجه  $-3x^2 + 2mx - 12 \leq 0$ .

برای اینکه این نابرابری همواره درست باشد، باید

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4m^2 - 144 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 36 \Rightarrow -6 \leq m \leq 6$$

بنابراین اگر  $m$  عضو مجموعه  $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$  باشد، تابع

اکیداً نزولی است.

۱۶۸- گزینه ۲ تابع  $f$  در تمام نقاط  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

پس  $(0, 0)$  و  $(1, 1)$  نقاط بحرانی تابع  $f$  هستند که فاصله آن‌ها برابر  $\sqrt{2}$  است.

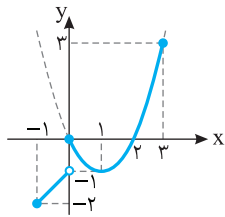
۱۶۹- گزینه ۱ ابتدا تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس

مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 - x^2 & x \geq -2 \\ -2x - 4 - x^2 & x < -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & x > -2 \\ -2 - 2x & x < -2 \end{cases}$$

تابع در نقطه  $x = -2$  مشتق ندارد، پس نقطه به طول  $-2$  نقطه بحرانی تابع است.





**۱۷۷- گزینه ۳** نمودار تابع  $f$

به صورت مقابل است. حداکثر مقدار تابع برابر ۳ و حداقل مقدار آن برابر -۲ است و اختلاف این دو مقدار برابر ۵ است.

**۱۷۸- گزینه ۱** توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

از طرف دیگر،  $f(1) = \frac{1}{2}$ ،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . بنابراین

ماکزیمم مطلق تابع  $f$  برابر است با  $f(1) = \frac{1}{2}$ .

**۱۷۹- گزینه ۳** چون  $y = 2x - a$ ، پس

$$A(x) = xy = x(2x - a) = 2x^2 - ax$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 4x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{4}$$

بنابراین کمترین مقدار  $xy$  برابر است با  $-\frac{a^2}{8}$ .

**۱۸۰- گزینه ۱** طول اضلاع قائمه مثلث را  $a$  و  $b$  فرض می‌کنیم.

می‌خواهیم بیشترین مقدار مساحت، یعنی  $S = \frac{1}{2}ab$  را به دست آوریم. توجه

کنید که  $a^2 + b^2 = 16$ . پس  $b = \sqrt{16 - a^2}$ . در نتیجه

$$S(a) = \frac{1}{2} a \sqrt{16 - a^2}$$

$$S'(a) = \frac{1}{2} \sqrt{16 - a^2} - \frac{a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} \Rightarrow S'(a) = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار  $S$  برابر است با  $\frac{1}{2} (2\sqrt{2}) \sqrt{8} = 4$ .

**۱۸۱- گزینه ۴** نقطه  $B(x, y)$  را روی نمودار در نظر می‌گیریم. پس

$$y = \sqrt{2x + 9}$$

$$d(x) = AB = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 2x + 9} = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

$$d'(x) = \frac{2x - 6}{2\sqrt{x^2 - 6x + 25}}, \quad d'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین کمترین مقدار  $d$  به ازای  $x = 3$  به دست می‌آید و برابر است با ۴.

**۱۸۲- گزینه ۴** توجه کنید که مساحت مستطیل  $ABCD$  برابر است با

$$f(x) = (3x - 1)(1 - 2x)$$

را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 3(1 - 2x) + (3x - 1)(-2) = -12x + 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -12x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{12}$$

بنابراین تابع  $f$  فقط یک نقطه بحرانی دارد و بیشترین مقدار آن به ازای  $x = \frac{5}{12}$

به دست می‌آید، که برابر است با  $\frac{1}{24}$ . در نتیجه بیشترین مقدار مساحت

مستطیل  $ABCD$  برابر  $\frac{1}{24}$  است.

از طرف دیگر،

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ -2 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

بنابراین نقطه به طول ۱ نقطه بحرانی تابع است. مجموع عرض‌های نقاط بحرانی برابر است با  $f(-2) + f(1) = -4 + 5 = 1$ .

**۱۷۰- گزینه ۳** ریشه‌های صورت و مخرج تابع مشتق اگر در دامنه تابع

باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{(x^2 - 4)}{3\sqrt{x^2}} = \frac{6x^2 + x^2 - 4}{3\sqrt{x^2}} = \frac{7x^2 - 4}{3\sqrt{x^2}}$$

مشخص است که صورت کسر دو ریشه و مخرج آن یک ریشه دارد که همگی در دامنه تابع هستند (دامنه تابع  $\mathbb{R}$  است). بنابراین تابع  $f$  سه نقطه بحرانی دارد.

**۱۷۱- گزینه ۳** توجه کنید که  $D_f = [1, 3]$  و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

تابع  $f$  در نقاط  $x = 1$  و  $x = 3$  مشتق پذیر نیست. از طرف دیگر

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{3-x} \Rightarrow x-1 = 3-x \Rightarrow x = 2$$

پس مجموعه طول نقاط بحرانی تابع  $\{1, 2, 3\}$  است که دارای سه عضو است.

**۱۷۲- گزینه ۲** تابع  $f$  در نقطه‌های  $-1$  و  $2$  مینیمم نسبی دارد.

مجموع این عددها برابر ۱ است.

**۱۷۳- گزینه ۳** جدول تعیین علامت  $f'(x)$  به صورت زیر است.

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+

بنابراین تابع  $f$  فقط یک نقطه مینیمم نسبی در  $x = -2$  دارد.

**۱۷۴- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که  $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 = x^2(8x - 3)$

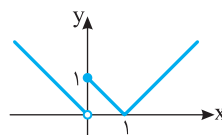
بنابراین جدول تغییرات تابع  $f$  به صورت زیر است:

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{3}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

min نسبی

بنابراین تابع  $f$  فقط یک نقطه اکسترمم نسبی دارد.

**۱۷۵- گزینه ۱** نمودار تابع  $f$  به



شکل مقابل است. این تابع در نقطه  $x = 0$

ماکزیمم نسبی و در نقطه  $x = 1$  مینیمم

نسبی دارد.

**۱۷۶- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که  $f'(x) = 4x - 8$ . بنابراین

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

اکنون توجه کنید که چون

$$f(0) = 1, \quad f(2) = -7, \quad f(5) = 11$$

پس مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $f$  به ترتیب برابر ۱۱ و  $-7$  و

اختلاف آن‌ها برابر  $11 - (-7) = 18$  است.

۱۹۰- گزینه ۲ راه‌حل اول طول قطر بزرگ، طول قطر کوچک و

فاصله کانونی بیضی به ترتیب  $2a$ ،  $2b$  و  $2c$  است. بنابراین  
 $2a=8 \Rightarrow a=4$ ،  $2b=6 \Rightarrow b=3$

از طرف دیگر،

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

بنابراین فاصله کانونی بیضی مورد نظر برابر است با  $2c = 2\sqrt{7}$ .

راه‌حل دوم چون  $a^2 = b^2 + c^2$ ، پس  $4a^2 = 4b^2 + 4c^2$ ، در نتیجه  
 $(2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2$ ، یعنی

$$8^2 = 6^2 + (2c)^2 \Rightarrow (2c)^2 = 28 \Rightarrow 2c = 2\sqrt{7}$$

۱۹۱- گزینه ۱ چون مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است و کانون‌های

بیضی روی محور  $x$  هستند، پس قطر کوچک بیضی روی محور  $y$  است، یعنی  
 $BB'$  قطر کوچک بیضی است. اکنون توجه کنید که  $a = OA' = 17$  و  
 $b = OB = 15$  در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 17^2 = 15^2 + c^2 \Rightarrow c = 8$$

بنابراین  $AF' = a + c = 25$ . در نتیجه، مساحت مثلث  $ABF'$  برابر است با

$$\frac{1}{2} AF' \times OB = \frac{1}{2} \times 25 \times 15 = \frac{375}{2}$$

۱۹۲- گزینه ۲ راه‌حل اول بنابر فرض‌های مسئله،  $b = OB' = 6$  و

$a = BF = 8$  بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 8^2 = 6^2 + c^2 \Rightarrow c = 2\sqrt{7}$$

پس خروج از مرکز بیضی برابر است با  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .

راه‌حل دوم چون  $a = 8$  و  $b = 6$ ، پس

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

۱۹۳- گزینه ۴ راه‌حل اول بنابر فرض مسئله،

$$2c = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{5}، \quad 2a - 2b = 2 \Rightarrow a - b = 1 \quad (1)$$

بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 5$$

$$\xrightarrow{(1)} a+b=5 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲)،  $a=3$ ، به دست می‌آید. در نتیجه خروج از مرکز

بیضی برابر است با  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

راه‌حل دوم برای به دست آوردن  $a$ ، از تساوی (۱)،  $b = a - 1$  به دست می‌آید.

بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (a-1)^2 + c^2$$

$$a^2 = a^2 - 2a + 1 + 5 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

۱۹۴- گزینه ۲ مرکز دایره وسط دو سر قطر است، پس نقطه

$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{6+2}{2}\right)$ ، یعنی  $(1, 4)$  مرکز دایره است. اکنون توجه کنید که شعاع دایره

برابر  $\frac{1}{2} AB = \sqrt{(3+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$  است، چون

در نتیجه  $r = 2\sqrt{2}$ . بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8 - 1 - 16 = -9 \Rightarrow c = -9$$

۱۸۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (-5)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + 2a + 1 + 1} = \sqrt{a^2 - 6a + 9 + 25}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 - 6a + 25 \Rightarrow 8a = 24 \Rightarrow a = 3$$

۱۸۴- گزینه ۲ توجه کنید که  $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2} = 3$ ، بنابراین

$$AC = 3 \Rightarrow \sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2} = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 9 \quad (1)$$

$$BC = 3 \Rightarrow \sqrt{(3-a)^2 + (0-b)^2} = 3 \Rightarrow (3-a)^2 + b^2 = 9$$

$$9 - 6a + a^2 + b^2 = 9 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $9 - 6a = 0$ ، پس  $a = \frac{3}{2}$ . در نتیجه از

تساوی (۱) به دست می‌آید  $b^2 = 9 - a^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$ ، بنابراین

$$|b| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۱۸۵- گزینه ۱ وسط ضلع  $BC$  نقطه  $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$  یعنی نقطه

$(1, 2)$  است. طول میانه نظیر رأس  $A$  برابر با فاصله نقطه  $A$  از نقطه وسط

ضلع  $BC$  است، یعنی برابر است با  $\sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$ .

۱۸۶- گزینه ۳ شیب خط راستی که از نقطه‌های  $(3, a)$  و  $(2, 7)$

می‌گذرد برابر است با  $\frac{a-7}{3-2} = a-7$ . شیب خط راستی که از نقطه‌های

$(-1, 4)$  و  $(1, 8)$  می‌گذرد برابر است با  $\frac{4-8}{-1-1} = 2$ . اگر دو خط بر هم عمود

باشند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر  $-1$  است، پس

$$(a-7)(2) = -1 \Rightarrow a = \frac{13}{2}$$

۱۸۷- گزینه ۳ طول عمود وارد از نقطه  $(3, 1)$  بر خط  $4x + 3y + 2 = 0$

فاصله این نقطه از این خط است که برابر است با

$$\frac{|4 \times 3 + 3 \times 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{35}{5} = 7$$

۱۸۸- گزینه ۴ فرض کنید خط  $ax + by + c = 0$  ویژگی‌های مورد نظر

را داشته باشد، چون شیب این خط  $-1$  است، پس  $-\frac{a}{b} = -1$ ، در نتیجه

$a = b$ . از طرف دیگر، چون فاصله مبدأ از این خط برابر با  $5$  است، پس

$$\frac{|ax_0 + ay_0 + c|}{\sqrt{a^2 + a^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{2}|a|} = 5 \Rightarrow |c| = 5\sqrt{2}|a| \Rightarrow c = \pm 5\sqrt{2}a$$

بنابراین خط‌های راست مورد نظر  $ax + ay + 5\sqrt{2}a = 0$  و

$ax + ay - 5\sqrt{2}a = 0$  هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت  $x + y + 5\sqrt{2} = 0$

و  $x + y - 5\sqrt{2} = 0$  نوشت.

۱۸۹- گزینه ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر  $2a$  است. بنابراین  $2a = PF + PF' = 6 + 8 = 14$ . اکنون دقت کنید که

$AF' = AF = 5$  با توجه به شکل فاصله کانونی بیضی برابر است با

$$FF' = AA' - AF - AF' \Rightarrow 2c = 14 - 5 - 5 = 4$$

۱۹۵- گزینه ۴ در معادله گسترده دایره ضرایب  $x^2$  و  $y^2$  برابر ۱ است.

پس طرفین معادله داده شده را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضریب  $x^2$  برابر ۱ شود:

$$x^2 + \frac{a}{2}y^2 - 2x + \frac{b}{2}y - 4 = 0$$

به این ترتیب  $\frac{a}{2} = 1$ ، پس  $a = 2$ . از طرف دیگر، چون شعاع دایره برابر ۳ است، پس

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - 4(-4) = 3 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 20} = 6 \Rightarrow b = \pm 8 \Rightarrow ab = \pm 16$$

۱۹۶- گزینه ۲ فرض می‌کنیم معادله دایره مورد نظر

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

معادله صدق می‌کنند:

$$1 + a + c = 0, \quad 1 + b + c = 0, \quad 1 + 1 - a + b + c = 0$$

از معادله دوم  $b + c = -1$  به دست می‌آید. بنابراین در معادله سوم

$$2 - a + b + c = 0 \Rightarrow 2 - a + (-1) = 0 \Rightarrow a = 1$$

در نتیجه از معادله اول  $c = -2$  و از معادله دوم  $b = 1$  به دست می‌آید.

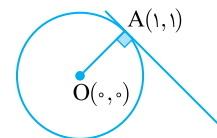
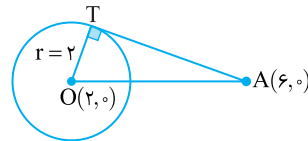
بنابراین شعاع دایره مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 1 - 4(-2)} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۱۹۷- گزینه ۲ نقطه  $O(2, 0)$  مرکز دایره و شعاع دایره  $r = 2$  است.

همچنین  $OA = \sqrt{(6-2)^2 + 0^2} = 4$ ، و در نتیجه

$$AT = \sqrt{OA^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



۱۹۸- گزینه ۱ مرکز دایره نقطه

$O(0, 0)$  است. شیب خطی که نقطه‌های  $O$

و  $A$  روی آن قرار دارند، برابر است با

$$\frac{1-0}{1-0} = 1$$

است، برابر  $-1$  است. پس معادله خط مماس بر دایره در نقطه  $A(1, 1)$

به صورت زیر است:

$$y - 1 = (-1)(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

۱۹۹- گزینه ۲ مرکز دایره  $x^2 + y^2 = \frac{169}{25}$  نقطه  $O(0, 0)$  و شعاع آن

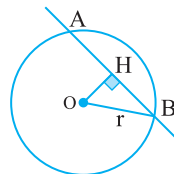
برابر  $r = \frac{13}{5}$  است. بنابراین مطابق شکل زیر،  $OH$  برابر با فاصله نقطه  $(0, 0)$

از خط  $4x + 3y - 12 = 0$  است، که برابر است با  $\frac{|0+0-12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{12}{5}$ .

نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $OHB$ .

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + HB^2 \Rightarrow HB = 1$$

اکنون توجه کنید که  $AB = 2HB = 2$ .



یعنی  $O_1(2, 0)$  و شعاع آن برابر است با

$$r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 0^2} - 4(0) = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$$

مرکز دایره  $x^2 + y^2 + 2x - 8y + k = 0$  نقطه  $O_2(-1, 4)$ ، یعنی

$O_2(-1, 4)$  و شعاع آن برابر است با

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-8)^2} - 4(k) = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 64 - 4k} = \sqrt{17 - k}$$

برای اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند باید  $O_1O_2 = r_1 + r_2$  پس

$$\sqrt{(2+1)^2 + (0-4)^2} = 2 + \sqrt{17-k} \Rightarrow 3 = \sqrt{17-k} \Rightarrow 9 = 17-k \Rightarrow k = 8$$

۲۰۱- گزینه ۳ رقم صدگان عدد مورد نظر نمی‌تواند صفر باشد. بنابراین

برای صدگان ۴ انتخاب داریم. برای هر یک از رقم‌های دهگان و یکان ۵ انتخاب

داریم. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با  $4 \times 5 \times 5 = 100$ .

۲۰۲- گزینه ۴ نفر اول می‌تواند بر روی هر یک از صندلی‌ها بنشینند.

پس برای او ۶ انتخاب وجود دارد. نفر دوم باید صندلی‌ای به جز صندلی نفر اول

را انتخاب کند، پس ۵ انتخاب دارد. به همین ترتیب، نفر سوم هم ۴ انتخاب

دارد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با  $6 \times 5 \times 4 = 120$ .

۲۰۳- گزینه ۱ برای هر سؤال یکی از چهار گزینه درست است. پس

کلید هر سؤال ۴ حالت دارد. پس تعداد حالت‌های مختلف که یک کلید

۲۰ سؤالی می‌تواند داشته باشد  $4 \times 4 \times \dots \times 4$  یعنی  $4^{20}$  است.

تا ۲۰.

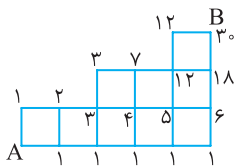
۲۰۴- گزینه ۲ تعداد راه‌های رسیدن

از نقطه  $A$  به هر نقطه روی شکل را به کمک

اصل جمع حساب می‌کنیم که مطابق شکل

روبه‌رو است. بنابراین به ۳۰ طریق مختلف

می‌توانیم از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  برویم.



۲۰۵- گزینه ۲ اگر صدگان عدد ۷ باشد، هر کدام از رقم‌های دهگان و

یکان می‌توانند نه حالت داشته باشند (فقط ۷ نمی‌توانند باشند). پس ۸۱ عدد

به این صورت وجود دارد. اگر دهگان عدد ۷ باشد، رقم یکان می‌تواند نه حالت

و رقم صدگان می‌تواند هشت حالت داشته باشد (۷ و صفر نمی‌تواند باشد). پس

۷۲ عدد به این شکل وجود دارد. به همین ترتیب اگر یکان عدد ۷ باشد، دهگان

می‌تواند نه حالت داشته باشد و صدگان می‌تواند هشت حالت داشته باشد.

یعنی ۷۲ عدد نیز به این شکل وجود دارد. بنابراین تعداد کل عددهای مطلوب

برابر است با  $81 + 72 + 72 = 225$ .

۲۰۶- گزینه ۳ حروف یکسان را کنار هم قرار می‌دهیم و آن‌ها را به عنوان

یک عضو جایگشت در نظر می‌گیریم. یعنی می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های

مختلف  $P, S, I, M$  را حساب کنیم که برابر  $4! = 24$  است.

۲۰۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(n, 5) = 2P(n, 4) \Rightarrow \frac{n!}{(n-5)!} = 2 \times \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\frac{1}{(n-5)!} = \frac{2}{(n-4)(n-5)!} \Rightarrow n-4=2 \Rightarrow n=6$$

**۲۱۵- گزینه ۱** ابتدا یک زن و شوهر را از بین شش زن و شوهر به  $\binom{6}{1}$

حالت انتخاب می‌کنیم. اکنون باید سه نفر را از بین پنج زوج دیگر انتخاب

کنیم. ابتدا سه زوج انتخاب می‌کنیم که این کار به  $\binom{5}{3}$  حالت امکان‌پذیر

است. سپس از بین هر زوج انتخاب شده زن یا شوهر را انتخاب می‌کنیم که این

کار به  $2 \times 2 \times 2$  راه ممکن است. پس کل حالت‌های انتخاب پنج نفر از بین

$$\binom{6}{1} \times \binom{5}{3} \times 2^3 = 480 = \text{ساکنین آپارتمان برابر است با}$$

**۲۱۶- گزینه ۱** تعداد زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی یک مجموعه

$n$  عضوی برابر  $\binom{n}{k}$  است. بنابراین  $\binom{n}{5} = \binom{n}{6}$  و در نتیجه  $n = 5 + 6 = 11$ .

تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه یازده عضوی برابر است با  $\binom{11}{3}$

یا همان  $\binom{11}{8}$ .

**۲۱۷- گزینه ۳** توجه کنید که

$$n(S) = 2^2 = 4, \quad n(A) = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2 + 1 = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4} \text{ بنابراین}$$

**۲۱۸- گزینه ۴** تعداد راه‌های انتخاب سه لامپ از دوازده لامپ برابر

است با  $n(S) = \binom{12}{3}$ . چون هشت لامپ درون جعبه سالم‌اند، پس اگر  $A$

پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه  $n(A) = \binom{8}{3}$  بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{8!}{5!3!}}{\frac{12!}{9!3!}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = \frac{14}{55}$$

**۲۱۹- گزینه ۱** واضح است که  $n(S) = \binom{10}{3}$  برای اینکه سه مهره

هم‌رنگ باشند، یا باید هر سه آبی باشند یا هر سه قرمز. پس تعداد حالت‌های

انتخاب سه مهره هم‌رنگ برابر است با  $n(A) = \binom{4}{3} + \binom{6}{3}$  بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3} + \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 + 20}{120} = \frac{1}{5}$$

**۲۰۸- گزینه ۳** باید سه رقم متمایز از میان رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ و ۹

انتخاب کنیم و با آن‌ها عددی سه رقمی بنویسیم. تعداد راه‌های این کار برابر

$$\text{است با } P(6, 3) = \frac{6!}{3!} = 120.$$

**۲۰۹- گزینه ۱** ارقام اول و آخر را باید از بین پنج رقم فرد انتخاب کنیم

که این کار به  $P(5, 2)$  حالت امکان‌پذیر است. سه رقم وسط را هم باید از بین

هشت رقم باقیمانده انتخاب کنیم که این کار به  $P(8, 3)$  حالت امکان‌پذیر

است. بنابراین تعداد اعداد مطلوب سؤال برابر است با

$$P(5, 2) \times P(8, 3) = \frac{5!}{3!2!} \times \frac{8!}{3!5!} = \frac{8!}{3!5!}$$

**۲۱۰- گزینه ۴** در اینجا ترتیب بیرون آوردن ۴ گوی از ۲۰ گوی مهم

است، پس تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با  $P(20, 4) = \frac{20!}{(20-4)!} = 16!$

**۲۱۱- گزینه ۲** راه‌حل اول توجه کنید که

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{7} \Rightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{7!(n-7)!} \Rightarrow 4!(n-4)! = 7!(n-7)!$$

$$4! \times (n-4)(n-5)(n-6)(n-7)! = 4! \times 5 \times 6 \times 7 \times (n-7)!$$

$$(n-4)(n-5)(n-6) = 5 \times 6 \times 7 \Rightarrow n-4 = 7 \Rightarrow n = 11$$

$$\text{بنابراین } \binom{n}{8} = \binom{11}{8} = \frac{11!}{8!3!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} = 165$$

**راه‌حل دوم** می‌دانیم اگر  $\binom{n}{m} = \binom{n}{k}$ ، آن‌گاه  $m+k=n$ . پس

$$\binom{n}{8} = \binom{11}{8} = \frac{11!}{8!3!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} = 165 \text{ پس } n = 7 + 4 = 11$$

**۲۱۲- گزینه ۴** محسن به  $\binom{6}{3}$  طریق می‌تواند سه تا از کتاب‌هایش را

انتخاب کند و ابراهیم نیز به  $\binom{8}{3}$  طریق می‌تواند سه تا از کتاب‌هایش را انتخاب

کند. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با  $\binom{6}{8} \binom{8}{3} = 1120$ .

**۲۱۳- گزینه ۴** اگر به چهار پرسش از پنج پرسش نخست پاسخ دهد، باید

به شش پرسش از هشت پرسش دیگر پاسخ دهد. تعداد راه‌های این کار برابر

است با  $\binom{5}{4} \binom{8}{6} = 140$ . اگر به هر پنج پرسش نخست پاسخ دهد، باید به

پنج پرسش از هشت پرسش دیگر پاسخ دهد. تعداد راه‌های این کار برابر است با

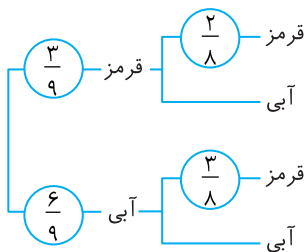
$$\binom{5}{5} \binom{8}{5} = 56 \text{ بنابراین پاسخ مسئله برابر است با } 140 + 56 = 196.$$

**۲۱۴- گزینه ۱** اگر سه نفر از هشت نفر را انتخاب کنیم و در یک تیم قرار

دهیم، پنج نفر باقی‌مانده تیم پنج نفره را تشکیل می‌دهند. بنابراین تعداد

حالت‌های ممکن برابر است:  $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$ .

راه حل دوم نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید



$$P(\text{قرمز بودن توپ دوم}) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$$

۲۲۸- گزینه ۲ فرض کنید B پیشامد انتخاب جعبه اول برای افزودن ۲

مهرة سفید باشد. در این صورت B' پیشامد انتخاب جعبه دوم برای افزودن ۲ مهرة سفید است. همچنین فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهرة انتخاب شده باشد. باید P(A) را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

توجه کنید که اگر دو مهرة سفید به جعبه اول اضافه شوند، این جعبه شامل ۸ مهرة سفید و ۲ مهرة سیاه می‌شود، پس احتمال سفید بودن مهرة انتخابی از این جعبه

برابر  $\frac{8}{10}$  می‌شود، یعنی  $P(A|B) = \frac{8}{10}$ . به طور مشابه

$$P(A|B') = \frac{7}{10}$$

۲۲۹- گزینه ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که در پرتاب دو تاس اول

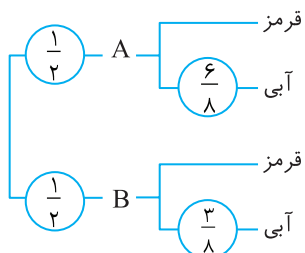
عددهای برابر نیابند (که از اینها (۲,۳)، (۳,۲)، (۱,۴) و (۴,۱) مطلوب‌اند)، B پیشامد این باشد که در پرتاب دو تاس اول عددهای برابر بیابند (که ابتدا (۱,۱) و سپس (۱,۲) یا (۲,۱) مطلوب‌اند) و C پیشامد این باشد

که مجموع نهایی برابر ۵ باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$$

$$= \frac{30}{36} \times \frac{4}{30} + \frac{6}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{73}{648}$$

۲۳۰- گزینه ۴ جعبه‌ها را A و B می‌نامیم. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم است که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{16}$$

۲۲۰- گزینه ۴ چون A و B دو پیشامد ناسازگارند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{8}$$

$$\text{بنابراین } P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۲۲۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0/1 = 0/3 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0/2$$

از طرف دیگر

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/3 + 0/4 - 0/2 = 0/5$$

۲۲۲- گزینه ۲ فرض کنید A پیشامد این باشد که هر دو عدد روبرو شده زوج

باشند و B پیشامد این باشد که مجموع دو عدد روبرو شده برابر ۶ باشد، در این صورت  $B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ ,  $A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$

$$\text{پس } P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{5}$$

۲۲۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$0/2 = P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A \cap B')}{1 - P(B)} = \frac{P(A \cap B')}{0/8}$$

در نتیجه  $P(A \cap B') = 0/2 \times 0/8 = 0/16$

۲۲۴- گزینه ۴ A را پیشامد گرفتن بیماری سارس و B را پیشامد درمان

فرد می‌گیریم. در این صورت  $P(A) = \frac{2}{100}$  و  $P(B|A) = \frac{1}{10}$ . در نتیجه

$$\frac{1}{10} = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{2}{100}} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/002$$

در نتیجه احتمال اینکه فرد هم دچار بیماری شود و هم درمان شود ۰/۰۰۲ است.

۲۲۵- گزینه ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که نفر اول به هدف

بزند و B پیشامد این باشد که نفر دوم به هدف بزند.

توجه کنید که  $P(A) = 0/8$  و  $P(B) = 0/7$ . پیشامدهای A و B مستقل‌اند و در نتیجه  $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0/8 \times 0/7 = 0/56$ . احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/8 + 0/7 - 0/56 = 0/94$$

۲۲۶- گزینه ۳ پیشامد «به هدف زدن شخص اول» را A و پیشامد «به

هدف زدن شخص دوم» را B می‌نامیم. پس

$$P(A) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

پیشامد «حداقل یکی از آن‌ها به هدف نزند» برابر  $A' \cup B'$  است که چون

$A'$  و  $B'$  مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A')P(B') = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{29}{32}$$

۲۲۷- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که در اینجا فضای احتمال

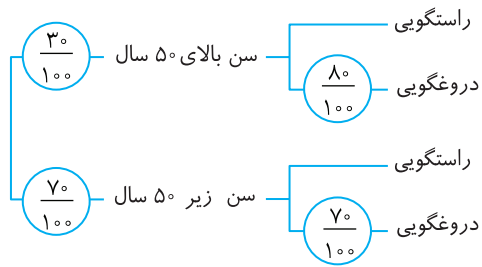
$S = \{ق آ, آ ق, ق ق\}$  است. فرض کنید  $R_\perp$  پیشامد این باشد که توپ

دوم قرمز و  $R_1$  و  $B_1$  به ترتیب پیشامدهای این باشند که توپ اول قرمز و توپ اول آبی باشد. در این صورت، چون  $R_1$  و  $B_1$  فضای S را افزایش می‌کنند،

بنابر قانون احتمال کل،

$$P(R_\perp) = P(R_1)P(R_\perp|R_1) + P(B_1)P(R_\perp|B_1) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$$

۲۳۱- گزینه ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



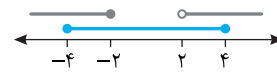
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{3}{100} \times \frac{8}{100} + \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} = \frac{73}{100} = 0.73$$

۲۳۲- گزینه ۲ به کمک شکل زیر، مجموعه داده شده را ساده‌تر

می‌نویسیم:  $A = [-4, -2] \cup (2, 4]$ . بنابراین اعداد صحیح  $-4, -3, -2,$

$3$  و  $4$  در مجموعه  $A$  قرار دارند.



۲۳۳- گزینه ۲ عدد ۲ باید در نامساوی‌های زیر صدق کند:

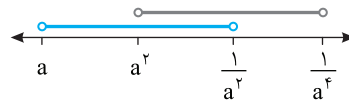
$$2a \leq 2 \Rightarrow a \leq 1, \quad 2 < 3+a \Rightarrow a > -1$$

بنابراین  $-1 < a \leq 1$  و در نتیجه  $a \in (-1, 1]$ .

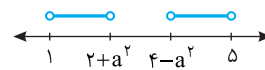
۲۳۴- گزینه ۴ چون  $-1 < a < 0$ ، پس  $a < a^2 < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a^4}$  بنابراین با

توجه به شکل زیر،

$$\left(a, \frac{1}{a^2}\right) \cap \left(a^2, \frac{1}{a^4}\right) = \left(a^2, \frac{1}{a^2}\right)$$



۲۳۵- گزینه ۳ در حالت زیر اشتراک بازه‌ها تهی خواهد بود:



پس

$$4 - a^2 \geq 2 + a^2 \Rightarrow a^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$

یعنی

$$a \in [-1, 1]$$

۲۳۶- گزینه ۳ ابتدا مجموعه  $A$  را با نوشتن اعضایش مشخص می‌کنیم.

توجه کنید برای آنکه  $\frac{1}{x}$  عددی صحیح شود، مقادیر صحیحی که  $x$  می‌تواند

اختیار کند، شامل مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد  $10$  یعنی  $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

است. بنابراین  $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$ . در نتیجه  $A$  مجموعه‌ای متناهی

است. از طرفی مجموعه  $B$  شامل اعداد صحیحی است که معکوسشان از  $1$

بزرگ‌ترند. می‌دانیم معکوس همهٔ عددهای صحیح (به جز صفر)، از  $1$

کوچک‌ترند پس مجموعه  $B$  تهی است. بنابراین مجموعه  $B$  نیز مجموعه‌ای

متناهی است.

۲۳۷- گزینه ۴ اگر تعداد محدودی از اعضای مجموعه نامتناهی  $A$  را که

در مجموعه متناهی  $B$  نیز قرار دارند، حذف کنیم، باز هم مجموعه‌ای نامتناهی

باقی می‌ماند. یعنی  $A - B$  نامتناهی است.

بررسی سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینه (۱) اگر  $A = \mathbb{W}$  و  $B = \mathbb{N}$ ، آن‌گاه  $A - B = \{0\}$ . پس  $A - B$

متناهی است ولی  $A$  و  $B$  نامتناهی‌اند.

گزینه (۲) اگر  $A = \mathbb{Z}$  و  $B = \{1\}$ ، آن‌گاه  $A - B = \mathbb{Z} - \{1\}$ . پس  $A - B$

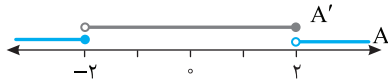
نامتناهی است ولی  $B$  متناهی است.

گزینه (۳) اگر  $A = \{\frac{1}{p}\}$  و  $B = \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه  $A - B = \emptyset$ . پس  $A$  متناهی و

$B$  نامتناهی است ولی  $A - B$  متناهی است.

۲۳۸- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر،  $A' = (-2, 2]$ . بنابراین اعداد

صحیح  $-1$ ،  $0$ ،  $1$  و  $2$  عضو  $A'$  هستند، که مجموع آن‌ها برابر  $2$  است.



۲۳۹- گزینه ۳ مجموعهٔ علاقه‌مندان به فوتبال را با  $A$  و مجموعهٔ

علاقه‌مندان به والیبال را با  $B$  نشان می‌دهیم. در این صورت  $n(A) = 30$ ،

$n(B) = 35$ . از طرف دیگر  $40$  نفر حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند.

پس  $n(A \cup B) = 40$ . بنابراین

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$40 = 30 + 35 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 25$$

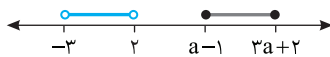
پس  $25$  نفر به هر دو رشته علاقه دارند.

۲۴۰- گزینه ۲

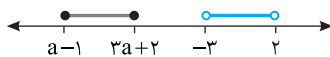
$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$20 - 4 = n(A - B) + n(B - A) \Rightarrow n(A - B) + n(B - A) = 16$$

۲۴۱- گزینه ۱ توجه کنید که در دو حالت زیر این دو بازه جدا از هم هستند:



$$a - 1 \geq 2 \Rightarrow a \geq 3$$



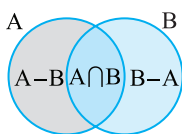
$$3a + 2 \leq -3 \Rightarrow a \leq -\frac{5}{3}$$

از طرف دیگر برای اینکه  $[a-1, 3a+2]$  بازه باشد باید  $a-1 < 3a+2$  و در

نتیجه  $a > -\frac{3}{2}$ . بنابراین

$$a \in ([3, +\infty) \cup (-\infty, -\frac{5}{3}]) \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$$

اگر  $a \geq 3$ ، دو بازهٔ مورد نظر جدا از هم هستند.



۲۴۲- گزینه ۱ با توجه به شکل مقابل

مجموعه‌های  $A - B$ ،  $A \cap B$  و  $B - A$  دو

بازه جدا از هم هستند.

**۲۵۱- گزینه ۲** عدد  $\frac{1}{2}$  واسطه حسابی  $\frac{1}{x}$  و  $\frac{1}{x+2}$  است، پس

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x} \times \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \right) \Rightarrow 1 = \frac{x+2+x}{x(x+2)}$$

در نتیجه

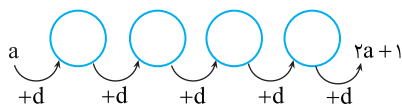
$$x^2 + 2x = 2x + 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

**۲۵۲- گزینه ۲** چون  $a > 0$ ، پس  $2a + 1 > a$ . اکنون قدرنسبت دنباله

را به دست می آوریم  $d = \frac{2a+1-a}{4+1} = \frac{a+1}{5}$ . اختلاف کوچکترین و بزرگترین

عددهایی که درج کرده ایم برابر  $3d$  است و در نتیجه

$$\frac{3(a+1)}{5} = 9 \Rightarrow 3a+3=45 \Rightarrow 3a=42 \Rightarrow a=14$$



**۲۵۳- گزینه ۳** جملات دنباله حسابی را به صورت  $a-d, a, a+d$

در نظر می گیریم. مجموع آن ها  $3a$  است. پس  $3a=21$  و در نتیجه  $a=7$ . از طرف دیگر،

$$(a-d)(a)(a+d) = 168 \Rightarrow 7(49-d^2) = 168$$

$$49-d^2 = 24 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = \pm 5 \Rightarrow 2, 7, 12 \text{ یا } 12, 7, 2$$

پس نسبت بزرگترین عدد به کوچکترین عدد برابر ۶ است.

**۲۵۴- گزینه ۳** فرض کنید قدرنسبت این دنباله هندسی  $r$  باشد ( $r > 0$ ).

در این صورت

$$a_1 + a_5 = 3^0 \Rightarrow a_1 + a_1 r^4 = 3^0 \Rightarrow a_1(1+r^4) = 3^0 \quad (1)$$

$$a_3 + a_7 = 12^0 \Rightarrow a_1 r^2 + a_1 r^6 = 12^0 \Rightarrow a_1 r^2(1+r^4) = 12^0 \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به دست می آید  $r^2 = 4$ : پس

$$r^4 = 16. \text{ به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می شود } a_1 = \frac{3^0}{17}$$

**۲۵۵- گزینه ۲** **راه حل اول** چون  $3+9=5+7=4+8$  پس

$$a_3 a_9 = a_5 a_7 = a_4 a_8$$

$$\text{در نتیجه } a_3 a_5 a_7 a_9 = (a_4 a_8)^2 = 9$$

**راه حل دوم** توجه کنید که

$$a_4 = a_1 r^3, \quad a_8 = a_1 r^7 \Rightarrow a_4 a_8 = a_1^2 r^{10} = 3$$

پس

$$a_3 a_5 a_7 a_9 = a_1 r^2 a_1 r^4 a_1 r^6 a_1 r^8 = a_1^4 r^{20} = (a_1^2 r^{10})^2 = 9$$

**۲۵۶- گزینه ۱** توجه کنید که

$$a_1 a_3 \dots a_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n} \Rightarrow 11 = \sqrt{(a_1 a_n)^n} \Rightarrow a_1 a_n = \pm 11$$

از طرف دیگر،

$$2+7=1+8 \Rightarrow a_2 a_7 = a_1 a_8$$

$$4+5=1+8 \Rightarrow a_4 a_5 = a_1 a_8$$

$$\text{پس } a_2 a_4 a_5 a_7 = (a_2 a_7)(a_4 a_5) = (a_1 a_8)^2 = 9$$

**۲۴۳- گزینه ۱** توجه کنید که در شکل اول، ۶ دایره رنگی وجود دارد. در

شکل دوم، ۴ دایره رنگی به دایره های رنگی اولیه اضافه می شود، در شکل سوم،

$2 \times 4$  دایره رنگی به دایره های رنگی اولیه اضافه می شود، ... در شکل  $n$ ام،

$4 \times (n-1)$  دایره رنگی به دایره های رنگی اولیه اضافه می شود. بنابراین اگر تعداد

دایره های رنگی در شکل  $n$ ام را  $a_n$  بگیریم،  $a_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$

(توجه کنید که شکل  $n$ ام دایره خاکستری دارد). بنابراین

$$a_{20} = 4 \times 20 + 2 = 82$$

**۲۴۴- گزینه ۱** جمله عمومی الگو  $t_n = an + b$  است، پس

$$\begin{cases} t_4 = 16 \\ t_{16} = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 16 \\ 16a + b = 28 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به دست می آید  $a=1$  و  $b=12$ . بنابراین

$$t_n = n + 12 \Rightarrow t_{16} = 17$$

**۲۴۵- گزینه ۲** شکل  $n$ ام از  $(n+2)^2$  مربع کوچک تشکیل شده است

که اگر  $n$  زوج باشد،  $2(n+2)$  مربع کوچک سفید و اگر  $n$  فرد باشد،

$2(n+2) - 1 = 2n + 3$  مربع کوچک سفید در شکل وجود دارد. بنابراین در

شکل هجدهم،  $(20)^2$  مربع کوچک وجود دارد که ۴۰ تای آن ها سفید هستند.

پس در شکل هجدهم ۳۶۰ مربع کوچک رنگی وجود دارد.

**۲۴۶- گزینه ۳** باید ببینیم به ازای کدام مقدار  $n$  تساوی  $\frac{4n-3}{n+3}$

برقرار می شود. پس

$$4n-3 = 3n+9 \Rightarrow n=12$$

بنابراین جمله دوازدهم دنباله برابر ۳ است.

**۲۴۷- گزینه ۴** عدد آخر دسته اول ۲، عدد آخر دسته دوم ۴، عدد

آخر دسته سوم ۶ و ... عدد آخر دسته  $n$ ام برابر  $(2n)^2$  است. پس عدد

آخر دسته دهم  $20^2$  است. بنابراین عدد اول دسته یازدهم ۴۰۲ است.

**۲۴۸- گزینه ۴** از رابطه داده شده  $a_n = a_{n-1} - 3$  به دست می آید.

یعنی هر جمله دنباله از جمع کردن ۳- با جمله قبلی آن به دست می آید. پس

یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۳- و جمله اول ۴- داریم که جمله بیستم آن

$$\text{برابر است با } a_{20} = a_1 + 19d = -4 + 19(-3) = -61$$

**۲۴۹- گزینه ۱** فرض کنید جمله اول این دنباله،  $a_1$  و قدرنسبت آن  $d$

باشد. در این صورت

$$a_4 = 5 \Rightarrow a_1 + (4-1)d = 5 \Rightarrow a_1 + 3d = 5 \quad (1)$$

$$a_9 = 3^0 \Rightarrow a_1 + (9-1)d = 3^0 \Rightarrow a_1 + 8d = 3^0 \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به دست می آید  $5d = 25$ . پس

$d = 5$ . اکنون اگر این مقدار  $d$  را در تساوی (۱) قرار دهیم، به دست می آید

$a_1 = -10$ . بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی مورد نظر، برابر است با

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -10 + (n-1)(5) = 5n - 15$$

**۲۵۰- گزینه ۲** این اعداد دنباله ای حسابی تشکیل می دهند که متناهی

بوده و قدرنسبت آن ۷ است. کوچکترین عدد سه رقمی که بر ۷ بخش پذیر

است، ۱۰۵ و بزرگترین عدد سه رقمی که بر ۷ بخش پذیر است، ۹۹۴ است.

پس تعداد این اعداد  $\frac{994-105}{7} + 1$  است که برابر است با ۱۲۸.

۲۶۶- گزینه ۱ بنابر اتحاد مربع مجموع سه جمله،

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab-bc+ca) \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$ab+bc-ca = -8 \Rightarrow -ab-bc+ca = -8$$

در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$36 = a^2 + b^2 + c^2 - 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 52$$

۲۶۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$  و

$$(x-4)(x+1) = x^2 - 3x - 4$$

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x+1) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4)$$

$$= (7+2)(7-4) = 27$$

۲۶۸- گزینه ۲ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$$

$$= -7x^3 + 6x^2 + 6x - 7$$

بنابراین ضریب  $x^2$  برابر ۶ است.

۲۶۹- گزینه ۳ ابتدا عبارت را به کمک اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر

ساده می‌کنیم:

$$A = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)+1$$

$$= ((x-1)(x^2+x+1))((x+1)(x^2-x+1))+1$$

$$= (x^3-1)(x^3+1)+1 = x^6 - 1 + 1 = x^6$$

حال قرار می‌دهیم  $x = \sqrt[3]{2}$  و نتیجه می‌شود  $A = (\sqrt[3]{2})^6 = \sqrt{2}$

۲۷۰- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$x^2 - y^2 - 6x - 8y - 7 = (x^2 - 6x + 9) - (y^2 + 8y + 16)$$

$$= (x-3)^2 - (y+4)^2 = (x-3-(y+4))(x-3+y+4)$$

$$= (x-y-7)(x+y+1)$$

بنابراین  $x+y+1$  عامل عبارت مورد نظر است.

۲۷۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$x^4 + 3x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 = (x^2 + 2)^2 - x^2$$

$$= (x^2 + 2 - x)(x^2 + 2 + x)$$

بنابراین  $x^2 - x + 2$  عاملی از عبارت مورد نظر است.

۲۷۲- گزینه ۳ صورت کسر اول برابر است با

$$3y^3 + 3 = 3(y^3 + 1) = 3(y+1)(y^2 - y + 1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{3(y+1)(y^2 - y + 1)}{y-x} \times \frac{x(y-x)}{x(1-y+y^2)} = 3(y+1)$$

۲۷۳- گزینه ۳ با توجه به اتحاد جمله مشترک، عبارت داده شده را

ساده می‌کنیم:

$$a^2 + ab + ac + bc = a^2 + a(b+c) + bc = (a+b)(a+c)$$

توجه کنید که  $a+c = a+b+c-b = 3+2=5$ . بنابراین حاصل عبارت مورد نظر

برابر است با  $3 \times 5 = 15$ .

۲۵۷- گزینه ۲ اگر جمله اول دنباله حسابی  $a$  و قدرنسبت آن  $d$  باشد،

جملات دوم، چهارم و نهم به ترتیب  $a+d$ ،  $a+3d$  و  $a+8d$  هستند. پس

$a+3d$  واسطه هندسی  $a+d$  و  $a+8d$  است و در نتیجه

$$(a+3d)^2 = (a+d)(a+8d) \Rightarrow a^2 + 6ad + 9d^2 = a^2 + 9ad + 8d^2$$

$$d^2 = 3ad \Rightarrow d = 3a$$

پس قدرنسبت دنباله حسابی ۳ برابر جمله اول آن است.

۲۵۸- گزینه ۲ چون  $x < 0$ ، پس  $\sqrt[3]{x^4} = |x| = -x$ . در نتیجه

$$3\sqrt[3]{x^3} + 2\sqrt[4]{x^4} = 3x + 2(-x) = x$$

۲۵۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$b\sqrt[6]{a^6} - a = 0 \Rightarrow b|a| - a = 0 \Rightarrow b|a| = a$$

بنابراین اگر  $a > 0$ ،  $b = 1$  و اگر  $a < 0$ ،  $b = -1$ . در نتیجه

$\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[6]{b^6} = |a| + |b| = |a+1|$  که اگر  $a$  مثبت باشد برابر با  $1+a$  و اگر

$a$  منفی باشد، برابر با  $1-a$  است.

۲۶۰- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^n}}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^n}}} \Rightarrow \sqrt[4 \times 3 \times 2]{2^n} = \sqrt[24]{2^n} = \sqrt[24]{2^{24}} \Rightarrow \frac{n}{24} = 2 \Rightarrow n = 48$$

$$\frac{n}{16} = 2 \Rightarrow \frac{n}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow n = 2$$

۲۶۱- گزینه ۳ از  $a > \sqrt{a}$  نتیجه می‌شود  $a > 1$ . بنابراین  $a^2 < a^3$  و در

نتیجه  $\sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{a^3}$ ، یعنی  $\sqrt[3]{a^2} < a$ . همچنین  $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$  پس

$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} > \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ . بنابراین نابرابری داده شده در گزینه (۳) نادرست است.

۲۶۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$a^5 = 16 \Rightarrow (a^5)^3 = 16^3 \Rightarrow a = 16^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{بنابراین } a^4 = (16^{\frac{1}{3}})^4 = 16^{\frac{4}{3}} = 16^{\frac{3}{3}} \times 16^{\frac{1}{3}} = 16 \times 16^{\frac{1}{3}} = 2^5 = 32$$

۲۶۳- گزینه ۳ با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا به دست می‌آید

$$\sqrt[3]{3^2 \sqrt[3]{3}} \sqrt[4]{3} = \sqrt[3 \times 3 \times 3 \times 4]{3^2 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^1} = \sqrt[36]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{36}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{بنابراین } a = \frac{19}{24}$$

۲۶۴- گزینه ۳ توجه کنید که  $(2a + \frac{3}{a})^2 - 12 = 4a^2 + \frac{9}{a^2} - 12$ . از طرف

دیگر، بنابر فرض  $4 = 2a + \frac{3}{a}$ ، اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، به دست

می‌آید  $8 = 2a + \frac{3}{a}$ . بنابراین، حاصل عبارت مورد نظر برابر است با  $8 - 12 = -4$ .

۲۶۵- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \div \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \times \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2}}{\sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2}} = \frac{\sqrt{9-8}}{\sqrt{36-20}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$



**۲۷۴- گزینه ۲** می توان نوشت  

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2} = \frac{(a^2)^3-1}{a^2(a^2-1)} = \frac{(a^2-1)((a^2)^2+a^2+1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$= \frac{a^4+a^2+1}{a^2} = \frac{a^4}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} + 1$$

$$= (a - \frac{1}{a})^2 + 2 + 1 = \sqrt{5}^2 + 3 = 8$$

**۲۷۵- گزینه ۱** مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می کنیم:  

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - 5 = \frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - 5 = \frac{4\sqrt{3}+4+6+2\sqrt{3}}{3-1} - 5$$

$$= \frac{10+6\sqrt{3}}{2} - 5 = 5+3\sqrt{3}-5 = 3\sqrt{3}$$

**۲۷۶- گزینه ۳** صورت و مخرج کسر داده شده را در  $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$  ضرب می کنیم:  

$$\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$
 اکنون صورت و مخرج این کسر را در  $\sqrt{2}$  ضرب می کنیم:  

$$\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

**۲۷۷- گزینه ۴** ابتدا مخرج طرف چپ تساوی را گویا می کنیم:  

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{9}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{9}+\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{9}+\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1}$$

$$= \frac{\sqrt{9}+\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{9} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$$
 بنابراین  $a = \frac{1}{2}$

**۲۷۸- گزینه ۱** باقی مانده تقسیم چندجمله ای  $P(x)$  بر  $x-2$  برابر است با  $P(2) = 2^5 - 4(2)^3 + 3(2)^2 - 2 + 1 = 11$

**۲۷۹- گزینه ۴** باقی مانده تقسیم چندجمله ای  $P(x)$  بر  $x-1$  برابر است با  $P(1) = 3 - 4a - 5 = -4a - 2$  چون چندجمله ای  $P(x)$  بر  $x-1$  بخش پذیر است، پس این باقی مانده صفر است، در نتیجه  

$$-4a - 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

**۲۸۰- گزینه ۳** چون چندجمله ای  $P(x)$  بر  $x+3$  بخش پذیر است، پس  $P(-3) = 0$  در نتیجه  

$$P(-3) = (-3)^4 + 3(-3)^3 + a(-3)^2 - 9 = 0$$
 بنابراین  $a = 1$  و  $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 9$  از طرف دیگر، باقی مانده تقسیم چندجمله ای  $P(x+1)$  بر  $x+2$  برابر است با  $P(-1) = P(-2+1)$  اکنون توجه کنید که  $P(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + (-1)^2 - 9 = -10$

**۲۸۱- گزینه ۱** جواب های معادله برابر هستند با  

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} = 4 \pm \sqrt{3}$$

**۲۸۲- گزینه ۳** معادله گزینه (۳) به ازای هر مقدار  $m$  جواب حقیقی دارد، زیرا معادله ای که به ازای هر  $m$ ، دلتای مربوط به آن همیشه مثبت باشد، جواب این تست است.  

$$mx^2 - x - m = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4m^2 > 0$$
 توجه کنید که اگر  $m = 0$ ، آن گاه معادله به یک معادله درجه اول تبدیل می شود که باز هم دارای جواب حقیقی است. بررسی سایر گزینه ها به صورت زیر است:  
**گزینه (۱)**  $\Delta$  همواره مثبت نیست.  $x^2 - 2x + m = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4m$   
**گزینه (۲)**  $\Delta$  همواره مثبت نیست.  $x^2 - x + m^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4m^2$   
**گزینه (۴)**  $\Delta$  همواره مثبت نیست.  $mx^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4m$

**۲۸۳- گزینه ۱** باید  $\Delta \geq 0$ ، پس  

$$x^2 - (k+1)x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 4 \geq 0$$

$$(k+1)^2 \geq 4 \xrightarrow{k > 0} k+1 \geq 2 \Rightarrow k \geq 1$$
 پس حداقل مقدار مثبت  $k$  برابر ۱ است.  
**۲۸۴- گزینه ۱** توجه کنید که چون مجموع ضریب های معادله  $92x^2 - 167x + 75 = 0$  برابر با صفر است، پس یکی از جواب های معادله مورد نظر ۱ و جواب دیگر آن  $\frac{75}{92}$  است. چون  $\frac{75}{92} < 1$ ، پس کوچک ترین جواب  $\frac{75}{92}$  است.  
**۲۸۵- گزینه ۱** معادله را به روش تجزیه حل می کنیم:  

$$(x - \sqrt{3})(x - 2\sqrt{2}) = 0 \xrightarrow{x_1 < x_2} x_1 = \sqrt{3}, x_2 = 2\sqrt{2}$$
 بنابراین  $x_1^4 + x_2^4 = (\sqrt{3})^4 + (2\sqrt{2})^4 = 9 + 16 = 25$   
**۲۸۶- گزینه ۳** این دو عدد فرد را  $x$  و  $x+2$  فرض می کنیم. بنابراین  

$$x^2 + (x+2)^2 = 13 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 13 \Rightarrow x^2 + 2x - 4.5 = 0$$

$$(x+9)(x-7) = 0 \Rightarrow x = -9 \text{ (غ.ق.)}, x = 7$$
 بنابراین دو عدد مورد نظر، ۷ و ۹ هستند و اختلاف مربع های آن ها برابر ۸۱-۴۹ یعنی ۳۲ است.  
**۲۸۷- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که  

$$x_1^4 x_2 + x_1 x_2^4 = x_1 x_2 (x_1^3 + x_2^3)$$
 از طرف دیگر،  $x_1 + x_2 = 4$  و  $x_1 x_2 = -1$ . بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با  $(-1)(4) = -4$ .  
**۲۸۸- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که  $\alpha + \beta = 2$  و  $\alpha\beta = -5$ . بنابراین  

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 8 - 3 \times (-5) \times 2 = 38$$
**۲۸۹- گزینه ۳** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب های معادله باشند، آن گاه  $\alpha = -\frac{1}{\beta}$  و در نتیجه  $\alpha\beta = -1$ . بنابراین  

$$\frac{m-1}{2} = -1 \Rightarrow m-1 = -2 \Rightarrow m = -1$$
**۲۹۰- گزینه ۴** توجه کنید که  $x_1 + x_2 = -5$  و چون  $2x_1 - x_2 = 17$ ، پس با جمع کردن طرفین این تساوی ها به دست می آید  $x_1 = 4$ . چون  $x_1$  جواب معادله مورد نظر است، پس ۴ در این معادله صدق می کند:  

$$4^2 + 5(4) - 4m + 16 = 0 \Rightarrow m = 13$$

۲۹۷- گزینه ۴ توجه کنید که معادله دو جواب دارد که یکی مثبت و

یکی منفی است، پس حاصل ضرب جواب‌ها منفی است:

$$\frac{\delta(k-2)}{k+6} < 0 \Rightarrow k \in (-6, 2)$$

از طرف دیگر چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع جواب‌ها منفی است

$$-\frac{17(k+1)}{k+6} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{k+6} > 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -6) \cup (-1, +\infty)$$

بنابراین  $k \in (-1, 2)$ .

۲۹۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که  $x = -1$  یک جواب معادله است.

$$(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) - 1 = 0$$

بنابراین معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) - (2x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$x^2(x+1) - (x+1)(2x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

پس جواب‌های دیگر از حل معادله  $x^2 - 2x - 1 = 0$  به دست می‌آیند که عبارت‌اند از  $1 + \sqrt{2}$  و  $1 - \sqrt{2}$ . در نتیجه مجموع جواب‌های منفی معادله برابر است با  $-\sqrt{2} = -1 + (1 - \sqrt{2})$ .

۲۹۹- گزینه ۴ چون  $x = 2$  یکی از جواب‌های معادله است، پس در

معادله صدق می‌کند:  $8 + 4a + 2 + 6 = 0$  پس  $a = -4$ . چون  $x = 2$  عاملی از

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)Q(x)$$
 است، بنابراین  $x^3 - 4x^2 + x + 6$

برای به دست آوردن  $Q(x)$  چندجمله‌ای  $x^3 - 4x^2 + x + 6$  را بر  $x - 2$

تقسیم می‌کنیم، که نتیجه می‌شود  $Q(x) = x^2 - 2x - 3$ . بنابراین

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)(x^2 - 2x - 3) = (x-2)(x+1)(x-3)$$

پس به غیر از  $x = 2$  جواب‌های دیگر معادله  $-1$  و  $3$  هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها  $10$  است.

۳۰۰- گزینه ۴ اگر فرض کنیم  $t = x^2 \geq 0$ ، معادله به صورت

$$t^2 - 3t - 1 = 0 \text{ در می‌آید که جواب‌های آن } t = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ است. عدد}$$

$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ منفی است و قابل قبول نیست. بنابراین}$$

$$x^2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}$$

پس حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر است با

$$-\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} = -\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

۳۰۱- گزینه ۳ اگر فرض کنیم  $x^2 = t$ ، آن‌گاه  $x = \pm \sqrt{t}$  و  $t \geq 0$ .

همچنین معادله به شکل  $t^2 - 2t + m^2 - 1 = 0$  در می‌آید. اگر این معادله دو جواب مثبت داشته باشد، معادله اصلی چهار جواب خواهد داشت. بنابراین در

معادله  $t^2 - 2t + m^2 - 1 = 0$  باید شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m^2 - 1) > 0 \Rightarrow m^2 < 2 \Rightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 2 > 0, \quad \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 1$$

بنابراین اگر  $m$  عضو مجموعه  $(1, \sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1)$  باشد، معادله اصلی

چهار جواب خواهد داشت. این مجموعه را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - [-1, 1]$$

۲۹۱- گزینه ۴  $\beta$  جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$2\beta^2 - \beta - 7 = 0 \Rightarrow 2\beta^2 = \beta + 7$$

از طرف دیگر،  $\alpha + \beta = \frac{1}{p}$ . بنابراین  $\alpha + \beta + 7 = \frac{1}{p} + 7 = \frac{15}{p}$ .

۲۹۲- گزینه ۳ مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها را حساب می‌کنیم

$$S = \alpha + \beta = 2 - \sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} = 5$$

$$P = \alpha\beta = (2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 3 - \sqrt{3} = 0$$

۲۹۳- گزینه ۱ توجه کنید که  $x_1 + x_2 = 1$  و  $x_1 x_2 = -1$ . بنابراین

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{x_2+1+x_1+1}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{x_1+x_2+2}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2} = \frac{1+2}{1+1-1} = 3$$

$$\frac{1}{x_1+1} \times \frac{1}{x_2+1} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{1}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2} = \frac{1}{1+1-1} = 1$$

بنابراین معادله مورد نظر  $x^2 - 3x + 1 = 0$  است.

۲۹۴- گزینه ۲ برای اینکه جواب‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$

مختلف علامت باشند، کافی است  $\frac{c}{a} < 0$ . توجه کنید که در این حالت

$\Delta > 0$ . بنابراین

$$\frac{m+2}{m} < 0 \Rightarrow -2 < m < 0$$

۲۹۵- گزینه ۴ راه‌حل اول برای اینکه معادله مورد نظر دو جواب منفی

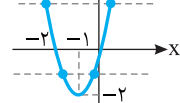
داشته باشد، باید  $\Delta > 0$ ، مجموع جواب‌ها منفی و حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد. در نتیجه

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4(-2)(a) > 0 \Rightarrow a > -2, \quad \frac{4}{-2} = -2 < 0, \quad \frac{a}{-2} > 0 \Rightarrow a < 0$$

بنابراین  $-2 < a < 0$ .

راه‌حل دوم ابتدا معادله داده‌شده را به صورت

$2x^2 + 4x = a$  می‌نویسیم. اکنون سهمی به معادله



مختصات رسم می‌کنیم. بنابراین اگر  $-2 < a < 0$ ،

معادله دو جواب منفی دارد و اگر  $a > 0$ ، معادله یک

جواب منفی و یک جواب مثبت دارد.

توجه کنید که  $x = 0$  و  $x = -2$  طول نقاط برخورد سهمی با محور  $x$  هستند و

رأسش که نقطهٔ مینیمم آن است نقطه  $(-1, -2)$  است.

۲۹۶- گزینه ۱ شرط داشتن دو جواب، مثبت بودن  $\Delta$  است. پس

$$\Delta = (a+1)^2 - 64 > 0 \Rightarrow (a+1)^2 > 64 \Rightarrow \begin{cases} a+1 > 8 \Rightarrow a > 7 \\ \text{یا} \\ a+1 < -8 \Rightarrow a < -9 \end{cases} \quad (1)$$

شرط مثبت بودن دو جواب این است که مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها مثبت

باشند. حاصل ضرب جواب‌ها برابر  $4$  است که مثبت است و مجموع جواب‌ها

برابر  $-\frac{a+1}{2}$  است. پس

$$-\frac{a+1}{2} > 0 \Rightarrow a+1 < 0 \Rightarrow a < -1 \quad (2)$$

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $a < -9$ .

به این ترتیب

$$x^2 + x + 1 = -\frac{5}{2} \Rightarrow x^2 + x + \frac{5}{2} = 0 \quad (\Delta < 0)$$

جواب ندارد ( $\Delta < 0$ )

$$x^2 + x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

**۳-۸ گزینۀ ۱** ابتدا توجه کنید که

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4$$

پس معادله مورد نظر به معادله  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{3}{2}$  تبدیل می‌شود.

بنابراین یا  $x - \frac{1}{x} = 0$ ، یعنی  $x^2 - 1 = 0$ ، که مجموع جواب‌هایش صفر است.

یا  $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ ، یعنی  $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$  که مجموع جواب‌هایش  $\frac{3}{2}$  است.

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر با  $\frac{3}{2}$  است.

**۳-۹ گزینۀ ۴** اگر این عدد  $x$  باشد، آن‌گاه

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow x + 1 = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - x - 1 = 0$$

معادله بالا دو جواب دارد که حاصل ضرب آن‌ها برابر  $-\frac{1}{4}$  است.

**۳-۱۰ گزینۀ ۳** اگر ماشین کندتر به تنهایی در  $t$  ساعت کار را تمام کند.

ماشین سریع‌تر به تنهایی در  $\frac{t}{3}$  ساعت کار را تمام می‌کند. پس ماشین کندتر

به تنهایی در یک ساعت  $\frac{1}{t}$  کار و ماشین سریع‌تر به تنهایی در یک ساعت  $\frac{3}{t}$

کار را انجام می‌دهد. از طرف دیگر دو ماشین با هم در یک ساعت  $\frac{1}{6}$  کار را

انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t} + \frac{3}{t} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{4}{t} = \frac{1}{6} \Rightarrow t = 24$$

بنابراین ماشین کندتر به تنهایی در ۲۴ ساعت کار را انجام می‌دهد.

**۳-۱۱ گزینۀ ۳** با توجه به جدول تعیین علامت باید  $a - b < 0$ ، پس

$a < b$ . همچنین  $x = b$  ریشه عبارت است. بنابراین

$$(a-b)b - 2a + 2b = 0 \Rightarrow (a-b)b - 2(a-b) = 0$$

$$(a-b)(b-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \Rightarrow a=b & (\text{غ.ق.}) \\ b-2=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

چون  $a$  عددی طبیعی است، پس

$$a = b = 2 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین  $a + b = 3$ .

**۳-۱۲ گزینۀ ۲** با توجه به جدول تعیین علامت، مشخص است که

عبارت مورد نظر باید چندجمله‌ای درجه اول باشد. پس  $a - 2 = 0$  و در نتیجه

$a = 2$ . بنابراین عبارت به صورت  $y = -(2+b)x + 4$  است. چون  $x = 4$

ریشه عبارت است، پس

$$-(2+b) \times 4 + 4 = 0 \Rightarrow b = -1$$

بنابراین  $a - b = 3$ .

**۳-۲ گزینۀ ۳** معادله را به شکل  $(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) - 3 = 0$

می‌نویسیم. با قرار دادن  $x^2 - x = t$  به دست می‌آید

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = -3, t = 1$$

معادله جواب ندارد  $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$

$x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$  مجموع جواب‌ها  $= 1$

**۳-۳ گزینۀ ۲** معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x \left( \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = 0 \Rightarrow x \left( \frac{2(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} \right) = 0$$

$$x \left( \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x(x+3)}{(x-1)(x+1)} = 0$$

جواب‌های این معادله ۰ و -۳ هستند که هر دو قابل قبول هستند و مجموع آن‌ها -۳ است.

**۳-۴ گزینۀ ۳** دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرهای دو طرف

که برابر  $3(x-3)(x+3)$  است ضرب می‌کنیم:

$$3(x-3)(x+3) \frac{x+3}{x-3} + 3(x-3)(x+3) \frac{x-3}{x+3} = \frac{1}{3} \times 3(x-3)(x+3)$$

$$3(x+3)^2 + 3(x-3)^2 = 1 \cdot (x-3)(x+3)$$

$$3(x^2 + 6x + 9) + 3(x^2 - 6x + 9) = 1 \cdot (x^2 - 9)$$

$$6x^2 + 54 = 1 \cdot x^2 - 9 \Rightarrow 4x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 6$$

چون -۶ و ۶ هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند، هر دو قابل قبول هستند.

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر -۳۶ است.

**۳-۵ گزینۀ ۲** معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{2x - 2a + x + 3}{(x+3)(x-a)} = 4 \Rightarrow \frac{3x - 2a + 3}{(x+3)(x-a)} = 4$$

$$3x - 2a + 3 = 4x^2 + (12 - 4a)x - 12a$$

$$4x^2 + (9 - 4a)x - 10a - 3 = 0$$

بنابراین

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{4a - 9}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 4a - 9 = -1 \Rightarrow a = 2$$

اگر  $a = 2$ ، آن‌گاه معادله به صورت  $4x^2 + x - 23 = 0$  درمی‌آید که چون

$\Delta > 0$  پس معادله دو جواب دارد.  $x = 2$  و  $x = -3$  که هر کدام مخرج یکی

از کسرهای را در معادله اولیه صفر می‌کنند، هیچ‌کدام جواب معادله بالا نیستند.

پس هر دو جواب این معادله قابل قبول هستند.

**۳-۶ گزینۀ ۱** طرفین معادله را در  $x(x+a)$  ضرب می‌کنیم

$$x + a + 3x = 2x^2 + 2ax \Rightarrow 2x^2 + (2a - 4)x - a = 0$$

برای اینکه معادله جواب داشته باشد باید  $\Delta \geq 0$ ، پس

$$(2a - 4)^2 + 4a \geq 0 \Rightarrow 4a^2 - 16a + 16 + 4a \geq 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 4 \geq 0$$

عبارت  $a^2 - 3a + 4$  همواره مثبت است، پس معادله به‌ازای تمام مقادیر  $a$

جواب دارد.

**۳-۷ گزینۀ ۲** سمت راست معادله داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{15}{x^2 + x + 1} = 2(x^2 + x + 1) - 1$$

اگر فرض کنیم  $x^2 + x + 1 = t$ ، این معادله می‌شود

$$\frac{15}{t} = 2t - 1 \Rightarrow 15 = 2t^2 - t \Rightarrow 2t^2 - t - 15 = 0 \Rightarrow t = -\frac{5}{2}, t = 3$$

جواب‌های این معادله به صورت  $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  و  $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  هستند. ولی

در معادله اصلی صدق نمی‌کند زیرا این عدد کوچک‌تر از ۲ است و

در معادله  $\sqrt{x-1} = x-2$  اگر  $1 < x < 2$ ، آن‌گاه سمت چپ معادله، نامنفی و

سمت راست آن منفی است که قابل قبول نیست. بنابراین فقط  $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

جواب معادله است.

**۳۱۹- گزینه ۱** معادله را به شکل  $\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{2x+3}$  می‌نویسیم و

طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$x+1+1+2\sqrt{x+1} = 2x+3 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = x+1$$

دوباره طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$4(x+1) = (x+1)^2 \Rightarrow 4x+4 = x^2+2x+1$$

$$x^2-2x-3 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس مجموع جواب‌ها برابر ۲ است.

**۳۲۰- گزینه ۴** معادله مورد نظر را این‌طور می‌نویسیم:

$$x^2 + 5x + 28 - 24 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0$$

اکنون اگر فرض کنیم  $\sqrt{x^2 + 5x + 28} = t$ ، این معادله می‌شود

$$t^2 - 24 - 5t = 0 \Rightarrow (t-8)(t+3) = 0 \Rightarrow t = 8, t = -3$$

چون  $t \geq 0$ ، پس  $t = 8$ ، یعنی

$$\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 8 \Rightarrow x^2 + 5x + 28 = 64 \Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$(x-4)(x+9) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -9$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر -۳۶ است.

**۳۲۱- گزینه ۲** اگر این عدد را  $x$  فرض کنیم، آن‌گاه

$$x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow x^2 = 4x$$

$$x = 0, x = 4$$

چون هر دو عدد در معادله اولیه صدق می‌کنند، بنابراین دو عدد با خاصیت

مورد نظر وجود دارد.

**۳۲۲- گزینه ۱**

$$|3 + |2 - |1 + a|| = |3 + |2 - (-(1+a))|| \quad (\text{چون } 1+a < 0)$$

$$= |3 + |3 + a|| = |3 - (3+a)| \quad (\text{چون } 3+a < 0)$$

$$= |-a| = -a \quad (\text{چون } a < 0)$$

**۳۲۳- گزینه ۴** چون  $a$  منفی است، پس  $|a| = -a$ ، در نتیجه

$$||a| - b| = |-a - b|$$

$$b < |a| = -a \Rightarrow a + b < 0$$

بنابراین  $||a| - b| = |-a - b| = -a - b$  از طرف دیگر،

$$|b - |2a|| = |b - 2|a|| = |b + 2a|$$

چون  $b + 2a = \underbrace{b+a}_{< 0} + \underbrace{a}_{< 0}$ ، در نتیجه  $|b + 2a| = -b - 2a$ ، بنابراین

$$\text{حاصل عبارت مورد نظر برابر است با } -a - b - (-b - 2a) = a$$

**۳۱۳- گزینه ۳** ابتدا عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)^3}$$

اکنون آن را ساده می‌کنیم  $y = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-2)^2}$ . چون عبارت‌های  $(x-1)^2$  و

$(x-2)^2$  نامنفی هستند، علامت عبارت اخیر را با توجه به علامت  $x+1$

تعیین می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y		-	+	+	+

**۳۱۴- گزینه ۲** دو نامعادله  $3x-2 < 5x+6$  و  $4x-1 < 3x-2$  را

حل می‌کنیم:

$$3x-2 < 5x+6 \Rightarrow -2x < 8 \Rightarrow x > -4, \quad 4x-1 < 3x-2 \Rightarrow x < -1$$

اشتراک مجموعه جواب‌های فوق یعنی  $-4 < x < -1$  جواب مسئله است. پس

$$a = -4 \quad \text{و} \quad b = -1 \quad \text{در نتیجه} \quad a+b = -5$$

**۳۱۵- گزینه ۱** باید شرایط  $\Delta < 0$  و  $a > 0$  برقرار باشند. پس

$$m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (1)$$

$$\Delta = 8 - 4m(m-1) < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) > 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر باید

$$m < -1 \quad \text{یا} \quad m > 2 \quad (2)$$

از دو شرط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $m > 2$ .

m	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$m^2 - m - 2$		+	-	+

**۳۱۶- گزینه ۴** ابتدا جدول تعیین علامت عبارت  $y = \frac{(1-x)^2(x+2)^3}{x|x|(2-x)^5}$

را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
y		+	-	+	+	-

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر  $(0, 2) \cup (-2, -\infty)$  است.

**۳۱۷- گزینه ۱** نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x - \frac{2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x} \geq 0$$

به کمک تعیین علامت مجموعه جواب‌های نامعادله را تعیین می‌کنیم.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$\frac{x^2 - x - 2}{x}$		-	+	-	+

این مجموعه به صورت  $[0, 2) \cup [-1, +\infty)$  است. پس  $a = -1$  و  $b = 2$  در

نتیجه  $a+b = 1$ .

**۳۱۸- گزینه ۱** طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده

می‌کنیم:

$$x-1 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$$

در نتیجه  $(2x-x-2)(2x+x-2) > 0$  یا به طور معادل  
 $(x+2)(3x-2) > 0$

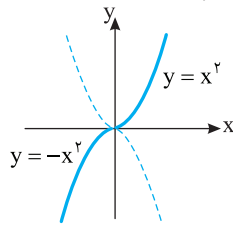
بنابراین مجموعه جواب‌های مورد نظر برابر است با  $(-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$ .

**گزینه ۳۳۲ - ۴** توجه کنید که

$$f(\sqrt{3}-1) + f(\sqrt{5}-2) = 5|3(\sqrt{3}-1)-2| - 3|5(\sqrt{3}-1)-2| \\ + 5|3(\sqrt{5}-2)-2| - 3|5(\sqrt{5}-2)-2| = 5|3\sqrt{3}-5| - 3|5\sqrt{3}-7| \\ + 5|3\sqrt{5}-8| - 3|5\sqrt{5}-12| = -4 + 4 = 0$$

**گزینه ۳۳۳ - ۳** ضابطه تابع  $f$  به شکل  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$  است.

پس باید برای  $x \geq 0$  نمودار تابع  $y = x^2$  را رسم کنیم و برای  $x \leq 0$  نمودار تابع  $y = -x^2$  را رسم کنیم.



**گزینه ۳۳۴ - ۱** توجه کنید که  $\frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$  بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases} \text{ در نتیجه نمودار تابع } f \text{ مانند گزینه (۱) است.}$$

**گزینه ۳۳۵ - ۳** توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)+x & x \leq -1 \\ x+1+x & -1 < x \leq 0 \\ x+1-x & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ 2x+1 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

در نتیجه نمودار تابع  $f$  مانند گزینه (۳) است.

**گزینه ۳۳۶ - ۱** توجه کنید که

$$[\frac{1}{p}] = 0, [\frac{2}{p}] = [\frac{3}{p}] = 1, [\frac{4}{p}] = [\frac{5}{p}] = 2, \dots, [\frac{18}{p}] = [\frac{19}{p}] = 9, [\frac{20}{p}] = 10$$

از جمع تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

$$[\frac{1}{p}] + [\frac{2}{p}] + [\frac{3}{p}] + \dots + [\frac{20}{p}] = 2(1+2+\dots+9) + 10 = 90 + 10 = 100$$

**گزینه ۳۳۷ - ۴** ابتدا با حل نامعادله، محدوده  $x$  را می‌یابیم:

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

اگر عددی بین  $-1$  و  $0$  باشد و به توان هر عدد فردی برسد، در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد، عددی بین  $0$  و  $1$  می‌شود، یعنی

$$-1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x^{2k} < 1 \Rightarrow [x^{2k}] = 0 \\ -1 < x^{2k+1} < 0 \Rightarrow [x^{2k+1}] = -1 \end{cases}$$

$$[x] + [x^2] + \dots + [x^{10}] = 5 \times 0 + 5 \times (-1) = -5$$

**گزینه ۳۲۴ - ۳** چون  $1 < x < 2$ ، پس

$$\frac{|x-2|}{x-2} = \frac{2-x}{x-2} = -1, \quad \frac{x-1}{|x-1|} = \frac{x-1}{x-1} = 1, \quad \frac{|x|}{x} = 1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با  $-1-1+1 = -1$ .

**گزینه ۳۲۵ - ۴** توجه کنید که

$$x^2 < x \Rightarrow x^2 - x = x(x-1) < 0$$

در نتیجه  $0 < x < 1$ ، بنابراین  $|x+1| = x+1$ ،  $|1-x| = 1-x$  و  $|x| = x$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با  $x+1-(1-x)+x = 3x$ .

**گزینه ۳۲۶ - ۴** معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$|x-2|=3 \Rightarrow \begin{cases} x-2=3 \\ x-2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۴ است.

**گزینه ۳۲۷ - ۱** راه‌حل اول توجه کنید که  $|x| = |x|$  و  $|3x| = 3|x|$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$|x| + |x| + 3|x| = 15 \Rightarrow 5|x| = 15 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = -3, x = 3$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر صفر است.

**راه‌حل دوم** توجه کنید که اگر  $x$  جواب معادله مورد نظر باشد،  $-x$  هم جواب این معادله است. بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر صفر است.

**گزینه ۳۲۸ - ۴** از تساوی  $|3x-x^2| = |x-1|$  تساوی‌های زیر نتیجه

می‌شوند

$$3x-x^2 = x-1 \Rightarrow x^2-2x-1=0 \quad (1)$$

$$3x-x^2 = -(x-1) \Rightarrow x^2-4x+1=0 \quad (2)$$

مجموع جواب‌های معادله (۱) برابر ۲ و مجموع جواب‌های معادله (۲) برابر ۴ است. پس مجموع جواب‌های معادله اصلی برابر ۶ است (توجه کنید که معادله‌های به دست آمده، جواب مشترک ندارند).

**گزینه ۳۲۹ - ۲** نامعادله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$-3 \leq 2x-a \leq 3 \Rightarrow a-3 \leq 2x \leq a+3 \Rightarrow \frac{a-3}{2} \leq x \leq \frac{a+3}{2}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله، بازه  $[\frac{a-3}{2}, \frac{a+3}{2}]$  است. پس

$$\frac{a-3}{2} = -a \Rightarrow a-3 = -2a \Rightarrow a=1, \quad \frac{a+3}{2} = b \Rightarrow b=2$$

**گزینه ۳۳۰ - ۲** نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$||x-2| < 6 \Rightarrow -6 < |x-2| < 6 \Rightarrow -4 < |x| < 8$$

نابرابری  $-4 < |x|$  همواره برقرار است. پس کافی است نامعادله  $|x| < 8$  را حل کنیم:

$$|x| < 8 \Rightarrow -8 < x < 8$$

بنابراین اعداد صحیح  $-7$  تا  $7$  در نامعادله صدق می‌کنند که تعداد آن‌ها ۱۵ تا است.

**گزینه ۳۳۱ - ۲** ابتدا نامعادله را به صورت  $|x-2| > 2|x|$  می‌نویسیم.

اکنون دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا به نامعادله زیر برسیم:

$$4x^2 > (x-2)^2 \Rightarrow (2x)^2 - (x-2)^2 > 0$$

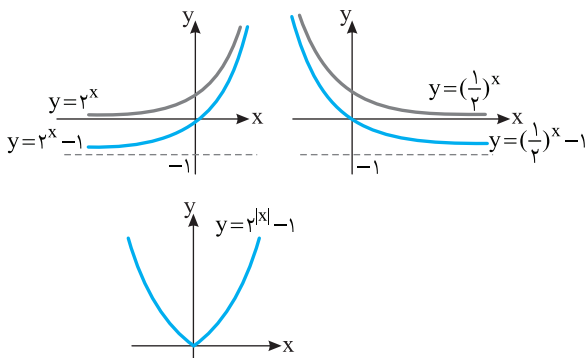
۳۴۶- گزینه ۴ ابتدا  $f(-x)$  را به دست می‌آوریم

$$f(-x) = \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{2^{-x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{\frac{1}{2^x} + 1} = \frac{2^x(1 - 2^x)}{1 + 2^x}$$

بنابراین  $f(x) + f(-x) = \frac{2^x - 1}{1 + 2^x} + \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = \frac{2^x - 1 + 1 - 2^x}{1 + 2^x} = 0$

۳۴۷- گزینه ۴ توجه کنید که  $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & x \geq 0 \\ 2^{-x} - 1 & x < 0 \end{cases}$  یعنی

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر رسم می‌شود.  $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & x \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^x - 1 & x < 0 \end{cases}$



۳۴۸- گزینه ۱ اگر تابع  $y = a^x$  روی  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه  $a > 1$ . بنابراین  $3k + 1 > 1$  پس  $k > 0$ .

۳۴۹- گزینه ۲ توجه کنید که  $\frac{1}{16} = (\frac{3}{4})^4 = (\frac{2}{3})^{-4}$  بنابراین

$$(\frac{2}{3})^{x+2} = (\frac{1}{16})^{x-1} \Rightarrow (\frac{2}{3})^{x+2} = ((\frac{3}{2})^4)^{x-1} = (\frac{2}{3})^{-4(x-1)}$$

در نتیجه  $x + 2 = -4(x - 1)$  پس  $x = \frac{2}{5}$ .

۳۵۰- گزینه ۱ با فاکتورگیری از  $5^x$  معادله را حل می‌کنیم

$$5^x(1 + 3 \times 5^{-2}) = 140 \Rightarrow 5^x(1 + \frac{3}{25}) = 140 \Rightarrow 5^x \times \frac{28}{25} = 140$$

$$5^x = \frac{25 \times 140}{28} = 125 = 5^3 \Rightarrow x = 3$$

پس معادله یک جواب دارد.

۳۵۱- گزینه ۲ با توجه به نمودار تابع  $y = 2^x$ ، معادله  $2^x = a$  در

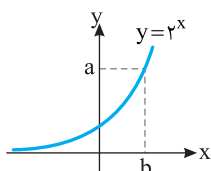
صورتی که  $a > 0$ ، دقیقاً یک جواب دارد ( $x = b$ ) و اگر  $a \leq 0$ ، جواب ندارد.

بنابراین

یک جواب دارد.  $\Rightarrow 2^x - 5 = 0$ ، یک جواب دارد.  $\Rightarrow 2^x - 6 = 0$

جواب ندارد.  $\Rightarrow 2^x + 6 = 0$ ، جواب ندارد.  $\Rightarrow 2^x + 5 = 0$

چون تابع  $y = 2^x$  یک‌به‌یک است، پس معادله اصلی دو جواب دارد.



۳۳۸- گزینه ۱ راه‌حل اول از نابرابری  $(n+1)^3 < n^3 + 3n^2 < n^3$ ،

نتیجه می‌گیریم  $n + 1 < \sqrt[3]{n^3 + 3n^2} < n$ ، بنابراین  $[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2}] = n$ .

راه‌حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی  $n$  باید برقرار باشد، پس مثلاً به ازای  $n = 2$  باید تساوی برقرار باشد. اگر  $n = 2$ ، آن‌گاه

$$[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2}] = [\sqrt[3]{2^3 + 3 \cdot 2^2}] = [\sqrt[3]{20}] = 2 = n$$

برابر ۲ می‌شود.

۳۳۹- گزینه ۳ چون  $[x]$  عدد صحیح است، معادله را به صورت

$$[x] + [x] = [x] - [x] - 2$$

$$[x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

۳۴۰- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(-\frac{1}{2}) = |[-\frac{5}{2}] + [-\frac{7}{2}]| = |-3 + (-4)| = 7$$

۳۴۱- گزینه ۱ به جای  $x$  در ضابطه  $f$  قرار می‌دهیم  $x + 1$ ، پس

$$f(x+1) = 4(x+1) - [x+1] - [3(x+1)] = 4x + 4 - [x] - 1 - [3x] - 3 = 4x - [x] - [3x] = f(x)$$

۳۴۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که باید

$$[x] - 2 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 2 \Rightarrow x \geq 2$$

بنابراین  $D_f = [2, +\infty)$

۳۴۳- گزینه ۲ مقادیری از  $x$  که مخرج  $f(x)$  را صفر می‌کنند، در

دامنه تابع  $f$  قرار ندارند. اکنون توجه کنید که

$$[\frac{x}{3}] - 2 = 0 \Rightarrow [\frac{x}{3}] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{3} < 3 \Rightarrow 6 \leq x < 9$$

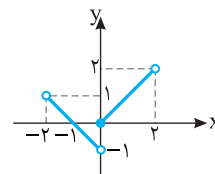
بنابراین  $D_f = \mathbb{R} - [6, 9)$  پس  $a = 6$ ،  $b = 9$  و در نتیجه  $a + b = 15$ .

۳۴۴- گزینه ۴ ضابطه تابع به شکل زیر است

$$-2 < x < 0 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = -1 \Rightarrow f(x) = -x - 1$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است



۳۴۵- گزینه ۲ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(0) = -\frac{3}{4} \Rightarrow 4^a + b = -\frac{3}{4}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 4^{1+a} + b = 0 \Rightarrow 4 \times 4^a + b = 0$$

اگر رابطه اول را از رابطه دوم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$3 \times 4^a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = -1$$

$$4^{-1} + b = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + b = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = -1$$

در نتیجه  $a + b = -2$

۳۶۱- گزینه ۱ توجه کنید که  $3^{x+2} = 3^2 \times 3^x = 9 \times 3^x = 4$  بنابراین

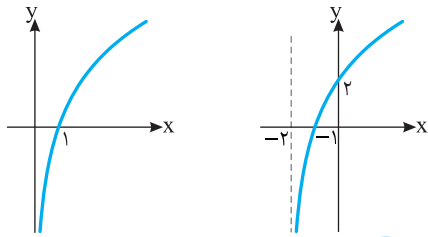
$$3^x = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \log_3 \frac{4}{9}$$

۳۶۲- گزینه ۱ فرض کنید که نمودار  $f$  از روی نمودار  $y = \log_a x$

به دست آمده باشد. معلوم است که نمودار  $y = \log_a x$  دو واحد به سمت چپ منتقل شده است تا نمودار  $f$  به دست آید. بنابراین ضابطه تابع  $f$  می تواند  $f(x) = \log_a(x+2)$  باشد. از طرف دیگر  $f(0) = 2$  پس  $\log_a 2 = 2$ .

یعنی  $a^2 = 2$ . بنابراین  $a = \sqrt{2}$  (توجه کنید که  $a > 0$ ). بنابراین

$$f(x) = \log_{\sqrt{2}}(x+2)$$



۳۶۳- گزینه ۳ می توان نوشت

$$f(x) = 4 + \log(2x-4) = 6 \Rightarrow \log(2x-4) = 2 \Rightarrow 2x-4 = 10^2 \Rightarrow x = 52$$

بنابراین  $f(52) = 6$  پس  $f^{-1}(6) = 52$ .

۳۶۴- گزینه ۲

۳۶۵- گزینه ۲ لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می شود، پس

$$9 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow D_f = (-3, 3)$$

بنابراین اعداد صحیح  $\pm 1, \pm 2$  و صفر در دامنه تابع هستند.

۳۶۶- گزینه ۴ اگر  $y = 3^{5x-1}$ ، آن گاه

$$\log_3 y = 5x - 1 \Rightarrow x = \frac{\log_3 y + 1}{5}$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = \frac{\log_3 x + 1}{5}$$

۳۶۷- گزینه ۲ ابتدا  $x$  را بر حسب  $y$  حساب می کنیم:

$$y = \log_3(x-2) \Rightarrow 3^y = x-2 \Rightarrow x = 3^y + 2$$

بنابراین  $f^{-1}(x) = 3^x + 2$

۳۶۸- گزینه ۱ کافی است معادله  $x^2 - 7x = x$  را حل کنیم:

$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 8$$

واضح است که  $x = 0$  قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۳۶۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\log_7 \sqrt{x} = \log_7 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_7 x$$

$$\log_7(x-6) = \log_7(x-6) = \frac{1}{2} \log_7(x-6)$$

در نتیجه، معادله مورد نظر می شود

$$\frac{1}{2} \log_7 x + \frac{1}{2} \log_7(x-6) = 2 \Rightarrow \log_7 x + \log_7(x-6) = 4$$

$$\log_7(x(x-6)) = 4 \Rightarrow x(x-6) = 2^4 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x-8)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 8, x = -2 \text{ (غ.ق.)}$$

دقت کنید که  $x = -2$  در معادله اصلی صدق نمی کند، بنابراین غیر قابل قبول است.

۳۵۲- گزینه ۲ اگر فرض کنیم  $3^x = t$ ، معادله مورد نظر می شود

$$3^x \times 9 \times 9^x - 6 \times 3^x - 1 = 0 \Rightarrow 27t^2 - 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{9}, t = \frac{1}{3}$$

چون  $t > 0$ ، پس  $t = \frac{1}{3}$ ، یعنی  $3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1}$ ، پس  $x = -1$ . در نتیجه معادله یک جواب دارد.

۳۵۳- گزینه ۱ می دانیم اگر  $0 < a < 1$  و  $a^{f(x)} < a^{g(x)}$  آن گاه

$$f(x) > g(x) \text{ و بالعکس. چون } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{، پس}$$

$$3-x > x-3 \Rightarrow x < 3$$

۳۵۴- گزینه ۱ اگر فرض کنیم  $5^x = t$ ، نامعادله داده شده را می توان

این طور نوشت

$$25^x + 24 \times 5^{x-1} < 1 \Rightarrow t^2 + 24 \times \frac{t}{5} < 1 \Rightarrow 5t^2 + 24t < 5$$

$$5t^2 + 24t - 5 < 0 \Rightarrow (t+5)(t-\frac{1}{5}) < 0$$

چون  $t+5 > 0$ ، پس  $t - \frac{1}{5} < 0$ ، یعنی  $5^x < \frac{1}{5} = 5^{-1}$ ، در نتیجه  $x < -1$ .

۳۵۵- گزینه ۴ توجه کنید که  $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{7}}} = \sqrt[5]{7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{7^{\frac{3}{4}}} = 7^{\frac{3}{20}} = 7^{\frac{1}{4}}$ ، اکنون اگر

از ویژگی  $\log_a x^n = n \log_a x$  استفاده کنیم، به دست می آید

$$\log_7 \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{7}}} = \log_7 7^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_7 7 = \frac{1}{4}$$

۳۵۶- گزینه ۳ با استفاده از تساوی  $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$

به دست می آید

$$\log_7(\sqrt{3}-1) + \log_7(\sqrt{3}+1) = \log_7((\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)) = \log_7 2 = \frac{1}{2}$$

۳۵۷- گزینه ۱ چون  $\frac{1}{\log_a x} = \log_x a$ ، پس

$$\frac{1}{\log_6 6} + \frac{1}{\log_6 9} = \log_6 6 + \log_6 9 = \log_6(6 \times 9)$$

$$= \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$$

۳۵۸- گزینه ۳ به کمک تساوی  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$  می توان نوشت

$$3^{\log_9 6} = 6^{\log_9 3} = 6^{\frac{1}{2} \log_3 3} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

۳۵۹- گزینه ۲ از تساوی  $\log 4 = a$  نتیجه می شود

$$\log 2^2 = a \Rightarrow 2 \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a}{2}$$

بنابراین

$$\log 125 = \log 5^3 = 3 \log 5 = 3 \log \frac{10}{2} = 3(\log 10 - \log 2)$$

$$= 3(1 - \frac{a}{2}) = 3 - \frac{3a}{2}$$

۳۶۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

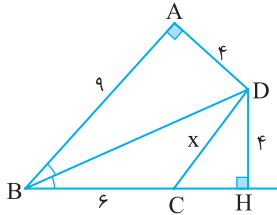
$$\log 3^0 = a \Rightarrow \log(3 \times 10) = a \Rightarrow \log 3 + \log 10 = a \Rightarrow \log 3 = a - 1$$

$$\log 5^0 = b \Rightarrow \log(5 \times 10) = b \Rightarrow \log 5 + \log 10 = b \Rightarrow \log 5 = b - 1$$

$$\text{بنابراین } \log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{a-1}{b-1}$$

اکنون، از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه CHD نتیجه می‌شود

$$CD^2 = CH^2 + DH^2 \Rightarrow x^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$



چون  $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \times 2 = 4$$

چون  $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x+2} \Rightarrow x^2 + 2x = 2x^2 - 2x$$

$$x^2 = 4x \Rightarrow x = 4$$

چون  $ED \parallel BF$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABF،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DF} \Rightarrow \frac{12}{6} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 2$$

همین‌طور، چون  $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{12}{6} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$$

بنابراین  $xy = \frac{16}{3}$ .

**راه‌حل اول** در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند.

در نتیجه  $DF = BE = 15$ ، چون BDFE متوازی‌الاضلاع است، پس

$DF \parallel BE$ ، در نتیجه  $DF \parallel BC$ ، بنابراین، از تعمیم قضیه تالس در مثلث

ABC نتیجه می‌شود

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{15}{15+12} \Rightarrow 27x = 15(x+8)$$

$$12x = 15 \times 8 \Rightarrow x = 10$$

**راه‌حل دوم** چون  $EF \parallel BA$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث CAB،

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CF}{FA} \Rightarrow \frac{12}{15} = \frac{CF}{FA} \Rightarrow \frac{FA}{CF} = \frac{5}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر چون  $DF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{(1)} \frac{x}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 10$$

بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 6$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = 6$$

بنابراین  $xy = 36$

بنابر قضیه تالس در ذوزنقه،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

با استفاده از تعریف لگاریتم معادله را به صورت

$$(2x-1)^2 = x \text{ می‌نویسیم. بنابراین}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = x \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$(4x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, x = 1$$

پایه لگاریتم عبارت  $2x-1$  است که به ازای  $x=1$  برابر 1 و به ازای  $x = \frac{1}{4}$  برابر

$-\frac{1}{2}$  می‌شود. ولی می‌دانیم که پایه لگاریتم باید مثبت و مخالف 1 باشد. پس

هیچ‌کدام از مقدارهای به دست آمده قابل قبول نیستند و معادله جواب ندارد.

نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log_3(10-x) \leq \log_3 9$$

نتیجه می‌گیریم

$$10-x \leq 9 \Rightarrow x \geq 1$$

از طرف دیگر عبارت  $\log_3(10-x)$  وقتی معنادار است که  $10-x > 0$  و در

نتیجه  $x < 10$ ، پس مجموعه جواب‌های نامعادله بازه  $(1, 10)$  است.

از نامعادله  $\log(x+2) > \log(2x+1)$  نتیجه می‌شود

$$x+2 > 2x+1 \Rightarrow x < 1$$

عبارت  $\log(x+2)$  برای  $x > -2$  و عبارت  $\log(2x+1)$  برای  $x > -\frac{1}{2}$

معنادار است. پس مجموعه جواب‌های نامعادله  $(-\frac{1}{2}, 1)$  است.

ابتدا توجه کنید که باید  $x-2 > 0$ ، یعنی  $x > 2$ ، از

طرف دیگر، باید

$$\log_{5/4}(x-2) \geq 0 = \log_{5/4} 1$$

در نتیجه (چون  $0 < 5/4 < 1$ )

$$x-2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 3$$

بنابراین  $D_f = (2, 3]$ ، به این ترتیب  $a=2$  و  $b=3$ ، پس  $ab=6$ .

**گزینه ۳**

چون C روی نیمساز زاویه AOB قرار دارد، پس

مثلث‌های قائم‌الزاویه OAC و OBC،  $x = CA = CB = 6$

همنشت‌اند (وتر و یک زاویه حاده). بنابراین  $y = OA = OB = 12$ ، در نتیجه

$$x+y=18$$

چون D روی نیمساز زاویه A قرار دارد، پس

مثلث‌های قائم‌الزاویه ABD و AHD،  $y = DH = DB = 3$

همنشت‌اند (وتر و یک زاویه حاده). بنابراین  $x = AH = AB = 4$ ، در نتیجه

$$x+y=7$$

فرض کنید H پای عمود وارد از نقطه D بر خط BC

باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطه D روی نیمساز زاویه ABH است، پس

مثلث‌های قائم‌الزاویه BAD و BHD،  $DH = DA = 4$

همنشت‌اند (به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه). بنابراین

$$BH = BA = 9 \Rightarrow BC + CH = 9 \Rightarrow 6 + CH = 9 \Rightarrow CH = 3$$



۳۹۱- گزینه ۲) بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AH^2 = HB \times HC = 5 \times 4 = 20, \quad AH = 2\sqrt{5}$$

۳۹۲- گزینه ۱) بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AH^2 = HB \times HC \Rightarrow 6^2 = 3 \times x \Rightarrow x = 12$$

۳۹۳- گزینه ۴) بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$BH^2 = HA \times HD = 4/5 \times 2 = 9 \Rightarrow BH = 3$$

همین‌طور، بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه BAC،

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow (4/5)^2 = 3 \times HC \Rightarrow HC = 6/75$$

$$\text{بنابراین } BC = 3 + 6/75 = 9/75$$

۳۹۴- گزینه ۳) فرض کنید  $HC = x$ . بنابر رابطه‌های طولی در مثلث

قائم‌الزاویه،

$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow 24 = x(x+5) \Rightarrow x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$(x+8)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

۳۹۵- گزینه ۱) بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^2 = AH \times AC, \quad BC^2 = HC \times AC$$

اگر تساوی اول را بر تساوی دوم تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AH \times AC}{HC \times AC} = \frac{AH}{HC} = 3 \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$$

۳۹۶- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC،

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 169, \quad \text{پس } AC = 13$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB \times BC = BH \times AC \Rightarrow 12 \times 5 = x \times 13 \Rightarrow x = \frac{60}{13}$$

۳۸۴- گزینه ۴) در مثلث FBC، چون نقطه N وسط ضلع FC است و

$MN \parallel BC$ ، پس بنابر قضیه تالس نقطه M هم وسط ضلع FB است. در

نتیجه در مثلث FBC، پاره‌خط MN میان‌خط است و

$$MN = \frac{BC}{2} \Rightarrow 6 = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 12$$

اکنون توجه کنید که چون  $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{EF}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = 4$$

۳۸۵- گزینه ۲) مثلث‌های ABF و ACE دو زاویه برابر دارند

(یعنی  $\hat{A}EC = \hat{A}FB$ ) و زاویه A در آن‌ها مشترک است. بنابراین این مثلث‌ها

متشابه‌اند (زز). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{3+1}{2+x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2(2+x) = 3 \times 4 \Rightarrow x = 4$$

۳۸۶- گزینه ۳) مثلث‌های AEF و ACB دو زاویه برابر دارند

(یعنی  $\hat{B} = \hat{A}FE$ ) و در زاویه رأس A مشترک‌اند. پس این دو مثلث متشابه‌اند (زز).

بنابراین

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{4}{6+2} = \frac{6}{4+x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{4+x} \Rightarrow 4+x = 12 \Rightarrow x = 8$$

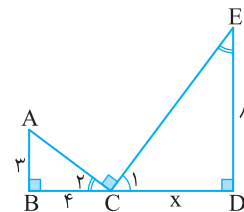
۳۸۷- گزینه ۲) توجه کنید که زاویه‌های  $C_1$  و E متمم یکدیگرند، و

زاویه‌های  $C_1$  و  $C_2$  نیز متمم یکدیگرند. بنابراین زاویه‌های E و  $C_2$  برابرند.

بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و CDE که یک زاویه حاده برابر دارند

متشابه‌اند (زز). در نتیجه

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 6$$



۳۸۸- گزینه ۳) توجه کنید که

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}, \quad \hat{A}BD = \hat{D}BC$$

بنابراین مثلث‌های ABD و DBC متشابه‌اند (ضضض). در نتیجه

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4$$

۳۸۹- گزینه ۴) توجه کنید که  $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$ . بنابراین دو مثلث

AEF و ACB دو ضلع متناسب دارند و زاویه بین این دو ضلع متناسب در آن‌ها

(یعنی  $\hat{A}$ ) برابر است. پس این دو مثلث به حالت (ضضض) متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 16$$

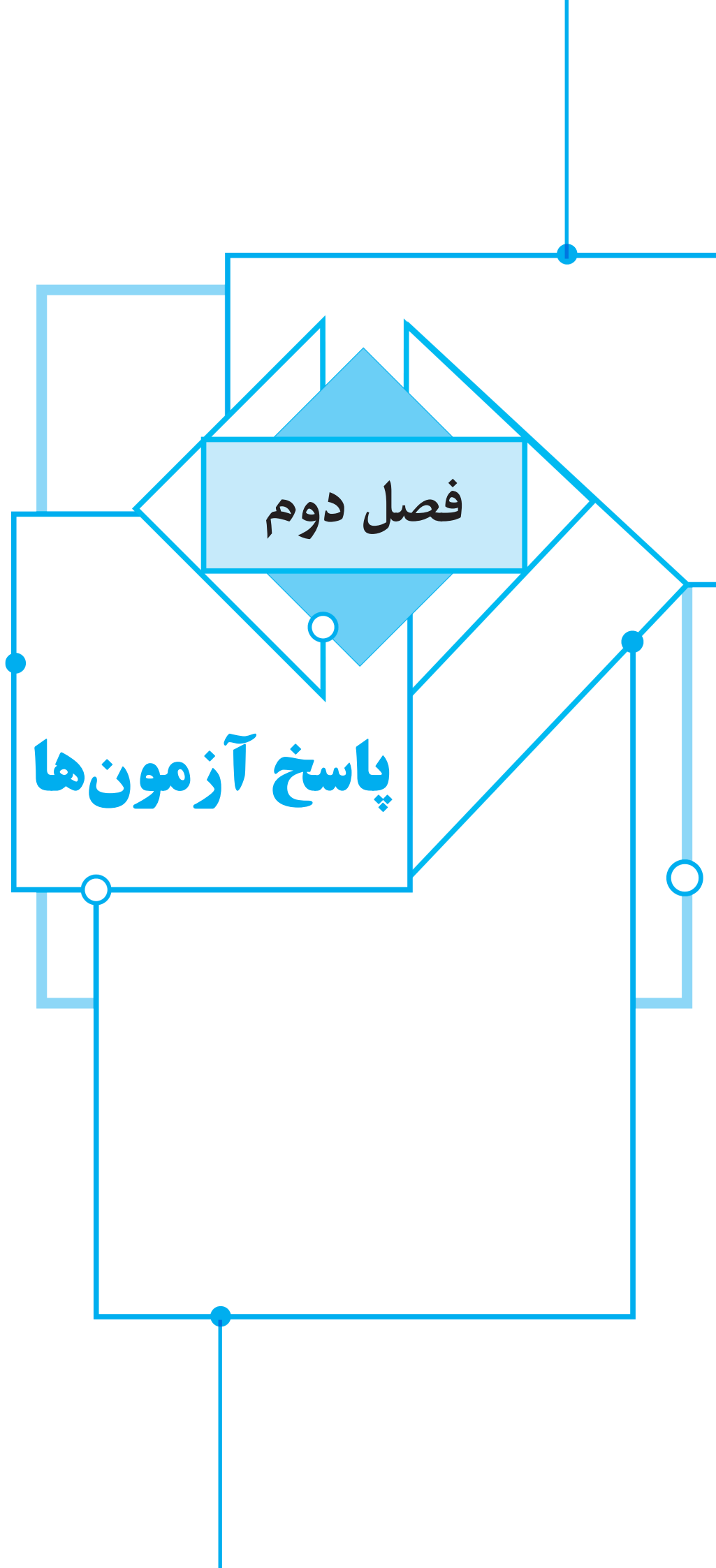
۳۹۰- گزینه ۲) فرض کنید  $EB = x$ . چون  $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه

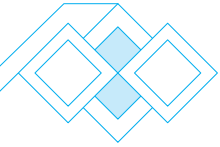
اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند، پس

$$\frac{\text{مساحت}(AEF)}{\text{مساحت}(ABC)} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{18}{18+32} = \left(\frac{3}{3+x}\right)^2$$

$$\frac{9}{25} = \left(\frac{3}{3+x}\right)^2 \Rightarrow (3+x)^2 = 25 \Rightarrow x = 2$$







**راه حل دوم** اگر در رابطه داده شده قرار دهیم  $x = -1$ ، به دست می آید

$$f(0) = -3$$

اکنون در توابع داده شده در گزینه‌ها به جای  $x$  مقدار صفر را قرار می‌دهیم. تنها تابعی که در آن  $f(0) = -3$  تابع گزینه (۱) است.

**۹- گزینه ۳** برای  $x = 2$  از ضابطه اول به دست می‌آید  $f(2) = 4m - 2$  و از ضابطه دوم  $f(2) = 8 - m$ .

برای اینکه رابطه، تابع باشد، باید فقط یک مقدار برای  $f(2)$  وجود داشته باشد. یعنی  $4m - 2 = 8 - m$  پس  $m = 2$ . بنابراین باید  $f(2)$  را محاسبه کنیم که برابر است با  $f(2) = 8 - 2 = 6$ .

**۱۰- گزینه ۳** اگر  $n \in \mathbb{N}$  آن گاه عدد  $\sqrt[n]{n}$  وقتی که  $n$  توان چهارم عددی طبیعی باشد، گویا خواهد بود. پس  $\sqrt[4]{16}$  و  $\sqrt[4]{81}$ ، اعدادی گویا هستند و بقیه اعداد داده شده گنگ هستند. بنابراین

$$f(\sqrt[4]{2}) + f(\sqrt[4]{3}) + \dots + f(\sqrt[4]{100}) = 2 \times 1 + 97 \times 0 = 2$$

**۱۱- گزینه ۱** با توجه به زوج‌های مرتب  $(2, m^3 - m)$  و  $(2, 0)$

$$m^3 - m = 0 \Rightarrow m = 0, 1, -1$$

نتیجه می‌شود:  $f = \{(2, 0), (0, 1), (0, 2)\}$ ،  $m = 0$  اگر  $f$  تابع نیست.

اگر  $m = 1$ ،  $f = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2), (2, 1)\}$ ،  $f$  تابع نیست.

اگر  $m = -1$ ،  $f = \{(2, 0), (-1, 1), (0, 2), (-2, 1)\}$ ،  $f$  تابع است.

پس  $m$  فقط می‌تواند برابر  $-1$  باشد.

**۱۲- گزینه ۳** چون  $f(1) = 2$  و  $f(4) = 2$ ، پس  $f(a) = 4$  یا  $f(a) = 1$ .

از  $f(a) = 1$  نتیجه می‌شود  $a = 3$  و از  $f(a) = 4$  نتیجه می‌شود  $a = 5$ . بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای  $a$  برابر  $8$  است.

**۱۳- گزینه ۲** با توجه به شکل، جواب نامعادله مورد نظر به صورت  $[-5, -2] \cup [4, 5]$  است. بنابراین  $6$  عدد صحیح  $(-5, -4, -3, -2, 4, 5)$

در این نامعادله صدق می‌کنند.

**۱۴- گزینه ۴** ابتدا  $x = 2$  را در رابطه داده شده قرار می‌دهیم:

$$f(2) - 2f(2) = 4 - 6 + 4 \Rightarrow f(2) = -2$$

$$\text{پس } f(x) = x^2 - 3x \text{، در نتیجه } f(-2) = 10$$

**۱۵- گزینه ۲** اگر فرض کنیم  $t = x^2 + 1$ ، آن گاه  $x^2 = t - 1$  و  $t \geq 1$  بنابراین

$$f(x^2 + 1) = (x^2)^2 - x^2 \Rightarrow f(t) = (t - 1)^2 - (t - 1) = t^2 - 3t + 2$$

بنابراین اگر  $x \geq 1$ ، آن گاه  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ .

**۱۶- گزینه ۲** توجه کنید که

$$x^3 + 6x^2 + 12x = (x + 2)^3 - 8$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 10 = (x + 2)^3 + 2$$

بنابراین  $f(x + 2) = \frac{(x + 2)^3 - 8}{(x + 2)^3 + 2}$ . اگر در این تساوی به جای  $x$  قرار دهیم

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3 + 2}$$

**۱- گزینه ۲** چون  $f$  فقط یک زوج مرتب دارد، پس تساوی‌های

$$2a - b = 1, \quad 2a + c = 2, \quad 2a = 2 \text{ برقرار است که نتیجه می‌شود } a = 1, \quad b = 1, \quad c = 0$$

**۲- گزینه ۴** از عدد  $2$  دو پیکان خارج شده است، پس دو عدد  $a^2$  و  $a + 2$  باید یکسان باشند. پس  $a^2 = a + 2$  که نتیجه می‌شود  $a = -1$  یا  $a = 2$ .

اگر  $a = 2$ ، باید داشته باشیم  $b = a^2 = 4$ ، پس  $a + b = 6$ . اگر  $a = -1$ ، باید داشته باشیم  $b = 2b + 1$ ، پس  $b = -1$  و در نتیجه  $a + b = -2$ . پس حاصل  $a + b$  برابر  $6$  یا  $-2$  است.

**۳- گزینه ۳** دامنه تابع مجموعه  $\{1, 3, 5\}$  است که  $3$  عضو دارد.

برد تابع مجموعه  $\{3, 5, a^2\}$  است که باید تعداد اعضای آن کمتر از  $3$  باشد.

یعنی یا باید  $a^2 = 3$  یا  $a^2 = 5$ ، بنابراین  $a = \pm\sqrt{3}$  یا  $a = \pm\sqrt{5}$  وجود دارد.  $4$  مقدار مختلف برای  $a$  وجود دارد.

**۴- گزینه ۴** تعداد جواب‌های

معادله  $f(x) = 1$  برابر با تعداد

نقطه‌های برخورد خط  $y = 1$  با نمودار تابع  $f$  است. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که تعداد این نقطه‌ها سه تا است.

**۵- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$f(x + 2) = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2 \Rightarrow f(t) = t^2 - 2$$

اکنون اگر به جای  $t$  قرار دهیم  $\sqrt{3}$ ، نتیجه می‌شود  $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2 = 1$ .

**۶- گزینه ۴** در ضابطه تابع به جای  $x$ ، مقدار  $x - 1$  را قرار می‌دهیم:

$$f(x - 1) = (x - 1)^2 - 2(x - 1) = x^2 - 4x + 3$$

در ضابطه تابع به جای  $x$  مقدار  $x + 1$  را قرار می‌دهیم:

$$f(x + 1) = (x + 1)^2 - 2(x + 1) = x^2 - 1$$

$$\text{بنابراین } f(x - 1) + f(x + 1) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x) + 2 = 2f(x) + 2$$

**۷- گزینه ۳** توجه کنید که

$$f\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) = 3x + \frac{3}{x} - 4 \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4$$

بنابراین، اگر  $x$  عددی باشد که  $x + \frac{1}{x} = 4$  (چنین عددی وجود دارد، زیرا

معادله  $x + \frac{1}{x} = 4$  معادل است با  $x^2 - 4x + 1 = 0$ ، که دلتای آن مثبت است، پس جواب حقیقی دارد.) آن گاه  $f(4) = 3 \times 4 - 4 = 8$ .

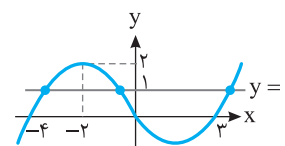
**۸- گزینه ۱** **راه حل اول** فرض می‌کنیم  $\frac{x + 1}{x - 2} = t$  و در نتیجه

$$tx - 2t = x + 1 \Rightarrow tx - x = 2t + 1 \Rightarrow (t - 1)x = 2t + 1 \Rightarrow x = \frac{2t + 1}{t - 1}, t \neq 1$$

در رابطه داده شده به جای  $x$  قرار می‌دهیم:

$$f(t) = 2\left(\frac{2t + 1}{t - 1}\right) - 1 = \frac{4t + 2 - t + 1}{t - 1} = \frac{3t + 3}{t - 1}$$

در نتیجه اگر  $x \neq 1$ ، آن گاه  $f(x) = \frac{3x + 3}{x - 1}$ .



۲۳- گزینه ۳ در تابع همانی، ضابطه تابع به شکل  $f(x)=x$  است.

بنابراین  $f(-۴)=m-۲n=-۴$ ،  $f(۶)=m+n=۶$

$$\begin{cases} m-2n=-4 \\ m+n=6 \end{cases} \Rightarrow m=\frac{1}{3}, n=\frac{1}{3}$$

از طرف دیگر  $f(\frac{m}{n})=k=\frac{m}{n}$ ، بنابراین  $k=\frac{m}{n}=\frac{1}{5}$

۲۴- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم:

$$f(x)=\frac{(x^2-۴)+۲ax+۴a}{x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)+۲a(x+۲)}{x+۲}$$

$$=\frac{(x+۲)(x-۲+۲a)}{x+۲}=x-۲+۲a, x \neq -۲$$

ضابطه تابع همانی  $f(x)=x$  است. بنابراین باید  $۲a-۲=۰$  و در نتیجه  $a=۱$  پس  $f(-a)=f(-۱)=-۱$

راه حل دوم چون تابع  $f$  همانی است، پس  $f(۰)=۰$ ، بنابراین

$$\frac{۴a-۴}{۲}=۰ \Rightarrow a=۱$$

در نتیجه  $f(-a)=f(-۱)=-۱$

۲۵- گزینه ۱ چون  $f$  تابعی خطی است، پس ضابطه آن به صورت

$$f(x)=ax+b$$

$$f(۲)-۳f(-۲)=۲a+b-۳(-۲a+b)=۸a-۲b=۴۶$$

$$f(۳)-۳f(۱)=۳a+b-۳(a+b)=-۲b=۲۲$$

در نتیجه  $a=۳$ ،  $b=-۱۱$  و  $f(x)=۳x-۱۱$ ، بنابراین  $f(-۲)=-۱۷$

۲۶- گزینه ۳ راه حل اول فرض کنید  $f(x)=ax+b$  در این صورت

$$f(x-۱)=a(x-۱)+b=ax-a+b$$

$$۲f(x+۲)=۲(a(x+۲)+b)=۲(ax+۲a+b)=۲ax+۴a+۲b$$

پس  $f(x-۱)+۲f(x+۲)=۳ax+۳a+۳b=-۹x+۲۱$ ، بنابراین

$$\begin{cases} 3a=-9 \\ 3a+3b=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-3x+1$$

راه حل دوم تساوی داده شده به ازای هر  $x$  برقرار است. پس  $x=۱$  را در این تساوی قرار می دهیم:  $f(۰)+۲f(۳)=۱۲$ . فقط در تابع گزینه (۳) این شرط برقرار است.

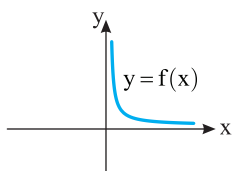
۲۷- گزینه ۱ ابتدا  $f(-۱)$  و  $f(۲)$  را حساب می کنیم تا مقادیر  $a$  و  $b$  به دست آید:

$$\begin{cases} f(-1)=a+b=3 \\ f(2)=4a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

بنابراین  $f(x)=x^2-۲x$  و در نتیجه  $f(۱)=-۱$

۲۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر  $x>۰$ ، آن گاه  $|x|=x$ ، پس

$f(x)=\frac{1}{x}$  همچنین اگر  $x \leq ۰$ ، آن گاه  $|x|=-x$  و  $x+|x|=۰$ ، در نتیجه



تابع به ازای  $x \leq ۰$  تعریف نمی شود، بنابراین  $D_f=(۰, +\infty)$ ، بنابراین نمودار این تابع به صورت مقابل خواهد بود:

۱۷- گزینه ۲ توجه کنید که اگر  $-۱ < x \leq ۰$ ، آن گاه  $-۱ \leq x < ۰$ ، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{1+x}}{-x}=-f(x)$$

و اگر  $-۱ \leq -x < ۰$ ، آن گاه  $۰ < x \leq ۱$ ، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1+(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{1-x}}{-x}=-f(x)$$

بنابراین همواره  $f(-x)=-f(x)$

۱۸- گزینه ۲ چون

$$f(-۱)=ax(-۱)+b=b-a, f(۶)=ax(۶)+b=۶a+b$$

پس

$$f(-۱)+f(۶)=-۱+۶a+b+b-a=-۱$$

$$۵(a+b)=-۱ \Rightarrow a+b=-۲$$

در نتیجه  $f(۱)=a+b=۲+۳b=۳b-۲$

۱۹- گزینه ۱ برای ورودی های فرد، خروجی تابع  $f$  یک واحد از ورودی

آن بیشتر است، یعنی

$$f(۱)=۱+۱=۲, f(۳)=۳+۱=۴, \dots, f(۱۹)=۱۹+۱=۲۰$$

برای ورودی های زوج، خروجی تابع  $f$  یک واحد از ورودی آن کمتر است، یعنی

$$f(۲)=۲-۱=۱, f(۴)=۴-۱=۳, \dots, f(۲۰)=۲۰-۱=۱۹$$

بنابراین

$$A=(۲+۴+\dots+۲۰)+(۱+۳+\dots+۱۹)$$

$$=۱+۲+۳+\dots+۲۰=\frac{۲۰}{۲}(۱+۲۰)=۲۱۰$$

۲۰- گزینه ۴ اگر ضابطه داده شده، متعلق به یک تابع باشد باید در

$x=۲$  مقدار  $f(x)$  منحصر به فرد باشد. یعنی مقدار  $f(۲)$  در ضابطه اول با

مقدار آن در ضابطه دوم برابر باشد. اگر  $f(x)=۲x^2+a$ ، آن گاه

$f(۲)=۸+a$ ، اگر  $f(x)=ax^2-۲$ ، آن گاه  $f(۲)=۸a-۲$ ، بنابراین

$$۸+a=۸a-۲ \Rightarrow ۷a=۱۰ \Rightarrow a=\frac{10}{7}$$

و در نتیجه

$$۷f(۷a)=۷f(۱۰)=۷(۲ \times ۱۰^2 + \frac{10}{7})=۱۴۱۰$$

۲۱- گزینه ۲ برد تابع ثابت، یک عضو دارد. بنابراین

$$m-۲=۴ \Rightarrow m=۶$$

$$m+۲n=۴ \xrightarrow{m=6} ۶+۲n=۴ \Rightarrow n=-۱$$

$$mn+k=۴ \xrightarrow{m=6, n=-1} -۶+k=۴ \Rightarrow k=۱۰$$

۲۲- گزینه ۲ اگر  $f$  تابعی ثابت باشد، باید ضرایب  $x^2$  و  $x$  برابر با

صفر باشند:

$$۴-a=۰ \Rightarrow a=۴, ۳+b=۰ \Rightarrow b=-۳$$

در این صورت  $f(x)=ab+۱۹=۴ \times (-۳)+۱۹=۷$

بنابراین

$$f(a+b)=f(۱)=۷$$

۳-۳۳ گزینه ۳ ضابطه تابع همانی به صورت  $f(x)=x$  است. بنابراین

$$a-2=0, \quad b-3=1, \quad a+b-c=0$$

در نتیجه  $a=2$ ,  $b=4$ ,  $c=a+b=2+4=6$  و  $b=4$ ,  $a=2$ .

۳-۳۴ راه حل اول ضابطه تابع ثابت به صورت  $f(x)=k$

است. بنابراین

$$\frac{2x+1}{ax-3}=k \Rightarrow 2x+1=kax-3k$$

تساوی فوق یک اتحاد است. پس باید تساوی‌های  $ka=2$  و  $1=-3k$  برقرار باشند. بنابراین  $k=-\frac{1}{3}$  و  $a=-6$ .

راه حل دوم با توجه به اینکه  $f(0)=-\frac{1}{3}$  و تابع ثابت است، پس  $f(1)=-\frac{1}{3}$

و در نتیجه

$$f(1)=\frac{2+1}{a-3}=-\frac{1}{3} \Rightarrow 9=-a+3 \Rightarrow a=-6$$

۳-۳۵ گزینه ۴ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=2mx-mx^2+x^2-4x-m=(1-m)x^2+(2m-4)x-m$$

ضابطه توابع خطی به شکل  $f(x)=ax+b$  است. یعنی یک چندجمله‌ای درجه اول است. بنابراین باید  $m=1$  تا ضابطه تابع یک چندجمله‌ای درجه اول شود، یعنی

$$m=1 \Rightarrow f(x)=-2x-1$$

$$f(m)=f(1)=-3$$

۳-۳۶ گزینه ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطه آن یک چندجمله‌ای درجه اول باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطه داده شده ساده شوند. یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها  $x+1$  است. یعنی

$$x^2+mx+2=(x+1)(x+a) \Rightarrow x^2+mx+2=x^2+(a+1)x+a$$

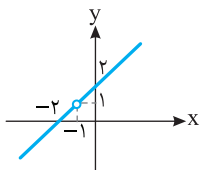
برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم

$$a=2, \quad m=a+1 \xrightarrow{a=2} m=3$$

پس ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}=x+2, \quad x \neq -1$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۳-۳۷ گزینه ۳ ضابطه تابع را به صورت  $f(x)=ax+b$  در نظر

می‌گیریم. بنابراین

$$f(1)=a+b \Rightarrow f(f(1))=f(a+b)=a(a+b)+b=a^2+ab+b=1$$

$$f(-1)=-a+b \Rightarrow f(f(-1))=f(-a+b)=a(-a+b)+b$$

$$=-a^2+ab+b=-7$$

اگر طرفین تساوی‌های اخیر را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

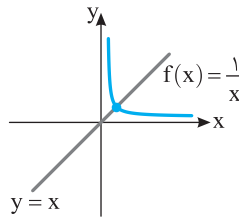
$$a^2+ab+b-(-a^2+ab+b)=1-(-7) \Rightarrow 2a^2=8 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$$

$$a^2+ab+b=1 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow 4+2b+b=1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow f(x)=2x-1 \\ a=-2 \Rightarrow 4-2b+b=1 \Rightarrow b=3 \Rightarrow f(x)=-2x+3 \end{cases}$$

بنابراین  $f(0)=3$  یا  $f(0)=-1$ .

۲۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که  $D_f=(0, +\infty)$  و

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x}$$



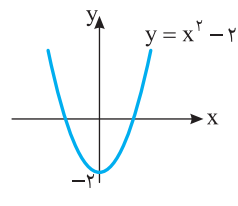
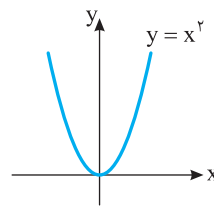
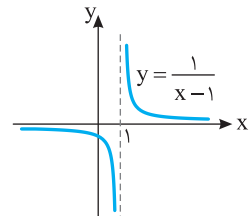
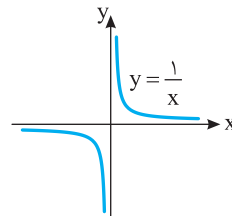
بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت روبه‌رو است و خط  $y=x$  را در یک نقطه قطع می‌کند.

۳۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x-1}$$

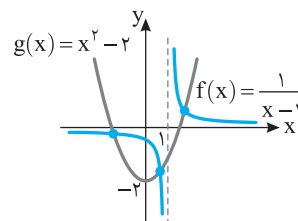
بنابراین اگر نمودار تابع  $y=\frac{1}{x}$  را یک واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع  $f$

به دست می‌آید. همچنین اگر نمودار تابع  $y=x^2$  را دو واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع  $g$  به دست می‌آید.



مطابق شکل زیر نمودار تابع  $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}$  در سه نقطه نمودار

تابع  $g(x)=x^2-2$  را قطع می‌کند.



۳۱- گزینه ۳ ضابطه این تابع  $f(x)=x$  است. پس  $f(2)=2$ . در نتیجه

$$14-2k=2 \Rightarrow 2k=12 \Rightarrow k=6$$

بنابراین باید  $f(14-3 \times 6)=f(-4)=-4$  را حساب کنیم:  $f(14-3 \times 6)=f(-4)=-4$ .

۳۲- گزینه ۱ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=kmx-kx^2-2m+2x+2x^2=(2-k)x^2+(2+km)x-2m$$

در تابع ثابت، مقدار تابع به  $x$  بستگی ندارد. پس در ضابطه نباید  $x$  وجود داشته باشد. یعنی ضرایب  $x$  و  $x^2$  باید صفر باشند. پس

$$2-k=0 \Rightarrow k=2, \quad 2+km=0 \xrightarrow{k=2} 2+2m=0 \Rightarrow m=-1$$

بنابراین  $k+m=1$ .

**۴۲- گزینه ۳** طول رأس سهمی  $x = -\frac{-2}{2k} = \frac{1}{k}$  است. عرض رأس

سهمی را پیدا می‌کنیم:  $y = k\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{k}\right) + 2 = 2 - \frac{1}{k}$ . چون رأس سهمی

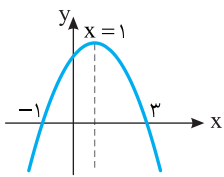
روی خط  $y = -2x$  است، پس  $2 - \frac{1}{k} = -2\left(\frac{1}{k}\right)$  در نتیجه  $k = \frac{-1}{2}$ .

**۴۳- گزینه ۲** محور تقارن سهمی به معادله  $y = mx^2 + 2mx + 3m$

خط  $y = -\frac{2m^2}{2m} = -m$  است. بنابراین  $-m = 2$ ، یعنی  $m = -2$ . به این

ترتیب، معادله سهمی می‌شود  $y = -2x^2 + 4x - 6$ ، که عرض رأس آن برابر

$$\text{است با } \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times (-2) \times (-6) - 4^2}{4 \times (-2)} = 2$$



**۴۴- گزینه ۲** راه‌حل اول با توجه به

شکل محور تقارن سهمی داده شده از وسط

نقاط  $(-1, 0)$  و  $(3, 0)$  می‌گذرد، پس معادله آن  $x = \frac{3-1}{2} = 1$  است. از طرف

دیگر با توجه به معادله داده شده، طول رأس سهمی  $x = \frac{b}{2a}$  است. بنابراین

$$\frac{b}{2a} = 2 \text{ در نتیجه } \frac{b}{2a} = 1$$

**راه‌حل دوم** سهمی از نقطه  $(-1, 0)$  عبور کرده است، پس مختصات این نقطه

در معادله سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$0 = a(-1)^2 - b(-1) + c \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (1)$$

همچنین سهمی از نقطه  $(3, 0)$  عبور کرده است، پس

$$9a - 3b + c = 0 \quad (2)$$

دو طرف معادله (۱) را از دو طرف معادله (۲) کم می‌کنیم:

$$9a - 3b + c - a - b - c = 0 \Rightarrow 8a - 4b = 0 \Rightarrow 8a = 4b \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$$

**راه‌حل سوم** مجموع جواب‌های معادله  $ax^2 - bx + c = 0$  برابر  $\frac{b}{a}$  است. از

طرف دیگر با توجه به شکل، جواب‌های این معادله  $x = 3$  و  $x = -1$  هستند.

$$\text{بنابراین } \frac{b}{a} = 3 + (-1) = 2$$

**۴۵- گزینه ۱** راه‌حل اول با توجه به نمودار داده شده،  $c$  و  $-2c$

جواب‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  هستند. بنابراین

$$\begin{cases} c - 2c = -\frac{b}{a} \\ c(-2c) = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{b}{a} \Rightarrow b = ac \\ -2c = \frac{1}{a} \Rightarrow ac = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ac + b = -1$$

**راه‌حل دوم** با توجه به نمودار داده شده،  $c$  یکی از جواب‌های معادله

$ax^2 + bx + c = 0$  است. بنابراین

$$ac^2 + bc + c = 0 \xrightarrow{c \neq 0} ac + b + 1 = 0 \Rightarrow ac + b = -1$$

**۴۶- گزینه ۱** برای آنکه نمودار یک سهمی، محور  $x$  را در دو طرف

مبدأ مختصات قطع کند، باید حاصل ضرب جواب‌های معادله  $y = 0$  منفی باشد. پس

$$\frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$

**۳۸- گزینه ۱** راه‌حل اول در ضابطه تابع به جای  $x$  مقدار  $x-1$  را

قرار می‌دهیم:

$$f(x-1) = a(x-1)^2 - b(x-1) + 2 = ax^2 - 2ax - bx + a + b + 2$$

بنابراین از رابطه داده شده به دست می‌آید

$$f(x-1) - f(x) = ax^2 - 2ax - bx + a + b + 2 - ax^2 + bx - 2 = 6x + 2$$

بنابراین  $-2ax + a + b = 6x + 2$ . چون این رابطه به ازای هر  $x$  برقرار است، پس

$$\begin{cases} -2a = 6 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a - b = -8$$

**راه‌حل دوم** چون رابطه  $f(x-1) - f(x) = 6x + 2$  به ازای هر مقدار  $x$  برقرار

است، پس به ازای  $x = 1$  هم برقرار است:

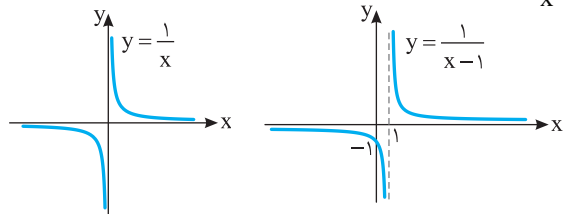
$$f(0) - f(1) = 8 \Rightarrow 2 - (a - b + 2) = 8 \Rightarrow 2 - a + b - 2 = 8 \Rightarrow a - b = -8$$

**۳۹- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

اگر نمودار تابع  $y = \frac{1}{x}$  را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع

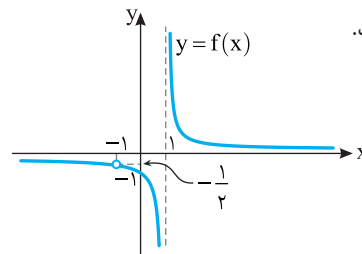
$y = \frac{1}{x-1}$  به دست می‌آید.



بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت شکل رسم شده است که خطوط  $y = 0$  و

$y = -\frac{1}{2}$  را قطع نمی‌کند. پس  $k$  فقط می‌تواند مقادیر  $0$  و  $-\frac{1}{2}$  را داشته باشد

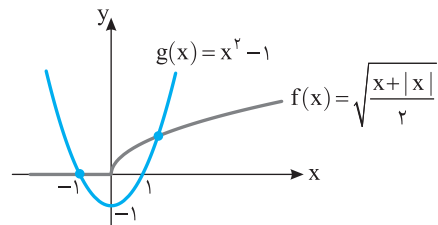
که مجموع آن‌ها برابر  $-\frac{1}{2}$  است.



**۴۰- گزینه ۲** برای  $x \geq 0$ ،  $|x| = x$  و  $f(x) = \sqrt{x}$  و برای  $x < 0$ ،

$|x| = -x$ ، نمودار تابع‌های  $f$  و  $g$  را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از

روی این شکل معلوم می‌شود که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.



**۴۱- گزینه ۴** چون سهمی ماکزیمم دارد، باید ضریب  $x^2$  منفی باشد.

پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. با توجه به شکل داده شده طول رأس سهمی

عددی منفی است. در گزینه (۳) طول رأس سهمی  $x = -\frac{4}{2(-1)} = 2$  و در گزینه (۴)

طول رأس سهمی  $x = -\frac{-4}{2(-1)} = -2$  است. پس گزینه (۴) درست است.

**۵۲- گزینه ۳** رأس سهمی  $y = ax^2 - 2ax + 2$  نقطه  $(1, 2-a)$  است

که روی سهمی  $y = bx^2 + 2bx + 1$  قرار دارد. پس

$$2-a = b + 2b + 1 \Rightarrow a + 3b - 1 = 0 \quad (1)$$

رأس سهمی  $y = bx^2 + 2bx + 1$  نقطه  $(-1, 1-b)$  است که روی سهمی

$y = ax^2 - 2ax + 2$  قرار دارد. پس

$$1-b = a + 2a + 2 \Rightarrow b = -3a - 1 \quad (2)$$

اگر در معادله (۱) مقدار  $b$  را از معادله (۲) قرار دهیم، آن‌گاه  $a + 3(-3a - 1) - 1 = 0$

در نتیجه  $a = -\frac{1}{2}$ . بنابراین  $b = \frac{1}{2}$  و در نتیجه  $a + b = 0$ .

**۵۳- گزینه ۱** معادله محور تقارن سهمی  $y = ax^2 + bx + c$

به صورت  $x = -\frac{b}{2a}$  است. در نتیجه

$$-\frac{m-2}{2(3m-4)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3m-4 = -m+2 \Rightarrow 4m=6 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

**۵۴- گزینه ۴** توجه کنید که چون  $OA < OB$ ، پس محور تقارن

سهمی پاره‌خط  $OB$  را قطع می‌کند. در نتیجه،  $-\frac{b}{2a} > 0$ ، یعنی علامت  $a$  و  $b$

فرق می‌کند. از طرف دیگر، چون سهمی پایین‌ترین نقطه دارد، پس  $a > 0$ ، در نتیجه  $b < 0$ . از طرف دیگر، عرض نقطه تلاقی سهمی و محور  $y$  منفی است، پس  $c < 0$ . به این ترتیب،  $bc > 0$ .

**۵۵- گزینه ۲** سهمی از نقطه  $(0, 0)$  عبور می‌کند، پس  $c = 0$ . طول

رأس سهمی برابر  $x = 1$  است. پس  $-\frac{b}{2a} = 1$  در نتیجه  $b = -2a$ . عرض

رأس سهمی برابر است با  $y = -1$ ، بنابراین

$$ax^2 + bx + c = -1 \xrightarrow{b=-2a} a - 2a = -1 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین  $b = -2$ .

**۵۶- گزینه ۱** با توجه به اینکه سهمی محور طول‌ها را در  $x = 4$  و

$x = -2$  قطع کرده است، معادله سهمی به شکل  $f(x) = k(x+2)(x-4)$

است. از طرف دیگر مساحت مستطیل برابر  $4f(-1)$  است. بنابراین

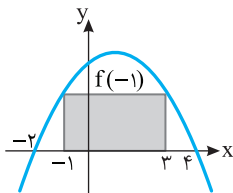
$$4f(-1) = 8 \Rightarrow f(-1) = 2$$

پس

$$k(-1+2)(-1-4) = 2 \Rightarrow k = -\frac{2}{5}$$

بنابراین معادله سهمی به شکل  $f(x) = -\frac{2}{5}(x+2)(x-4)$  یا

$$f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{16}{5}. c = \frac{16}{5}$$



**۵۷- گزینه ۴** با توجه به شکل معلوم می‌شود ضریب  $x^2$  و عرض

نقطه تقاطع سهمی با محور  $y$  مثبت است. در نتیجه

$$m+2 > 0, m > 0 \quad (1)$$

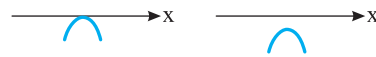
از طرف دیگر، چون مجموع ضرایب صفر است، بنابراین، جواب‌های معادله

$y = 0$  اعداد  $\frac{m}{m+2}$  و  $1$  هستند، که با توجه به شرط (۱) هر دو مثبت هستند.

بنابراین حدود  $m$  بازه  $(0, +\infty)$  است.

**۴۷- گزینه ۲** در حالت‌های زیر نمودار تابع درجه دوم از ناحیه‌های اول و

دوم صفحه مختصات عبور نمی‌کند.



بنابراین معادله  $f(x) = 0$  حداکثر یک جواب دارد و ضریب  $x^2$  در این معادله

$$a = m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (1)$$

منفی است.

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 1 - 4(m-1)^2 \leq 0 \Rightarrow (m-1)^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} m-1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow m \geq \frac{3}{2} \\ \text{یا} \\ m-1 \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

از اشتراک ناحیه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $m \leq \frac{1}{2}$ .

**۴۸- گزینه ۴** توجه کنید که

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = 5 \Rightarrow \frac{4(2m) - 36}{4} = 5 \Rightarrow 2m - 9 = 5 \Rightarrow m = 7$$

**۴۹- گزینه ۳** مجموع طول زردهای استفاده شده برابر با

$200 = 3y + 4x$  است. پس  $4x = 200 - 3y$ . همچنین مساحت کل زمین

برابر است با  $A = 2xy$ . در نتیجه

$$A = 2xy = \frac{1}{2} \times 4xy = \frac{1}{2} (200 - 3y)y = \frac{1}{2} (200y - 3y^2)$$

بنابراین

$$2A = 200y - 3y^2 = -3\left(y^2 - \frac{200y}{3}\right) = -3\left(\left(y - \frac{100}{3}\right)^2 - \frac{10000}{9}\right)$$

$$= \frac{10000}{3} - 3\left(y - \frac{100}{3}\right)^2 \leq \frac{10000}{3}$$

بنابراین  $A \leq \frac{5000}{3}$ ، یعنی حداکثر مساحت اصطبل برابر  $\frac{5000}{3}$  است.

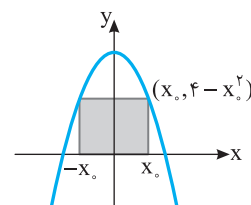
**۵۰- گزینه ۲** با توجه به شکل زیر می‌توان نتیجه گرفت محیط

مستطیل برابر است با

$$2(2x_0 + 4 - x_0^2) = -2x_0^2 + 4x_0 + 8 = -2(x_0^2 - 2x_0 + 1) + 10$$

$$= -2(x_0 - 1)^2 + 10 \leq 10$$

در نتیجه بیشترین محیط مستطیل برابر است با  $10$ .



**۵۱- گزینه ۴** مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x = -\frac{-2}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{2}{3}$$

بنابراین رأس سهمی نقطه  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$  است و چون ضریب  $x^2$  عددی مثبت

است، پس سهمی دارای پایین‌ترین نقطه است، یعنی گزینه (۴) درست است.



**۶۳- گزینه ۲** محور تقارن سهمی به معادله  $y = x^2 - 4x + 1$  خط  $x = 2$

است و محور تقارن سهمی به معادله  $y = ax^2 - a^2x$  خط  $x = \frac{a^2}{2}$  است. پس

$$\frac{a^2}{2} = 2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

**۶۴- گزینه ۴** ابتدا نابرابری  $\frac{b^2 - 4ac}{4a} > c$  را به صورت  $\frac{b^2 - 4ac}{4a} > c$

می‌نویسیم. می‌دانیم عرض رأس سهمی مورد نظر برابر  $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$  است.

که منفی است. در نتیجه باید عرض رأس سهمی مورد نظر منفی باشد. بنابراین در بین گزینه‌های داده شده گزینه (۴) می‌تواند درست باشد.

**۶۵- گزینه ۴** معادله سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  است. مختصات

نقاط داده شده را در معادله سهمی قرار می‌دهیم:

$$x = -1, y = 0 \Rightarrow 0 = a - b + c \quad (1)$$

$$x = 1, y = 4 \Rightarrow 4 = a + b + c \quad (2)$$

$$x = 2, y = 9 \Rightarrow 9 = 4a + 2b + c \quad (3)$$

اگر دو طرف معادله (۱) را از دو طرف معادله (۲) کم کنیم، به معادله زیر می‌رسیم:

$$4 - 0 = a + b + c - (a - b + c) \Rightarrow 4 = 2b \Rightarrow b = 2$$

در معادله‌های (۱) و (۳) به جای  $b$  مقدار ۲ را قرار می‌دهیم و دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a - 2 + c = 0 \\ 4a + 4 + c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 4a + c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

بنابراین معادله سهمی  $y = x^2 + 2x + 1$  است. این سهمی از نقطه  $(-2, 1)$  عبور می‌کند.

**۶۶- گزینه ۱** چون سهمی ماکزیمم دارد، پس

$$m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1$$

همچنین، سهمی محور  $x$  را قطع نمی‌کند، در نتیجه دلتای معادله آن منفی است:

$$\Delta = (m+1)^2 + 16(m+1) < 0$$

بنابراین به معادله  $(m+1)(m+17) < 0$  می‌رسیم. می‌دانیم  $m+1 < 0$ ، در

نتیجه  $m+17 > 0$ ، پس  $m > -17$ . بنابراین  $m \in (-17, -1)$ .

**۶۷- گزینه ۲** اگر نمودار تابع  $f$  فقط از ناحیه سوم عبور نکند، آن‌گاه از

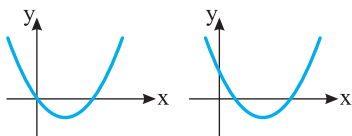
ناحیه‌های اول، دوم و چهارم عبور می‌کند. (توجه کنید که ضریب  $x^2$  مثبت است و سهمی کمترین مقدار دارد.) پس باید معادله  $f(x) = 0$  دو جواب داشته باشد که یا هر دو مثبت باشند یا یکی مثبت و دیگری صفر باشد. بنابراین

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 + 4m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty) \quad (1)$$

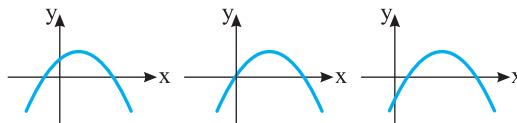
$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \quad (2)$$

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow -m \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0] \quad (3)$$

از اشتراک مجموعه جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود  $m \in (-\infty, -4)$ .



**۵۸- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که نمودار تابع  $f$  یک سهمی است که ماکزیمم دارد. بنابراین در حالت کلی باید به صورت‌های زیر باشد تا از ناحیه اول صفحه مختصات عبور کند.



بنابراین باید معادله  $f(x) = 0$  دو جواب داشته باشد که هر دو منفی نباشند یا اینکه یکی صفر و دیگری منفی نباشد. اگر یکی از جواب‌ها  $x = 0$  باشد، آن‌گاه  $m = 0$  و معادله به صورت  $f(x) = -x^2$  در می‌آید که از ناحیه اول صفحه مختصات عبور نمی‌کند. پس شرط داشتن دو جواب منفی

$$\left(\frac{c}{a} > 0, -\frac{b}{a} < 0, \Delta > 0\right) \text{ را بررسی می‌کنیم:}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 + 4m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \text{یا} \\ m < -4 \end{cases}, \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -2m > 0 \Rightarrow m < 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow m < 0 \end{cases}$$

پس  $m < 0$ ، نباید برقرار باشد و در نتیجه  $m > 0$ .

**۵۹- گزینه ۱** جواب‌های معادله را با  $\alpha$  و  $\beta$  نشان می‌دهیم. در این

صورت طبق فرض مسئله،  $\alpha + \beta = 2\alpha\beta$ ، چون  $\alpha + \beta = -(k-2)$  و

$\alpha\beta = -k$ ، بنابراین  $-k + 2 = -2k \Rightarrow k = -2$ . بنابراین

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 1 = -2(x^2 + 2x) + 1 = -2(x+1)^2 + 3 = 3 - 2(x+1)^2$$

پس بیشترین مقدار  $f(x)$  برابر ۳ است.

**۶۰- گزینه ۲** طول اضلاع قائمه را با  $b$  و  $c$  نشان می‌دهیم. در این

صورت  $b + c = 8$ ، از طرف دیگر،

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}b(8-b) = \frac{1}{2}(8b - b^2)$$

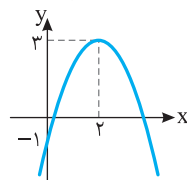
بیشترین مقدار عبارت  $8b - b^2$  به ازای  $b = \frac{-8}{2(-1)} = 4$  به دست می‌آید. در

$$\text{نتیجه، بیشترین مقدار } S \text{ برابر است با } \frac{1}{2}(8 \times 4 - 4^2) = \frac{1}{2}(32 - 16) = 8.$$

**۶۱- گزینه ۲** سهمی از نقطه  $(0, -1)$  عبور می‌کند، طول رأس سهمی

$$y = \frac{fac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-1) - 16}{4(-1)} = 3 \text{ و عرض آن } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

است، در نتیجه رأس سهمی نقطه  $(2, 3)$  و نمودار آن به شکل زیر است. بنابراین این سهمی از ناحیه دوم نمی‌گذرد.



**۶۲- گزینه ۱** سهمی به معادله  $y = x^2 - 2x$  دارای پایین‌ترین نقطه

به مختصات  $x = 1$  و  $y = -1$  است. پس سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$

از نقطه  $(0, -2)$  عبور می‌کند و رأس آن  $(1, -1)$  است. بنابراین

$$-2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -2$$

$$\text{طول رأس سهمی: } x = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$$

$$y = a(1)^2 + b(1) - 2 = -1 \Rightarrow a + b = 1$$

$$\xrightarrow{b = -2a} a - 2a = 1 \Rightarrow a = -1, b = 2$$

بنابراین  $abc = (-1)(2)(-2) = 4$ .

در نتیجه  $D_f = \mathbb{R} - \{-1, \frac{1}{3}\}$ . بنابراین دو عدد  $-1$  و  $\frac{1}{3}$  در دامنه تابع قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر  $-\frac{2}{3}$  است.

**۷۴- گزینه ۱** برای اینکه  $\mathbb{R}$  دامنه تابع باشد، باید مخرج کسر ضابطه تابع ریشه نداشته باشد. بنابراین  $\Delta = m^2 - 16 < 0 \Rightarrow m^2 < 16 \Rightarrow -4 < m < 4$

**۷۵- گزینه ۲** باید نامعادله  $\frac{9-x}{x+2} \geq 0$  را حل کنیم. با توجه به جدول

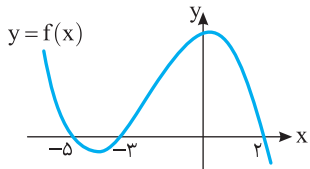
$x$	$-\infty$	$-2$	$9$	$+\infty$
$\frac{9-x}{x+2}$		-	+	-

پس  $D_f = (-2, 9]$ . در نتیجه  $a = -2$ ،  $b = 9$  و  $a - b = -11$

**۷۶- گزینه ۳** شرط‌های زیر برای تعیین دامنه وجود دارد:  
 $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ ،  $7 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 7$   
 $\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \neq \sqrt{7-x} \Rightarrow x-1 \neq 7-x \Rightarrow x \neq 4$   
 بنابراین  $D_f = [1, 7] - \{4\}$ . پس عددهای صحیح  $1, 2, 3, 5, 6, 7$  در دامنه تابع قرار دارند.

**۷۷- گزینه ۲** توجه کنید که  $D_f = \{x | x^2 + 2x + 2 - m^2 \geq 0\}$  برای اینکه همواره  $x^2 + 2x + 2 - m^2 \geq 0$  باید  $\Delta \leq 0$   
 $\Delta = 2^2 - 4(2 - m^2) \leq 0 \Rightarrow 4 - 8 + 4m^2 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m \leq 1$   
 بنابراین کمترین مقدار ممکن  $m$  برابر  $-1$  و بیشترین مقدار آن برابر  $1$  است که اختلاف آن‌ها برابر  $2$  است.

**۷۸- گزینه ۲** برای اینکه از نمودار تابع  $y = f(x-2)$  به نمودار تابع  $y = f(x)$  برسیم، کافی است آن را دو واحد به چپ منتقل کنیم.



برای به دست آوردن دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ ، عبارت  $\frac{x}{f(x)}$  را تعیین

$x$	$-\infty$	$-5$	$-3$	$0$	$2$	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+	+	-
$x$		-	-	-	+	+
$\frac{x}{f(x)}$		-	+	-	+	-

بنابراین  $D_g = (-5, -3) \cup [0, 2)$ . پس دامنه تابع  $g$  شامل سه عدد صحیح است.

**۷۹- گزینه ۲** تساوی‌های زیر باید برقرار باشند:  
 $(1, 2a) = (1, 8) \Rightarrow a = 4$   
 $(2, 2a+b) = (2, 5) \Rightarrow 2a+b = 5 \xrightarrow{a=4} 8+b = 5 \Rightarrow b = -3$   
 $(a+c, 3) = (5, 3) \Rightarrow a+c = 5 \xrightarrow{a=4} 4+c = 5 \Rightarrow c = 1$   
 بنابراین  $a+b+c = 2$

**۶۸- گزینه ۳** از شکل روبه‌رو و فرض مسئله نتیجه می‌شود  $2(a+b) = 24 \Rightarrow a+b = 12 \Rightarrow b = 12-a$

اکنون توجه کنید که  $l^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (12-a)^2 = 2a^2 - 24a + 144$   
 کمترین مقدار  $l^2$  برابر است با  $72$   $\frac{(-24)^2 - 4 \times 2 \times 144}{4 \times 2} = 72$   
 بنابراین  $l^2 \geq 72 \Rightarrow l \geq 6\sqrt{2}$

**۶۹- گزینه ۳** چون نمودار تابع  $f$  از نقطه  $(0, -2)$  گذشته است، پس  $f(0) = -2 \Rightarrow c = -2$   
 از طرف دیگر،  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله  $-x^2 + bx + c = 0$  هستند، در نتیجه  $x_1 + x_2 = b$  و  $x_1 x_2 = -c = 2$  بنابراین

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2} x_1 x_2 = 42 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - \frac{3}{2} x_1 x_2 = 42$$

$$b^2 - \frac{3}{2} \times 2 = 42 \Rightarrow b^2 = 49$$

عرض رأس سهمی برابر است با  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ . در نتیجه بیشترین مقدار تابع  $f$  برابر است با  $\frac{4(-1)(-2) - 49}{4(-1)} = \frac{41}{4}$

**۷۰- گزینه ۲** از فرض مسئله، معلوم می‌شود که  $3x + 2y = 4$  محیط شکل باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن شود. در نتیجه مساحت پنجره را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + xy \Rightarrow 4S = \sqrt{3} x^2 + 4xy$$

چون  $2y = 4 - 3x$  پس  $4S = \sqrt{3} x^2 + 2x(4 - 3x) = \sqrt{3} x^2 + 2x(4 - 3x) = (\sqrt{3} - 6)x^2 + 8x$   
 چون  $\sqrt{3} - 6 < 0$ ، بیشترین مقدار عبارت فوق به ازای  $x = \frac{-8}{2(\sqrt{3} - 6)} = \frac{4}{6 - \sqrt{3}}$  به دست می‌آید.

**۷۱- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که  $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ ،  $1 - \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = 0 \Rightarrow x=0$   
 بنابراین  $D_f = \mathbb{R} - \{0, -1\}$

**۷۲- گزینه ۳** ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:  
 $x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$   
 $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ ،  $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

بنابراین  $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}$ . پس چهار عدد در دامنه تابع قرار ندارند.

**۷۳- گزینه ۲** مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:  
 $2|x| - |x-1| = 0 \Rightarrow 2|x| = |x-1|$   
 $2x = x-1 \Rightarrow x = -1$ ،  $2x = -x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

۸۶- گزینه ۳ شرطهای زیر برای تعیین دامنه تابع وجود دارند:

$$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3, \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\sqrt{x+2}-2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} \neq 2 \Rightarrow x+2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$$

بنابراین  $D_f = [-2, 3] - \{2\}$  و عددهای صحیح  $-2, -1, 0, 1, 2, 3$  دامنه تابع قرار دارند.

۸۷- گزینه ۳ دامنه تابع  $f$  بازه  $[-3, 2]$  است. بنابراین عبارت

$$\mathbb{R} - (-3, 2) \quad ax^2 + bx + 2a^2$$

منفی باشد. پس  $x=2$  و  $x=-3$  جوابهای معادله  $ax^2 + bx + 2a^2 = 0$  هستند. یعنی اگر به جای  $x$  یک بار  $2$  و بار دیگر  $-3$  قرار دهیم مقدار عبارت برابر صفر خواهد شد:

$$3 \times \begin{cases} 4a + 2b + 2a^2 = 0 \\ 9a - 3b + 2a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} 12a + 6b + 6a^2 = 0 \\ 18a - 6b + 4a^2 = 0 \end{cases}$$

$$30a + 10a^2 = 0$$

$$10a(3+a) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -3$$

اگر  $a=0$  از معادله (I) نتیجه می‌شود  $b=0$  و اگر  $a=-3$  از معادله (I) نتیجه می‌شود

$$-12 + 2b + 18 = 0 \Rightarrow b = -3$$

اگر  $a=b=0$  آن‌گاه  $f(x)=0$  و  $D_f = \mathbb{R}$ . پس فقط  $a=b=-3$  قابل قبول است و در نتیجه  $a+b=-6$ .

۸۸- گزینه ۴ باید نامعادله  $\frac{f(x)}{x^2-x} \geq 0$  را حل کنیم. مطابق جدول

تعیین علامت زیر جواب نامعادله به صورت زیر است:

$$x \leq -1 \quad \text{یا} \quad 0 < x < 1 \quad \text{یا} \quad x = -1$$

بنابراین  $D_g = \{-1\} \cup (0, 1) \cup (1, 2]$

x	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
f(x)	+	-	-	-	-	+	+
$x^2-x$	+	+	+	0	-	+	+
f(x)	+	-	-	+	+	+	+
$x^2-x$	+	+	+	0	-	+	+

۸۹- گزینه ۲ راه‌حل اول فرض کنید  $g(x) = ax + b$  و تابع  $f$  تابع

$$\frac{x^2 - mx + 3}{3-x} = ax + b \quad \text{تساوی } x \neq 3 \text{ هر دو طرف را در } 3-x \text{ ضرب می‌کنیم}$$

برقرار است. پس

$$x^2 - mx + 3 = 3ax + 3b - ax^2 - bx = -ax^2 + (3a-b)x + 3b$$

تساوی بالا به ازای هر  $x \neq 3$  برقرار است. بنابراین

$$a = -1, \quad 3 = 3b \Rightarrow b = 1$$

$$-m = 3a - b \xrightarrow{a=-1, b=1} m = 4$$

بنابراین  $g(x) = -x + 1$ . همچنین باید تساوی  $f(3) = g(3)$  درست باشد. پس

$$f(3) = n, \quad g(3) = -3 + 1 = -2 \Rightarrow n = -2$$

در نتیجه  $m+n=2$ .

۹۰- گزینه ۲ تابعهای  $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{6-x}$  و  $f(x) = \sqrt{6x-x^2}$

برابرند. زیرا

$$D_f = D_g = [0, 6], \quad f(x) = \sqrt{6x-x^2} = \sqrt{x(6-x)} = \sqrt{x}\sqrt{6-x} = g(x)$$

تابعهای  $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-3}$  و  $f(x) = \sqrt{x^2-3x}$  و همین‌طور تابعهای

$$g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x+3} \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x^2+3x}$$

نیستند. تابعهای  $g(x) = x-3$  و  $f(x) = \sqrt{x^2-6x+9}$  دامنه یکسان

دارند، اما ضابطه برابر ندارند. زیرا

$$f(x) = \sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| \neq g(x)$$

۹۱- گزینه ۴ سه کسر در ضابطه تابع وجود دارد. مخرج هر یک را

برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1, \quad x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$1 - \frac{4}{x+1} = 0 \Rightarrow x+1-4=0 \Rightarrow x=3$$

بنابراین  $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$ . پس حاصل ضرب عددهایی که در دامنه تابع قرار ندارند برابر  $-6$  است.

۹۲- گزینه ۳ مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن

را به دست می‌آوریم:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^3 - x - 2x^2 + 2 = 0$$

$$x(x^2-1) - 2(x^2-1) = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x-2) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=1, x=-1, x=2$$

بنابراین  $D_f = \mathbb{R} - \{1, -1, 2\}$ . پس سه عدد در دامنه تابع قرار ندارند.

۹۳- گزینه ۳ چون  $x=4$  در دامنه تابع نیست، پس مخرج حداقل

یکی از کسره‌های ضابطه تابع را صفر می‌کند. بنابراین

$$x-a=0 \xrightarrow{x=4} 4-a=0 \Rightarrow a=4$$

$$x - \frac{a+1}{x-a} = 0 \xrightarrow{x=4} 4 - \frac{a+1}{4-a} = 0 \Rightarrow a=3$$

پس حاصل جمع مقادیر ممکن برای  $a$  برابر  $7$  است.

۹۴- گزینه ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنه تابع قرار ندارد، پس

معادله  $m^2x^2 + x + 1 = 0$  باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول مخرج ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = 1 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

در این حالت  $x = -2$  ریشه مخرج است. در نتیجه  $n = -2$ .

حالت دوم مخرج عبارت درجه اول باشد، یعنی ضریب  $x^2$  برابر صفر باشد.

در این حالت  $m = 0$  و  $x = -1$  ریشه مخرج است. در نتیجه  $n = -1$ .

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای  $n$  برابر  $2$  است.

۹۵- گزینه ۱ باید  $x = -1$  و  $x = 2$  جوابهای معادله

$a|x| - bx + 1 = 0$  باشند. بنابراین

$$a|x| - bx + 1 = 0 \xrightarrow{x=-1} a + b + 1 = 0$$

$$a|x| - bx + 1 = 0 \xrightarrow{x=2} 2a - 2b + 1 = 0$$

$$ab = \frac{3}{16} \quad \text{و در نتیجه} \quad b = -\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad a = -\frac{3}{4}$$

۹۳- گزینه ۳ هر دو عبارت رادیکالی باید با معنی باشند. در نتیجه

$$\frac{16-x^2}{x} \geq 0 \text{ و } \frac{-x}{x+5} \geq 0.$$

جواب‌های نامعادله اول  $(-\infty, -4] \cup (0, 4]$  و مجموعه جواب‌های نامعادله

دوم  $(-5, 0]$  است. بنابراین دامنه تابع  $f$  برابر است با

$$((-\infty, -4] \cup (0, 4]) \cap (-5, 0] = (-5, -4]$$

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
$16-x^2$	-	0	+	+	-
x	-	-	0	+	+
$\frac{16-x^2}{x}$	+	0	-	+	-

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$
$\frac{-x}{x+5}$	-	0	+	-

بنابراین  $a = -5$ ،  $b = -4$  و  $a+b = -9$ .

۹۴- گزینه ۳ شرط تعیین دامنه به صورت زیر است

$$(a+2)x^2 + ax + b \geq 0$$

مجموعه جواب‌های نامعادله فوق نمی‌تواند به صورت  $(-\infty, 3]$  باشد، مگر

اینکه عبارت  $(a+2)x^2 + ax + b$  درجه اول باشد، یعنی  $a+2=0$ . در نتیجه

$$a = -2. \text{ پس نامعادله به صورت } -2x + b \geq 0 \text{ درمی‌آید:}$$

$$-2x + b \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{b}{2} \Rightarrow D_f = (-\infty, \frac{b}{2}]$$

بنابراین  $\frac{b}{2} = 3$  و در نتیجه  $b = 6$ .

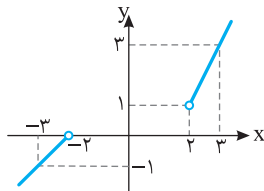
۹۵- گزینه ۳ دامنه تابع  $g$  از حل نامعادله  $-x^3 f(x) \geq 0$  به دست

می‌آید. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعه جواب‌های این نامعادله  $(-1, 0] \cup [1, 2]$  است که شامل چهار عدد صحیح است.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$-x^3$	+	+	+	0	-	-	-
f(x)	+	-	-	0	+	-	+
$-x^3 f(x)$	+	-	-	0	-	+	-

۹۶- گزینه ۱ راه‌حل اول نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است

که برد تابع  $\mathbb{R} - [0, 1]$  است. پس  $a = 0$  و  $b = 1$ . در نتیجه  $a+b = 1$ .



راه‌حل دوم اگر  $x > 2$ ، آن‌گاه

$$2x > 4 \Rightarrow 2x - 3 > 1 \Rightarrow f(x) > 1$$

اگر  $x < -2$ ، آن‌گاه

$$x + 2 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

پس  $R_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - [0, 1]$ . در نتیجه

$$a+b = 1$$

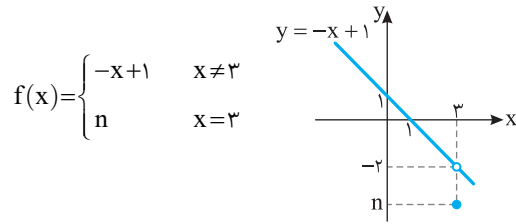
راه‌حل دوم برای اینکه تابع  $f$  خطی باشد، باید کسر  $\frac{x^2 - mx + 3}{3-x}$  ساده

شود. یعنی باید صورت کسر عامل  $x-3$  داشته باشد. پس صورت کسر به ازای  $x=3$  صفر می‌شود.

$$9 - 3m + 3 = 0 \Rightarrow m = 4$$

$$\frac{x^2 - mx + 3}{3-x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{3-x} = \frac{(x-1)(x-3)}{-(x-3)} = -x + 1$$

پس نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است:



واضح است که اگر  $n \neq -2$  آن‌گاه تابع  $f$  خطی نیست. پس  $n = -2$ ، بنابراین

$$m+n = 2$$

۹۰- گزینه ۳ ضابطه دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{bx+2}{\lambda x+b} = c \Rightarrow \lambda cx + bc = bx + 2$$

$$\begin{cases} \lambda c = b \\ bc = 2 \end{cases} \Rightarrow c \times \lambda c = 2 \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2}, b = 4 \\ c = -\frac{1}{2}, b = -4 \end{cases}$$

اگر  $b = 4$ ، آن‌گاه  $f(x) = \frac{4x+2}{\lambda x+4}$ . بنابراین  $x = -\frac{1}{\lambda}$  در دامنه تابع  $f$  قرار

ندارد و در دامنه تابع  $g$  نیز نباید قرار داشته باشد. پس  $a = -\frac{1}{\lambda}$  و در نتیجه

$$a = \frac{1}{\lambda} = -4. \text{ در حالت } b = -4, f(x) = \frac{-4x+2}{\lambda x-4} \text{ که نتیجه می‌شود } \frac{ab}{c} = -4$$

$$\text{و } \frac{ab}{c} = 4$$

۹۱- گزینه ۱ عده‌هایی که مخرج ضابطه تابع را صفر می‌کنند، در

دامنه تابع قرار ندارند. پس  $x=2$  جواب معادله  $x^3 - (a+1)x + a = 0$

است. پس

$$8 - 2(a+1) + a = 0 \Rightarrow a = 6$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت  $f(x) = \frac{1}{x^3 - 7x + 6}$  است. دامنه تابع را

به دست می‌آوریم:

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 + 2x - 3) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1, x = -3$$

در نتیجه  $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2, -3\}$ .

۹۲- گزینه ۳ شرایط زیر برای تعیین دامنه تابع وجود دارد:

$$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$4 - \sqrt{2x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1} \leq 4 \Rightarrow 2x-1 \leq 16 \Rightarrow x \leq \frac{17}{2}$$

بنابراین  $D_f = [\frac{1}{2}, \frac{17}{2}]$ . پس  $a = \frac{1}{2}$  و  $b = \frac{17}{2}$  و  $a+b = 9$ .

۱۰۲- گزینه ۴ اگر شعاع دایره باشد،  $P=2\pi r$  و در نتیجه  $r = \frac{P}{2\pi}$ .

از طرف دیگر  $S = \pi r^2$ . بنابراین

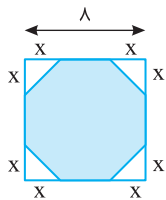
$$S = \pi \left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi P^2}{4\pi^2} \Rightarrow S(P) = \frac{1}{4\pi} P^2$$

۱۰۳- گزینه ۲ ابعاد مستطیل  $x$  و  $2 - \frac{x}{2}$  هستند، پس محیط آن

$$\text{به صورت } P(x) = 2\left(x + 2 - \frac{x}{2}\right) = x + 4$$

۱۰۴- گزینه ۲ با توجه به شکل درمی یابیم که اندازه شعاع ربع دایره و ضلع مربع برابر  $r$  است. از طرف دیگر، اگر مساحت ربع دایره را از مساحت مربع کم کنیم، مساحت قسمت رنگی به دست می آید، بنابراین

$$S(r) = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = \left(\frac{4-\pi}{4}\right)r^2$$



۱۰۵- گزینه ۳ مقدار  $x$  باید مثبت باشد و مقدار بریده شده یعنی  $2x$  باید از ۸ کمتر باشد. پس  $0 < 2x < 8$  در نتیجه  $0 < x < 4$ . بنابراین دامنه این تابع بازه  $(0, 4)$  است.

۱۰۶- گزینه ۴ از روی شکل معلوم است که نقطه  $A$  از یک طرف تا محل برخورد خط با محور  $x$ ، یعنی نقطه  $(6, 0)$ ، و از طرف دیگر تا مبدأ مختصات می تواند حرکت کند. بنابراین، دامنه این تابع بازه  $(0, 6)$  است.

۱۰۷- گزینه ۴ توجه کنید که حجم مخزن برابر است با حجم نیم کره  $2x$  + حجم استوانه  $V =$

$$= \pi(r^2)(2x) + 2x \times \frac{2}{3}\pi(r^2) = \frac{4\pi}{3}r^2x + 2\pi r^2x$$

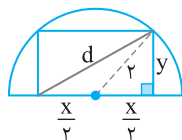
۱۰۸- گزینه ۲ مطابق شکل زیر، با استفاده از رابطه فیثاغورس،

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y^2 = 4 - \frac{x^2}{4}$$

همچنین طول قطر مستطیل از رابطه فیثاغورس قابل محاسبه است:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 4 - \frac{x^2}{4}}$$

بنابراین  $d(x) = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 4}$  ضابطه تابع مورد نظر است.



۱۰۹- گزینه ۳ شیب خطی که از نقطه های  $(2, 3)$  و  $(x, 0)$  عبور

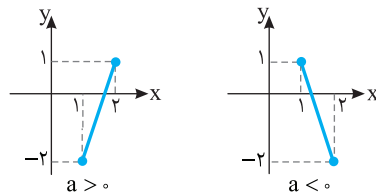
می کند، برابر  $\frac{3-0}{2-x}$  است. شیب خطی که از نقطه های  $(2, 3)$  و  $(0, y)$  عبور

می کند، برابر  $\frac{y-3}{0-2}$  است. چون نقطه های  $(2, 3)$ ،  $(x, 0)$  و  $(0, y)$  روی

یک خط واقع اند، پس برابری  $\frac{3-0}{2-x} = \frac{y-3}{0-2}$  برقرار است. بنابراین

$$y-3 = \frac{-6}{2-x} \Rightarrow y = 3 - \frac{6}{2-x} \Rightarrow y = \frac{3x}{x-2}$$

۹۷- گزینه ۳ فرض کنید  $f(x) = ax + b$ . نمودار تابع  $f$  در دو حالت  $a > 0$  و  $a < 0$  را در شکل های زیر رسم کرده ایم.



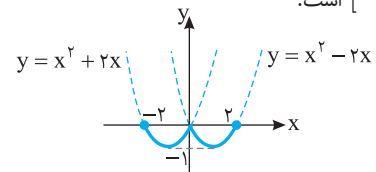
اگر  $a > 0$ ، آن گاه  $f(1) = -2$  و  $f(2) = 1$ . پس

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3x - 5 \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = -1$$

اگر  $a < 0$ ، آن گاه  $f(1) = 1$  و  $f(2) = -2$ . پس

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -3x + 4 \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = 0$$

۹۸- گزینه ۱ نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. واضح است که برد تابع  $f$  بازه  $[-1, 0]$  است.

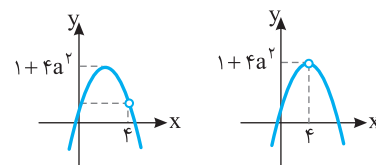


۹۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر دامنه تابع  $f(x) = -x^2 - 4ax + 1$  مجموعه اعداد حقیقی باشد، برد آن بازه  $(-\infty, 1 + 4a^2]$  است. در این حالت نمودار تابع  $f$  یک سهمی است و با حذف یک عدد از دامنه مطابق شکل زیر، عددی از برد حذف نمی شود، مگر اینکه طول رأس سهمی را حذف کنیم. بنابراین طول رأس سهمی برابر  $4$  و عرض آن برابر  $1 + 4a^2$  است:

$$\text{طول رأس سهمی } x = -\frac{-4a}{2(-1)} = 4 \Rightarrow a = -2$$

$$y = 1 + 4a^2 = 1 + 16 \Rightarrow b = 17$$

بنابراین  $a + b = 15$ .



۱۰۰- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x \neq 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)}{x - 1} = x^2 + x^2 + x + 1$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow a = 1$$

از طرف دیگر،

$$x = 1 \Rightarrow g(x) = g(1) = b, \quad f(1) = 4, \quad g(1) = f(1) \Rightarrow b = 4$$

بنابراین  $a + b = 5$ .

راه حل دوم با استفاده از نقطه های  $x = 1$  و  $x = 0$  مقادیر  $a$  و  $b$  به راحتی به دست می آیند.

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \Rightarrow a = 1 \\ f(1) = g(1) \Rightarrow 3 + a = b \end{cases} \Rightarrow a + b = 5 \xrightarrow{a=1} 4 = b$$

۱۰۱- گزینه ۴ طول مستطیل را  $x$  و عرض آن را  $x - 2$  در نظر می گیریم، پس محیط آن برابر است با  $P(x) = 2(x + x - 2) = 4x - 4$ .

پس باید حاصل ضرب جواب‌های معادله  $\frac{x^2+x-4}{2}=2$  را به دست آوریم

$$x^2+x-4=4 \Rightarrow x^2+x-8=0$$

حاصل ضرب جواب‌های معادله بالا برابر  $\frac{c}{a}=-8$  است.

۱۱۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$  و  $D_g = \mathbb{R} - \{3\}$

از طرف دیگر،

$$D_{\frac{g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x | f(x) = 0\} = (\mathbb{R} - \{2, 3\}) - \left\{x \mid \frac{x+4}{x-2} = 0\right\} \\ = \mathbb{R} - \{2, 3, -4\}$$

پس مجموع اعدادی که در دامنه تابع  $\frac{g}{f}$  قرار ندارند برابر ۱ است.

۱۱۷- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع  $f$  را حساب می‌کنیم:

$$f(x) + g(x) = x^2 - 4x, \quad f(x) - g(x) = x^2 - 6x - 12$$

با جمع طرفین دو تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$2f(x) = 2x^2 - 10x - 12 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5x - 6$$

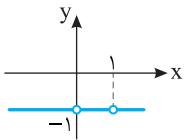
بنابراین

$$D_{\frac{g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x | f(x) = 0\} \\ = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x | x^2 - 5x - 6 = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 6\}$$

۱۱۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$  پس

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x^2+1}{x^2-x} = \frac{x-x^2}{x^2-x} = -1$$



بنابراین باید نمودار تابع  $y = -1$  را با دامنه  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  رسم کنیم که به صورت مقابل است.

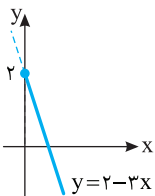
۱۱۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که  $D_f = D_g = [0, +\infty)$  پس

$$D_{g-f} = D_f \cap D_g = [0, +\infty)$$

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) = 2 - \sqrt{x} - (3x - \sqrt{x}) = 2 - 3x$$

پس نمودار تابع  $g-f$  به صورت روبه‌رو

است و برد آن بازه  $(-\infty, 2]$  است.



۱۲۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 2x - (x+1) & x \geq 1 \\ x - 1 - 3x & x \leq -1 \end{cases} \\ = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -2x - 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

اکنون برد تابع  $f-g$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم

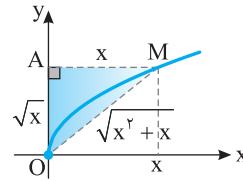
$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \\ x \leq -1 \Rightarrow -2x \geq 2 \Rightarrow -2x - 1 \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 \end{cases}$$

۱۱۰- گزینه ۴ مطابق شکل زیر طول ضلع OM به کمک قضیه

$$\sqrt{AM^2 + OA^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 + x}$$

پس محیط مثلث OAM برابر است با

$$P(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt{x^2 + x}$$



۱۱۱- گزینه ۲ اشتراک دامنه‌های  $f$  و  $g$  مجموعه  $\{2, 3, 4\}$  است که

دامنه تابع  $f+g$  است. پس این تابع به شکل

$$R_{f+g} = \{2, 11, -1\}$$

و مجموع اعضای برد  $f+g$  برابر ۱۲ است.

۱۱۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f = \{1, 3, 5, -1\}, \quad D_g = \{1, 2, 5, 4\}$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1, 5\}$$

راه‌حل اول بنابراین  $a$  یکی از مقادیر ۱ یا ۵ است. از طرف دیگر

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 4 = 6$$

$$(f-g)(1) = f(1) - g(1) = 2 - 4 = -2$$

$$(f+g)(5) = f(5) + g(5) = 6 + 2 = 8$$

$$(f-g)(5) = f(5) - g(5) = 6 - 2 = 4$$

پس  $(f+g)(5) = 2(f-g)(5)$  و در نتیجه  $a = 5$ .

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$(f+g)(a) = 2(f-g)(a) \Rightarrow f(a) + g(a) = 2f(a) - 2g(a) \Rightarrow f(a) = 3g(a)$$

$$f(1) = 2, \quad g(1) = 4 \Rightarrow f(1) \neq 3g(1)$$

$$f(5) = 6, \quad g(5) = 2 \Rightarrow f(5) = 3g(5) \Rightarrow a = 5$$

۱۱۳- گزینه ۱ توجه کنید که  $D_f = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$  و

$$D_{2g-f} = D_g \cap D_f = \{-1, 0, 4\}$$

بنابراین  $a$  باید یکی از مقادیرهای  $-1$  یا  $0$  یا  $4$  باشد:

$$(2g-f)(-1) = 2g(-1) - f(-1) = 4 - 2 = 2$$

$$(2g-f)(0) = 2g(0) - f(0) = 2 - 0 = 2$$

$$(2g-f)(4) = 2g(4) - f(4) = 6 - 2 = 4$$

پس  $(2g-f)(4) = 4$  بنابراین  $a = 4$  و در نتیجه  $(2g-f)(4) = 4$ .

۱۱۴- گزینه ۳ راه‌حل اول توجه کنید که

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{x^4-x^2}{x^2+1} = \frac{x^2-1+x^4-x^2}{x^2+1} \\ = \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = x^2-1$$

راه‌حل دوم توجه کنید که  $f(0) = -1$  و  $g(0) = 0$  پس  $(f+g)(0) = -1$  با

توجه به گزینه‌ها فقط در گزینه (۳) به ازای  $x = 0$  حاصل  $-1$  است.

۱۱۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow f(x) + g(x) = x^2 - 1$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = x - 3$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم

$$f(x) + g(x) + f(x) - g(x) = x^2 - 1 + x - 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{2}$$

۱۲۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = x \Rightarrow g(x) = xf(x) \quad (2)$$

اگر به جای  $g(x)$  در تساوی (۱) معادل آن یعنی  $xf(x)$  را از تساوی (۲) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$f(x) \times xf(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

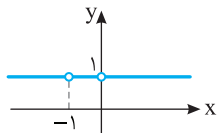
بنابراین  $g^2(x) = x^2 f^2(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$  در نتیجه

$$(f^2 - g^2)(x) = f^2(x) - g^2(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{1+x}$$

۱۲۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$$



پس اگر  $x \neq -1$  و  $x \neq 0$ ، آن‌گاه  $(f+g)(x) = 1$ . بنابراین نمودار تابع  $f+g$  به صورت مقابل است.

۱۲۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

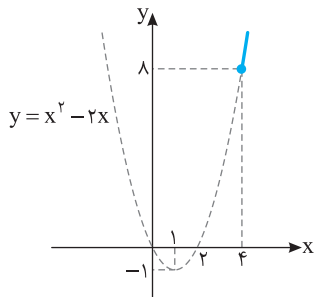
$$D_f = D_g = [4, +\infty)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + \sqrt{x-4} - 2x - \sqrt{x-4} = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

برای تعیین برد تابع  $f-g$  به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$x \geq 4 \Rightarrow x-1 \geq 3 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 9 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 \geq 8 \Rightarrow (f-g)(x) \geq 8$$

پس  $R_{f-g} = [8, +\infty)$ . برد تابع  $f-g$  از روی نمودار آن هم مشخص است.



۱۳۰- گزینه ۴ اگر  $x > 1$ ، آن‌گاه

$$f(x) = 1, g(x) = -2 \Rightarrow (f-g)(x) = 1 - (-2) = 3$$

اگر  $0 < x \leq 1$ ، آن‌گاه

$$f(x) = 1, g(x) = 2 \Rightarrow (f-g)(x) = 1 - 2 = -1$$

اگر  $-1 \leq x \leq 0$ ، آن‌گاه

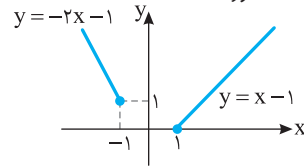
$$f(x) = -1, g(x) = 2 \Rightarrow (f-g)(x) = -1 - 2 = -3$$

اگر  $x < -1$ ، آن‌گاه

$$f(x) = -1, g(x) = -2 \Rightarrow (f-g)(x) = -1 - (-2) = 1$$

بنابراین  $R_{f-g} = \{3, -1, -3, 1\}$

بنابراین برد تابع  $f-g$  بازه  $[0, +\infty)$  است. از روی نمودار تابع  $f-g$  هم می‌توان برد آن را به دست آورد.



۱۳۱- گزینه ۴ توجه کنید که  $D_{f-2g} = D_f \cap D_g = \{0, 1, 2\}$ . بنابراین

$$(f-2g)(0) = f(0) - 2g(0) = 1 - 2(-1) = 3$$

$$(f-2g)(1) = f(1) - 2g(1) = 4 - 2(-2) = 8$$

$$(f-2g)(2) = f(2) - 2g(2) = -6 - 2(3) = -12$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع  $f-2g$  برابر  $-1$  است.

۱۳۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f+g)(x) = 2x+1 \Rightarrow (f+g)(2) = 2 \times 2 + 1 = 5 \Rightarrow f(2) + g(2) = 5 \quad (1)$$

$$(f-g)(x) = 1-x \Rightarrow (f-g)(2) = 1-2 = -1 \Rightarrow f(2) - g(2) = -1 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به دست می‌آید  $f(2) = 2$  و  $g(2) = 3$ . بنابراین  $(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 2 \times 3 = 6$ .

۱۳۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$D_f = (-\infty, 4] - \{0\}, \quad D_g = \{-2, -1, 0, 3, 4, 5\}$$

بنابراین

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\} = \{-2, -1, 3, 4\} - \{-1\} = \{-2, 3, 4\}$$

پس تابع  $\frac{f}{g}$  سه زوج مرتب دارد.

۱۳۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = |x-1| + |x| = \begin{cases} -2x+1 & x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

در بازه  $[0, 1]$  تابع  $f+g$  ثابت است. در این بازه،

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| - \left| \frac{x}{x} \right| = -x+1-x = -2x+1$$

۱۳۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f+2g)(x) = f(x) + 2g(x) \Rightarrow f(x) + 2g(x) = 1-x$$

$$f(x) = 1-x-2g(x)$$

$$(2f-g)(x) = 2f(x) - g(x) \Rightarrow 2f(x) - g(x) = x^2$$

بنابراین

$$2(1-x-2g(x)) - g(x) = x^2 \Rightarrow -5g(x) + 2-2x = x^2$$

$$g(x) = \frac{1}{5}(-x^2 - 2x + 2)$$

۱۳۶- گزینه ۱ ابتدا دامنه تابع‌های  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5-x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow 1 < x \leq 5 \Rightarrow D_f = (1, 5]$$

$$\frac{x-1}{4-x} \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x < 4 \Rightarrow D_g = [1, 4)$$

بنابراین

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = (1, 5] \cap [1, 4) = (1, 4)$$

۱۳۱- گزینه ۱ دامنه تابع  $g$  به شکل زیر است:

$$D_g = D_f - \{x | f(x) = 2\} = \{1, 4, 3, 5\} - \{4, 3\} = \{1, 5\}$$

از طرف دیگر،

$$g(1) = \frac{f(1)}{2-f(1)} = \frac{-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}, \quad g(5) = \frac{f(5)}{2-f(5)} = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$g = \left\{ \left(1, -\frac{1}{3}\right), (5, 1) \right\}$$

۱۳۲- گزینه ۱ ابتدا مقادیر  $f(a)$  و  $g(a)$  را به دست می‌آوریم:

$$(f-g)(a) = 2 \Rightarrow f(a) - g(a) = 2 \Rightarrow f(a) = g(a) + 2 \quad (1)$$

$$(f \times g)(a) = 8 \Rightarrow f(a)g(a) = 8 \xrightarrow{(1)} (g(a)+2)g(a) = 8$$

$$g^2(a) + 2g(a) - 8 = 0 \Rightarrow (g(a)+4)(g(a)-2) = 0$$

$$\begin{cases} g(a) = -4 \xrightarrow{(1)} f(a) = -2 \\ g(a) = 2 \xrightarrow{(1)} f(a) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(a) = -4 \xrightarrow{(1)} f(a) = -2 \\ g(a) = 2 \xrightarrow{(1)} f(a) = 4 \end{cases}$$

بنابراین

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{4}{2} = 2, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

۱۳۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$D_f = [-3, 3], \quad D_g = \{1, -1, 3, -3, -4\}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{9-x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

بنابراین

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\} = \{1, -1, 3, -3\} - \{3, -3\} = \{1, -1\}$$

از طرف دیگر،

$$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left(\frac{g}{f}\right)(-1) = \frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین  $\frac{g}{f} = \left\{ \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$  و در نتیجه برد تابع  $\frac{g}{f}$  فقط یک عضو دارد.

۱۳۴- گزینه ۴ دامنه تابع‌های  $f$  و  $g$  مجموعه  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  است. پس

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

اکنون ضابطه تابع  $f-g$  را به دست می‌آوریم:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-x}$$

$$= \frac{x+x-1-1}{x^2-x} = \frac{2(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2}{x}$$

۱۳۵- گزینه ۱ ابتدا دامنه تابع‌های  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, 2]$$

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow D_g = [-2, 1]$$

بنابراین  $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 1]$  پس  $a = -2$ ،  $b = 1$  و در نتیجه

$$a+b = -1$$

۱۳۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{1}{(ax+2)^2}, \quad g(x) = \frac{1}{(x+1)(x+b)}$$

چون فقط  $x = -1$  در دامنه تابع  $f+g$  قرار ندارد، پس تنها  $x = -1$  می‌تواند ریشه مخرج در تابع‌های  $f$  و  $g$  باشد. بنابراین باید  $b = 1$ . برای  $a$  دو حالت وجود دارد:

**حالت اول** اگر  $x = -1$  ریشه مخرج  $f(x)$  باشد، آن‌گاه  $a = 2$ .

**حالت دوم** اگر مخرج  $f(x)$  ریشه نداشته باشد، آن‌گاه  $a = 0$ .

بنابراین  $a+b$  می‌تواند ۱ یا ۳ باشد.

۱۳۷- گزینه ۲ ابتدا دامنه تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:

$$ax - a + 1 \geq 0 \Rightarrow ax \geq a - 1$$

اگر  $a > 0$ ، آن‌گاه  $x \geq \frac{a-1}{a}$ . اگر  $a < 0$ ، آن‌گاه  $x \leq \frac{a-1}{a}$ . اگر  $a = 0$ ، آن‌گاه

$x \in \mathbb{R}$ . با توجه به این موضوع و اینکه  $D_{f \times g} = [2, 5]$  و  $D_g = [2, +\infty)$

باید  $D_f = (-\infty, \frac{a-1}{a}]$  در نتیجه

$$\frac{a-1}{a} = 5 \Rightarrow a-1 = 5a \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\text{پس } f(x) = \sqrt{-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}} \text{ و در نتیجه } f(3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۳۸- گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع  $(f+g)^2$  را به دست می‌آوریم (توجه

کنید که  $x \geq 1$ ):

$$(f+g)^2(x) = f^2(x) + g^2(x) + 2f(x)g(x)$$

$$= x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 2\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} = 2x + 2\sqrt{x^2 - x}$$

با توجه به اینکه  $f(x)$  و  $g(x)$  عبارت‌هایی مثبت هستند، پس  $(f+g)(x)$

هم مثبت است. بنابراین  $(f+g)(x) = \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - x}}$ . پس  $a = 2$ .

$$b = 1 \text{ و در نتیجه } a+b = 3$$

۱۳۹- گزینه ۳ دامنه تابع‌های  $f$  و  $g$  به صورت زیر است:

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$a-x \geq 0 \Rightarrow x \leq a \Rightarrow D_g = (-\infty, a]$$

چون  $D_{f-g} = D_f \cap D_g = [2, 4]$  پس  $a = 4$ . از طرف دیگر،

$$(f+g)(3) = 5 \Rightarrow f(3) + g(3) = \sqrt{3-2} + \sqrt{4-3} + b = 5$$

$$2+b=5 \Rightarrow b=3$$

$$\text{در نتیجه } a+b=7$$

۱۴۰- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ x+2 & 0 < x < 1 \\ x+2 & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \leq 0 \\ 2x+3 & 0 < x < 1 \\ 3x+2 & x \geq 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} -3x-1 & x \leq 0 \\ -x-1 & 0 < x < 1 \\ -2x & x \geq 1 \end{cases}$$



۱۴۸- گزینه ۳ ابتدا دامنه تابع  $g \circ f$  را با توجه به  $D_f = [-2, 2]$  و

$$D_g = \mathbb{R} \text{ به دست می آوریم}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{-2 \leq x \leq 2, \sqrt{4-x^2} \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

اکنون ضابطه تابع  $g \circ f$  را مشخص می کنیم

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{4-x^2}) = (\sqrt{4-x^2})^2 + 1 = 5 - x^2$$

برای محاسبه برد از دامنه تابع کمک می گیریم

$$-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -x^2 \leq 0$$

$$1 \leq 5 - x^2 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq (g \circ f)(x) \leq 5$$

بنابراین  $R_{g \circ f} = [1, 5]$

۱۴۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \geq a, 0 \leq |x-1| \leq 3\}$$

$$= \{x \mid x \geq a, -3 \leq x-1 \leq 3\} = \{x \mid x \geq a, -2 \leq x \leq 4\}$$

بنابراین  $D_{f \circ g} = [a, +\infty) \cap [-2, 4] = [-2, 4]$ . برای اینکه این تساوی برقرار

باشد، باید  $a \leq -2$ . یعنی حداکثر مقدار  $a$  برابر  $-2$  است.

۱۵۰- گزینه ۳ می توان نوشت

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2g(x)-1 & g(x) < 0 \\ g(x)+4 & g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(3x-6)-1 & 3x-6 < 0 \\ 3x-6+4 & 3x-6 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 6x-13 & x < 2 \\ 3x-2 & x \geq 2 \end{cases}$$

۱۵۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(3) = 7, \quad (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 5$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(0) = -1, \quad (f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(1) = 0$$

بنابراین  $f \circ g = \{(-1, 7), (1, 5), (3, -1), (5, 0)\}$

۱۵۲- گزینه ۱ توجه کنید که  $f(2) = 3$ . در نتیجه

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 3m + 2 = 8 \Rightarrow m = 2$$

۱۵۳- گزینه ۴ ابتدا  $(f \circ g)(x)$  و  $(g \circ f)(x)$  را به دست می آوریم

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = \frac{1}{2x+1-1} = \frac{1}{2x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{2}{x-1} + 1 = \frac{x+1}{x-1}$$

بنابراین

$$(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2x^2+2x}{2x(x-1)} = \frac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x}$$

۱۵۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f^2(x) + 3f(x) + 2$$

بنابراین

$$(f \circ f)(x) = 6 \Rightarrow f^2(x) + 3f(x) + 2 = 6$$

$$f^2(x) + 3f(x) - 4 = 0 \Rightarrow (f(x)-1)(f(x)+4) = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 & (1) \\ f(x) = -4 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = -4 \Rightarrow x^2 + 3x + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

معادله (۲) جواب ندارد ( $\Delta < 0$ ). در معادله (۱) حاصل جمع جوابها برابر  $-3$  است.

پس حاصل جمع جوابهای معادله  $(f \circ f)(x) = 6$  برابر  $-3$  است.

راه حل دوم توجه کنید که  $f(2) = 4$  و  $g(2) = 8$ . پس

$$(f-g)(2) = 4 - 8 = -4$$

$$(f-g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} - 4 = -\frac{3}{2} \text{ پس } g\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \text{ و } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$(f-g)(-1) = 3 - 1 = 2 \text{ پس } g(-1) = 1 \text{ و } f(-1) = 3$$

همه این شرایط فقط در تابع گزینۀ (۲) وجود دارد.

۱۴۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(2) = 3$$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(3) = -2$$

$$(f \circ g)(-2) - (g \circ f)(-1) = 3 - (-2) = 5$$

بنابراین  $(f \circ g)(-2) = f(g(-2))$  ابتدا توجه کنید که

۱۴۲- گزینه ۲  $(f \circ g)(-2) = f(g(-2))$  ابتدا توجه کنید که

$$f(g(-2)) = f(4) = 4^2 + 2 = 18 \text{ و } g(-2) = -2 + 6 = 4$$

۱۴۳- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 2 = 3(4x+3) - 2 = 12x + 7$$

$$(f \circ g)(x-1) = 12(x-1) + 7 = 12x - 5$$

راه حل دوم دقت کنید که

$$(f \circ g)(x-1) = f(g(x-1)) = f(4(x-1)+3)$$

$$= f(4x-1) = 3(4x-1) - 2 = 12x - 5$$

۱۴۴- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

بنابراین

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) - 2}{\frac{2x+1}{x-1} + 2} = \frac{4x+2-2x+2}{2x+1+2x-2} = \frac{2x+4}{4x-1}$$

راه حل دوم توجه کنید که  $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = -4$ . فقط در

گزینه (۴)، تساوی بالا برقرار است.

۱۴۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 6x + 15) = 5x^2 - 3x + 2$$

بنابراین  $f((x-3)^2 + 6) = 5x^2 - 3x + 2$ . اگر در این تساوی قرار دهیم

$$f(6) = 38 = 5x^2 - 3x + 2 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 36 = 0$$

توجه کنید که

$$D_{f \circ f} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_f\} = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq 4 - 2x \leq 2\}$$

از نامعادله  $1 \leq 4 - 2x \leq 2$  نتیجه می شود  $-3 \leq -2x \leq -2$ . پس  $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ .

$$D_{f \circ f} = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\} = \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

۱۴۷- گزینه ۳ فرض کنید  $g(x) = x^2$ . تابع  $f(x^2)$  تابع  $f \circ g$

است. بنابراین می توان نوشت

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 \leq x^2 \leq 4\}$$

از نامعادله های  $1 \leq x^2 \leq 4$  نتیجه می شود

$$\begin{cases} x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x^2 \Rightarrow x \leq -1, x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2 \leq x \leq -1, 1 \leq x \leq 2$$

$$D_{f(x^2)} = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

کافی است نامعادله‌های  $f(x) > 0$  و  $f(x) < 0$  را حل کنیم.

حل  $f(x) > 0$ : اگر  $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \geq 0$$

اگر  $x < 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

حل  $f(x) < 0$ : اگر  $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

اگر  $x < 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x < 0$$

$$(\text{gof})(x) = \begin{cases} 3-(x+1) & x \geq 0 \\ 2-(x-1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x & x \geq 0 \\ 3-x & x < 0 \end{cases} \quad \text{بنابراین}$$

۱۶۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(\text{fog})(1) = f(g(1)) = f(2) = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$(\text{fog})(2) = f(g(2)) = f(1) = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$(\text{fog})(3) = f(g(3)) = f(3) = 4 \Rightarrow c = 4$$

$$(\text{fog})(4) = f(g(4)) = f(4) = 3 \Rightarrow d = 3$$

بنابراین  $a-b+c-d = 0$ .

۱۶۲- گزینه ۴ ابتدا مقادیر  $(\text{fog})(2)$  و  $(\text{gof})(a)$  را به دست می‌آوریم

$$(\text{fog})(2) = f(g(2)) = f(2) = 4 + a$$

$$(\text{gof})(a) = g(f(a)) = g(3a) = 6 - 6a$$

بنابراین باید معادله زیر را حل کنیم

$$4 + a - (6 - 6a) = 3 \Rightarrow 7a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{7}$$

۱۶۳- گزینه ۴ باید  $(\text{fof})(x)$  را به دست آوریم

$$(\text{fof})(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)+2}{f(x)-2} = \frac{\frac{x+2}{x-2}+2}{\frac{x+2}{x-2}-2} = \frac{x+2+2x-4}{x+2-2x+4} = \frac{3x-2}{-x+6}$$

۱۶۴- گزینه ۴ با توجه به ضابطه تابع  $f$ ،

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-1}$$

بنابراین

$$\frac{g(x)}{g(x)-1} = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow 2xg(x) + g(x) = xg(x) - x$$

$$(x+1)g(x) = -x \Rightarrow g(x) = \frac{-x}{x+1}$$

۱۶۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = \sqrt{4f(x)-19}$$

بنابراین

$$\sqrt{4f(x)-19} = \sqrt{4g(x)+x} \Rightarrow 4f(x)-19 = 4g(x)+x$$

$$f(x) - g(x) = \frac{x+19}{4} \Rightarrow (f-g)(x) = \frac{x+19}{4}$$

$$\therefore (f-g)(5) = \frac{5+19}{4} = 6 \quad \text{در نتیجه}$$

۱۵۵- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$g(x-1) = \frac{x+2}{3} \xrightarrow{x \rightarrow x+1} g(x) = \frac{(x+1)+2}{3} = \frac{x+3}{3}$$

بنابراین

$$(\text{fog})(x) = 6x+5 \Rightarrow f(g(x)) = 6x+5 \Rightarrow f\left(\frac{x+3}{3}\right) = 6x+5$$

اگر در این تساوی قرار دهیم  $x=0$ ، به دست می‌آید  $f(1)=5$ .

۱۵۶- گزینه ۲ ابتدا دامنه تابع  $\text{gof}$  را به دست می‌آوریم:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ = \{-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \sqrt{3-x^2} \in \{-3, 0, 1, 2\}\}$$

$$\sqrt{3-x^2} = -3 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$\sqrt{3-x^2} = 0 \Rightarrow 3-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3-x^2} = 1 \Rightarrow 3-x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3-x^2} = 2 \Rightarrow 3-x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = -1 \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین

$$D_{\text{gof}} = \{-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, x \in \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}\} = \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}$$

پس حاصل ضرب اعضای دامنه تابع  $\text{gof}$  برابر ۶ است.

۱۵۷- گزینه ۳ فرض کنید  $g(x) = 2^x$ ، تابع  $y = f(2^x)$  تابع

$y = (\text{fog})(x)$  است. دامنه تابع  $g$ ،  $\mathbb{R}$  است، پس

$$D_{\text{fog}} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 \leq 2^x \leq 4\}$$

از نامعادله‌های  $1 \leq 2^x \leq 4$  نتیجه می‌شود  $0 \leq x \leq 2$ ، پس  $D_{f(2^x)} = [0, 2]$ .

۱۵۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$  و

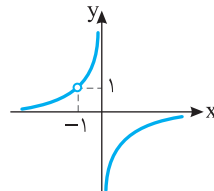
$$D_{\text{fof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq -1, \frac{x-1}{x+1} \neq -1\}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = -1 \Rightarrow x-1 = -x-1 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین  $D_g = D_{\text{fof}} = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ . اکنون ضابطه تابع  $g$  را به دست می‌آوریم

$$g(x) = (\text{fof})(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} = \frac{x-1-x-1}{x-1+x+1} = \frac{-2}{x+1}$$

بنابراین نمودار تابع  $g$  به شکل مقابل است.



۱۵۹- گزینه ۳ توجه کنید که

$$D_{\text{gof}} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 3, 1 \leq x^2 - 3 \leq 13\}$$

از حل نامعادله  $1 \leq x^2 - 3 \leq 13$  نتیجه می‌شود  $2 \leq x \leq 4$  یا  $-4 \leq x \leq -2$ .

بنابراین  $D_{\text{gof}} = [2, 3] \cup [-2, -4]$ .

۱۶۰- گزینه ۴ تابع  $\text{gof}$  به شکل زیر است

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 3-f(x) & f(x) > 0 \\ 2-f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

**۱۷۰- گزینه ۳** توجه کنید که

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 3f(x) + 2 = \begin{cases} 6x - 1 & x < 0 \\ 3x - 4 & x \geq 0 \end{cases}$$

**۱۷۱- گزینه ۳** توجه کنید که

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = 1, \quad f(5) = 5$$

$$f(g(1)) = 2, \quad f(g(2)) = 5, \quad f(g(3)) = 1, \quad f(g(4)) = 4, \quad f(g(5)) = 3$$

اکنون توجه کنید که

$$f(g(1)) = f(2) \Rightarrow g(1) = 3, \quad f(g(2)) = f(5) \Rightarrow g(2) = 5$$

$$f(g(3)) = f(4) \Rightarrow g(3) = 4, \quad f(g(4)) = f(1) \Rightarrow g(4) = 1$$

$$f(g(5)) = f(3) \Rightarrow g(5) = 2$$

$$g = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 1), (5, 2)\}$$

**۱۷۲- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$\delta = (gof)(a) = g(f(a)) = g(a + \sqrt{a})$$

از طرف دیگر  $g(6) = 5$  پس

$$a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow g(a) = g(4) = 1$$

**۱۷۳- گزینه ۲** راه حل اول توجه کنید که

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(-5x + 2a)$$

$$= 2(-5x + 2a) - a + 1 = -10x + 3a + 1$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x - a + 1)$$

$$= -5(2x - a + 1) + 2a = -10x + 7a - 5$$

چون  $(fog)(x) = (gof)(x)$  همواره برقرار است، پس

$$7a - 5 = 3a + 1 \Rightarrow 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

**راه حل دوم** تساوی داده شده به ازای  $x = 0$  برقرار است. پس

$$(fog)(0) = (gof)(0) \Rightarrow f(g(0)) = g(f(0)) \Rightarrow f(2a) = g(-a + 1)$$

$$4a - a + 1 = -5(-a + 1) + 2a \Rightarrow 3a + 1 = 7a - 5 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

**۱۷۴- گزینه ۱** توجه کنید که  $(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

$$g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-2} + 2} \quad (*)$$

اگر فرض کنیم  $t = \frac{x+1}{x-2}$ ، آن گاه

$$tx - 2t = x + 1 \Rightarrow (t-1)x = 2t + 1 \Rightarrow x = \frac{2t+1}{t-1}$$

در تساوی  $(*)$  به جای  $x$  قرار می دهیم و نتیجه می شود

$$g(t) = \frac{1}{\frac{2t+1}{t-1} + 2} = \frac{t-1}{2t+1+2t-2} = \frac{t-1}{4t-1} \Rightarrow g(x) = \frac{x-1}{4x-1}$$

**۱۷۵- گزینه ۲** توجه کنید که

$$(gof)(x) = x^2 + f(x) \Rightarrow g(f(x)) = x^2 + f(x)$$

$$f^2(x) - 3f(x) + 4 = x^2 + f(x)$$

$$f^2(x) - 4f(x) - x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (f(x) - 2)^2 = x^2$$

چون  $f$  تابعی چند جمله ای است، پس  $f(x) - 2 = -x$  یا  $f(x) - 2 = x$ . پس

$$f(x) = -x + 2 \quad \text{یا} \quad f(x) = x + 2$$

**۱۶۶- گزینه ۳** دامنه تابع های  $f$  و  $g$  به شکل زیر است:

$$D_f = [1, +\infty), \quad D_g = [0, 3]$$

بنابراین  $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 1 \mid 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3\}$

نامعادله های  $0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$  نتیجه می شود  
 $x-1 \leq 9 \Rightarrow x \leq 10$

بنابراین  $D_{gof} = \{x \mid x \geq 1, x \leq 10\} = [1, 10]$

**۱۶۷- گزینه ۳** اگر فرض کنیم  $g(x) = \frac{1}{x} + 3$ ، آن گاه  $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

و بنابراین  $h(x) = f(g(x)) = (fog)(x)$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid 2 \leq \frac{1}{x} + 3 \leq 4\}$$

باید نامعادله های  $2 \leq \frac{1}{x} + 3 \leq 4$  را حل کنیم:

$$-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0 & (1) \\ \frac{1}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x}{x} \geq 0 & (2) \end{cases}$$

از حل نامعادله (۱) نتیجه می شود  $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$  و از حل نامعادله (۲)

نتیجه می شود  $x \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$ . از اشتراک ناحیه های به دست آمده

دامنه تابع  $h$  مشخص می شود:  $D_h = \mathbb{R} - (-1, 1)$

**۱۶۸- گزینه ۲** راه حل اول ابتدا دامنه تابع  $gof$  را مشخص می کنیم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 1, \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

اکنون ضابطه تابع  $gof$  را به دست می آوریم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 6 = x - 1 + 6 = x + 5$$

اکنون با توجه به دامنه تابع  $gof$  که شرط  $x \geq 1$  را دارد، برد آن را پیدا می کنیم:

$$x \geq 1 \Rightarrow x + 5 \geq 6 \Rightarrow (gof)(x) \geq 6 \Rightarrow R_{gof} = [6, +\infty)$$

**راه حل دوم** چون  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، پس  $f(x) \geq 0$ . از طرف دیگر،

$$(gof)(x) = g(f(x)) = f^2(x) + 6 \geq 6$$

بنابراین  $R_{gof} = [6, +\infty)$

**۱۶۹- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که  $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$  و

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq -2, \frac{2x-4}{x+2} \neq -2\}$$

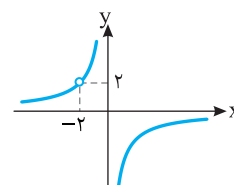
$$\frac{2x-4}{x+2} \neq -2 \Rightarrow 2x-4 \neq -2x-4 \Rightarrow x \neq 0$$

بنابراین  $D_g = D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$ . اکنون ضابطه تابع  $g$  را به دست می آوریم:

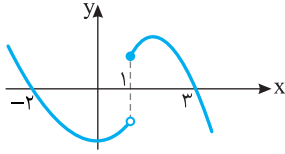
$$g(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2f(x) - 4}{f(x) + 2}$$

$$\frac{2\left(\frac{2x-4}{x+2}\right) - 4}{\frac{2x-4}{x+2} + 2} = \frac{4x-8-4x-8}{2x-4+2x+4} = \frac{-16}{4x} = -\frac{4}{x}$$

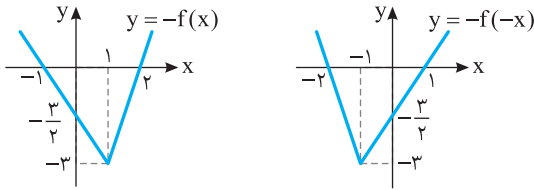
بنابراین نمودار تابع  $g$  به شکل زیر است و برد تابع  $g$  برابر است با  $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ .



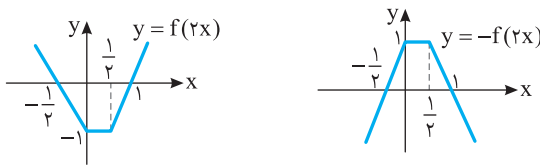
**۱۸۱- گزینه ۱** برای رسم نمودار تابع  $f$  باید قرینه نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $X$  رسم کنیم.



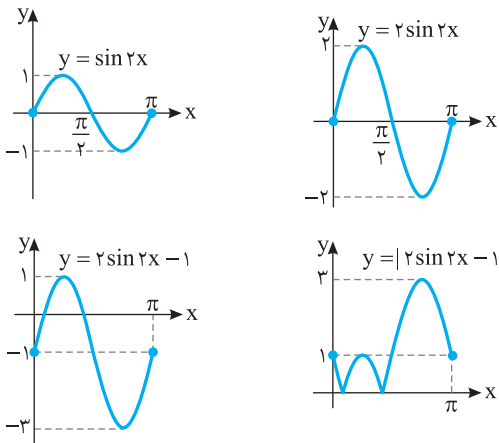
**۱۸۲- گزینه ۳** ابتدا قرینه نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $X$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -f(x)$  به دست بیاید. سپس، قرینه این نمودار را نسبت به محور  $Y$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -f(-x)$  به دست بیاید.



**۱۸۳- گزینه ۲** ابتدا طول نقاط روی نمودار  $f$  را در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(2x)$  به دست بیاید. اکنون قرینه این نمودار را نسبت به محور  $X$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -f(2x)$  به دست بیاید.



**۱۸۴- گزینه ۱** ابتدا نمودار تابع  $y = \sin 2x$  را روی بازه  $[0, \pi]$  رسم می‌کنیم. برای این کار، طول هر نقطه روی نمودار تابع  $y = \sin x$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  را در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم. سپس عرض هر نقطه روی نمودار به دست آمده را در  $2$  ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = 2 \sin 2x$  روی بازه  $[0, \pi]$  به دست بیاید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع  $y = 2 \sin 2x - 1$  روی بازه  $[0, \pi]$  به دست می‌آید. در آخر قرینه قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور  $X$  است نسبت به محور  $X$  رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور  $X$  است حذف می‌کنیم.



**۱۷۶- گزینه ۲** چون  $f$  خطی است، پس ضابطه آن به صورت  $f(x) = ax + b$  است.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = af(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

$$a^2x + ab + b = 4x - 3 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ ab + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2, b = 3 \\ a = 2, b = -1 \end{cases}$$

بنابراین  $f(x) = 2x - 1$  یا  $f(x) = -2x + 3$  که نتیجه می‌شود  $f(0) = 3$  یا  $f(0) = -1$ .

**۱۷۷- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که  $((f \circ f) \circ g)(x) = f(f(g(x)))$ .

از طرف دیگر، می‌توان نوشت  $f(g(x)) = f(|x|) = |x| + 2 - 4 = |x| - 2$  و  $f(g(x)) = |x| + 2 - 4 = |x| - 2$  پس  $|x| + 2 > 0$

$$f(f(g(x))) = f(|x| - 2) = ||x| - 2| - 4 = ||x| - 4| = |x| - 4$$

**۱۷۸- گزینه ۳** ابتدا دامنه تابع  $f$  را به دست می‌آوریم

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4 - x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [0, 4]$$

بنابراین

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{0 \leq x \leq 4 \mid 0 \leq \sqrt{4x - x^2} - 1 \leq 4\}$$

پس

$$1 \leq \sqrt{4x - x^2} \leq 5 \Rightarrow 1 \leq 4x - x^2 \leq 25 \Rightarrow -3 \leq 4x - x^2 - 4 \leq 21$$

$$-3 \leq -(x-2)^2 \leq 21 \Rightarrow -21 \leq (x-2)^2 \leq 3 \Rightarrow |x-2| \leq \sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3} \leq x-2 \leq \sqrt{3} \Rightarrow 2-\sqrt{3} \leq x \leq 2+\sqrt{3}$$

بنابراین  $D_{f \circ f} = \{0 \leq x \leq 4, 2-\sqrt{3} \leq x \leq 2+\sqrt{3}\} = [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$

**۱۷۹- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که  $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$  و  $D_f = [k, +\infty)$

بنابراین

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{1}{x} + 3 \geq k\}$$

نامعادله  $\frac{1}{x} + 3 \geq k$  را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x} + 3 - k \geq 0 \Rightarrow \frac{1 + (3-k)x}{x} \geq 0$$

مجموعه جواب‌های نامعادله فوق یا به صورت  $[\frac{1}{k-3}, 0)$  یا به صورت

$$(-\infty, \frac{1}{k-3}] \cup (0, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

بنابراین

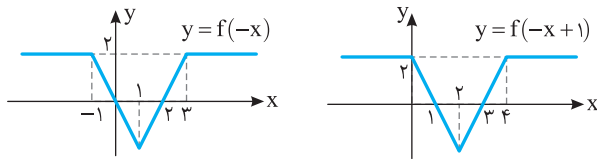
$$\frac{1}{k-3} = -1 \Rightarrow k-3 = -1 \Rightarrow k = 2$$

**۱۸۰- گزینه ۳** توجه کنید که

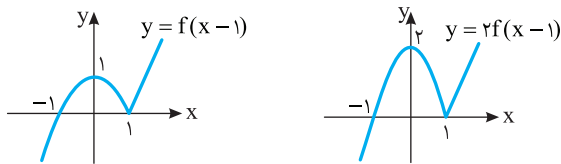
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) - 1 & g(x) < 0 \\ 3g(x) + 4 & 0 \leq g(x) < 2 \\ 5 & g(x) \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & x+1 < 0 \\ 3(x+1) + 4 & 0 \leq x+1 < 2 \\ 5 & x+1 \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2x & x < -1 \\ 3x + 7 & -1 \leq x < 1 \\ 5 & x \geq 1 \end{cases}$$

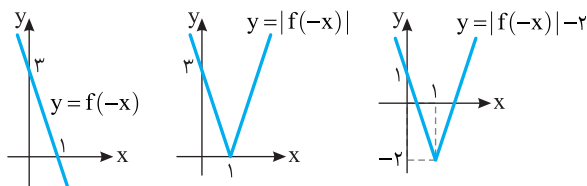
**۱۹۰- گزینه ۴** اگر نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $y$  قرینه کنیم، نمودار تابع  $y=f(-x)$  به دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع  $y=f(-(x-1))=f(-x+1)$  به دست می‌آید.



**۱۹۱- گزینه ۳** ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=f(x-1)$  به دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=2f(x-1)$  به دست بیاید.

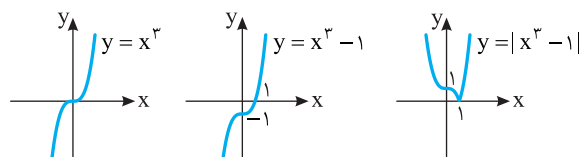


**۱۹۲- گزینه ۱** ابتدا نمودار تابع  $y=f(-x)$  را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینه نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم. سپس نمودار تابع  $y=|f(-x)|$  را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینه قسمتی از نمودار تابع  $y=f(-x)$  را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم. در آخر، نمودار تابع  $y=|f(-x)|$  را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=|f(-x)|-2$  به دست بیاید.



**۱۹۳- گزینه ۱** برای رسم نمودار تابع  $y=2f(\frac{x}{2})$  باید در نمودار تابع  $f$  طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم. همچنین باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.

**۱۹۴- گزینه ۱** ابتدا نمودار تابع  $y=x^3$  را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=x^3-1$  به دست آید. اکنون قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم. سپس قسمتی را که پایین محور طول‌ها است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=|x^3-1|$  به دست آید.



**۱۹۵- گزینه ۱** اگر نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=f(x-1)+2$  به دست می‌آید. بنابراین باید جواب‌های معادله  $f(x-1)+2=0$  را به دست آوریم:

$$-(x-1)^2+(x-1)-2+2=0 \Rightarrow -x^2+2x-1+x-1=0$$

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1, x=2$$

**۱۸۵- گزینه ۳** اگر نمودار تابع  $f$  را  $a$  واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=f(x-a)$  به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را  $a$  واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع  $g(x)=f(x-a)+a$  به دست می‌آید. چون نمودار اخیر از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس  $g(0)=0$ . در نتیجه

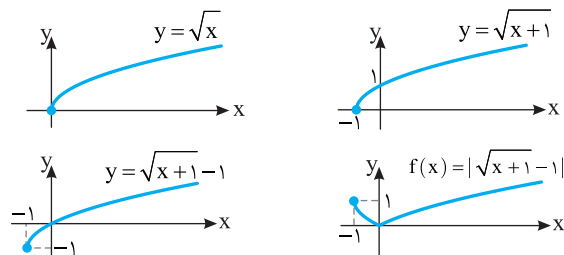
$$g(0)=f(-a)+a=0 \Rightarrow a^2-7a+9+a=0$$

$$a^2-6a+9=0 \Rightarrow (a-3)^2=0 \Rightarrow a=3$$

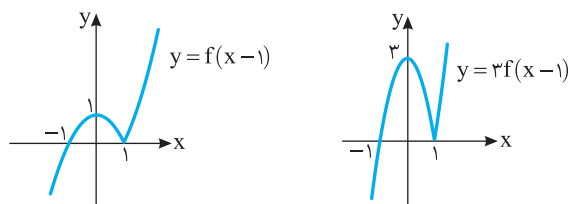
**۱۸۶- گزینه ۲** اگر طول نقاط نمودار تابع  $f$  را دو برابر کنیم، نمودار تابع  $y=f(\frac{x}{2})$  به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=f(\frac{x-1}{2})$  به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت

به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y=-f(\frac{x-1}{2})$  به دست می‌آید.

**۱۸۷- گزینه ۲** ابتدا نمودار تابع  $y=\sqrt{x}$  را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=\sqrt{x+1}$  به دست آید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y=\sqrt{x+1}-1$  به دست آید. اکنون قرینه قسمتی از این نمودار را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع  $f$  رسم شود.



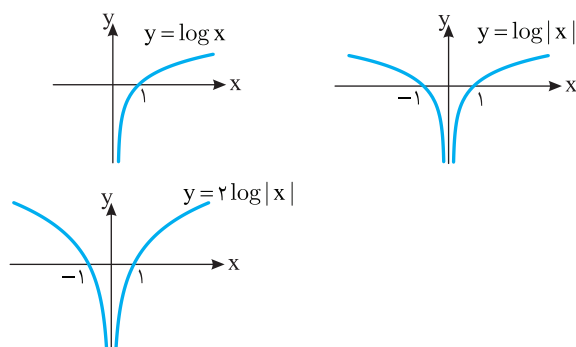
**۱۸۸- گزینه ۳** ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=f(x-1)$  به دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=3f(x-1)$  به دست بیاید.



**۱۸۹- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log x^2=\log |x|^2=2 \log |x|$$

پس ابتدا نمودار تابع  $y=\log x$  را رسم می‌کنیم و قرینه آن نسبت به محور عرض‌ها را به نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=\log |x|$  به دست آید. اکنون عرض نقاط این نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=2 \log |x|$  به دست آید.



۲۰۰- گزینه ۱ فرض کنید  $h(x) = x - |x|$ . در این صورت دامنه تابع  $g$

با دامنه تابع  $f \circ h$  برابر است:

$$D_{f \circ h} = \{x \in D_h \mid h(x) \in D_f\} = \{x \mid -2 \leq x - |x| \leq 2\} = [-1, +\infty)$$

اکنون توجه کنید که

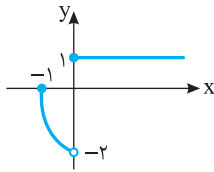
$$x \geq 0 \Rightarrow g(x) = -f(0), \quad x < 0 \Rightarrow g(x) = -f(2x)$$

پس  $g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -f(2x) & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ . پس در بازه  $[0, +\infty)$  باید نمودار

تابع  $y=1$  را رسم کنیم و در بازه  $(-1, 0)$  باید ابتدا طول نمودار تابع  $f$  را

نصف کنیم تا نمودار تابع  $y=f(2x)$  رسم شود و سپس نمودار این قسمت را

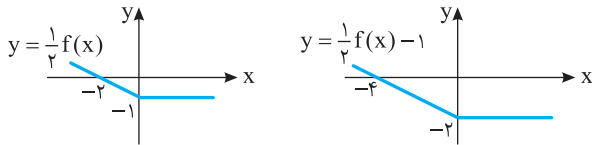
نسبت به محور  $x$  قرینه کنیم تا نمودار تابع  $y=-f(2x)$  رسم شود.



۲۰۱- گزینه ۳ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع  $f$  را نصف می‌کنیم

تا نمودار تابع  $\frac{1}{2}f$  به دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال

می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$  به دست بیاید.



توجه کنید که اگر  $x < 0$ ، نمودار  $f$  خطی است که از نقطه‌های  $(0, -2)$  و

$(-2, 0)$  می‌گذرد، بنابراین اگر  $x < 0$ ، ضابطه  $f$  به صورت  $f(x) = -x - 2$

است. در نتیجه اگر  $x < 0$  و  $\frac{1}{2}f(x) - 1 = 0$ ، آن‌گاه  $\frac{1}{2}(-x - 2) - 1 = 0$ ، پس

$x = -4$ . یعنی نمودار تابع  $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$  محور  $x$  را در نقطه‌ای به طول

$-4$  قطع می‌کند.

۲۰۲- گزینه ۴ اگر نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم،

نمودار تابع  $y=f(-x)$  به دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به سمت

راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=f(-(x-1))$  به دست می‌آید. پس نمودار

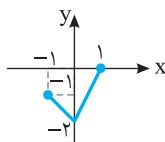
نهایی نمودار تابع  $y=f(-x+1)$  است.

۲۰۳- گزینه ۴ برای رسم نمودار تابع  $y = -\frac{1}{2}f(2x)$  باید در نمودار

تابع  $f$  طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم و عرض نقاط را در  $-\frac{1}{2}$  ضرب کنیم.

بنابراین نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود و در راستای محور

عرض‌ها علاوه بر اینکه منقبض می‌شود، نسبت به محور طول‌ها قرینه هم می‌شود.



۱۹۶- گزینه ۱ اگر طول نقاط روی نمودار تابع  $f$  را نصف کنیم، نمودار

تابع  $y=f(2x)$  رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را سه برابر کنیم،

نمودار تابع  $y=3f(2x)$  رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را دو واحد به سمت

چپ منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=3f(2(x+2))$  رسم می‌شود. پس اکنون

نمودار تابع  $y=3f(2x+4)$  به دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور

عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y=3f(-2x+4)$  به دست می‌آید.

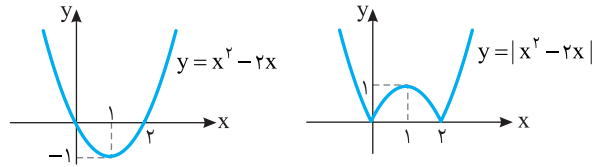
۱۹۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x) = |x||x-2| = |x(x-2)| = |x^2 - 2x|$$

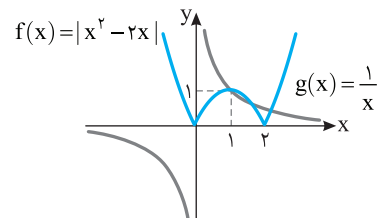
بنابراین، ابتدا نمودار تابع  $y=x^2-2x$  را رسم می‌کنیم. سپس، قرینه قسمتی

از این نمودار را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم و قسمتی

را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم.



مطابق شکل زیر، نمودار توابع  $f$  و  $g$  در سه نقطه متقاطع‌اند.

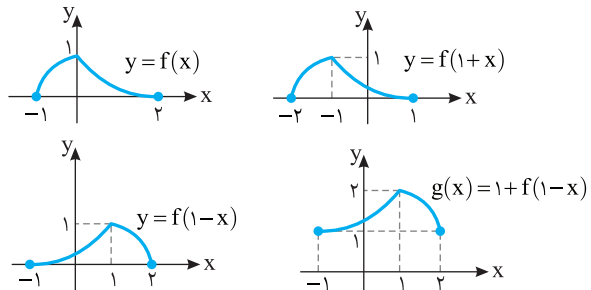


۱۹۸- گزینه ۴ ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا

نمودار تابع  $y=f(1+x)$  رسم شود. سپس نمودار این تابع را نسبت به محور

عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=f(1-x)$  رسم شود. در آخر نمودار حاصل

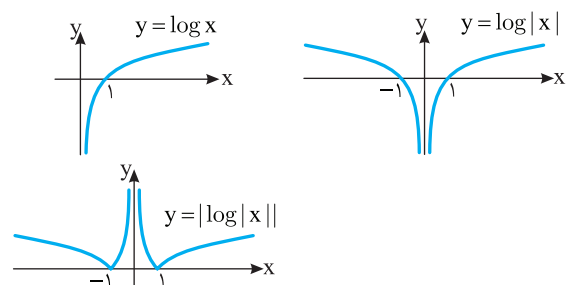
را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $g(x) = 1 + f(1-x)$  رسم شود.



نمودار تابع‌های  $f$  و  $g$  را در شکل روبه‌رو

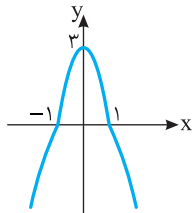
مشاهده می‌کنید که نقطه مشترکی ندارند.

۱۹۹- گزینه ۳ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم



**۲۰۸- گزینه ۴** توجه کنید که

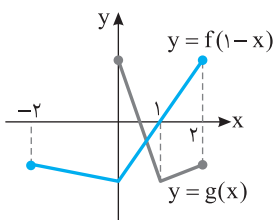
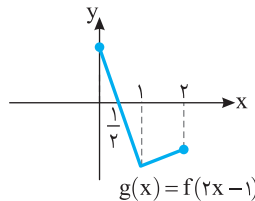
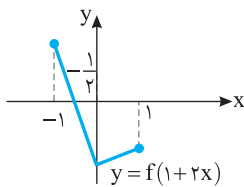
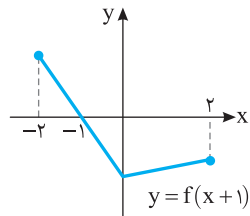
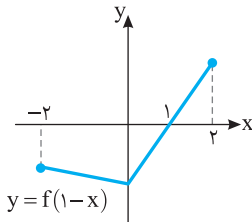
$$g(x) = -2f(x) + |f(x)| = \begin{cases} -2f(x) + f(x) & f(x) \geq 0 \\ -2f(x) + (-f(x)) & f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} -f(x) & f(x) \geq 0 \\ -3f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$



بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار  $f$  منفی است، یعنی در بازه  $(-1, 1)$ ، عرض نقاط روی نمودار  $f$  را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طولها قرینه کنیم. در بقیه جاها نمودار  $g$  قرینه نمودار  $f$  نسبت به محور طولها است.

**۲۰۹- گزینه ۱** اگر نمودار تابع  $y=f(1-x)$  را نسبت به محور عرضها

قرینه کنیم، نمودار تابع  $y=f(1+x)$  به دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع  $y=f(1+2x)$  به دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=f(1+2(x-1))=f(2x-1)$  به دست می‌آید.

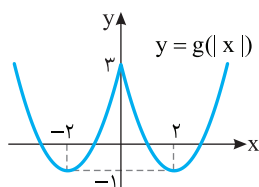
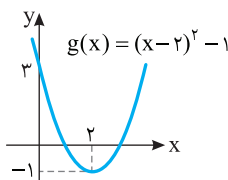


با توجه به شکل مقابل نمودار توابع  $y=f(1-x)$  و  $y=g(x)$  یک نقطه برخورد دارند.

**۲۱۰- گزینه ۲** توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = |x|^2 - 4|x| + 3$$

پس اگر فرض کنیم  $g(x) = x^2 - 4x + 3$ ، آن‌گاه  $f(x) = g(|x|)$ . به این ترتیب، کافی است نمودار  $y=g(|x|)$  را رسم کنیم. برای این کار، ابتدا نمودار تابع  $g$  را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور  $y$  است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور  $y$  است نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم.



**۲۰۴- گزینه ۴** توجه کنید که اگر نمودار تابع  $f$  را  $a$  واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=f(x-a)$  به دست می‌آید و اگر نمودار به دست آمده را  $a$  واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع  $g(x)=f(x-a)+a$  به دست می‌آید. این نمودار باید از مبدأ مختصات عبور کند، پس  $g(0)=0$  و در نتیجه  $f(-a)+a=0$ . اگر  $f(x)=-x^2+3x-2$ ، آن‌گاه

$$f(-a)+a=0 \Rightarrow -a^2-3a-2+a=0 \Rightarrow a^2+2a+2=0$$

$$\text{اگر } f(x)=x^2+1, \text{ آن‌گاه}$$

$$f(-a)+a=0 \Rightarrow a^2+1+a=0 \Rightarrow a^2+a+1=0$$

$$\text{اگر } f(x)=-x^2-1, \text{ آن‌گاه}$$

$$f(-a)+a=0 \Rightarrow -a^2-1+a=0 \Rightarrow a^2-a+1=0$$

معادله‌های بالا جواب ندارند، پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) جواب نیستند.

$$\text{اگر } f(x)=x^2+5x+4, \text{ آن‌گاه}$$

$$f(-a)+a=0 \Rightarrow a^2-5a+4+a=0 \Rightarrow a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0 \Rightarrow a=2$$

**۲۰۵- گزینه ۲** اگر نمودار تابع  $y=|x|$  را  $2a^2$  واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=|x-2a^2|$  به دست می‌آید و اگر این نمودار را  $a^2$

واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع  $f(x)=|x-2a^2|-a^2$  به دست می‌آید. با

توجه به نمودار این تابع مساحت ناحیه مورد نظر

برابر است با  $S=\frac{1}{2}a^2(2a^2)=a^4$ . بنابراین

$$a^4=4 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$$

**۲۰۶- گزینه ۱** اگر نمودار تابع  $y=f(x-2)$  را یک واحد به سمت

راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=f(x-1-2)=f(x-3)$  به دست می‌آید.

اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=f(x-3)-1$

به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را نسبت به محور طولها قرینه کنیم،

نمودار تابع  $y=-f(x-3)+1$  به دست می‌آید و اگر این نمودار را نسبت به

محور عرضها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y=-f(-x-3)+1$  به دست می‌آید.

اکنون اگر طول نقاط روی نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع

$$y=-f(-2x-3)+1$$

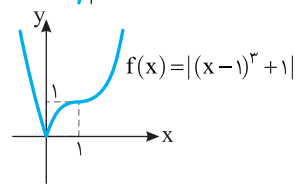
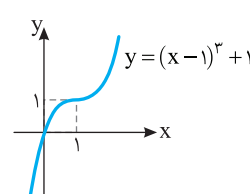
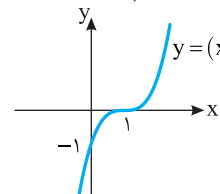
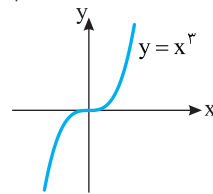
**۲۰۷- گزینه ۱** ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = |x^3 - 3x^2 + 3x| = |(x-1)^3 + 1|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع  $y=x^3$  را یک واحد به سمت راست و یک واحد

به سمت بالا منتقل کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور  $x$  است نسبت

به این محور قرینه کنیم و در آخر قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف کنیم.



۲۱۵- گزینه ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که  $a$  عددی مثبت است.

از طرف دیگر،

$$f(0) = |a-2| = a-2, \quad f(a) = -2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow |x-a|-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x-a=2 \Rightarrow x=a+2 \\ x-a=-2 \Rightarrow x=a-2 \end{cases}$$

بنابراین با توجه به شکل زیر

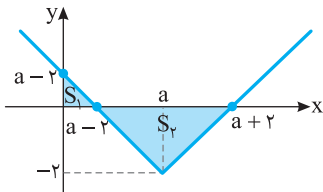
$$S_1 = \frac{(a-2)^2}{2}, \quad S_2 = \frac{2(a+2)(a-2)}{2} = 4$$

$$S_1 + S_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{(a-2)^2}{2} + 4 = \frac{9}{2} \Rightarrow a^2 - 4a + 4 + 8 = 9$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow (a-3)(a-1) = 0 \Rightarrow a=3, a=1 \text{ (غ.ق.ی.)}$$

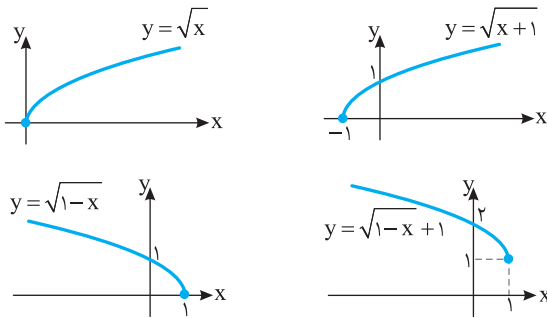
اگر  $a=1$ ، آن‌گاه  $f(x) = |x-1|-2$  و در نتیجه  $f(0) = -1$  ولی در نمودار رسم شده مقدار  $f(0)$  عددی مثبت است. پس  $a=1$  قابل قبول نیست. در نتیجه

$$f(x) = |x-3|-2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left|\frac{1}{3}-3\right|-2 = \frac{2}{3}$$



۲۱۶- گزینه ۴ نمودار تابع را به شکل زیر رسم می‌کنیم. بنابراین اگر

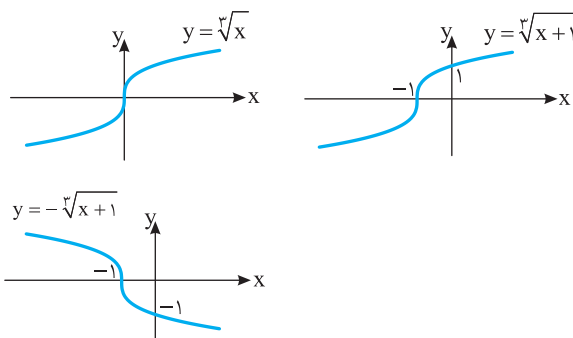
نمودار نهایی را دو واحد به پایین ببریم، هر دو محور مختصات را قطع می‌کند.



۲۱۷- گزینه ۳ ضابطه تابع به شکل  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x > 0 \\ -\sqrt[3]{x+1} & x < 0 \end{cases}$

است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع  $y = \sqrt[3]{x+1}$  و  $y = -\sqrt[3]{x+1}$

به صورت زیر است:



۲۱۱- گزینه ۱ توجه کنید که همواره  $f(x) \leq 0$ . بنابراین

$$y = |f(x)| - f(x) = -f(x) - f(x) = -2f(x)$$

برای رسم کردن نمودار  $y = -2f(x)$ ، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع  $f$  را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = 2f(x)$  به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -2f(x)$  به دست بیاید.



۲۱۲- گزینه ۴ اگر طول نقاط نمودار تابع  $f$  را دو برابر کنیم، نمودار تابع

$y = f\left(\frac{x}{2}\right)$  به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به چپ

منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f\left(\frac{x+1}{2}\right)$  به دست می‌آید. پس نمودار مورد نظر

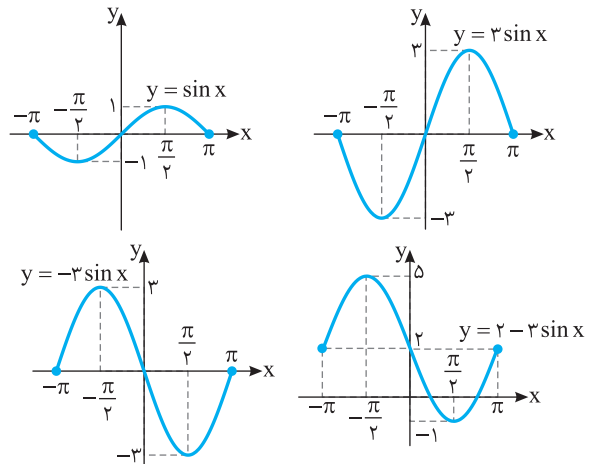
متعلق به تابع  $y = f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$  است.

۲۱۳- گزینه ۴ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع  $y = \sin x$  روی

بازه  $[-\pi, \pi]$  را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = 3 \sin x$  به دست بیاید.

سپس، قرینه این نمودار را نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -3 \sin x$  به دست بیاید. در آخر، نمودار تابع  $y = -3 \sin x$  را ۲ واحد

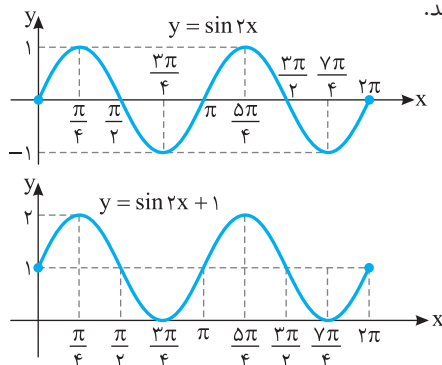
به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = 2 - 3 \sin x$  به دست بیاید.



۲۱۴- گزینه ۱ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع  $y = \sin x$  روی بازه

$[0, 4\pi]$  را ضرب در  $\frac{1}{2}$  می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \sin 2x$  روی بازه  $[0, 2\pi]$

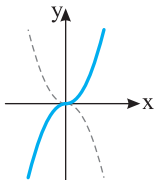
به دست بیاید. سپس، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $f$  به دست بیاید.





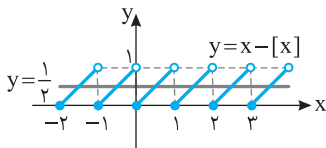
**۲۲۱- گزینه ۲** با توجه به دو زوج مرتب  $(2b, 3)$  و  $(2, 3)$  نتیجه می‌گیریم که  $2b=2$  و در نتیجه  $b=1$ . با توجه به دو زوج مرتب  $(2a, 1)$  و  $(b, 1)$  نتیجه می‌گیریم  $2a=b$ ، پس  $a=\frac{1}{2}$ . بنابراین  $a+b=\frac{3}{2}$ .

**۲۲۲- گزینه ۳** توابع  $y=x^2$ ،  $y=|x|$  و  $y=[x]$  یک‌به‌یک نیستند. چون خطی موازی محور طول‌ها وجود دارد که نمودار آن‌ها را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. ولی نمودار تابع  $y=x|x|$  به صورت زیر است و هر خط موازی محور طول‌ها آن را در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است.

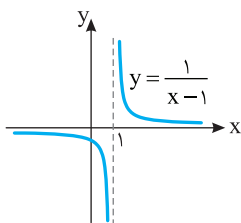
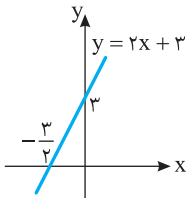
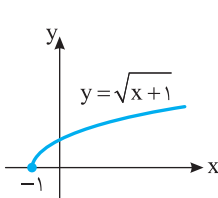


$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

**۲۲۳- گزینه ۴** توابع  $y=\sqrt{x+1}$ ،  $y=2x+3$  و  $y=\frac{1}{x-1}$  یک‌به‌یک هستند چون هر خط موازی محور طول‌ها نمودار آن‌ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. تابع  $y=x-[x]$  یک‌به‌یک نیست. چون مثلاً خط  $y=\frac{1}{2}$  نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



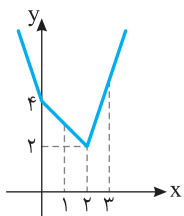
نمودار سایر توابع به صورت زیر است:



**۲۲۴- گزینه ۱** تابع  $f(x)=x^3-\sqrt{x}$  یک‌به‌یک نیست. زیرا  $f(0)=f(1)=0$ .

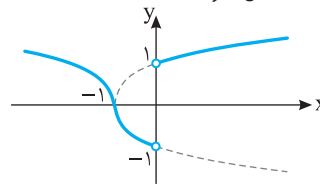
**۲۲۵- گزینه ۴** توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & x \geq 2 \\ -x+4 & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x+4 & x \leq 0 \end{cases}$$



بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. این تابع روی بازه‌های  $(-\infty, 2]$  و  $[2, +\infty)$  و  $[0, 2]$  یک‌به‌یک است ولی روی بازه  $[1, 3]$  یک‌به‌یک نیست.

بنابراین نمودار تابع  $f$  به شکل زیر است:



**۲۱۸- گزینه ۴** فرض کنید  $h(x)=x+|x|$ . در این صورت دامنه تابع  $g$  با دامنه تابع  $foh$  برابر است:

$$D_{foh} = \{x \in D_h \mid h(x) \in D_f\} = \{x \mid -2 \leq x+|x| \leq 2\} = (-\infty, 1]$$

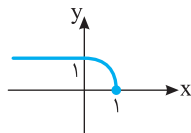
اکنون توجه کنید که

$$x \leq 0 \Rightarrow g(x) = -f(x-x) = -f(0) = 1$$

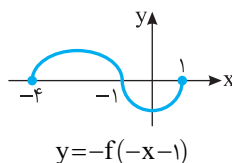
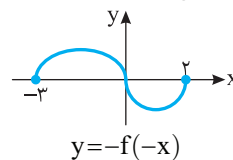
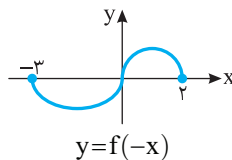
$$0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) = -f(x+x) = -f(2x)$$

پس  $g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -f(2x) & 0 < x \leq 1 \end{cases}$  باید نمودار تابع

$y=1$  را رسم کنیم و در بازه  $(0, 1]$  باید ابتدا طول نمودار تابع  $f$  واقع در بازه  $(0, 2]$  را نصف کنیم تا نمودار تابع  $y=f(2x)$  رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور  $x$  قرینه کنیم.



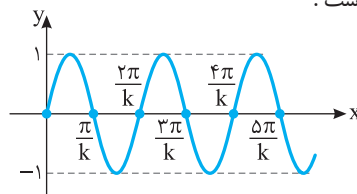
**۲۱۹- گزینه ۴** **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $y$  قرینه کنیم، نمودار تابع  $y=f(-x)$  به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور  $x$  قرینه کنیم، نمودار تابع  $y=-f(-x)$  به دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع  $y=-f(-(x+1))$  به دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.



**راه‌حل دوم** در شکل (۲)، نقطه  $(-4, 0)$  روی نمودار تابع است. در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به‌ازای  $x=-4$  مقادیر  $f(5)$  و  $f(-5)$  ظاهر می‌شوند اما با توجه به شکل (۱)، عددهای ۵ و -۵ در دامنه تابع  $f$  نیستند، پس این سه گزینه رد می‌شوند.

**۲۲۰- گزینه ۳** مطابق شکل باید  $\frac{4\pi}{k} \leq \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{k}$  تا نمودار تابع پنج بار

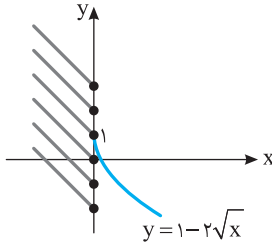
محور طول‌ها را روی بازه  $[0, \frac{\pi}{4}]$  قطع کند. بنابراین  $8 \leq k < 10$ ، پس حداقل مقدار  $k$  برابر ۸ است.



**۲۳۰- گزینه ۱ راه‌حل اول** نمودار تابع  $f$  به‌ازای مقادیر مختلف  $k$  به شکل زیر است. برای اینکه تابع یک‌به‌یک باشد، باید کمترین مقدار عبارت  $4k-x$  به‌ازای  $x \leq 0$  از ۱ کمتر نباشد:

$$x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow 4k - x \geq 4k$$

یعنی  $4k \geq 1$ ، پس  $k \geq \frac{1}{4}$ .



**راه‌حل دوم** اگر  $x > 0$ ، آن‌گاه تابع  $g(x) = 1 - 2\sqrt{x}$  یک‌به‌یک است و اگر  $x \leq 0$ ، آن‌گاه تابع  $h(x) = 4k - x$  یک‌به‌یک است و

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow -2\sqrt{x} < 0 \Rightarrow 1 - 2\sqrt{x} < 1 \Rightarrow R_g = (-\infty, 1)$$

$$x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow 4k - x \geq 4k \Rightarrow R_h = [4k, +\infty)$$

برای اینکه تابع  $f$  یک‌به‌یک شود، باید  $R_g \cap R_h = \emptyset$ . پس

$$4k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{4}$$

**۲۳۱- گزینه ۳** چون مؤلفه‌های زوج مرتب‌های  $(9, 1)$  و  $(a^2, 1)$

مساوی هستند، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم مساوی باشند:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

به همین ترتیب باید مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های  $(6, 2)$  و  $(3a+b, 2)$  نیز

مساوی باشند، پس  $3a+b=6$ ، بنابراین  $b=6-3a$ .

اگر  $a=3$ ، آن‌گاه  $b=-3$  و تابع به‌صورت زیر است:

$$f = \{(9, 1), (6, 2), (3, 9)\}$$

اگر  $a=-3$ ، آن‌گاه  $b=15$  و تابع به‌صورت زیر است:

$$f = \{(9, 1), (6, 2), (-3, -45)\}$$

پس  $a-b=6$  یا  $a-b=-18$ .

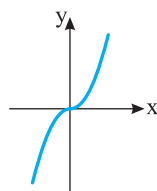
**۲۳۲- گزینه ۳** در گزینه (۱)،  $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ . پس تابع

یک‌به‌یک نیست. در گزینه (۲)،  $f(x) = |x|$ ،  $x \neq 0$ ، پس تابع یک‌به‌یک

نیست. در گزینه (۴) مثلاً  $f(1) = f(-1)$  پس تابع یک‌به‌یک نیست. در

گزینه (۳) نمودار تابع به‌صورت زیر است و تابع یک‌به‌یک است.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



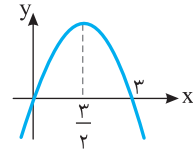
**۲۲۶- گزینه ۱** شرط یک‌به‌یک نبودن این تابع  $-2a-3=0$  است.

پس  $a = -\frac{3}{2}$ . توجه کنید که در این صورت تابع  $f$  با یک تابع ثابت برابر است

$$f(x) = \frac{ax+3}{x-2} = \frac{-\frac{3}{2}x+3}{x-2} = \frac{-3x+6}{2x-4} = \frac{-3(x-2)}{2(x-2)} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(3) = -\frac{3}{2}$$

**۲۲۷- گزینه ۲** نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. از روی شکل

معلوم است که تابع روی بازه  $(-\infty, \frac{3}{2}]$  یک‌به‌یک است. اما اگر  $a > \frac{3}{2}$ ،



خطی موازی با محور طول‌ها وجود دارد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.

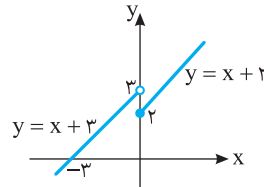
بنابراین حداکثر مقدار  $a$  برابر  $\frac{3}{2}$  است.

**۲۲۸- گزینه ۴** نمودار تابع گزینه (۴)

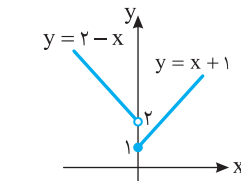
به‌صورت رویه‌رو است. هر خط موازی محور طول‌ها نمودار تابع  $f$  را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است.

نمودار تابع‌های سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

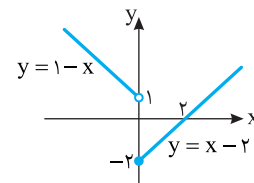
گزینه (۱)



گزینه (۱)



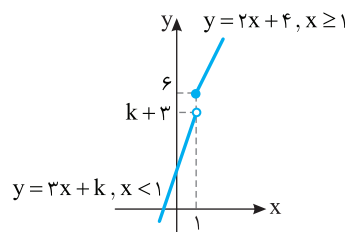
گزینه (۲)



گزینه (۳)

**۲۲۹- گزینه ۳** راه‌حل اول نمودار تابع  $f$  به‌صورت زیر است. مطابق

شکل واضح است که با شرط  $k+3 \leq 6$  تابع  $f$  یک‌به‌یک است. پس  $k \leq 3$ .



**راه‌حل دوم** اگر  $x \geq 1$ ، آن‌گاه تابع  $g(x) = 2x + 4$  یک‌به‌یک است. همچنین

اگر  $x < 1$ ، تابع  $h(x) = 3x + k$  یک‌به‌یک است. از طرف دیگر

$$x \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow 2x + 4 \geq 6 \Rightarrow g(x) \geq 6 \Rightarrow R_g = [6, +\infty)$$

$$x < 1 \Rightarrow 3x < 3 \Rightarrow 3x + k < k + 3 \Rightarrow h(x) < k + 3 \Rightarrow R_h = (-\infty, k + 3)$$

برای اینکه تابع  $f$  یک‌به‌یک باشد، باید

$$R_g \cap R_h = \emptyset \Rightarrow [6, +\infty) \cap (-\infty, k + 3) = \emptyset \Rightarrow k + 3 \leq 6 \Rightarrow k \leq 3$$

پس حداکثر مقدار ممکن  $k$  برابر ۳ است.

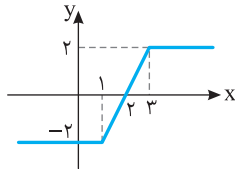
**۲۳۵- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = x - 1 - x + 3 = 2$$

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(x) = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$$

$$x \leq 1 \Rightarrow f(x) = -x + 1 + x - 3 = -2$$

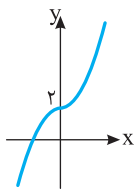
بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است و این تابع روی بازه  $[1, 3]$  یک به یک است. توجه کنید که تابع  $f$  روی هر بازه  $[c, d]$  که  $c \geq 1$  و  $d \leq 3$  نیز یک به یک است. پس حداکثر مقدار ممکن برای  $b$  برابر ۳ و حداقل مقدار ممکن برای  $a$  برابر ۱ است و در نتیجه حداکثر مقدار ممکن برای  $b - a$  برابر ۲ است.



**۲۳۶- گزینه ۳** تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  با شرط  $ad - bc \neq 0$  یک به یک

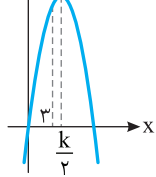
است و اگر  $ad - bc = 0$ ، آن گاه تابع  $f$  برابر یک تابع ثابت است که یک به یک نیست. پس اگر  $k^2 - 4k = 0$ ، آن گاه تابع  $f$  یک به یک نیست. از معادله اخیر به دست می آید  $k = 0$  و  $k = \pm 2$ . پس به ازای سه مقدار مختلف  $k$  تابع  $f$  یک به یک نیست.

**۲۳۷- گزینه ۲** نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ x^2+2 & x \geq 0 \end{cases}$  به شکل زیر



است. واضح است که تابع یک به یک است. بقیه گزینه‌ها را می‌توانید با رسم نمودار یا آوردن مثال نقض، رد کنید.

**۲۳۸- گزینه ۳** نمودار تابع  $y = -x^2 + kx$



به شکل مقابل است. اگر  $x = 3$  قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شود، تابع در بازه  $(-\infty, 3]$  یک به یک است. بنابراین

$$3 \leq \frac{k}{2} \Rightarrow k \geq 6$$

**۲۳۹- گزینه ۴** راه حل اول توجه کنید که اگر  $f(x_1) = f(x_2)$ ، آن گاه

$$x_1 - k\sqrt{x_1} = x_2 - k\sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 - x_2 - k(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = 0$$

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) - k(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = 0$$

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - k) = 0$$

اگر  $k < 0$ ، آن گاه  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - k \neq 0$  و در نتیجه

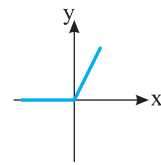
$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع یک به یک است.

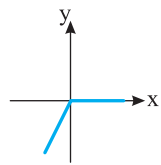
به ازای  $k = 0$  هم تابع به صورت  $f(x) = x$  است و یک به یک است. اما اگر  $k > 0$ ، آن گاه از  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - k = 0$  می‌توان مقدار  $x_1$  را برحسب  $x_2$  به دست آورد و از  $f(x_1) = f(x_2)$  لزوماً  $x_1 = x_2$  نتیجه نمی‌شود. پس در این حالت تابع یک به یک نیست.

**۲۳۳- گزینه ۳** نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

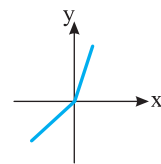
**گزینه (۱):**  $f(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$  تابع یک به یک نیست



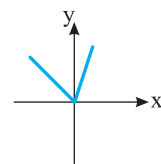
**گزینه (۲):**  $f(x) = x - |x| = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$  تابع یک به یک نیست



**گزینه (۳):**  $f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$  تابع یک به یک است



**گزینه (۴):**  $f(x) = x + 2|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$  تابع یک به یک نیست



**۲۳۴- گزینه ۱** در تابع گزینه (۲)،  $f(0) = f(1) = f(-1) = 0$ .

در تابع گزینه (۳)، اگر  $x \leq 0$ ، آن گاه  $f(x) = 0$ .

در تابع گزینه (۴)،  $f(0) = f(2) = 0$ .

بنابراین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) رد می‌شوند. توجه کنید که می‌توانید ثابت کنید تابع گزینه (۱) یک به یک است. اگر  $(x_1, f(x_1))$  و  $(x_2, f(x_2))$  دو

زوج مرتب از تابع  $f$  باشند که  $f(x_1) = f(x_2)$ ، آن گاه

$$x_1^3 + x_1 + 1 = x_2^3 + x_2 + 1 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2) \underbrace{(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1)}_A = 0 \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که

$$A = (x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 1 > 0$$

بنابراین از معادله (۱) نتیجه می‌شود  $x_1 - x_2 = 0$ ، پس  $x_1 = x_2$  و تابع  $f$  یک به یک است.

**۲۴۷- گزینه ۱** شرط صعودی بودن تابع  $f$  آن است که همه مقادیر تابع  $y_2 = 2x + 1$  کوچک‌تر از یا مساوی با کمترین مقدار تابع  $y_1 = x + a$  باشد:

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow x + a \geq 1 + a \Rightarrow y_1 \geq 1 + a \\ x < 1 \Rightarrow 2x + 1 < 3 \Rightarrow y_2 < 3 \end{cases}$$

بنابراین  $1 + a \leq 3$ . پس  $a \geq 2$ .

**۲۴۸- گزینه ۲** از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$2m - 1 \geq m + 1 \Rightarrow m \geq 2$$

**۲۴۹- گزینه ۲** برای پیدا کردن دامنه تابع  $g$  باید نامعادله  $f(x) \geq 0$  را

حل کنیم. چون  $f(0) = 0$  و اگر  $x < 0$ ، آن‌گاه  $f(x) < f(0)$ ، پس باید نامعادله  $f(x) \geq f(0)$  را حل کنیم که با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع  $f$  نتیجه می‌شود  $x \geq 0$ . پس  $D_g = [0, +\infty)$ .

**۲۵۰- گزینه ۱** مجموع دو تابع صعودی با دامنه  $\mathbb{R}$ ، تابعی صعودی با دامنه  $\mathbb{R}$  است. بنابراین مجموع دو تابع  $f + g$  و  $f - g$ ، یعنی تابع  $2f$  صعودی است، پس تابع  $f$  نیز صعودی است.

**۲۵۱- گزینه ۴** تابع  $f$  اکیداً صعودی، تابع  $g$  اکیداً نزولی، تابع  $h$  ثابت (هم صعودی و هم نزولی) و تابع  $k$  غیریکنواست.

**۲۵۲- گزینه ۳** توجه کنید که

$$-2 < 0 < 1 \Rightarrow 4x \leq x^2 + 3 \leq 7x - x^2$$

$$4x \leq x^2 + 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3 \quad (1)$$

$$x^2 + 3 \leq 7x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 \leq 0$$

$$(2x - 1)(x - 3) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \quad (2)$$

با توجه به شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود اگر  $x = 3$  یا  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ، آن‌گاه تابع  $f$  صعودی است. پس به‌ازای مقادیر صحیح ۳ و ۱ تابع  $f$  صعودی است.

**۲۵۳- گزینه ۳** تابع  $-f$  روی بازه‌هایی اکیداً صعودی است که تابع  $f$  روی آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع  $f$  روی بازه  $[-3, 1]$  اکیداً نزولی است، بنابراین تابع  $-f$  روی این بازه اکیداً صعودی است.

**۲۵۴- گزینه ۳** باید مبنای لگاریتم بین صفر و ۱ باشد. پس

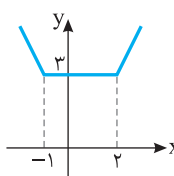
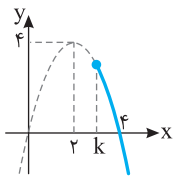
$$0 < k - 1 < 1 \Rightarrow 1 < k < 2$$

**۲۵۵- گزینه ۲** نمودار تابع  $f$  به شکل مقابل

است. برای اینکه تابع نزولی باشد، باید دامنه آن زیرمجموعه بازه  $[2, +\infty)$  باشد، بنابراین  $k \geq 2$ .

**۲۵۶- گزینه ۳** نمودار تابع  $f$  به صورت

مقابل است. چون تابع  $f$  روی بازه  $[a, b]$  هم صعودی است هم نزولی، پس روی این بازه تابعی ثابت است. از روی نمودار تابع  $f$  معلوم است که این تابع روی بازه  $[-1, 2]$  تابعی ثابت است. همین‌طور روی هر بازه‌ای مانند  $[a, b]$  که  $-1 \leq a < b \leq 2$ . بنابراین بیشترین مقدار ممکن  $b - a$  وقتی به دست می‌آید که  $a = -1$  و  $b = 2$ . که در این صورت  $b - a = 3$ .



**راه‌حل دوم** (این راه‌حل پس از مطالعه فصل کاربرد مشتق قابل استفاده است). تابع  $f$  روی بازه  $[0, +\infty)$  پیوسته است. پس در صورتی که یک‌به‌یک باشد،

$$f'(x) = 1 - \frac{k}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - k}{2\sqrt{x}}$$

اگر  $k \leq 0$ ، آن‌گاه  $f'(x) > 0$  و در نتیجه تابع  $f$  اکیداً صعودی است و یک‌به‌یک است. اگر  $k > 0$ ، آن‌گاه تابع  $f$  روی بازه  $[0, \frac{k^2}{4}]$  اکیداً نزولی و روی بازه

$$[\frac{k^2}{4}, +\infty)$$
 اکیداً صعودی است، پس روی بازه  $[0, +\infty)$  غیریکنواست.

**۲۴۰- گزینه ۱** معادله را به صورت  $f(x^3 + 3) = f(x^2 + 1)$  می‌نویسیم.

چون  $f$  تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$x^3 + 3 = x^2 + 1 \Rightarrow x^3 - x^2 + 2 = 0$$

واضح است که  $x = -1$  یکی از جواب‌های معادله است، به کمک تقسیم عبارت  $x^3 - x^2 + 2$  را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

معادله  $x^2 - 2x + 2 = 0$  جواب ندارد. پس  $x = -1$  تنها جواب معادله است.

**۲۴۱- گزینه ۲** تابع گزینه (۱) صعودی نیست، زیرا  $1 < 2$ ، اما  $f(1) > f(2)$ .

تابع گزینه (۲) صعودی است، زیرا  $2 < 4 < 5$  و  $f(2) < f(4) < f(5)$ .

تابع گزینه (۳) صعودی نیست، زیرا  $2 < 3$ ، اما  $f(2) > f(3)$ .

تابع گزینه (۴) هم صعودی نیست، زیرا  $-2 < 3$ ، اما  $f(-2) > f(3)$ .

**۲۴۲- گزینه ۲** چون تابع  $f$  اکیداً صعودی است، پس

$$1 < 2 < 3 \Rightarrow f(1) < f(2) < f(3) \Rightarrow a^2 - 1 < a + 1 < 3a - 1$$

$$a^2 - 1 < a + 1 \Rightarrow (a + 1)(a - 2) < 0 \Rightarrow -1 < a < 2 \quad (1)$$

$$a + 1 < 3a - 1 \Rightarrow a > 1 \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود  $1 < a < 2$ .

**۲۴۳- گزینه ۲** با توجه به شکل سؤال تابع  $f$  روی بازه  $[-2, 3]$  و هر بازه  $[a, b]$  که  $-2 \leq a < b \leq 3$  صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار  $b - a$  برابر ۵ است.

**۲۴۴- گزینه ۱** در تابع نمایی  $y = a^x$  اگر  $a > 1$ ، آن‌گاه تابع صعودی است. بنابراین

$$k^2 - 3 > 1 \Rightarrow k^2 > 4 \Rightarrow |k| > 2$$

**۲۴۵- گزینه ۱** طول رأس سهمی به معادله

$$f(x) = -4x^2 + 6x - 1$$
 برابر است با  $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$ .

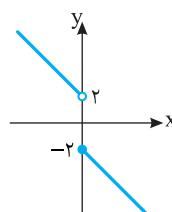
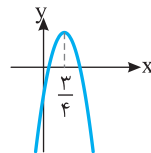
از روی نمودار این سهمی معلوم است که تابع  $f$  روی بازه  $(\frac{3}{4}, +\infty)$  اکیداً نزولی است.

**۲۴۶- گزینه ۴** نمودار تابع گزینه (۴)

به صورت زیر است و این تابع نزولی است.

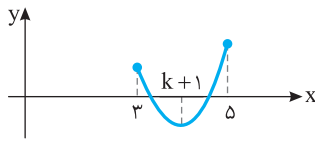
$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & x \geq 0 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$$

با رسم نمودار توابع گزینه‌های دیگر می‌توانید نزولی بودن آن‌ها را رد کنید.

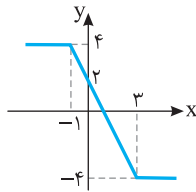


**۲۶۵- گزینه ۳** نمودار تابع باید به شکل زیر باشد، یعنی اگر طول رأس سهمی که  $x=k+1$  است، در بازه  $(۳, ۵)$  باشد، آن گاه تابع غیریکنوا می‌شود. پس

$$۳ < k+1 < ۵ \Rightarrow ۲ < k < ۴$$



**۲۶۶- گزینه ۴** نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. از روی نمودار تابع  $f$  معلوم است که این تابع روی بازه  $[-۱, ۳]$  و هر بازه‌ای به صورت  $[a, b]$  که  $-۱ \leq a < b \leq ۳$  اکیداً نزولی است. بنابراین، بیشترین مقدار  $b-a$  وقتی به دست می‌آید که  $a=-۱$  و  $b=۳$ ، که در این صورت  $b-a=۴$ .



**۲۶۷- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = kx + |x-1| = \begin{cases} (k+1)x-1 & x \geq 1 \\ (k-1)x+1 & x < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع  $f$  صعودی باشد، باید هر دو خط موجود در ضابطه تابع صعودی باشند، یعنی شیب نامنفی داشته باشند. پس

$$\begin{cases} k+1 \geq 0 \\ k-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k \geq 1$$

**۲۶۸- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که تابع  $f$  اکیداً صعودی است، پس

$$x > ۶ \Rightarrow f(x) > f(۶) \Rightarrow f(x) > ۰$$

$$x < ۶ \Rightarrow f(x) < f(۶) \Rightarrow f(x) < ۰$$

برای به دست آوردن دامنه تابع  $g$  باید نامعادله  $\frac{۴-x^2}{f(x)} \geq ۰$  را حل کنیم. با

توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به صورت زیر است:

$$x \in (-\infty, -۲] \cup [۲, ۶)$$

بنابراین در دامنه تابع  $g$  چهار عدد طبیعی قرار دارد.

$x$	$-\infty$	$-۲$	$۲$	$۶$	$+\infty$
$۴-x^2$	-	o	+	o	-
$f(x)$	-	-	-	o	+
$\frac{۴-x^2}{f(x)}$	+	o	-	+	o

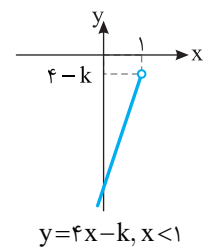
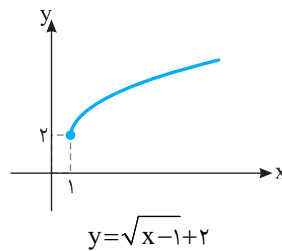
**۲۶۹- گزینه ۲** تابع  $y=\sqrt{x}$  صعودی است، پس تابع  $y=\sqrt{x}+1$  نیز صعودی است. همچنین مقادیر تابع  $y=\sqrt{x}+1$  همواره مثبت هستند.

بنابراین تابع  $y=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$  نزولی است.

**۲۷۰- گزینه ۳** تابع‌های  $y=x$  و  $y=x^3$  صعودی‌اند، پس مجموع

آن‌ها یعنی  $y=x^3+x$  صعودی است. توابع سه گزینه دیگر غیریکنوا هستند.

**۲۵۷- گزینه ۳** توابع  $y=\sqrt{x-1}+۲$  و  $y=۴x-k$  صعودی هستند.



مطابق شکل‌های بالا کافی است  $۴-k$  بیشتر از ۲ نباشد تا تابع  $f$  صعودی باشد. پس  $۴-k \leq ۲$ ، در نتیجه  $k \geq ۲$ .

**۲۵۸- گزینه ۳** با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی،

$$a^2 - 3 < 2a \Rightarrow a^2 - 2a - 3 < 0 \Rightarrow (a+1)(a-3) < 0 \Rightarrow -1 < a < 3$$

**۲۵۹- گزینه ۱** دامنه تابع  $g$  از حل نامعادله زیر به دست می‌آید:

$$f(x-2) - 2 \geq 0 \Rightarrow f(x-2) \geq 2 \Rightarrow f(x-2) \geq f(1)$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع  $f$  نتیجه می‌شود  $x-2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 3$  بنابراین  $D_g = (-\infty, 3]$ .

**۲۶۰- گزینه ۲** توابع  $y=f(x)$  و  $y=x$  صعودی‌اند، پس مجموع

آن‌ها صعودی است. یعنی تابع  $y=x+f(x)$  صعودی است.

**۲۶۱- گزینه ۳** از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$۱ < ۲ < ۳ \Rightarrow f(۱) \leq f(۲) \leq f(۳) \Rightarrow m-1 \leq 2m \leq m+3$$

$$m-1 \leq 2m \Rightarrow m \geq -1, \quad 2m \leq m+3 \Rightarrow m \leq 3$$

بنابراین  $-1 \leq m \leq 3$  و در نتیجه  $m$  می‌تواند پنج مقدار صحیح ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ را داشته باشد.

**۲۶۲- گزینه ۴** تابعی که هم صعودی است و هم نزولی، تابعی ثابت

است. پس  $f$  تابع ثابت است. بنابراین

$$f(۱) = f(۲) = f(۳), \quad a-۲ = ۳a+۶ = ۴a-b, \quad a = -۴, \quad b = -۱۰$$

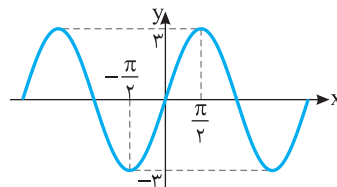
$$\text{در نتیجه } a+b = -۱۴$$

**۲۶۳- گزینه ۲** اگر نمودار تابع  $y = \sin x$  را رسم کنیم و عرض هر

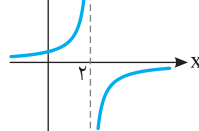
نقطه آن را سه برابر کنیم، نمودار تابع  $f(x) = 3 \sin x$  به دست می‌آید که به صورت زیر است. واضح است که تابع  $f$  روی بازه  $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$  و هر بازه دیگر

به صورت  $[-\frac{\pi}{۲}, a]$  که  $-\frac{\pi}{۲} \leq a \leq \frac{\pi}{۲}$  صعودی است. پس حداکثر مقدار  $a$

برابر  $\frac{\pi}{۲}$  است.



**۲۶۴- گزینه ۲** ابتدا نمودار تابع  $y = \frac{1}{-x}$



رادو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار

تابع  $y = \frac{1}{-(x-2)} = \frac{1}{-x+۲}$  به دست بیاید.

اکنون از روی این نمودار معلوم است که تابع  $f$  روی بازه  $(-\infty, ۲)$  و هر بازه دیگری مانند  $(-\infty, a)$  که  $a \leq ۲$  صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار  $a$  برابر ۲ است.

**۲۷۸- گزینه ۳** اگر نمودار تابع  $f$  را نسبت به خط  $y=x$  قرینه کنیم نمودار تابع  $f^{-1}$  به دست می‌آید. بنابراین باید تابع وارون تابع  $f(x)=3x-4$  را به دست آوریم.

$$y=3x-4 \Rightarrow y+4=3x \Rightarrow x=\frac{y+4}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3}$$

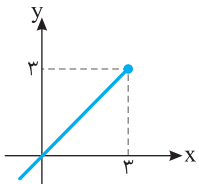
بنابراین معادله خط جدید  $y=\frac{x+4}{3}$  است.

**۲۷۹- گزینه ۳ راه حل اول** از تساوی  $y=\sqrt{x-1}+2$  مقدار  $x$  را برحسب  $y$  به دست می‌آوریم:

$$y-2=\sqrt{x-1} \Rightarrow (y-2)^2=x-1 \Rightarrow x=(y-2)^2+1 \Rightarrow x=y^2-4y+5$$

بنابراین  $f^{-1}(x)=x^2-4x+5$ .

**راه حل دوم** توجه کنید که  $f(1)=2$ ، پس  $f^{-1}(2)=1$  که فقط در تابع گزینه (۳) صدق می‌کند.



**۲۸۰- گزینه ۲** برای هر  $x \in D_f$

تساوی  $(f^{-1} \circ f)(x)=x$  برقرار است. پس تابع  $g$  به صورت  $g(x)=x, x \leq 3$  است و نمودار آن به شکل روبه‌رو است.

**۲۸۱- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که  $D_f=\{1, 2, 3, 5\}$  و

$$f^{-1}=\{(3, 1), (4, 2), (2, 3), (1, 5)\} \Rightarrow D_{f^{-1}}=\{3, 4, 2, 1\}$$

بنابراین

$$D_{f \circ f^{-1}}=D_f \cap D_{f^{-1}}=\{1, 2, 3\}$$

$$(f \circ f^{-1})(1)=f(1) \times f^{-1}(1)=3 \times 5=15$$

$$(f \circ f^{-1})(2)=f(2) \times f^{-1}(2)=4 \times 3=12$$

$$(f \circ f^{-1})(3)=f(3) \times f^{-1}(3)=2 \times 1=2$$

بنابراین تابع  $f \circ f^{-1}$  به صورت زیر است

$$f \circ f^{-1}=\{(1, 15), (2, 12), (3, 2)\}$$

**۲۸۲- گزینه ۲** فرض کنید  $f^{-1}(3)=a$  پس  $f(a)=3$  و در نتیجه

$$\frac{a}{a-1}=3 \Rightarrow a=3a-3 \Rightarrow 2a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$\text{یعنی } f^{-1}(3)=\frac{3}{2}$$

**۲۸۳- گزینه ۴** چون نمودار تابع  $f$  از نقطه  $(8, 9)$  عبور می‌کند، نمودار

تابع  $f^{-1}$  از نقطه  $(9, 8)$  عبور می‌کند:

$$f(8)=8+\sqrt[3]{8}-1=9 \Rightarrow f^{-1}(9)=8$$

**۲۸۴- گزینه ۴** ابتدا قرینه نمودار تابع  $f$  را نسبت به خط  $y=x$  رسم

می‌کنیم تا نمودار تابع  $f^{-1}$  به دست بیاید. سپس قرینه نمودار تابع  $f^{-1}$  را نسبت به محور  $y$  پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=f^{-1}(-x)$  به دست بیاید. در آخر نمودار تابع  $y=f^{-1}(-x)$  را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=f^{-1}(-x)-1$  به دست بیاید.

**۲۷۱- گزینه ۳** ابتدا از تساوی  $(f^{-1} \circ g^{-1})(a)=-1$  مقدار  $a$  را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}(g^{-1}(a))=-1 \Rightarrow f(-1)=g^{-1}(a)$$

$$4=g^{-1}(a) \Rightarrow g(4)=a \Rightarrow a=-2$$

بنابراین مقدار  $f^{-1}(-2)$  را می‌خواهیم که با توجه به تساوی  $f(3)=-2$  نتیجه می‌گیریم  $f^{-1}(-2)=3$ .

**۲۷۲- گزینه ۴** تابع  $f^{-1}$  را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}=\{(2, -1), (5, 3), (3, -2), (-1, 5)\}$$

در نتیجه  $\text{gof}^{-1}=\{(2, 4), (5, 0)\}$ .

**۲۷۳- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که  $g(3)=2$ ، پس  $g^{-1}(2)=3$ ، بنابراین

$$f^{-1}(a)+g^{-1}(2)=6 \Rightarrow f^{-1}(a)+3=6$$

$$f^{-1}(a)=3 \Rightarrow f(3)=a \Rightarrow a=2$$

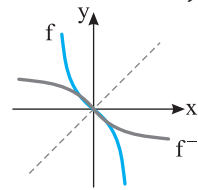
در نتیجه  $g(a)=g(2)=4$ .

**۲۷۴- گزینه ۴** چون نمودار تابع  $f$  از نقطه  $(9, 11)$  عبور می‌کند، نمودار

تابع  $f^{-1}$  از نقطه  $(11, 9)$  عبور می‌کند.

**۲۷۵- گزینه ۳** نمودار تابع  $f^{-1}$  قرینه نمودار تابع  $f$  نسبت به خط

$y=x$  است که به شکل زیر است:



**۲۷۶- گزینه ۱** دامنه تابع  $f^{-1}$  همان برد تابع  $f$  است. پس برد تابع  $f$

را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+1)^2-1$$

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq 3$$

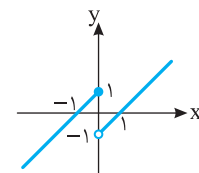
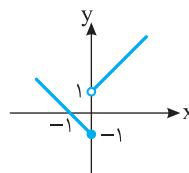
$$0 \leq (x+1)^2 \leq 9 \Rightarrow -1 \leq (x+1)^2-1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 8$$

بنابراین  $D_{f^{-1}}=R_f=[-1, 8]$ .

**۲۷۷- گزینه ۴** نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

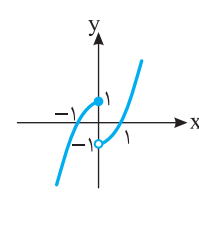
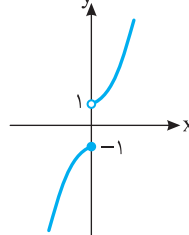
گزینه (۲)

گزینه (۱)



گزینه (۴)

گزینه (۳)



با توجه به نمودارها واضح است که تابع گزینه (۴) وارون‌پذیر است.

**۲۸۸- گزینه ۲** توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2, D_f = [2, +\infty)$$

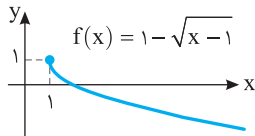
بنابراین  $f$  تابعی یک به یک است. توجه کنید که

$$y = (x-2)^2 - 2 \Rightarrow (x-2)^2 = y+2 \Rightarrow |x-2| = \sqrt{y+2}$$

$$\xrightarrow{x \geq 2} x-2 = \sqrt{y+2} \Rightarrow x = \sqrt{y+2} + 2$$

بنابراین  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} + 2$

**۲۸۹- گزینه ۳** توجه کنید که  $D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$



از طرف دیگر با توجه به نمودار تابع  $f$ ،  $R_f = (-\infty, 1]$  بنابراین دامنه تابع  $f \circ f^{-1}$  برابر  $(-\infty, 1]$  است.

**۲۹۰- گزینه ۴** راه حل اول توجه کنید که

$$(f^{-1} \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-2}{2} \Rightarrow (g^{-1} \circ f)(x) = \frac{x-2}{2} \Rightarrow g^{-1}(f(x)) = \frac{x-2}{2}$$

$$g^{-1}(x-1) = \frac{x-2}{2} \xrightarrow{(x \rightarrow x+1)} g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \Rightarrow g(x) = 2x+1$$

**راه حل دوم** اگر تابع های وارون دو طرف تساوی  $(f^{-1} \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-2}{2}$  را

پیدا کنیم به دست می آید

$$(f^{-1} \circ g)(x) = 2x+2 \quad (1)$$

از طرف دیگر،  $f^{-1}(x) = x+1$  پس از تساوی (۱) نتیجه می شود

$$f^{-1}(g(x)) = 2x+2 \Rightarrow g(x)+1 = 2x+2 \Rightarrow g(x) = 2x+1$$

**۲۹۱- گزینه ۱** ابتدا  $f^{-1}$  و  $g^{-1}$  را به دست می آوریم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, -2), (1, 4)\}$$

$$g^{-1} = \{(2, 2), (1, 3), (-1, 4), (-2, 1)\}$$

اکنون  $g^{-1} \circ f^{-1}$  را به دست می آوریم:

$$2 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{g^{-1}} 3$$

$$3 \xrightarrow{f^{-1}} 2 \xrightarrow{g^{-1}} 2$$

$$4 \xrightarrow{f^{-1}} -2 \xrightarrow{g^{-1}} 1$$

$$1 \xrightarrow{f^{-1}} 4 \xrightarrow{g^{-1}} \text{تعریف نشده}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1} = \{(2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

توجه کنید که می توان ابتدا  $f \circ g$  را حساب کرد، سپس با استفاده از تساوی  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$  مسئله را حل کرد.

**۲۹۲- گزینه ۱** اگر نقطه های  $(y, a)$  و  $(-1, b)$  روی نمودار تابع وارون

تابع  $f$  باشند، نقطه های  $(a, y)$  و  $(b, -1)$  روی تابع  $f$  هستند. اما از طرف دیگر نمی دانیم  $a$  و  $b$  بزرگ تر از یک هستند یا کوچک تر از آن. پس با فرض  $x < 1$  به دست می آید:

$$x+3=7 \Rightarrow x=4 \text{ (ق.ق.)}, \quad x+3=-1 \Rightarrow x=-4 \text{ (ق.ق.)}$$

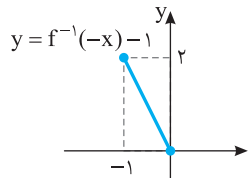
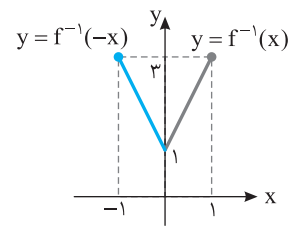
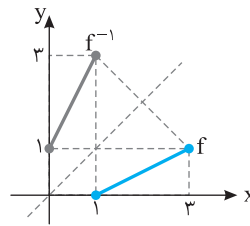
همچنین با فرض  $x \geq 1$ ,

$$3x+1=7 \Rightarrow x=2 \text{ (ق.ق.)}, \quad 3x+1=-1 \Rightarrow x=-\frac{2}{3} \text{ (ق.ق.)}$$

بنابراین می توان نوشت

$$f(-4) = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = -4, \quad f(2) = 7 \Rightarrow f^{-1}(7) = 2$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(7) + f^{-1}(-1) = 2 - 4 = -2$$



**۲۸۵- گزینه ۳** برد تابع  $f^{-1}$  برابر دامنه تابع  $f$  است. پس دامنه تابع  $f$

را به دست می آوریم:

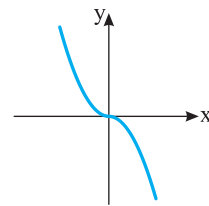
$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4, \quad x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

پس  $R_{f^{-1}} = D_f = [0, 1) \cup (1, 4]$ . بنابراین اعداد صحیح صفر، ۲، ۳ و ۴ در

برد تابع  $f^{-1}$  قرار دارند.

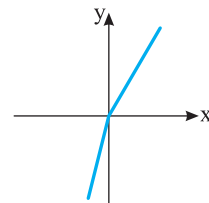
**۲۸۶- گزینه ۴** نمودار تابع های چهار گزینه به صورت زیر است:

**گزینه (۱)**



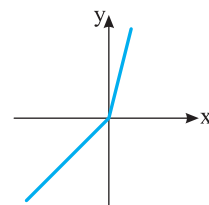
$$f(x) = -x|x| = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

**گزینه (۲)**



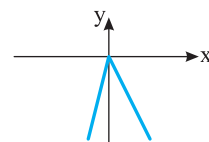
$$f(x) = 3x - |x| = \begin{cases} 4x & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

**گزینه (۳)**



$$f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$$

**گزینه (۴)**



$$f(x) = x - 3|x| = \begin{cases} 4x & x < 0 \\ -2x & x \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودارها، تابع  $f(x) = x - 3|x|$  وارون پذیر نیست.

**۲۸۷- گزینه ۱** ابتدا  $f^{-1}(x)$  را به دست می آوریم

$$y = a - 3x \Rightarrow 3x = a - y \Rightarrow x = \frac{a-y}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{a-x}{3}$$

بنابراین باید معادله  $x^2 = \frac{a-x}{3}$  فقط یک جواب داشته باشد

$$3x^2 + x - a = 0, \quad \Delta = 1 + 12a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{12}$$

۲۹۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $f(x) = (x+1)^3 - 1$  بنابراین تابع  $f$

یک به یک است. از طرف دیگر،

$$y = (x+1)^3 - 1 \Rightarrow (x+1)^3 = y+1 \Rightarrow x+1 = \sqrt[3]{y+1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+1} - 1$$

$$\text{در نتیجه } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

۲۹۹- گزینه ۱ توجه کنید که  $f^{-1}(x) = \frac{x+a}{x-2}$  بنابراین

$$\text{پس } f^{-1}(3) = \frac{3+a}{3-2} = a+3$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(3) = \frac{9}{4} \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(3)) = \frac{9}{4}$$

$$f^{-1}(a+3) = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{(a+3)+a}{a+3-2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{2a+3}{a+1} = \frac{9}{4} \Rightarrow 4a+12 = 9a+9 \Rightarrow a=3$$

۳۰۰- گزینه ۱ توجه کنید که  $D_{f^{-1} \circ f} = D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

۳۰۱- گزینه ۲ ابتدا به تابع‌های  $f^{-1}$  و  $g^{-1}$  توجه کنید:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, -1), (-2, 2), (1, 4)\}$$

$$g^{-1} = \{(2, 3), (3, 4), (4, 2), (1, 1)\}$$

$$D_{f^{-1} \circ g^{-1}} = D_{f^{-1}} \cap D_{g^{-1}} = \{2, 3, -2, 1\} \cap \{2, 3, 4, 1\} = \{2, 3, 1\}$$

اکنون می‌توانیم تابع  $f^{-1} \circ g^{-1}$  را به دست آوریم:

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \{(2, 1-3), (3, -1-4), (1, 4-1)\}$$

$$= \{(2, -2), (3, -5), (1, 3)\}$$

مجموع عضوهای دامنه و برد تابع  $f^{-1} \circ g^{-1}$  برابر است با

$$2 + (-2) + 3 + (-5) + 1 + 3 = 2$$

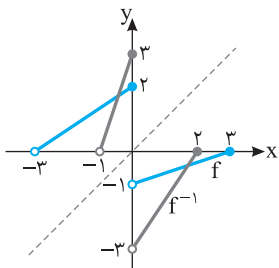
۳۰۲- گزینه ۴ توجه کنید که  $f(9) = \sqrt[3]{9-1} + 2 = 2+2=4$  پس

$$f^{-1}(4) = 9 \text{ و در نتیجه } f^{-1}(f(9)) = 9$$

۳۰۳- گزینه ۴ چون نمودار تابع  $f$  از نقطه  $(8, 13)$  عبور می‌کند،

نمودار تابع  $f^{-1}$  از نقطه  $(13, 8)$  می‌گذرد:

$$f(8) = 2 \times 8 + \sqrt[3]{8-5} = 13 \Rightarrow f^{-1}(13) = 8$$



۳۰۴- گزینه ۲ نمودار تابع  $f$

را نسبت به خط  $y=x$  قرینه

می‌کنیم تا نمودار تابع  $f^{-1}$  رسم

شود. بنابر شکل زیر، نمودار تابع‌های

$f^{-1}$  و  $f$  در دو نقطه متقاطع‌اند.

۳۰۵- گزینه ۳ چون نقطه برخورد نمودار تابع‌های  $f$  و  $f^{-1}$

است، پس  $(1, 2) \in f$  و  $(1, 2) \in f^{-1}$ ، یعنی  $(2, 1) \in f$  بنابراین

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow a\sqrt{b-3} = 2 \\ f(2) = 1 \Rightarrow a\sqrt{b-6} = 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{b-3} = 2\sqrt{b-6} \Rightarrow b-3 = 4b-24 \Rightarrow b=7$$

پس  $a=1$  و در نتیجه  $a+b=8$

۲۹۳- گزینه ۴ نمودار تابع  $f^{-1}$  از نقطه  $(3, 2)$  عبور می‌کند، پس

نمودار تابع  $f$  از نقطه  $(2, 3)$  عبور می‌کند. بنابراین

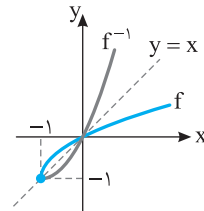
$$f(2) = 3 \Rightarrow 8+2+a = 3 \Rightarrow a = -7$$

در نتیجه

$$f(x) = x^3 + x - 7 \Rightarrow f(3) = 27 + 3 - 7 = 23$$

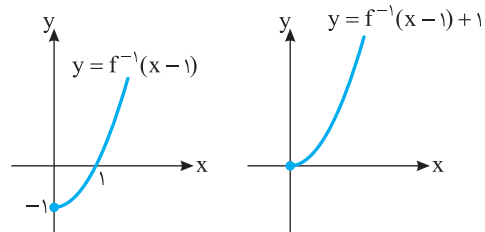
۲۹۴- گزینه ۲ نمودار تابع  $y=f^{-1}(x)$  قرینه نمودار تابع  $y=f(x)$

نسبت به خط  $y=x$  است.



اگر نمودار  $y=f^{-1}(x)$  را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم،

نمودار تابع  $y=f^{-1}(x-1)+1$  رسم می‌شود.



۲۹۵- گزینه ۱ چون نمودار تابع‌های  $f$  و  $f^{-1}$  در نقطه  $(1, 2)$  برخورد

می‌کنند، پس

$$(1, 2) \in f \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \sqrt{a+b} = 2$$

$$(1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow (2, 1) \in f \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow \sqrt{2a+b} = 1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-3, b=7$$

بنابراین  $ab = -21$

۲۹۶- گزینه ۲ چون  $f$  تابعی خطی است، فرض می‌کنیم  $f(x) = ax + b$

در این صورت

$$f(1) = 3 \Rightarrow a+b=3 \quad (1)$$

$$f^{-1}(11) = 3 \Rightarrow f(3) = 11 \Rightarrow 3a+b=11 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به دست می‌آید  $a=4$  و  $b=-1$ .

بنابراین  $f(x) = 4x - 1$  و در نتیجه  $f(-3) = -13$ .

۲۹۷- گزینه ۲ ابتدا  $f(x)$  را به دست می‌آوریم که وارون تابع

$f^{-1}(x)$  است:

$$y = 2x + k \Rightarrow 2x = y - k \Rightarrow x = \frac{y-k}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x-k}{2}$$

بنابراین معادله  $x^2 = \frac{x-k}{2}$  نباید جواب داشته باشد

$$2x^2 = x - k \Rightarrow 2x^2 - x + k = 0, \quad \Delta < 0 \Rightarrow 1 - 8k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{8}$$



**راه حل دوم** توجه کنید که  $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$  از طرف دیگر،

$$(g \circ f)(x) = g(1 + \sqrt[3]{x-2}) = (1 + \sqrt[3]{x-2})^3 = x-2$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = x+2 \text{ بنابراین } (g \circ f)^{-1}(x) = x+2 \text{ و}$$

**۳۱۱-گزینه ۲** توجه کنید که  $(f \circ g^{-1})(a) = a$

بنابراین  $f(g^{-1}(a)) = a$  چون  $f(c) = a$  پس  $g^{-1}(a) = c$  و در نتیجه

$$g(c) = a \text{ به همین ترتیب}$$

$$(f \circ g^{-1})(b) = c \Rightarrow f(g^{-1}(b)) = c \xrightarrow{f(b)=c} g^{-1}(b) = b \Rightarrow g(b) = b$$

$$g^{-1}(b) = b \Rightarrow g(b) = b$$

$$(f \circ g^{-1})(c) = d \Rightarrow f(g^{-1}(c)) = d \xrightarrow{f(d)=d} g^{-1}(c) = d \Rightarrow g(d) = c$$

$$g^{-1}(c) = d \Rightarrow g(d) = c$$

$$(f \circ g^{-1})(d) = b \Rightarrow f(g^{-1}(d)) = b \xrightarrow{f(a)=b} g^{-1}(d) = a \Rightarrow g(a) = d$$

$$g^{-1}(d) = a \Rightarrow g(a) = d$$

$$\text{پس } g = \{(a, d), (b, b), (c, a), (d, c)\}$$

**۳۱۲-گزینه ۲** فرض می‌کنیم  $f^{-1}(1) = a$  در این صورت

$$f(a) = 1 \Rightarrow \sqrt{a + \sqrt{a+2} + 2} = 1 \Rightarrow a + \sqrt{a+2} + 2 = 1$$

$$\sqrt{a+2} = -a-1 \quad (*) \Rightarrow a+2 = a^2 + 2a + 1$$

$$a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, a = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

از تساوی (\*) واضح است که  $-a-1 \geq 0$  پس  $a \leq -1$  بنابراین  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

قابل قبول نیست.

**۳۱۳-گزینه ۴** فرض می‌کنیم طول نقطه برخورد  $a$  باشد. در این صورت

عرض آن  $a+1$  است. پس نقطه  $(a, a+1)$  روی نمودار تابع  $f^{-1}$  است. در

نتیجه نقطه  $(a+1, a)$  روی نمودار تابع  $f$  است. پس

$$f(a+1) = a \Rightarrow (a+1)^2 + 2(a+1) + 9 = a$$

$$a^2 + 3a^2 + 4a + 12 = 0 \Rightarrow (a+3)(a^2+4) = 0 \Rightarrow a = -3$$

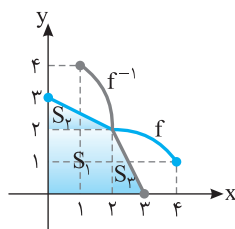
پس عرض نقطه برخورد  $a+1 = -2$  است.

**۳۱۴-گزینه ۲** نمودار تابع  $f^{-1}$  قرینه نمودار تابع  $f$  نسبت به خط

$y=x$  است که در شکل رسم شده است. بنابراین مساحت قسمت رنگی

مورد نظر است که از دو مثلث و یک مربع تشکیل شده است:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow S = 2 \times 2 + \frac{1 \times 2}{2} + \frac{1 \times 2}{2} = 6$$



**۳۰۶-گزینه ۳** در تساوی  $f(2x-1) = g(3x) - 1$  قرار می‌دهیم  $x=2$ :

$$f(3) = g(6) - 1 \Rightarrow g(6) = f(3) + 1$$

از طرف دیگر،  $f^{-1}(2) = 3$  پس  $f(3) = 2$  در نتیجه  $g(6) = 2 + 1 = 3$ .

**۳۰۷-گزینه ۲** **راه حل اول** ابتدا ضابطه تابع  $f$  را به صورت

$$y = (\sqrt{x+1})^2 - 1 \text{ می‌نویسیم. حالا } x \text{ را بر حسب } y \text{ پیدا می‌کنیم:}$$

$$y+1 = (\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y+1} - 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y+1} - 1)^2$$

بنابراین  $f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 = x + 1 + 1 - 2\sqrt{x+1} = x + 2 - 2\sqrt{x+1}$

**راه حل دوم**

$$f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1$$

در بین گزینه‌های داده شده فقط اگر در عبارت داده شده در گزینه (۲)، به جای

$x$  قرار دهیم ۳، حاصل ۱ می‌شود.

**۳۰۸-گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow f(x) = x + 2 - x + 1 - 2x = -2x + 3 \\ -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = x + 2 + x - 1 - 2x = 1 \\ x \leq -2 \Rightarrow f(x) = -x - 2 + x - 1 - 2x = -2x - 3 \end{cases}$$

بنابراین تابع  $f$  با دامنه  $\mathbb{R} - [-2, 1]$  وارون‌پذیر است. توجه کنید که تابع  $f$  روی

$\mathbb{R} - [a, b]$  که در آن  $a \leq -2$  و  $b \geq 1$  هم وارون‌پذیر است ولی برای اینکه

$b-a$  کمترین مقدار باشد دامنه را  $\mathbb{R} - [-2, 1]$  در نظر می‌گیریم.

$$x > 1 \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3-y}{2} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{3-x}{2} \\ \frac{3-y}{2} > 1 \Rightarrow y < 1 \end{cases}$$

$$x < -2 \Rightarrow y = -2x - 3 \Rightarrow x = \frac{-y-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{-x-3}{2} \\ \frac{-y-3}{2} < -2 \Rightarrow y > 1 \end{cases}$$

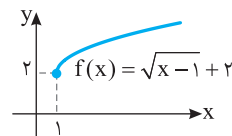
$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{2} & x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 1 \\ \frac{-x-3}{2} & x > 1 \end{cases}$$

**۳۰۹-گزینه ۲** برای هر  $x \in \mathbb{R}_f$  تساوی  $x = (f \circ f^{-1})(x)$  برقرار

است. با توجه به نمودار تابع  $f$ ،  $\mathbb{R}_f = [2, +\infty)$  پس برای هر  $x \geq 2$ ،

$$g(x) = x + 3$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x + 3 \geq 5 \Rightarrow g(x) \geq 5 \Rightarrow \mathbb{R}_g = [5, +\infty)$$



**۳۱۰-گزینه ۲** **راه حل اول** ضابطه تابع وارون تابع‌های  $f$  و  $g$  را پیدا

می‌کنیم که به صورت زیر هستند:

$$f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2, \quad g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

بنابراین  $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{x+1})$

$$= (\sqrt[3]{x+1} - 1)^2 + 2 = x + 2$$

**۳۱۹- گزینه ۴** راه‌حل اول چون  $f$  و  $f^{-1}$  تابع‌هایی برابرند، پس دامنه آن‌ها برابر است. اکنون توجه کنید که

$$f(x) = \frac{(a+1)x+f}{3x-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+f}{3x-(a+1)} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a+1}{3} \right\}$$

بنابراین  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a+1}{3} \right\}$ . پس  $\frac{a+1}{3} = \frac{1}{3}$ ، در نتیجه  $a=0$ .

توجه کنید که اگر  $a=0$ ، آن‌گاه  $f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+f}{3x-1}$ .

**راه‌حل دوم** در تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  اگر  $f = f^{-1}$ ، آن‌گاه  $a = -d$ . بنابراین در اینجا  $a+1 = -(-1)$ ، در نتیجه  $a=0$ .

**۳۲۰- گزینه ۳** برای هر  $x \in D_{f^{-1}} = R_f$  تساوی  $(f \circ f^{-1})(x) = x$

برقرار است. برد تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} + 2 \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 2 \Rightarrow R_f = [2, +\infty)$$

پس برای هر  $x \geq 2$ ،  $g(x) = 2x$ ، بنابراین

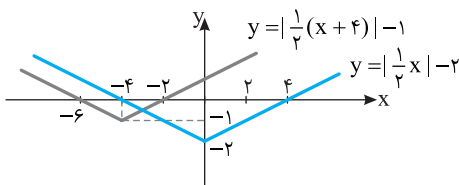
$$x \geq 2 \Rightarrow 2x \geq 4 \Rightarrow g(x) \geq 4 \Rightarrow R_g = [4, +\infty)$$

**۳۲۱- گزینه ۲** نمودار اولیه و نمودار انتقال یافته را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقطه برخورد نمودارها جواب معادله زیر است:

$$\left| \frac{1}{4}(x+4) \right| - 1 = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 \quad (1)$$

توجه کنید که  $x$  منفی و  $x+4$  مثبت است. بنابراین معادله (۱) می‌شود

$$\frac{1}{4}(x+4) - 1 = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow x = -3$$



تجربی - ۹۳

**۳۲۲- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(a + \sqrt{a})$$

از طرف دیگر  $g(6) = 5$ ، پس

$$a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4$$

تجربی - ۹۱

**۳۲۳- گزینه ۴** توجه کنید که

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{\frac{2x-1}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{4x - 2 + 2x + 2}{\frac{2x-1}{x+1} + 1} = \frac{6x}{\frac{2x+2-2x-1}{x+1}} = \frac{6x}{1} = 2x$$

تجربی - ۹۶

**۳۱۵- گزینه ۲** اگر  $(m, n)$  نقطه برخورد نمودار تابع‌های  $f$  و  $f^{-1}$  باشد، نتیجه می‌شود  $f(m) = n$  و  $f(n) = m$ . بنابراین

$$f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - a + b = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{a}{3} + b = -1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} -a + b = -\frac{2}{3} \\ a + 3b = -\frac{26}{9} \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2}{9}, \quad b = -\frac{8}{9}$$

پس  $a + b = -\frac{10}{9}$ .

**۳۱۶- گزینه ۳** توجه کنید که

$$(g^{-1} \circ f)(-1) = g^{-1}(f(-1)) = g^{-1}(3)$$

اکنون فرض کنید  $g^{-1}(3) = s$ . در این صورت  $g(s) = 3$  و اگر در تساوی

$$g(x) = 1 - f(x+1)$$

قرار دهیم  $x = s$ ، به دست می‌آید

$$\begin{cases} g(s) = 1 - f(s+1) \\ g(s) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(s+1) = -2$$

بنابراین، چون تابع  $f$  یک‌به‌یک است،  $s+1 = 4$ ، پس  $s = 3$ . یعنی

$$g^{-1}(3) = 3$$

**۳۱۷- گزینه ۳** از تساوی  $y = \frac{2x+a}{x+b}$  مقدار  $x$  را بر حسب  $y$  به دست می‌آوریم:

$$yx + by = 2x + a \Rightarrow (y-2)x = a - by \Rightarrow x = \frac{a-by}{y-2}$$

بنابراین  $f^{-1}(x) = \frac{a-bx}{x-2}$  و در نتیجه  $a = -4$ ،  $b = -3$  و  $ab = 12$ .

**۳۱۸- گزینه ۱** راه‌حل اول توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 3x + (-(x-1)) & x < 1 \\ 3x + (x-1) & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ 4x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

فرض کنید برای  $x < 1$ ،  $g(x) = 2x + 1$  و برای  $x \geq 1$ ،  $h(x) = 4x - 1$ . بنابراین

$$x < 1 \Rightarrow 2x + 1 < 3 \Rightarrow g(x) < 3$$

$$g(x) = 2x + 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow 4x - 1 \geq 3 \Rightarrow h(x) \geq 3$$

$$h(x) = 4x - 1 \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{x+1}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & x < 3 \\ \frac{x+1}{4} & x \geq 3 \end{cases}$$

بنابراین

**راه‌حل دوم** توجه کنید که  $f(0) = 1$  و  $f(2) = 7$ ، پس  $f^{-1}(1) = 0$  و

$f^{-1}(7) = 2$ . این شرایط فقط در تابع گزینه (۱) وجود دارد.

۳۲۹- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا ضابطه تابع وارون تابع  $f$  را به دست می آوریم

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = x + 4 \Rightarrow x(y-1) = 2y + 4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1}$$

بنابراین  $f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ . اکنون با حل معادله  $f(x) = f^{-1}(x)$  نقطه های برخورد دو تابع را می یابیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 - 8$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4$$

راه حل دوم کافی است طول نقطه های برخورد نمودار تابع  $f$  و خط  $y = x$  را بیابیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = x \Rightarrow x^2 - 2x = x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۳۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$ax + by = a \Rightarrow y = \frac{a-ax}{b}, \quad 2x - 3y = b \Rightarrow y = \frac{2x-b}{3}$$

چون خط های داده شده نسبت به نیمساز ربع های اول و سوم قرینه یکدیگر هستند، پس تابع های  $y = \frac{a-ax}{b}$  و  $y = \frac{2x-b}{3}$  وارون یکدیگرند. از طرف

دیگر، وارون تابع  $y = \frac{2x-b}{3}$  می شود  $y = \frac{3x+b}{2}$ . بنابراین  $\frac{a}{b} = \frac{b}{2}$  و

$$\frac{-a}{b} = \frac{3}{2} \text{ در نتیجه } b^2 = 16, \text{ یعنی } b = \pm 4. \text{ در نتیجه}$$

$$b = -4 \Rightarrow \frac{-a}{-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 2$$

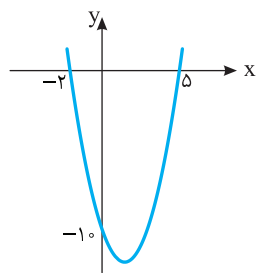
$$b = 4 \Rightarrow \frac{-a}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a + b = -2$$

بنابراین  $a + b = \pm 2$ .

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۳۳۱- گزینه ۳ طول نقاط تلاقی نمودار تابع مورد نظر با محور  $x$

جواب های معادله  $x^2 - 3x - 10 = 0$  هستند. جواب های این معادله  $x = -2$  و  $x = 5$  هستند. بنابراین نمودار تابع



مورد نظر به صورت مقابل است. از روی این شکل معلوم است که باید نمودار تابع را حداقل دو واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور  $x$  غیرمنفی باشد.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۳۳۲- گزینه ۳ ابتدا دقت کنید که

$$f(2x-3) = 2x-3 - [2x-3] = 2x-3 - [2x] + 3 = 2x - [2x]$$

$$\text{پس } g(x) = f(2x-3) - 2f(x) = 2x - [2x] - 2x + 2[x] = 2[x] - [2x]$$

اکنون فرض می کنیم  $k$  عدد صحیح دلخواهی باشد. در این صورت اگر

$$k \leq x < k + \frac{1}{2} \text{ و } [x] = k$$

$$2k \leq 2x < 2k + 1 \Rightarrow [2x] = 2k$$

بنابراین  $g(x) = 2k - 2k = 0$ . اگر  $k + \frac{1}{2} \leq x < k + 1$ . آن گاه  $[x] = k$  و

$$2k + 1 \leq 2x < 2k + 2 \Rightarrow [2x] = 2k + 1$$

بنابراین  $g(x) = 2k - 2k - 1 = -1$ . در نتیجه  $R_g = \{-1, 0\}$ .

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۲۴- گزینه ۳ ابتدا ضابطه تابع  $g$  را پیدا می کنیم:

$$g(f(x)) = g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20$$

فرض می کنیم  $2x+3 = t$  در این صورت  $x = \frac{t-3}{2}$  و

$$g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20$$

$$= 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20 = 2t^2 - t + 5$$

بنابراین  $g(x) = 2x^2 - x + 5$  و

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

ریاضی - ۹۲

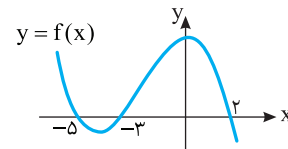
۳۲۵- گزینه ۴ برای اینکه از نمودار  $y = f(x-2)$  به نمودار

$y = f(x)$  برسیم، کافی است آن را مطابق شکل زیر دو واحد به چپ منتقل

کنیم. برای به دست آوردن دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ ، عبارت  $xf(x)$  را تعیین علامت می کنیم:

$x$	$-\infty$	$-5$	$-3$	$0$	$2$	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+	+	-
$x$		-	-	-	+	+
$xf(x)$		-	+	-	+	-

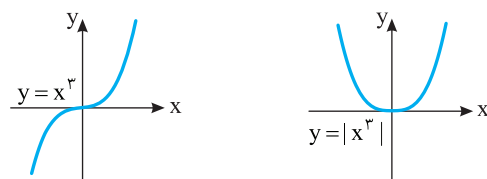
بنابراین  $D_g = [-5, -3] \cup [0, 2]$ .



خارج از کشور تجربی - ۹۴

۳۲۶- گزینه ۳ راه حل اول با توجه به نمودار تابع  $y = |x^2|$  معلوم

می شود که این تابع یک به یک نیست، بنابراین وارون ناپذیر است.



راه حل دوم سه نقطه  $(1, 1)$ ،  $(-1, 1)$  و  $(0, 0)$  روی نمودار این تابع هستند، پس

این تابع صعودی، نزولی، یک به یک و وارون پذیر نیست.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۳۲۷- گزینه ۴ توجه کنید که  $(f^{-1} \circ g)(a) = f^{-1}(g(a)) = 6$ .

بنابراین  $g(a) = f(6) = 12 - 5 = 7$ . با توجه به اینکه  $g(4) = 7$  نتیجه می شود

$$a = 4$$

ریاضی - ۹۳

۳۲۸- گزینه ۳ اگر  $x < 0$ ، آن گاه

$$y = -\sqrt{-x} \Rightarrow -x = y^2 \xrightarrow{y < 0} x = y|y|$$

و اگر  $x \geq 0$ ، آن گاه

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \xrightarrow{y \geq 0} x = y|y|$$

بنابراین در هر حالتی  $x = y|y|$  و ضابطه تابع وارون تابع  $f$  به صورت

$f^{-1}(x) = x|x|$  است.

تجربی - ۹۶

**راه‌حل دوم** ابتدا توجه کنید که  $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$  چون  $(f \circ g)^{-1}(a) = 8$ ، بنابراین  $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$  یعنی  $(f \circ g)(8) = a$ .

در نتیجه  $f(g(8)) = a \Rightarrow f(7) = a \Rightarrow a = 3$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

**۳۳۸- گزینه ۴** ضابطه تابع را به صورت  $f(x) = \begin{cases} 4x-4 & x \leq 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$

می‌نویسیم. تابع  $f$  در بازه  $(-\infty, 2]$  وارون پذیر است. فرض می‌کنیم

$y = 4x - 4$ . در این صورت  $x = \frac{y+4}{4}$ . از طرف دیگر،

$x \leq 2 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4$

بنابراین  $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1, x \leq 4$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

**۳۳۹- گزینه ۱** ابتدا برای  $0 < x < 1$  ضابطه تابع وارون تابع را به دست می‌آوریم:

$y = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2} = \frac{x}{x} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$

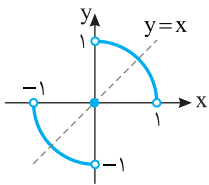
$y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-y^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2} = f(x)$

به همین ترتیب برای  $-1 < x < 0$ :

$y = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2} = \frac{-x}{x} \sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2$

$x^2 = 1-y^2 \Rightarrow x = -\sqrt{1-y^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2} = f(x)$



همچنین  $f(0) = 0$ ، در نتیجه  $f^{-1}(0) = 0$ .

پس در هر صورت می‌توان نوشت

$f^{-1}(x) = f(x)$ . توجه کنید که نمودار تابع

به شکل مقابل است که از دو ربع دایره و یک

نقطه تشکیل شده و نسبت به خط  $y = x$  متقارن است. بنابراین وارون آن با

خودش برابر است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

**۳۴۰- گزینه ۴** **راه‌حل اول** ابتدا ضابطه تابع  $f^{-1}$  را به دست می‌آوریم:

$y = (x+1)^2 \Rightarrow x+1 = \sqrt{y} \Rightarrow x = \sqrt{y} - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

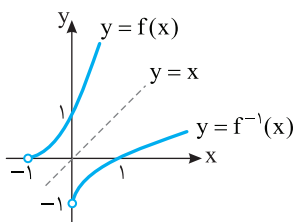
اکنون محل برخورد نمودار تابع‌های  $f$  و  $f^{-1}$  را پیدا می‌کنیم:

$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow (x+1)^2 + 1 = \sqrt{x}$

$\xrightarrow{x \geq 0} (x+1)^4 + 2(x+1)^2 + 1 = x$

$(x+1)^4 + 2x^2 + 3x + 3 = 0$

معادله بالا با توجه به اینکه مجموع چند مقدار نامنفی است، جواب ندارد.



**راه‌حل دوم** نمودار تابع  $f$  را رسم

می‌کنیم. با قرینه کردن نمودار

نسبت به خط  $y = x$ ، نمودار

$f^{-1}$  را رسم می‌کنیم. واضح است

که دو نمودار نقطه برخوردی ندارند.

ریاضی - ۹۲

**۳۳۳- گزینه ۲** ابتدا  $(f \circ g)(x)$  را پیدا می‌کنیم:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (2x+4-3)^2 = (2x+1)^2$

اکنون معادله  $(f \circ g)(x) = f(x)$  را حل می‌کنیم:

$(2x+1)^2 = (2x-3)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9$

$16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

تجربی - ۹۲

**۳۳۴- گزینه ۳** توجه کنید که

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x} + 2}$

$= \frac{2-x-6x-9}{2-x} = \frac{-7x-7}{2-x} = -x-1$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

**۳۳۵- گزینه ۲** توجه کنید که  $D_{g \circ f} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\}$

از طرف دیگر،  $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$  و  $D_g = [0, 1]$ . در نتیجه

$D_{g \circ f} = \{x | x \neq \pm 1, 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\}$

$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 = \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0$

$\frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow x < -1$  یا  $x = 0$  یا  $x > 1$

$\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$

از اشتراک ناحیه‌های به دست آمده دامنه تابع  $g \circ f$  به دست می‌آید، بنابراین

$D_{g \circ f} = \{0\}$

ریاضی - ۹۶

**۳۳۶- گزینه ۱** دامنه تابع از

نامساوی  $-2 < x-1 < 2$  به دست

می‌آید، پس  $D_f = (-1, 3)$ . با توجه به

نمودار تابع  $y = x^2 - 2x - 3$ ، در بازه

$(-1, 3)$  مقدار تابع  $f$  همواره منفی است

و این تابع نه صعودی است و نه نزولی.

ریاضی - ۹۱

**۳۳۷- گزینه ۲** **راه‌حل اول** از تساوی  $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$  نتیجه می‌شود

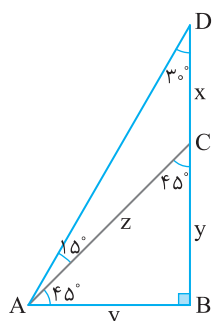
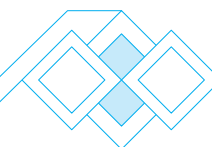
$g^{-1}(f^{-1}(a)) = 8 \Rightarrow g(8) = f^{-1}(a)$

بنابراین

$\sqrt{5 \times 8 + 9} = f^{-1}(a) \Rightarrow f^{-1}(a) = 7$

پس  $a = f(7)$ ، یعنی  $a = 3$ .

## فصل دوم



اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس

در مثلث ABC،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow z^2 = y^2 + y^2$$

$$z = y\sqrt{2}$$

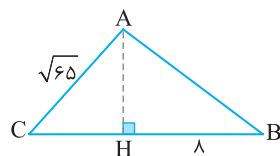
بنابراین

$$\frac{DC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{2}y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

۳۴۵- گزینه ۱ در مثلث قائم الزاویه AHB، در مورد زاویه B می‌دانیم

$$\tan \hat{B} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = 6$$

در مثلث قائم الزاویه ACH با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع CH را حساب کنیم:



$$AC^2 = CH^2 + AH^2$$

$$65 = CH^2 + 36 \Rightarrow CH = \sqrt{29}$$

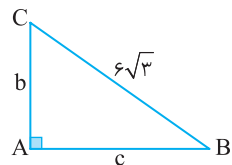
۳۴۶- گزینه ۳ با توجه به شکل  $\cot \hat{B} = \frac{c}{b} = \sqrt{2}$  بنابراین

از طرف دیگر طبق قضیه فیثاغورس،

$$b^2 + c^2 = (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow b^2 + (b\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{3})^2$$

$$b^2 + 2b^2 = 36 \times 3 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین  $c = 6\sqrt{2}$  و در نتیجه



$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

۳۴۷- گزینه ۲ در مثلث قائم الزاویه OBC،  $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ ، همچنین در

مثلث قائم الزاویه OCH،  $\hat{HOC} + \hat{C} = 90^\circ$ ، در نتیجه  $\hat{B} = \hat{HOC} = \alpha$ ،

اکنون در مثلث قائم الزاویه OHB،

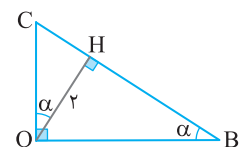
$$\sin \alpha = \sin \hat{B} = \frac{OH}{OB} = \frac{2}{OB} \Rightarrow OB = \frac{2}{\sin \alpha}$$

در مثلث قائم الزاویه OCH،

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OC} = \frac{2}{OC} \Rightarrow OC = \frac{2}{\cos \alpha}$$

بنابراین

$$OB + OC = \frac{2}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha}$$



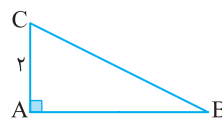
۳۴۱- گزینه ۱ با توجه به شکل زیر،

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3} = \frac{1}{BC} \Rightarrow BC = 6$$

اکنون طبق قضیه فیثاغورس

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow 6^2 = 2^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = 32$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ بنابراین } AB = 4\sqrt{2}$$



۳۴۲- گزینه ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. با توجه به

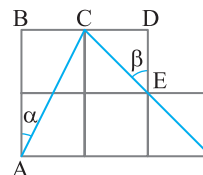
شکل،  $\sin \alpha = \frac{BC}{AC}$ ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\cos \beta = \frac{DE}{CE} \text{ همچنین } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ بنابراین } AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس،  $CE = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ، بنابراین

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ به این ترتیب}$$

$$\sin \alpha - \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{10}}$$

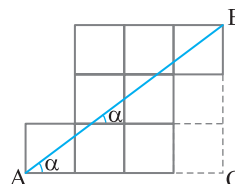


۳۴۳- گزینه ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،  $\alpha = \hat{BAC}$ ، در نتیجه

$$\tan \alpha = \tan \hat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\text{پس } \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$$



۳۴۴- گزینه ۱ مطابق شکل داده شده، در مثلث قائم الزاویه ABC،

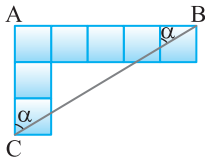
چون  $\hat{CAB} = 45^\circ$  پس این مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است. از طرف

دیگر در مثلث قائم الزاویه ABD،  $\hat{BAD} = 60^\circ$ ، پس

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{3} - 1$$

۳۵۲- گزینه ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،  $\alpha = \hat{ACB}$ . در نتیجه

$$\tan \alpha = \tan \hat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$$



۳۵۳- گزینه ۱ در مثلث قائم‌الزاویه ABH،

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{AH}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{AH}{2} = \frac{AH}{\sqrt{2}} \Rightarrow AH = \sqrt{3}$$

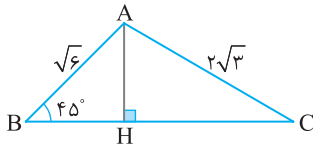
از طرف دیگر چون  $\tan \hat{B} = \tan 45^\circ = \frac{AH}{BH}$  پس  $1 = \frac{\sqrt{3}}{BH}$  بنابراین

$$BH = \sqrt{3} \text{ در مثلث قائم‌الزاویه AHC، طبق قضیه فیثاغورس،}$$

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 + HC^2 = (2\sqrt{3})^2$$

$$HC^2 = 9 \Rightarrow HC = 3$$

$$\frac{HC}{BH} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ بنابراین}$$

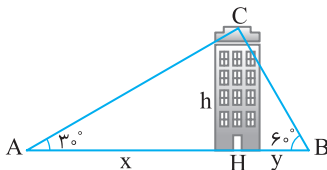


۳۵۴- گزینه ۲ ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر در مثلث‌های قائم‌الزاویه ACH و BCH،

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}h, \quad \tan 60^\circ = \frac{h}{y} = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}h$$

بنابراین  $x + y = 24$  از طرف دیگر  $x + y = \frac{4\sqrt{3}}{3}h$  بنابراین

$$24 = \frac{4\sqrt{3}}{3}h \Rightarrow h = 6\sqrt{3}$$

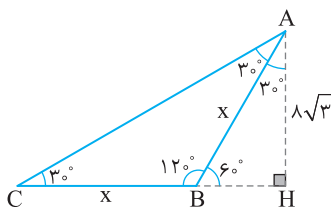


۳۵۵- گزینه ۲ ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویه ABH،

$$\tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{BH} \Rightarrow BH = 8$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ABH،

$$\sin \hat{ABH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 16$$



۳۴۸- گزینه ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر،  $\sin \alpha = \frac{y}{4}$  بنابراین باید مقدار y را به دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه

$$ACH, \quad x^2 + y^2 = 9 \text{ در مثلث قائم‌الزاویه ABH،}$$

$$y^2 + (6-x)^2 = 16 \Rightarrow y^2 + x^2 - 12x + 36 = 16$$

با جای‌گذاری  $x^2 + y^2 = 9$  به دست می‌آید

$$9 - 12x + 36 = 16 \Rightarrow 12x = 29 \Rightarrow x = \frac{29}{12}$$

$$\frac{x^2 + y^2 = 9}{\rightarrow \left(\frac{29}{12}\right)^2 + y^2 = 9} \Rightarrow y^2 = \frac{455}{144} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{455}}{12}$$

و در نتیجه

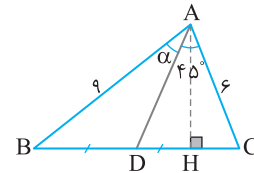
$$\sin \alpha = \frac{\frac{\sqrt{455}}{12}}{4} = \frac{\sqrt{455}}{48}$$

۳۴۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که چون مثلث‌های ABD و ACD در ارتفاع

$$\text{وارد از رأس A مشترک‌اند، پس } \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}AH \times CD} = \frac{BD}{CD} = 1 \text{ بنابراین}$$

$$S_{ABD} = S_{ACD} \Rightarrow \frac{1}{2}AB \times AD \times \sin \alpha = \frac{1}{2}AC \times AD \times \sin 45^\circ$$

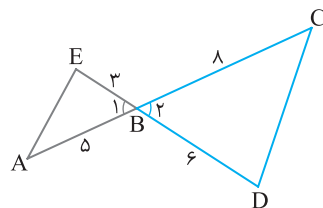
$$AB \times \sin \alpha = AC \times \sin 45^\circ \Rightarrow 9 \times \sin \alpha = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$



۳۵۰- گزینه ۱ دقت کنید که در شکل زیر  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$  از طرف دیگر،

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin \hat{B}_1, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin \hat{B}_2$$

بنابراین



$$\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}} = \frac{5}{16}$$

۳۵۱- گزینه ۲ مطابق شکل،

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{5}{4}b$$

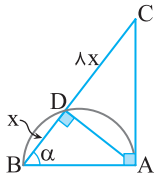
از طرف دیگر  $b + c = 7$  بنابراین

$$b + \frac{5}{4}b = 7 \Rightarrow \frac{9b}{4} = 7 \Rightarrow b = \frac{28}{9}, \quad c = \frac{5}{4} \times \frac{28}{9} = \frac{35}{9}$$

اکنون طبق قضیه فیثاغورس،

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left(\frac{35}{9}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{28}{9}\right)^2$$

$$a^2 = \frac{35^2 - 28^2}{9^2} = \frac{(35-28)(35+28)}{9^2} = \frac{7 \times 63}{9^2} = \frac{7 \times 7}{9} = \frac{49}{9} \Rightarrow a = \frac{7}{3}$$



در نتیجه  $\cos \alpha = \frac{x}{AB} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

۳۵۶- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 8x \times BC \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} BC \quad (1)$$

همین طور،

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} AB \times BC \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} AB \times BC \quad (2)$$

از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می شود

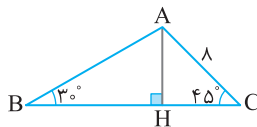
$$2\sqrt{2} BC = \frac{1}{4} AB \times BC \Rightarrow AB = 8\sqrt{2}$$

راه حل دوم ارتفاع AH را رسم می کنیم. با توجه به شکل زیر در مثلث AHC.

$$\sin \hat{C} = \sin 45^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = 4\sqrt{2}$$

در مثلث ABH.

$$\sin \hat{B} = \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{AB} \Rightarrow AB = 8\sqrt{2}$$



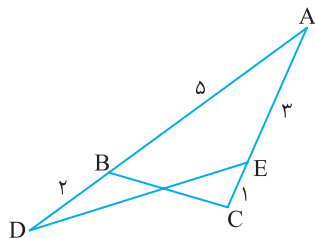
۳۶۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \times AE \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \sin \hat{A} = \frac{21}{2} \sin \hat{A}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \sin \hat{A} = 10 \sin \hat{A}$$

بنابراین  $S_{ADE} + S_{ABC} = (\frac{21}{2} + 10) \sin \hat{A} = \frac{41}{2} \sin \hat{A}$

$$\frac{41}{2} \sin \hat{A} = \frac{41}{4} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است.}} \hat{A} = 30^\circ$$



۳۶۱- گزینه ۴ انتهای کمان روبه رو به زاویه  $23^\circ$  در ربع سوم قرار

دارد، پس  $\sin 23^\circ$  و  $\cos 23^\circ$  اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه رو به زاویه  $31^\circ$  در ربع چهارم قرار دارد، پس  $\sin 31^\circ$  عددی منفی و  $\cos 31^\circ$  عددی مثبت است.

۳۶۲- گزینه ۳ با توجه به تساوی  $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، معلوم است که

$\cos \alpha \leq 0$ ، با توجه به تساوی  $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$ ، معلوم است که

$\sin \alpha \leq 0$ ، بنابراین انتهای کمان روبه رو به زاویه  $\alpha$  در ربع سوم مثلثاتی است.

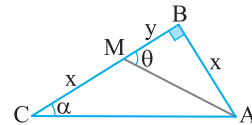
۳۵۶- گزینه ۱ فرض کنید  $CM = AB = x$  و  $MB = y$ . طبق

فرض  $\tan \theta = 3 \tan \alpha$ ، بنابراین  $\frac{x}{y} = \frac{3x}{x+y}$  پس  $x+y=3y$ ، در

نتیجه  $x=2y$  از این رو  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$  و  $\tan \theta = 2$ ، بنابراین  $\cot \alpha = \frac{3}{2}$  و

در نتیجه  $\cot \theta = \frac{1}{2}$

$$\cot \alpha + \cot \theta = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$



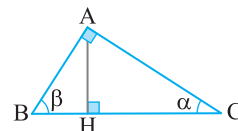
۳۵۷- گزینه ۱ راه حل اول در مثلث های قائم الزاویه ABH و ACH،

$$\begin{cases} \cos \beta = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \cos \beta \times AB \\ \cos \alpha = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = \cos \alpha \times AC \end{cases} \Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{AB \cos \beta}{AC \cos \alpha}$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ABC.

$$\cos \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{4}, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{4}$$

بنابراین  $\frac{BH}{HC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \tan^2 \alpha$



راه حل دوم در مثلث قائم الزاویه ABC.

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{4} \Rightarrow AB = 4 \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{4} \Rightarrow AC = 4 \cos \alpha$$

در مثلث قائم الزاویه AHC.

$$\cos \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = AC \cos \alpha = 4 \cos^2 \alpha$$

در مثلث قائم الزاویه ABH.

$$\cos \beta = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cos \beta = 4 \sin \alpha \cos \beta$$

چون  $\alpha$  و  $\beta$  متمم هستند، پس  $\cos \beta = \sin \alpha$  و در نتیجه

$$\frac{BH}{HC} = \frac{4 \sin^2 \alpha}{4 \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \text{، بنابراین } BH = 4 \sin^2 \alpha$$

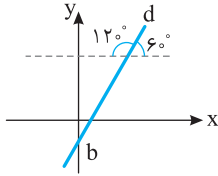
۳۵۸- گزینه ۲ در مثلث قائم الزاویه ABD،  $\cos \alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{x}{AB}$

در مثلث قائم الزاویه ABC،  $\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{x+8x} = \frac{AB}{9x}$ ، بنابراین

$$\frac{x}{AB} = \frac{AB}{9x} \Rightarrow AB^2 = 9x^2 \Rightarrow AB = 3x$$

بنابراین

$$a = \tan 6^\circ = \sqrt{3}, \quad b = -2a + \sqrt{3} = -2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3}$$



۳۷۱- گزینه ۱ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های  $7^\circ$ ،  $17^\circ$ ،  $19^\circ$  و

$26^\circ$  به ترتیب در ناحیه‌های اول، دوم، سوم و سوم مثلثاتی است. پس  $\tan 17^\circ$  عددی منفی است و  $\tan 19^\circ$ ،  $\cot 7^\circ$  و  $\cot 26^\circ$  اعدادی مثبت هستند.

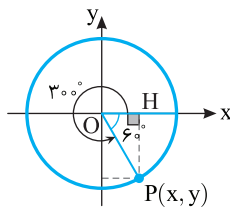
۳۷۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که در مثلث OPH،

$$\sin 6^\circ = \frac{PH}{OP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PH}{1} \Rightarrow PH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 6^\circ = \frac{OH}{OP} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OH}{1} \Rightarrow OH = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر  $x = OH$  و  $y = -PH$ . بنابراین

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x-1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \sqrt{3}$$



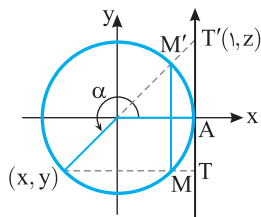
۳۷۳- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر واضح است که  $\sin \alpha = y$  و

$\tan \alpha = z$ . بنابراین طول پاره‌خط  $TT'$  برابر است با

$$TT' = AT + AT' = |y| + |z| = -y + z = -\sin \alpha + \tan \alpha$$

از طرف دیگر،  $MM' = 2|y| = -2y = -2\sin \alpha$ . بنابراین

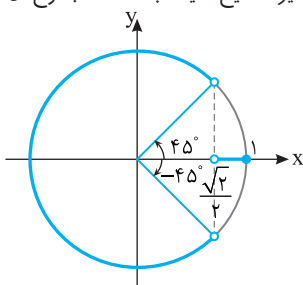
$$TT' - MM' = \tan \alpha - \sin \alpha - (-2\sin \alpha) = \tan \alpha + \sin \alpha$$



۳۷۴- گزینه ۳ وقتی  $-9^\circ < \alpha < 9^\circ$ ،  $-45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$  و مطابق

شکل زیر،  $1 < \cos \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . در نتیجه  $1 < \frac{m}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . یعنی  $2\sqrt{2} < m \leq 4$ .

پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۳ یا ۴ باشد که مجموع آن‌ها برابر ۷ است.

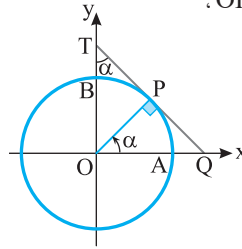


۳۶۳- گزینه ۴ توجه کنید که دو مثلث قائم‌الزاویه POQ و OTQ در

زاویه حاده رأس Q مشترک اند. پس زاویه حاده دیگر آن‌ها نیز برابر است. یعنی  $\angle OTQ = \angle POQ = \alpha$ . در مثلث قائم‌الزاویه OPT،

$$\sin \alpha = \frac{OP}{OT} = \frac{1}{OB+BT} = \frac{1}{1+BT}$$

$$1+BT = \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow BT = \frac{1}{\sin \alpha} - 1$$



۳۶۴- گزینه ۴ از  $-15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$  نتیجه می‌گیریم  $-3^\circ \leq 2\alpha \leq 3^\circ$ . با توجه

به شکل مقابل  $-\frac{1}{2} \leq \sin 2\alpha \leq \frac{1}{2}$  و در نتیجه  $-\frac{1}{2} \leq \frac{m}{4} \leq \frac{1}{2}$ . یعنی  $-2 \leq m \leq 2$ .

بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح  $\pm 2$ ،  $\pm 1$  و صفر باشد.

۳۶۵- گزینه ۱ می‌دانیم حداکثر مقدار  $\sin \alpha$  و  $\cos \beta$  برابر ۱ است.

بنابراین از تساوی  $2\sin \alpha + 5\cos \beta = 7$  نتیجه می‌شود  $\sin \alpha = 1$  و  $\cos \beta = 1$ . بنابراین  $3\sin \alpha - 4\cos \beta = 3 - 4 = -1$ .

۳۶۶- گزینه ۳ از  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  نتیجه می‌شود  $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ . بنابراین

$$0 \leq 2\sin \alpha \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2\sin \alpha + 1 \leq 3$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2\sin \alpha + 1}{3} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2\sin \alpha + 1} \leq 3$$

پس حداکثر مقدار عبارت برابر ۳ است.

۳۶۷- گزینه ۱ فرض کنید زاویه بین این دو ضلع  $\alpha$  باشد. چون

$\sin \alpha \leq 1$ ، پس

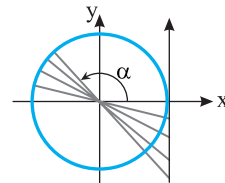
$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \times \sqrt{6} \sin \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha \leq \sqrt{3}$$

اگر زاویه بین این دو ضلع  $90^\circ$  باشد، مساحت مثلث برابر  $\sqrt{3}$  می‌شود. بنابراین بیشترین مقدار ممکن مساحت مثلث مورد نظر برابر  $\sqrt{3}$  است.

۳۶۸- گزینه ۱ می‌دانیم اگر  $9^\circ < \alpha \leq 18^\circ$ ، آن‌گاه  $\tan \alpha \leq 0$ .

بنابراین

$$2m + 1 \leq 0 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{2}$$



۳۶۹- گزینه ۳ چون خط از نقطه  $(0, 2)$  می‌گذرد، پس مختصات این

نقطه در معادله خط صدق می‌کنند:

$$3x - a \times 2 + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

بنابراین معادله خط به صورت  $3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$  یا همان  $y = \sqrt{3}x + 2$  است که شیب آن  $\sqrt{3}$  است. پس  $\tan \alpha = \sqrt{3}$ . بنابراین

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۷۰- گزینه ۱ با توجه به شکل رسم شده شیب خط برابر  $\tan 60^\circ$  است

و عرض از مبدأ آن برابر b است. از طرف دیگر در خط به معادله  $y = ax - 2a + \sqrt{3}$

شیب خط برابر a و عرض از مبدأ آن برابر  $-2a + \sqrt{3}$  است.



۳۷۷- گزینه ۴ می‌دانیم اگر  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$  آن‌گاه  $\sin \alpha < \cos \alpha$  و

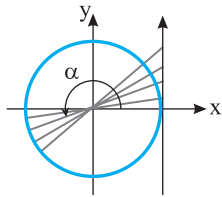
اگر  $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، آن‌گاه  $\sin \alpha > \cos \alpha$ . بنابراین  $\sin 20^\circ < \cos 20^\circ$  و  $\sin 70^\circ > \cos 70^\circ$  در نتیجه

$$A = \underbrace{|\sin 20^\circ - \cos 20^\circ|}_{-} - \underbrace{|\sin 70^\circ - \cos 70^\circ|}_{+}$$

$$= -\sin 20^\circ + \cos 20^\circ - (\sin 70^\circ - \cos 70^\circ)$$

$$= -\sin 20^\circ + \cos 20^\circ - \sin 70^\circ + \cos 70^\circ$$

چون زاویه‌های  $20^\circ$  و  $70^\circ$  متمم یکدیگرند، پس  $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$  و  $\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$  و در نتیجه  $A = 0$ .



۳۷۸- گزینه ۳ از  $180^\circ \leq \alpha < 270^\circ$

نتیجه می‌شود  $\tan \alpha \geq 0$  و در نتیجه  $m^2(m+1) \geq 0$ ، یعنی  $m^2 + m \geq 0$ .

چون  $m^2 \geq 0$  همواره درست است، پس کافی است  $m+1 \geq 0$  که در نتیجه  $m \geq -1$ .

۳۷۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که شیب خط  $d'$  برابر  $\tan 15^\circ$  و

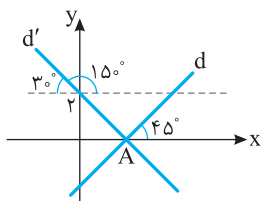
عرض از مبدأ آن برابر ۲ است. پس معادله آن به صورت  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$  است. بنابراین طول نقطه  $A$  که محل برخورد خط  $d'$  با محور  $x$  است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_A + 2 \Rightarrow x_A = 2\sqrt{3}$$

از طرف دیگر شیب خط  $d$  برابر  $\tan 45^\circ$  است و این خط از نقطه  $A$  می‌گذرد. بنابراین معادله این خط به صورت  $y = x + b$  است و اگر مختصات نقطه  $A$  را در معادله این خط قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$0 = 2\sqrt{3} + b \Rightarrow b = -2\sqrt{3}$$

پس معادله خط  $d$  به صورت  $y = x - 2\sqrt{3}$  است.

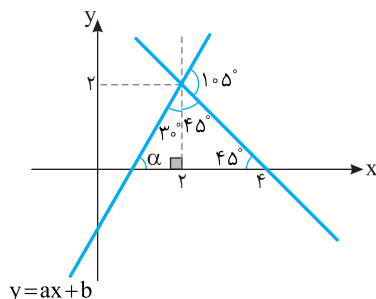


۳۸۰- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر، واضح است که  $\alpha = 60^\circ$  و در

نتیجه  $a = \tan \alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ، یعنی معادله خط  $y = \sqrt{3}x + b$  است و چون نقطه  $(2, 2)$  روی خط قرار دارد، پس

$$2 = \sqrt{3} \times 2 + b \Rightarrow b = 2 - 2\sqrt{3}$$

بنابراین  $a + b = \sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$ .



۳۷۵- گزینه ۳ به جای  $\cos^2 x$  قرار می‌دهیم  $1 - \sin^2 x$ . پس

عبارت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A = 4(1 - \sin^2 x) - 2 \sin x = -4 \sin^2 x - 2 \sin x + 4$$

$$= -\left(2 \sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

انکون دو راه حل ارائه می‌کنیم.

راه حل اول چون  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$-2 \leq 2 \sin x \leq 2 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq 2 \sin x + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$$

$$0 \leq \left(2 \sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4} \Rightarrow -\frac{25}{4} \leq -\left(2 \sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

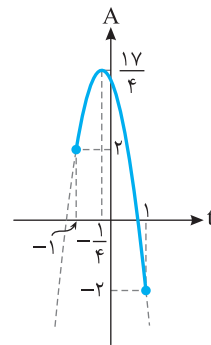
$$-2 \leq \frac{17}{4} - \left(2 \sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{17}{4} \Rightarrow -2 \leq A \leq \frac{17}{4}$$

پس اختلاف حداکثر و حداقل مقدار  $A$  برابر  $\frac{17}{4} - (-2) = \frac{25}{4}$  است.

راه حل دوم اگر فرض کنیم  $t = \sin x$ ، آن‌گاه

$$A = -\left(2t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

نمودار  $A$  بر حسب  $t$  به صورت زیر است. واضح است که  $-2 \leq A \leq \frac{17}{4}$ .



۳۷۶- گزینه ۱ راه حل اول عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{3 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3} = \frac{3 \cos \alpha + 9}{\cos \alpha + 3} - \frac{8}{\cos \alpha + 3} = 3 - \frac{8}{\cos \alpha + 3}$$

از  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$  نتیجه می‌شود

$$2 \leq \cos \alpha + 3 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\cos \alpha + 3} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -4 \leq \frac{-8}{\cos \alpha + 3} \leq -2$$

$$-1 \leq 3 - \frac{8}{\cos \alpha + 3} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq A \leq 1$$

بنابراین  $A$  نمی‌تواند برابر  $\frac{9}{8}$  شود.

راه حل دوم اگر قرار دهیم  $A = \frac{9}{8}$ ، آن‌گاه

$$\frac{3 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3} = \frac{9}{8} \Rightarrow 24 \cos \alpha + 8 = 9 \cos \alpha + 27$$

$$15 \cos \alpha = 19 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{19}{15}$$

چون مقدار  $\cos \alpha$  نمی‌تواند برابر  $\frac{19}{15}$  باشد، پس مقدار  $A$  هم نمی‌تواند برابر

$\frac{9}{8}$  باشد.

عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم: **گزینه ۴ - ۳۸۶**

$$\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} = \frac{\sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)}{\cos \alpha \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right)}$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \tan \alpha = \tan \alpha \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

واضح است که عبارت‌های  $1 + \sin \alpha$ ،  $1 + \cos \alpha$  و  $\tan^2 \alpha$  همگی همواره نامنفی هستند. پس در هر چهار ناحیه، عبارت فوق نامنفی است.

می‌توان نوشت **گزینه ۲ - ۳۸۷**

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha (1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha}$$

$$= \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

عبارت A را ساده می‌کنیم: **گزینه ۲ - ۳۸۸**

$$A = \cot^2 x + \cot^2 x \tan^2 x + \tan^2 x + \tan^2 x \cot^2 x$$

$$= \tan^2 x + \cot^2 x + 2 = (\tan x + \cot x)^2$$

بنابراین  $\sqrt{A} = \sqrt{(\tan x + \cot x)^2} = |\tan x + \cot x|$  چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $x$  در ناحیه دوم قرار دارد، پس  $\tan x < 0$  و  $\cot x < 0$ . در نتیجه  $\tan x + \cot x < 0$ ، بنابراین

$$\sqrt{A} = -\tan x - \cot x$$

طرفین تساوی  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  را به توان دو می‌رسانیم: **گزینه ۳ - ۳۸۹**

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8}$$

بنابراین

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \left(\sin \alpha \cos \alpha\right)^2 = 1 - 2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{23}{32}$$

**گزینه ۱ - ۳۹۰** توجه کنید که

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

پس

$$\frac{2}{3} = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{6}$$

$$(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ربع دوم است، پس  $\sin \alpha > 0$  و

$$\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6} \text{ در نتیجه } \cos \alpha < 0 \text{ و } \sin \alpha \cos \alpha < 0 \text{ پس } \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

**گزینه ۲ - ۳۸۱** با استفاده از اتحاد  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  مقدار

$\tan \alpha$  را حساب می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \tan \alpha = \pm 2$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ناحیه چهارم است، پس  $\tan \alpha < 0$ ،

در نتیجه  $\tan \alpha = -2$ . بنابراین  $\cot \alpha = -\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}$ ، پس

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

با استفاده از اتحاد  $\tan \alpha \cot \alpha = 1$  مقدار m را

حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2m} (m+3) = 1 \Rightarrow m+3 = 2m \Rightarrow m = 3$$

بنابراین  $\cot \alpha = 6$  و به کمک اتحاد  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  مقدار

$\sin^2 \alpha$  را به دست می‌آوریم:

$$1 + 6^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{37}$$

مخرج مشترک می‌گیریم و عبارت داده شده را ساده می‌کنیم: **گزینه ۴ - ۳۸۳**

$$\frac{1}{1 + \sin 10^\circ} + \frac{1}{1 - \sin 10^\circ} = \frac{1 - \sin 10^\circ + 1 + \sin 10^\circ}{(1 + \sin 10^\circ)(1 - \sin 10^\circ)}$$

$$= \frac{2}{1 - \sin^2 10^\circ} = \frac{2}{\cos^2 10^\circ}$$

در صورت کسر از  $\sin 15^\circ$  و در مخرج کسر از

$\cos 15^\circ$  فاکتور می‌گیریم:

$$A = \frac{\sin 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)}{\cos 15^\circ (1 - \cos^2 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ \times \cos^2 15^\circ}{\cos 15^\circ \times \sin^2 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \cot 15^\circ$$

به **گزینه ۲ - ۳۸۵** راه‌حل اول در تساوی  $3 \sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$

جای  $\sin^2 x$  قرار می‌دهیم  $1 - \cos^2 x$  و مقدار  $\cos^2 x$  را به دست می‌آوریم:

$$3(1 - \cos^2 x) = 1 + 4 \cos^2 x \Rightarrow 3 - 3 \cos^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$$

$$7 \cos^2 x = 2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{7}$$

اکنون به کمک اتحاد  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  مقدار  $\tan^2 x$  را حساب می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\frac{2}{7}} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{5}{2}$$

راه‌حل دوم ابتدا دو طرف معادله داده شده را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می‌کنیم:

$$3 \sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x \Rightarrow 3 \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + 4$$

چون  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ، پس

$$3 \tan^2 x = 1 + \tan^2 x + 4 \Rightarrow 2 \tan^2 x = 5 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{5}{2}$$

**۳۹۶- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که اگر دو طرف تساوی فرض مسئله را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{9} = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$$

بنابراین  $\sin x \cos x = \frac{4}{9}$  اکنون توجه کنید که

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با  $\frac{9}{4}$  است.

**۳۹۷- گزینه ۱** توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$$

در نتیجه  $2 = (\sin x + \cos x)^2 = \frac{23}{16}$  بنابراین  $(\frac{2}{4})^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$

چون  $x$  زاویه‌ای حاده است، پس  $\cos x > 0$  و  $\sin x > 0$  بنابراین

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{23}}{4}$$

**۳۹۸- گزینه ۳** دوطرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x + \cot x)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \underbrace{\tan x \cot x}_1 = 5$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x + 2 = 5$$

پس  $\tan^2 x + \cot^2 x = 3$  اکنون دوطرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan^2 x + \cot^2 x)^2 = 3^2 \Rightarrow \tan^4 x + \cot^4 x + 2 \underbrace{\tan^2 x \cot^2 x}_1 = 9$$

$$\tan^4 x + \cot^4 x + 2 = 9$$

پس  $\tan^4 x + \cot^4 x = 7$

**۳۹۹- گزینه ۳** عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

$$= \cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \cos \alpha - |\tan \alpha \sin \alpha|$$

چون  $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، پس  $\sin \alpha < 0$  و  $\tan \alpha > 0$ ، در نتیجه

$\sin \alpha \tan \alpha < 0$  بنابراین

$$A = \cos \alpha + \tan \alpha \sin \alpha = \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

**۴۰۰- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}} = \sqrt{1 + 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

چون  $36^\circ < \alpha < 15^\circ$ ، پس  $\sin \alpha < 0$  و  $\cos \alpha > 0$ ، بنابراین

$\sin \alpha \cos \alpha < 0$  پس

$$A = \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha|$$

چون  $\sin \alpha < 0$  و  $\cos \alpha > 0$ ، پس  $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$  در نتیجه

$$A = -\sin \alpha + \cos \alpha$$

**۳۹۱- گزینه ۴** به کمک اتحاد  $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$  مقدار  $\sin x$  را

حساب می‌کنیم:

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{9}{13} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $x$  در ناحیه سوم است، پس  $\sin x < 0$ ،

بنابراین  $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$  اکنون با استفاده از اتحاد  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$  مقدار

$\cos x$  را حساب می‌کنیم:

$$\frac{2}{3} = \frac{\cos x}{-\frac{3}{\sqrt{13}}} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

بنابراین  $2 \cos x - \sin x = -\frac{4}{\sqrt{13}} - \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{13}}$

**۳۹۲- گزینه ۱** از اتحاد  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  استفاده می‌کنیم:

$$(\sqrt{k-1})^2 + (\sqrt{2k-3})^2 = 1 \Rightarrow k-1+2k-3=1 \Rightarrow 3k=5 \Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

بنابراین  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ،  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$  و در نتیجه

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2}$$

**۳۹۳- گزینه ۴**

$$\frac{(1 + \tan 2^\circ)(1 - \cot 2^\circ)}{(1 + \cot 2^\circ)(1 - \tan 2^\circ)} = \frac{1 - \cot 2^\circ + \tan 2^\circ - \tan 2^\circ \cot 2^\circ}{1 - \tan 2^\circ + \cot 2^\circ - \tan 2^\circ \cot 2^\circ}$$

$$= \frac{1 - \cot 2^\circ + \tan 2^\circ - 1}{1 - \tan 2^\circ + \cot 2^\circ - 1} = \frac{\tan 2^\circ - \cot 2^\circ}{\cot 2^\circ - \tan 2^\circ} = -1$$

$$= \frac{1 - \cot 2^\circ + \tan 2^\circ - 1}{1 - \tan 2^\circ + \cot 2^\circ - 1} = \frac{\tan 2^\circ - \cot 2^\circ}{\cot 2^\circ - \tan 2^\circ} = -1$$

**۳۹۴- گزینه ۱** توجه کنید که  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$  بنابراین

$$\frac{1 + \cot^2 x}{\cot x} = \frac{1 + \frac{1}{\tan^2 x}}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x}$$

در نتیجه  $\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{1 + \cot^2 x}{\cot x} = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x} = 1$

**۳۹۵- گزینه ۱** تساوی داده شده را به صورت  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha$  می‌نویسیم، بنابراین

$$\cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad (*)$$

با استفاده از اتحاد  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$  تساوی داده شده به صورت

$\cos \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$  درمی‌آید. پس

$$\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

از تساوی (\*) مشخص است که  $\cos \alpha$  عددی مثبت است، پس

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

راه حل دوم طرفین تساوی  $\sin x - \cos x = \frac{2}{3}$  را به توان سه می‌رسانیم

$$(\sin x - \cos x)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\sin^3 x - 3\sin^2 x \cos x + 3\sin x \cos^2 x - \cos^3 x = \frac{8}{27}$$

$$\sin^3 x - \cos^3 x - 3\sin x \cos x (\sin x - \cos x) = \frac{8}{27}$$

بنابراین باید حاصل  $\sin x \cos x$  را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

بنابراین  $\sin x \cos x = \frac{5}{18}$  در نتیجه

$$\sin^3 x - \cos^3 x - 3 \times \frac{5}{18} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \Rightarrow \sin^3 x - \cos^3 x = \frac{23}{27}$$

از اتحاد  $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$  استفاده

می‌کنیم:

$$\tan^3 x - \cot^3 x = (\tan x - \cot x)^3 + 3 \tan x \cot x (\tan x - \cot x)$$

چون  $\tan x \cot x = 1$  و  $\tan x - \cot x = 3$ ، پس

$$\tan^3 x - \cot^3 x = 3^3 + 3 \times 1 \times 3 = 36$$

اگر فرض کنیم  $t = \tan \alpha$ ، آن‌گاه  $\cot \alpha = \frac{1}{t}$

معادله داده شده به صورت  $t - \frac{2}{t} = \sqrt{2}$  درمی‌آید. دو طرف این معادله را در  $t$

ضرب کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$t^2 - 2 = \sqrt{2}t \Rightarrow t^2 - \sqrt{2}t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{2}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویه  $\alpha$  در ربع اول است، پس  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}$

قابل قبول نیست، در نتیجه  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$ .

بنابراین  $\tan \alpha = \sqrt{2} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$  در نتیجه

$$\tan^2 \alpha = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2} = 3 + \sqrt{5}$$

ابتدا صورت و مخرج کسر دوم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$1 - 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x (1 - \tan^2 x) = \cos^2 x \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

در نتیجه دومین کسر برابر با ۱ است. بنابراین حاصل عبارت برابر است با

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + 1 = \frac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$$

با تقسیم صورت و مخرج این کسر بر  $\cos x$  معلوم می‌شود که کسر برابر

$$\frac{2 \tan x}{\tan x - 1}$$

از تساوی  $\frac{5 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$  نتیجه می‌شود

بنابراین  $\sin x = 2 \sin x + \cos x$  و در نتیجه  $\cot x = 8$ ، پس  $\frac{\cos x}{\sin x} = 8$ .

از اتحاد  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  نتیجه می‌شود

$$1 + \left( \sqrt{\frac{m+2}{2m+5}} \right)^2 = \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{m+2}{2m+5}} \right)^2}$$

$$1 + \frac{m+2}{2m+5} = \frac{2m+5}{m+2} \Rightarrow \frac{2m+5+m+2}{2m+5} = \frac{2m+5}{m+2}$$

$$\frac{3m+7}{2m+5} = \frac{2m+5}{m+2} \Rightarrow 2m+5 = m+2 \Rightarrow m = -3$$

(توجه کنید که  $3m+7$  نمی‌تواند صفر باشد). بنابراین

$$\tan x = \sqrt{\frac{-3+2}{2(-3)+5}} = 1$$

با استفاده از اتحاد  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  و مخرج

مشترک‌گیری به دست می‌آید

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

چون  $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$ ، می‌توان نوشت

$$\frac{\sin^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{\cos^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ = \frac{1 - \cos^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{1 - \sin^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$$

$$= \frac{(1 - \cos 15^\circ)(1 + \cos 15^\circ)}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{(1 - \sin 15^\circ)(1 + \sin 15^\circ)}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$$

$$= 1 - \cos 15^\circ - (1 - \sin 15^\circ) + \cos 15^\circ = \sin 15^\circ$$

صورت و مخرج کسر A را بر  $\cos^3 x$  تقسیم می‌کنیم

و از اتحادهای  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  و  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - \frac{2 \cos x}{\cos^3 x}}{\frac{4 \sin x}{\cos^3 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^3 x}} = \frac{\tan^3 x - \frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{4 \tan x}{\cos^2 x} - 1}$$

$$= \frac{\tan^3 x - 2(1 + \tan^2 x)}{4 \tan x (1 + \tan^2 x) - 1} = \frac{3^3 - 2(1 + 3^2)}{4 \times 3(1 + 3^2) - 1} = \frac{27 - 20}{119 - 1} = \frac{7}{118}$$

راه حل اول توجه کنید که

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$$

بنابراین باید حاصل  $\sin x \cos x$  را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

بنابراین  $\sin x \cos x = \frac{5}{18}$ . در این صورت حاصل عبارت مورد نظر برابر

$$\sin^3 x - \cos^3 x = \left(\frac{2}{3}\right) \left(1 + \frac{5}{18}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{23}{18} = \frac{23}{27}$$

**۴۱۳- گزینه ۲** می توان نوشت

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\cos 2^\circ} + \tan 2^\circ\right)(1 - \sin 2^\circ) &= \left(\frac{1}{\cos 2^\circ} + \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}\right)(1 - \sin 2^\circ) \\ &= \frac{1}{\cos 2^\circ}(1 + \sin 2^\circ)(1 - \sin 2^\circ) = \frac{1}{\cos 2^\circ}(1 - \sin^2 2^\circ) \\ &= \frac{1}{\cos 2^\circ}(\cos^2 2^\circ) = \cos 2^\circ \end{aligned}$$

**۴۱۴- گزینه ۳** راه حل اول فرض کنید

$$B = \sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} B^2 &= 1 + \cos 36^\circ + 1 - \cos 36^\circ + 2\sqrt{(1 - \cos 36^\circ)(1 + \cos 36^\circ)} \\ &= 2 + 2\sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = 2 + 2\sqrt{\sin^2 36^\circ} = 2 + 2\sin 36^\circ \end{aligned}$$

چون  $B > 0$ ، پس  $B = \sqrt{2(1 + \sin 36^\circ)}$ . بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با  $\sqrt{2}$  است.

**راه حل دوم** می دانیم (درس ششم این فصل را ببینید)

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x, \quad 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}}{\sqrt{1 + \sin 36^\circ}} \\ &= \frac{\sqrt{2 \cos^2 18^\circ} + \sqrt{2 \sin^2 18^\circ}}{\sqrt{\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\cos 18^\circ + \sin 18^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 18^\circ + \sin 18^\circ)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

**۴۱۵- گزینه ۱** راه حل اول معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$3(1 - \cos^2 \alpha) - 5 \cos \alpha + 5 = 0 \Rightarrow 3 \cos^2 \alpha + 5 \cos \alpha - 8 = 0$$

اگر فرض کنیم  $t = \cos \alpha$ ، می توانیم معادله را به شکل  $3t^2 + 5t - 8 = 0$  بنویسیم که چون مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یکی از جواب های آن  $t = 1$  و دیگری  $t = -\frac{8}{3}$  است. چون  $\cos \alpha = -\frac{8}{3}$  قابل قبول نیست، پس

$$\cos \alpha = 1 \text{ و در نتیجه } \alpha = 0$$

**راه حل دوم**  $\alpha = 0$  در معادله صدق می کند، پس کافی است مقدار  $\cos^2 \alpha$  را به ازای  $\alpha = 0$  حساب کنیم، که برابر ۱ می شود.

**۴۱۶- گزینه ۳** دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می رسانیم:

$$(\tan x + \cot x)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \underbrace{\tan x \cot x}_1 = 5$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x + 2 = 5$$

پس  $\tan^2 x + \cot^2 x = 3$ . اکنون دو طرف این تساوی را به توان سه می رسانیم:

$$(\tan^2 x + \cot^2 x)^3 = 3^3$$

$$\tan^6 x + 3 \tan^4 x \cot^2 x + 3 \tan^2 x \cot^4 x + \cot^6 x = 27$$

$$\tan^6 x + \cot^6 x + 3 \tan^2 x \cot^2 x (\tan^2 x + \cot^2 x) = 27$$

با توجه به اینکه  $\tan^2 x \cot^2 x = 1$  و  $\tan^2 x + \cot^2 x = 3$  نتیجه می شود

$$\tan^6 x + \cot^6 x + 9 = 27 \Rightarrow \tan^6 x + \cot^6 x = 18$$

**۴۱۰- گزینه ۳** به جای  $\cos^2 x$  قرار می دهیم  $1 - \sin^2 x$ . عبارت به

شکل زیر است:

$$A = 1 - \sin^2 x - 2 \sin x = 1 - (\sin^2 x + 2 \sin x + 1) =$$

$$= 1 - (\sin x + 1)^2 + 1 = 2 - (\sin x + 1)^2$$

چون  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \sin x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (\sin x + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -(\sin x + 1)^2 \leq 0$$

$$-2 \leq 2 - (\sin x + 1)^2 \leq 2 \Rightarrow -2 \leq A \leq 2$$

بنابراین اختلاف حداکثر و حداقل مقدار  $A$  برابر ۴ واحد است.

**۴۱۱- گزینه ۱** راه حل اول از تساوی  $\tan x = \frac{1}{3}$  نتیجه می شود

یعنی  $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{3}$ . در عبارت  $A$  به جای  $\cos x$  قرار

می دهیم  $3 \sin x$ . در این صورت  $A = \frac{2 \sin x + 3 \sin x}{\sin x + 9 \sin x} = \frac{5 \sin x}{10 \sin x} = \frac{1}{2}$

**راه حل دوم** صورت و مخرج عبارت  $A$  را بر  $\cos x$  تقسیم می کنیم تا  $A$  بر حسب  $\tan x$  نوشته شود:

$$A = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{3 \cos x}{\cos x}} = \frac{2 \tan x + 1}{\tan x + 3}$$

اکنون با قرار دادن  $\frac{1}{3}$  به جای  $\tan x$  در عبارت فوق، مقدار  $A$  به دست

$$A = \frac{\frac{2}{3} + 1}{\frac{1}{3} + 3} = \frac{1}{2} \text{ می آید}$$

**۴۱۲- گزینه ۲** راه حل اول توجه کنید که  $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$  و

$$\cot 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$A = \frac{\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ} = \frac{\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} - \cos^2 15^\circ}{\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ} - \sin^2 15^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ \sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\cos^2 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)}{\cos^2 15^\circ}} = \frac{\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}} = 1$$

$$= \frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} = \frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} = \cot^2 15^\circ$$

**راه حل دوم** کسر را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cot^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ} = \frac{\cot^2 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)}{\tan^2 15^\circ (1 - \cos^2 15^\circ)} \\ &= \frac{\cot^2 15^\circ \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ \sin^2 15^\circ} = \cot^2 15^\circ \left(\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}\right) \\ &= \cot^2 15^\circ \cot^2 15^\circ = \cot^4 15^\circ \end{aligned}$$

۴۲۲- گزینه ۴ اگر اندازه زاویه برحسب درجه برابر  $D$  و برحسب رادیان

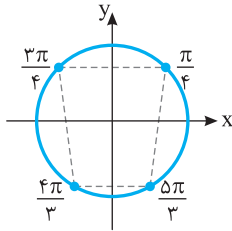
$$R = \frac{5\pi}{4D} \text{ باشد. آن گاه } D \times R = \frac{5\pi}{4} \text{ بنابراین } R = \frac{5\pi}{4D}$$

$$\text{از طرف دیگر، } \frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \text{ بنابراین}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{5\pi}{4D} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{5}{4D} \Rightarrow D^2 = \frac{900^\circ}{4} \Rightarrow D = 15^\circ$$

بنابراین اندازه این زاویه برابر  $15^\circ$  است.

۴۲۳- گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، چهارضلعی حاصل دوزنقه است.



۴۲۴- گزینه ۱ می‌دانیم اگر به زاویه‌ای مضرب‌های زوج  $\pi$  را اضافه یا

از آن کم کنیم، زاویه جدید، با زاویه اولیه هم‌انتهای است. اکنون توجه کنید که

$$-56^\circ + 4\pi = -56^\circ + 72^\circ = 16^\circ$$

از طرف دیگر، چون اختلاف  $56^\circ$  با هیچ‌یک از زاویه‌های داده شده دیگر مضربی زوج از  $\pi$  نیست، پس با هیچ‌یک از آن‌ها هم‌انتهای نیست.

۴۲۵- گزینه ۴ زاویه بین هر دو کابین متوالی  $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$  رادیان است. از

طرف دیگر،  $\frac{48\pi}{5} = 8\pi + \frac{8\pi}{5} = 8\pi + 16 \times \frac{\pi}{5}$ ، وقتی چرخ‌وفلک ۴ دور کامل

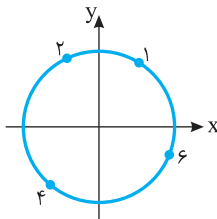
می‌زند، یعنی  $8\pi$  رادیان می‌چرخد، هر کابین در جای اولیه خود قرار می‌گیرد.

سپس چرخ‌وفلک به اندازه  $16 \times \frac{\pi}{5}$  رادیان دیگر دوران می‌کند که کابین شماره

یک به مکان فعلی ۱۶ کابین جلوتر، یعنی کابین هفدهم منتقل می‌شود.

۴۲۶- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر، واضح است که عرض نقطه‌ای که

انتهای کمان نظیر زاویه ۴ رادیان است، کوچک‌تر از عرض بقیه نقاط است، پس  $\sin 4$  از بقیه کوچک‌تر است.



۴۲۷- گزینه ۳ راه‌حل اول در هر ساعت عقربه ساعت‌شمار  $\frac{1}{12}$  دور

می‌چرخد که معادل  $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$  رادیان است. بنابراین

$$\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 225 \text{ دقیقه}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم در هر دقیقه، عقربه ساعت‌شمار  $(\frac{1}{5})^\circ$  یا  $\frac{\pi}{360}$  رادیان

$$x = \frac{8}{\frac{\pi}{360}} = 225 \text{ دقیقه} \text{، بنابراین } \frac{1}{x} = \frac{360^\circ}{225} \text{، پس می‌کند، پس } \frac{1}{x} = \frac{360^\circ}{225} \text{، پس می‌کند، پس}$$

۴۱۷- گزینه ۲ دو طرف تساوی داده شده را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

با توجه به اتحادهای  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  و  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  تساوی

قبلی را طوری می‌نویسیم که در آن فقط  $\tan x$  وجود داشته باشد:

$$\tan^2 x + 3 - 2 \tan x = 2(1 + \tan^2 x) \Rightarrow \tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0$$

$$\text{بنابراین } \tan x = -1 \pm \sqrt{2}$$

۴۱۸- گزینه ۲ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = \sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}}$$

$$= \sqrt{1 - 2\sqrt{(\sin \alpha \cos \alpha)^2}} = \sqrt{1 - 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

چون  $\alpha = 20^\circ$ ، پس  $\sin \alpha < 0$ ،  $\cos \alpha < 0$  و در نتیجه  $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ .

بنابراین عبارت  $A$  به شکل زیر درمی‌آید:

$$A = \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha| = |\sin 20^\circ - \cos 20^\circ|$$

توجه کنید که  $\sin 20^\circ - \cos 20^\circ > 0$ ، بنابراین  $\sin 20^\circ - \cos 20^\circ = A$ .

۴۱۹- گزینه ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

صورت کسر

$$\sin^3 40^\circ - \cos^3 40^\circ$$

$$= (\sin 40^\circ - \cos 40^\circ)(\sin^2 40^\circ + \sin 40^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ)$$

$$= (\sin 40^\circ - \cos 40^\circ)(1 + \sin 40^\circ \cos 40^\circ)$$

مخرج کسر

$$\cos 40^\circ + \cos^3 40^\circ \sin 40^\circ = \cos 40^\circ (1 + \cos^2 40^\circ \sin 40^\circ)$$

بنابراین حاصل کسر برابر است با

$$\frac{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} - 1 = \tan 40^\circ - 1$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر  $\tan 40^\circ$  است.

۴۲۰- گزینه ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{\tan^3 x - \cot^3 x}{\tan x - \cot x} = \frac{(\tan x - \cot x)(\tan^2 x + \tan x \cot x + \cot^2 x)}{\tan x - \cot x}$$

$$= \tan^2 x + 1 + \cot^2 x = 7$$

بنابراین  $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$  در نتیجه

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \cot^2 x + 1 + \tan^2 x$$

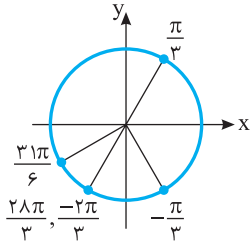
$$= 2 + \tan^2 x + \cot^2 x = 2 + 6 = 8$$

۴۲۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که  $36^\circ$  برابر با  $\frac{36^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{5}$  رادیان

است. بنابراین اندازه زاویه سوم مثلث برابر است با  $\pi - (\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}) = \frac{\pi}{2}$  که

این زاویه از بقیه بزرگ‌تر است.

**گزینه ۳ - ۴۳۴** اگر به زاویه‌ای مضربی زوج از  $\pi$  را اضافه یا از آن کم کنیم، زاویه جدید با زاویه اولیه هم‌انتهاست. اکنون توجه کنید که  $\frac{28\pi}{3} = 9\pi + \frac{\pi}{3}$  و  $\frac{31\pi}{6} = 5\pi + \frac{\pi}{6}$ . بنابراین انتهای کمان‌های نظیر زاویه‌های داده شده مانند شکل روبه‌رو است. از روی شکل معلوم است که انتهای کمان نظیر زاویه‌های  $\frac{28\pi}{3}$  و  $\frac{31\pi}{6}$  یکسان است.



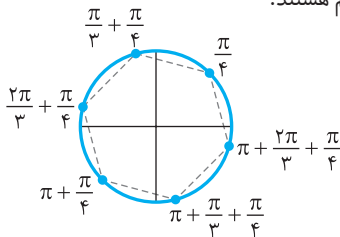
**گزینه ۴ - ۴۳۵** توجه کنید که

$$k=3s \Rightarrow \alpha = \frac{3s\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = s\pi + \frac{\pi}{4}$$

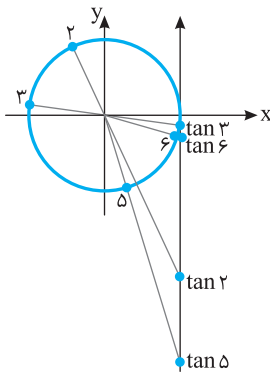
$$k=3s+1 \Rightarrow \alpha = \frac{(3s+1)\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = s\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

$$k=3s+2 \Rightarrow \alpha = \frac{(3s+2)\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = s\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

بنابراین انتهای کمان نظیر زاویه‌های مورد نظر مطابق شکل زیر رأس‌های یک شش ضلعی منتظم هستند.



**گزینه ۲ - ۴۳۶** با توجه به شکل زیر  $\tan 3$  بزرگ‌تر از اعداد دیگر است.



**گزینه ۱ - ۴۳۷** راه‌حل اول چون عقربه ساعت‌شمار در هر ساعت  $\frac{1}{12}$

دایره را طی می‌کند، پس در هر ساعت  $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$  رادیان را طی می‌کند. بنابراین در هر ۲۰ دقیقه،  $\frac{20}{60} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{18}$  رادیان را طی می‌کند، یعنی از ساعت ۹ تا ساعت ۱۰:۲۰ که یک ساعت و ۲۰ دقیقه زمان گذشته است، عقربه ساعت‌شمار زاویه‌ای به اندازه  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{18}$  رادیان را طی می‌کند، یعنی زاویه‌ای به اندازه  $\frac{2\pi}{9}$  رادیان.

**گزینه ۲ - ۴۲۸** طول کمان AB برابر است با  $4\pi\alpha$ . از طرف دیگر طول کمان ACB برابر است با محیط دایره منهای طول کمان AB یعنی  $8\pi^2 - 4\pi\alpha$ . بنابراین

$$8\pi^2 - 4\pi\alpha = 4\pi\alpha + \pi \Rightarrow 8\alpha = 8\pi - 1 \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{1}{8}$$

**گزینه ۱ - ۴۲۹** ۱۶ کابین در این چرخ و فلک وجود دارد. پس زاویه بین

دو کابین متوالی برابر  $\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$  است. بنابراین زاویه متناظر به کمان  $P_0P_1$  برابر  $\frac{7\pi}{8}$  است. بنابراین

$$\widehat{P_0P_1} = r\theta = 40 \times \frac{7\pi}{8} = 35\pi \text{ متر}$$

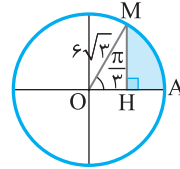
**گزینه ۳ - ۴۳۰** با توجه به شکل زیر،

$$MH = 6\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = 9, \quad \widehat{AM} = 6\sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}\pi$$

$$OH = 6\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow AH = 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

بنابراین اندازه محیط قسمت رنگی برابر است با

$$9 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\pi = 9 + \sqrt{3}(3 + 2\pi)$$



**گزینه ۱ - ۴۳۱** ابتدا  $40^\circ$  را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{40^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{20\pi}{9}$$

بنابراین اگر اندازه زاویه بزرگ‌تر برحسب رادیان برابر  $x$  و اندازه زاویه کوچک‌تر برحسب رادیان برابر  $y$  باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} x+y = \frac{20\pi}{9} \\ x-y = \frac{4\pi}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} \\ y = \frac{8\pi}{9} \end{cases}$$

پس اندازه زاویه بزرگ‌تر برحسب رادیان  $\frac{4\pi}{3}$  است.

**گزینه ۲ - ۴۳۲** فرض می‌کنیم اندازه زاویه برحسب درجه برابر  $D$  و

برحسب رادیان برابر  $R$  باشد. بنابراین  $R = \frac{\pi}{180} D - \frac{5\pi}{36}$ . از طرف دیگر،

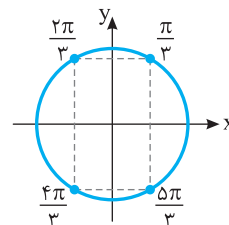
$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{180} D - \frac{5\pi}{36}}{\pi} \Rightarrow D = 180^\circ D - \frac{5 \times 180^\circ}{36}$$

$$\frac{5}{4} D = 25^\circ \Rightarrow D = 20^\circ$$

**گزینه ۱ - ۴۳۳** با توجه به شکل

مقابل، چهارضلعی حاصل مستطیل است.



۴۴۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A &= -\tan \alpha \cot \alpha + (-\sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha \\ &= -\tan \alpha \cot \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

۴۴۲- گزینه ۲ چون  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، پس

$$\cos(x - 90^\circ) = \cos(90^\circ - x) = \sin x$$

همچنین،  $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ ، پس

$$\cot(-x - 180^\circ) = -\cot(180^\circ + x) = -\cot x$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sin x(-\cot x) = -\cos x$$

۴۴۳- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) + \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) + \sin(3\pi - \theta)} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cot \theta \\ \text{بنابراین } A &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \tan \theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times \frac{3}{4}} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

۴۴۴- گزینه ۲ چون  $x + 3y = \frac{\pi}{2}$ ، در نتیجه  $2x + 3y = \frac{\pi}{2} + x$ ، پس

$$\tan(2x + 3y) = \tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$$

۴۴۵- گزینه ۳ توجه کنید که  $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x$  و

$$\sin(\frac{5\pi}{2} + x) = \cos x$$

$$-\sin x = 2 \cos x \Rightarrow \tan x = -2$$

۴۴۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \cos 51^\circ &= \cos(36^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ \\ &= \cos(18^\circ - 3^\circ) = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

۴۴۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\cos \frac{43\pi}{6} = \cos(7\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۴۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sin \frac{23\pi}{6} &= \sin(4\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \cos \frac{16\pi}{3} &= \cos(5\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \tan \frac{35\pi}{4} &= \tan(9\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1 \\ \cot(-\frac{43\pi}{4}) &= -\cot \frac{43\pi}{4} = -\cot(11\pi - \frac{\pi}{4}) = -(-\cot \frac{\pi}{4}) = 1 \\ \text{بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با } &(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-1)(1) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم عقربه ساعت‌شمار در هر دقیقه  $(\frac{1}{5})^\circ$  یا  $\frac{\pi}{360}$  رادیان طی

می‌کند. از طرف دیگر از ساعت ۹ تا ساعت ۱۰:۲۰ برابر ۸۰ دقیقه است، پس

$$\frac{\pi}{360} \times 80 = x \Rightarrow x = 80 \times \frac{\pi}{360} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad}$$

۴۳۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{25^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{36} \text{ rad}$$

بنابراین  $\widehat{AB} = 6 \times \frac{5\pi}{36}$  و  $\widehat{CD} = 9 \times \frac{5\pi}{36}$ ، پس

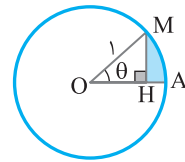
$$\widehat{CD} - \widehat{AB} = \frac{45\pi}{36} - \frac{30\pi}{36} = \frac{15\pi}{36} = \frac{5\pi}{12}$$

۴۳۹- گزینه ۴ راه‌حل اول با توجه به شکل،

$$MH = \sin \theta, \quad \widehat{AM} = r\theta = \theta$$

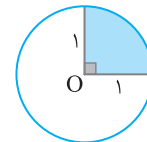
$$OH = \cos \theta \Rightarrow AH = OA - OH = 1 - \cos \theta$$

بنابراین محیط قسمت رنگی برابر است با  $P = \sin \theta + \theta + 1 - \cos \theta$ .



راه‌حل دوم فرض کنید  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . در این صورت ناحیه رنگی مورد نظر  $\frac{1}{4}$

دایره‌ای به شعاع ۱ است و محیط آن برابر  $2 + \frac{\pi}{2} + 1 + 1$  است.



اکنون مقدار گزینه‌ها را به ازای  $\theta = \frac{\pi}{4}$  به دست می‌آوریم:

گزینه (۱)  $1 + \sin \theta + \cos \theta = 2$

گزینه (۲)  $1 + \sin \theta - \cos \theta = 2$

گزینه (۳)  $1 - \theta + \sin \theta + \cos \theta = 2 - \frac{\pi}{2}$

گزینه (۴)  $1 + \theta + \sin \theta - \cos \theta = 2 + \frac{\pi}{2}$

۴۴۰- گزینه ۴ با جابه‌جایی نقطه A به اندازه  $20^\circ$  یا  $\frac{\pi}{9}$  رادیان، رسمان

به اندازه  $l = r\theta = 8 \times \frac{\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}$  سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود. در نتیجه اگر فرض

کنیم چرخ کوچک به اندازه  $\alpha$  رادیان جابه‌جا شده است، معلوم می‌شود

$$\frac{8\pi}{9} = 6\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{27}$$

بنابراین اندازه‌ای که چرخ کوچک‌تر جابه‌جا شده است بر حسب درجه برابر است با

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow D = 180^\circ \times \frac{R}{\pi} = 180^\circ \times \frac{4}{27} = \frac{80}{3}$$



**۴۵۶- گزینه ۱** توجه کنید که

$$\begin{aligned} \cos(-60^\circ) &= \cos 60^\circ = \cos(2 \times 36^\circ - 12^\circ) \\ &= \cos 12^\circ = -\cos 6^\circ = -\frac{1}{2} \\ \cot 675^\circ &= \cot(2 \times 36^\circ - 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1 \\ \tan 945^\circ &= \tan(3 \times 36^\circ - 135^\circ) = -\tan 135^\circ = \tan 45^\circ = 1 \\ \sin(-33^\circ) &= -\sin 33^\circ = -\sin(36^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

بنابراین حاصل کسر مورد نظر برابر است با  $-\frac{3}{2}$

**۴۵۷- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که

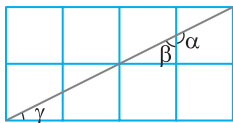
$$\begin{aligned} \tan 75^\circ &= \tan(90^\circ - 15^\circ) = \cot 15^\circ = \frac{1}{a} \\ \tan 105^\circ &= \tan(90^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ = -\frac{1}{a} \\ \tan 165^\circ &= \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ = -a \\ \tan 255^\circ &= \tan(270^\circ - 15^\circ) = \cot 15^\circ = \frac{1}{a} \\ A &= \frac{2(\frac{1}{a}) - \frac{1}{a}}{3(-a) - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a}}{-3a^2 - \frac{1}{a}} = \frac{1}{-3a^2 - \frac{1}{a}} = \frac{-1}{3a^2 + 1} \end{aligned}$$

بنابراین

**۴۵۸- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sin \frac{10\pi}{3} &= \sin(\frac{10\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \sin(3\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{9\pi}{3} &= \cos(\frac{9\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \cos(3\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ A &= 4(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 2(-\frac{1}{2}) = 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

بنابراین



**۴۵۹- گزینه ۳** از نماد گذاری شکل

روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\tan \alpha = \tan(180^\circ - \beta) = -\tan \beta$$

از طرف دیگر  $\beta + \gamma = 90^\circ$  پس  $\tan \beta = \cot \gamma$ . اکنون توجه کنید که

$$\cot \gamma = \frac{4}{2} = 2 \quad \tan \alpha = -2$$

**۴۶۰- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  آن‌گاه

$$\tan \alpha \tan \beta = \tan \alpha \cot \alpha = 1 \quad \tan \beta = \cot \alpha$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{14} + \frac{6\pi}{14} &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{14} \tan \frac{6\pi}{14} = 1 \\ \frac{2\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{2\pi}{14} \tan \frac{5\pi}{14} = 1 \\ \frac{3\pi}{14} + \frac{4\pi}{14} &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{14} \tan \frac{4\pi}{14} = 1 \end{aligned}$$

پس  $A = 1$

**۴۴۹- گزینه ۲** توجه کنید که اگر  $\alpha + \beta = \pi$  آن‌گاه  $\sin \alpha = \sin \beta$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} &= \pi \Rightarrow \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5} \\ \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} &= \pi \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5} \\ A &= \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5}} = -1 \end{aligned}$$

در نتیجه

**۴۵۰- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که اگر  $\alpha + \beta = \pi$  آن‌گاه

$\cos \beta = -\cos \alpha$ . در نتیجه  $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ . اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} &= \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = 0 \\ \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} &= \pi \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = 0 \end{aligned}$$

پس  $A = 0$

**۴۵۱- گزینه ۳** توجه کنید که

$$\sin(3\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(4\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(5\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$A = 3 \sin \alpha + 4 \sin \alpha - 5 \sin \alpha = 2 \sin \alpha$$

بنابراین

**۴۵۲- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha, \quad \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha, \quad \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$$

$$A = \frac{3 \cot \alpha - \cot \alpha}{2 \tan \alpha - \tan \alpha} = \frac{2 \cot \alpha}{\tan \alpha} = 2 \cot^2 \alpha$$

بنابراین

**۴۵۳- گزینه ۴** ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi + \alpha)} = 3 \Rightarrow \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha}{-\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 3$$

$$\cos \alpha - 2 \sin \alpha = -3 \sin \alpha + 6 \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = 5 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 5$$

$$\tan(\alpha - \frac{5\pi}{2}) = -\tan(\frac{5\pi}{2} - \alpha) = -\cot \alpha = -\frac{1}{5}$$

بنابراین

**۴۵۴- گزینه ۱** توجه کنید که

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + \beta \Rightarrow \cot \alpha = \cot(\frac{3\pi}{2} + \beta) = -\tan \beta$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \cot \alpha} + \frac{1}{1 + \cot \beta} &= \frac{1}{1 + \tan \beta} + \frac{1}{1 + \cot \beta} = \frac{1 + \cot \beta + 1 + \tan \beta}{(1 + \tan \beta)(1 + \cot \beta)} \\ &= \frac{2 + \tan \beta + \cot \beta}{1 + \cot \beta + \tan \beta + \tan \beta \cot \beta} = \frac{2 + \tan \beta + \cot \beta}{2 + \tan \beta + \cot \beta} = 1 \end{aligned}$$

**۴۵۵- گزینه ۴** توجه کنید که  $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$  در نتیجه

از فرض مسئله نتیجه می‌شود  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ . اکنون توجه کنید که

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{169}{144} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{25}{144}$$

چون  $\alpha$  در ناحیه دوم قرار دارد، پس  $\tan \alpha < 0$ . بنابراین  $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$

## ۴۶۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\cos 115^\circ = \cos(90^\circ + 25^\circ) = -\sin 25^\circ$$

$$\cos 155^\circ = \cos(180^\circ - 25^\circ) = -\cos 25^\circ$$

$$\cos 295^\circ = \cos(270^\circ + 25^\circ) = \sin 25^\circ$$

$$\cos 335^\circ = \cos(360^\circ - 25^\circ) = \cos 25^\circ$$

بنابراین  $A = \frac{-\sin 25^\circ + 3 \cos 25^\circ}{3 \sin 25^\circ + \cos 25^\circ}$  صورت و مخرج کسر A را بر  $\sin 25^\circ$  تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{\frac{-\sin 25^\circ + 3 \cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}}{\frac{3 \sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}} = \frac{-1 + 3 \cot 25^\circ}{3 + \cot 25^\circ} = \frac{-1 + 3a}{3 + a} = \frac{3a - 1}{a + 3}$$

## ۴۶۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{4} = \tan(\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cot \frac{9\pi}{4} = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$A = -\frac{1}{2} \times 1 - 1 \times \frac{1}{2} = -1$$

۴۶۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  آن‌گاه

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

$$\frac{\pi}{16} + \frac{7\pi}{16} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{16} = \sin \frac{\pi}{16}$$

$$\frac{3\pi}{16} + \frac{5\pi}{16} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{16} = \sin \frac{3\pi}{16}$$

پس

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \sin^2 \frac{3\pi}{16} + \sin^2 \frac{\pi}{16} \\ = (\sin^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{\pi}{16}) + (\sin^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16}) = 1 + 1 = 2$$

۴۷۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر  $\alpha + \beta = 180^\circ$  آن‌گاه

$$\cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\cos 179^\circ = -\cos 1^\circ, \quad \cos 178^\circ = -\cos 2^\circ, \quad \dots$$

$$\cos 92^\circ = -\cos 88^\circ, \quad \cos 91^\circ = -\cos 89^\circ$$

$$A = \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ}{-\cos 1^\circ - \cos 2^\circ - \dots - \cos 89^\circ} = -1$$

۴۷۱- گزینه ۱ توجه کنید که  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  بنابراین

$$\frac{\cos 2x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

## ۴۶۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$A = \frac{-\tan \alpha + 3 \tan \alpha}{-\tan \alpha - \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{-2 \tan \alpha} = -1$$

## ۴۶۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \quad \cot(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = \frac{4(\frac{1}{2}) - 2(\frac{1}{2})}{3(\frac{\sqrt{3}}{3}) - 6(-\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

۴۶۳- گزینه ۲ راه حل اول در مثلث قائم الزاویه اندازه یکی از زوایا  $90^\circ$ 

است. مثلاً فرض کنید  $\hat{A} = 90^\circ$ . پس  $\sin \hat{A} = 1$  و  $\cos \hat{A} = 0$ . در این صورت زاویه‌های B و C متمم یکدیگرند. پس  $\sin^2 \hat{C} = \cos^2 \hat{B}$ . بنابراین ساده شده عبارت به شکل زیر است:

$$\frac{\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}} = \frac{0 + \sin^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C}}{1 + \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم مثلث ABC را با زاویه‌های زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{A} = 90^\circ, \quad \hat{B} = 45^\circ, \quad \hat{C} = 45^\circ$$

$$\frac{\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}} = \frac{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

## ۴۶۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin a = \sin(\frac{5\pi}{2} - b) = \cos b, \quad \tan a = \tan(\frac{5\pi}{2} - b) = \cot b$$

بنابراین

$$\frac{\sin a + \tan a \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \cos^2 b + 1} = \frac{\cos b + \cot b \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \sin^2 a + 1} \\ = \frac{\cos b + 1 - 1}{\sin b - 1 + 1} = \frac{\cos b}{\sin b} = \cot b$$

## ۴۶۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$3a + 2b = \pi \Rightarrow a + 2(a+b) = \pi \Rightarrow \frac{a}{2} + (a+b) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} - (a+b)$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = \cos(a+b) = \frac{3}{5}$$

## ۴۶۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin 41^\circ = \sin(36^\circ + 5^\circ) = \sin 5^\circ = \sin(90^\circ - 4^\circ) = \cos 4^\circ$$

$$\sin 40^\circ = \sin(36^\circ + 4^\circ) = \sin 4^\circ$$

بنابراین

$$\sin^2 41^\circ + \sin^2 40^\circ = \cos^2 4^\circ + \sin^2 4^\circ = 1$$

همچنین  $\tan 731^\circ = \tan(2 \times 360^\circ + 11^\circ) = \tan 11^\circ$  بنابراین

$$\tan 731^\circ \times \cot 11^\circ = \tan 11^\circ \times \cot 11^\circ = 1$$

بنابراین مقدار کسر مورد نظر برابر است با ۱.

۴۷۲- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} &= (\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8})(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}) \\ &= 1 \times \cos(\pi/4) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

۴۷۳- گزینه ۲ توجه کنید که  $15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$ ، بنابراین

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$$

$$\cos 15^\circ \sin 75^\circ = \cos 15^\circ \cos 15^\circ = \cos^2 15^\circ$$

از طرف دیگر،  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ، پس

$$\cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 15^\circ - 1$$

$$\text{پس } \cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$$

۴۷۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25} \xrightarrow{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi} \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

بنابراین

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

۴۷۵- گزینه ۲  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  را حاصل اول از اتحادهای

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = 8$$

۴۷۶- گزینه ۲ توجه کنید که  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ، بنابراین

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 8$$

۴۷۷- گزینه ۲ توجه کنید که  $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ ، پس

$$A = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{3}$$

۴۷۸- گزینه ۳ از اتحاد  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$  استفاده می‌کنیم.

توجه کنید که

$$\frac{1 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin^2 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \tan 20^\circ$$

۴۷۹- گزینه ۲ توجه کنید که  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\cos 8^\circ}{\cos 4^\circ - \sin 4^\circ} - \sin 4^\circ &= \frac{\cos(2 \times 4^\circ)}{\cos 4^\circ - \sin 4^\circ} - \sin 4^\circ \\ &= \frac{\cos^2 4^\circ - \sin^2 4^\circ}{\cos 4^\circ - \sin 4^\circ} - \sin 4^\circ = (\cos 4^\circ + \sin 4^\circ) - \sin 4^\circ \\ &= \cos 4^\circ \end{aligned}$$

۴۷۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$A = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

۴۸۰- گزینه ۳ توجه کنید که  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 x}{2 \sin x - \sin 2x} &= \frac{\sin^3 x}{2 \sin x - 2 \sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{2(1 - \cos x)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{2(1 - \cos x)} = \frac{1 + \cos x}{2} \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین } \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{2}{3} \text{ پس } \cos x = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$$

۴۸۱- گزینه ۲ **راه حل اول** از اتحاد  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  نتیجه

می‌شود

$$\sin 2\alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

$$= 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$$

**راه حل دوم** توجه کنید که  $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$  پس

$$\sin 2\alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = 2$$

۴۸۲- گزینه ۴ توجه کنید که  $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$  و

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} (2 \cos^2 \frac{\pi}{24} - 1) &= \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۴۸۳- گزینه ۱ توجه کنید که  $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \cos \frac{\pi}{8}$

$$\text{بنابراین } \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

از طرف دیگر می‌دانیم  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$  پس

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

۴۸۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{بنابراین } \sin 2x + \cos 2x = \frac{2 \tan x + 1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2(\frac{1}{3}) + 1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{2}{5}$$

۴۸۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$9 \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} = 10 \Rightarrow 9 \cos^2 \theta + 1 = 10 \cos \theta$$

$$9 \cos^2 \theta - 10 \cos \theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1 \text{ یا } \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{بنابراین } \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 1 = -\frac{79}{81}$$

۴۹۲- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

۴۹۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$$

به این ترتیب

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24}{7}$$

۴۹۴- گزینه ۳ راه‌حل اول بنابر فرض  $\sin x = \frac{5}{4} \cos x$  دو طرف

این تساوی را در  $\sin x$  ضرب می‌کنیم:

$$\sin^2 x = \frac{5}{4} \cos x \sin x \quad (1)$$

همچنین، بنابر فرض،  $\cos x = \frac{4}{5} \sin x$  دو طرف این تساوی را در  $\cos x$

ضرب می‌کنیم:

$$\cos^2 x = \frac{4}{5} \sin x \cos x \quad (2)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$1 = \frac{5}{4} \sin x \cos x + \frac{4}{5} \sin x \cos x \Rightarrow 1 = \frac{29}{20} \sin x \cos x$$

$$\sin 2x = \frac{20}{29} \text{ و در نتیجه } \sin x \cos x = \frac{10}{29}$$

راه‌حل دوم دو طرف تساوی  $2 \sin x = 5 \cos x$  را به توان دو می‌رسانیم:

$$4 \sin^2 x = 25 \cos^2 x$$

با توجه به  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  نتیجه می‌شود

$$4 \sin^2 x = 25(1 - \sin^2 x) \Rightarrow 29 \sin^2 x = 25 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{25}{29}$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{25}{29} = \frac{4}{29} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{100}{29^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{10}{29} \Rightarrow \sin 2x = \frac{20}{29}$$

توجه کنید که با توجه به فرض مسئله  $\sin x$  و  $\cos x$  هم علامت هستند و  $\sin x \cos x$  مقداری مثبت دارد.

راه‌حل سوم از  $2 \sin x = 5 \cos x$  نتیجه می‌شود  $\tan x = \frac{5}{2}$ ، پس

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \times \frac{5}{2}}{1 + \frac{25}{4}} = \frac{20}{29}$$

۴۹۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{\sin 2x}{\sin 2y} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin y \cos y} = \frac{\sin x}{\sin y} \times \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{4 \sin y}{\sin y} \times \frac{\cos x}{3 \cos x} = \frac{4}{3}$$

۴۸۶- گزینه ۳ توجه کنید که  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  و

$$\sin 84^\circ = \sin(90^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \cos(2 \times 3^\circ) = 2 \cos^2 3^\circ - 1 = 2a^2 - 1$$

۴۸۷- گزینه ۱ تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2 2\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

با توجه به اینکه  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ربع چهارم است، پس  $\sin \alpha < 0$  و  $\cos \alpha > 0$ ، در نتیجه  $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ .

$$\sin 2\alpha < 0 \text{ پس } \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

۴۸۸- گزینه ۱ توجه کنید که  $\sin 5^\circ = \sin(9^\circ - 4^\circ) = \cos 4^\circ$  و

$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$  بنابرین

$$\frac{\sin 5^\circ \sin 4^\circ}{\cos 1^\circ} = \frac{\cos 4^\circ \sin 4^\circ}{\cos 1^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin 8^\circ}{\cos 1^\circ} \\ = \frac{1}{2} \times \frac{\sin(9^\circ - 1^\circ)}{\cos 1^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{\cos 1^\circ}{\cos 1^\circ} = \frac{1}{2}$$

۴۸۹- گزینه ۴ توجه کنید که اگر  $x = \frac{\pi}{24}$ ، آن‌گاه

$$10x + 2x = 12x = \frac{\pi}{2}$$

پس  $\cos 10x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x$  در نتیجه

$$\cos 10x \cos 2x = \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x \\ = \frac{1}{2} \sin\left(4 \times \frac{\pi}{24}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

۴۹۰- گزینه ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\tan 5^\circ = \tan(9^\circ - 4^\circ) = \cot 4^\circ$$

بنابرین

$$\tan 5^\circ - \tan 4^\circ = \cot 4^\circ - \tan 4^\circ = \frac{\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ} - \frac{\sin 4^\circ}{\cos 4^\circ} \\ = \frac{\cos^2 4^\circ - \sin^2 4^\circ}{\sin 4^\circ \cos 4^\circ} = \frac{\cos(2 \times 4^\circ)}{\frac{1}{2} \sin(2 \times 4^\circ)} = \frac{2 \cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} \\ = 2 \cot 8^\circ = 2 \cot(9^\circ - 1^\circ) = 2 \tan 1^\circ$$

$$\frac{\tan 5^\circ - \tan 4^\circ}{2} = \tan 1^\circ \text{ بنابرین}$$

راه‌حل دوم از اتحاد  $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$  استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\tan 5^\circ - \tan 4^\circ}{2} = \frac{\cot 4^\circ - \tan 4^\circ}{2} = \frac{2 \cot 8^\circ}{2} = \tan 1^\circ$$

۴۹۱- گزینه ۱ از عبارت  $\sin x \cos x$  فاکتور می‌گیریم

$$A = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

۲-۵۰۱ گزینۀ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \cos x - 1} = \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x - 1} = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \cos x - 1} - 1$$

بنابراین از اتحاد  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  نتیجه می‌شود

$$A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sqrt{2} \cos x - 1} - 1 = \frac{(\sqrt{2} \cos x - 1)(\sqrt{2} \cos x + 1)}{\sqrt{2} \cos x - 1} - 1 = \sqrt{2} \cos x + 1 - 1 = \sqrt{2} \cos x$$

۲-۵۰۲ گزینۀ ۴ ابتدا توجه کنید که  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$  و

بنابراین  $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 2 \Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = 2 \Rightarrow \tan^2 x = 2 \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{2}$$

چون  $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ ، مقدار  $\sqrt{2}$  قابل قبول نیست. پس

$$\tan x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cot x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه  $\tan x + 2 \cot x = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

۲-۵۰۳ گزینۀ ۲ اگر در اتحاد  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$  قرار دهیم

اتحاد  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$  به دست می‌آید. پس

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{8})}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\pi}{16}}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{16}} = \sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{16})} = \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\pi}{32}} = 2 \cos \frac{\pi}{32}$$

۲-۵۰۴ گزینۀ ۴ توجه کنید که

$$\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۳-۵۰۵ گزینۀ ۳ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\begin{aligned} \tan^2 x + \cot^2 x &= (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x \\ &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 - 2 = \left( \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} \right)^2 - 2 \\ &= \left( \frac{1}{\sin 2x} \right)^2 - 2 = \frac{1}{\sin^2 2x} - 2 \end{aligned}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم  $x = \frac{\pi}{8}$ ، به دست می‌آید

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} - 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 2 = 2 - 2 = 0$$

۲-۴۹۶ گزینۀ ۲ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} (\sin x - \cos x)^2 &= \frac{16}{9} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{16}{9} \\ -2 \sin x \cos x &= \frac{16}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cos x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} \\ &= \frac{1 - \sin x \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1 + \frac{8}{9}}{\cos x - \sin x} = \frac{\frac{17}{9}}{\cos x - \sin x} = \frac{17}{9(\cos x - \sin x)} \end{aligned}$$

۲-۴۹۷ گزینۀ ۲ توجه کنید که  $\sin 110^\circ = \sin(90^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ$

و  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ ، بنابراین

$$\frac{\sin^2 110^\circ - \sin^2 20^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{\cos(2 \times 20^\circ)}{\sin 50^\circ} = \frac{\cos 40^\circ}{\sin 50^\circ}$$

از طرف دیگر می‌دانیم  $\cos 40^\circ = \cos(90^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$ ، بنابراین

مقدار عبارت مورد نظر برابر ۱ است.

۲-۴۹۸ گزینۀ ۳ توجه کنید که  $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ ، بنابراین

$1 + \cos 40^\circ = 2 \cos^2 20^\circ$ ، از طرف دیگر،  $55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$ ، پس

به این ترتیب  $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$

$$\frac{1 + \cos 40^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ} = \frac{2 \cos^2 20^\circ}{\sin 35^\circ \cos 35^\circ} = \frac{2 \cos^2 20^\circ}{\frac{1}{2} \sin(2 \times 35^\circ)} = \frac{4 \cos^2 20^\circ}{\sin 70^\circ}$$

اکنون توجه کنید که  $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$ ، پس  $\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$ ، در نتیجه

$$\frac{4 \cos^2 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 4 \cos 20^\circ = 4 \cos 20^\circ$$

۲-۴۹۹ گزینۀ ۳ می‌توان نوشت

$$\cos a \cos 2a = \frac{1}{16 \sin a} \Rightarrow 2 \sin a \cos a \cos 2a = \frac{1}{8}$$

$$\sin 2a \cos 2a = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 4a = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin 4a = \frac{1}{4}$$

$$\cos 4a = 1 - 2 \sin^2 2a = 1 - 2 \left( \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{7}{8}$$

۲-۵۰۰ گزینۀ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

$$\frac{4}{5} = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{15}$$

$$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

۵۰۹- گزینه ۲ راه‌حل اول تساوی داده شده را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 5 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x = 5$$

$$(\tan x + \cot x)^2 = 7 \Rightarrow \left( \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 = 7$$

$$\left( \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 = 7 \Rightarrow \left( \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} \right)^2 = 7$$

$$\frac{4}{\sin^2 2x} = 7 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{7}$$

۵۱۰- گزینه ۲ راه‌حل دوم از اتحاد  $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$  استفاده می‌کنیم:

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 5 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 - 2 = 5$$

$$\left( \frac{2}{\sin 2x} \right)^2 - 2 = 5 \Rightarrow \frac{4}{\sin^2 2x} = 7 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{7}$$

۵۱۰- گزینه ۱ با استفاده از اتحادهای

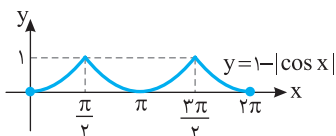
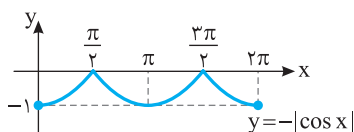
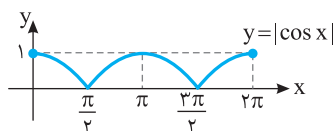
$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin 4^\circ - \cos 4^\circ}{1 + \sin 4^\circ + \cos 4^\circ} &= \frac{1 + 2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ - (1 - 2 \sin^2 2^\circ)}{1 + 2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ + 2 \cos^2 2^\circ - 1} \\ &= \frac{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ + 2 \sin^2 2^\circ}{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ + 2 \cos^2 2^\circ} = \frac{2 \sin 2^\circ (\cos 2^\circ + \sin 2^\circ)}{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ + 2 \cos^2 2^\circ} \\ &= \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \tan 2^\circ \end{aligned}$$

۵۱۱- گزینه ۴ ابتدا نمودار تابع  $y = \cos x$  را رسم می‌کنیم و قرینه

قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به محور طول‌ها رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارند حذف می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = |\cos x|$  به دست آید. نمودار به دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار  $y = -|\cos x|$  به دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



۵۰۶- گزینه ۲ راه‌حل دوم از اتحاد  $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$  استفاده می‌کنیم:

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8} = \left( \tan \frac{\pi}{8} + \cot \frac{\pi}{8} \right)^2 - 2 = \left( \frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}} \right)^2 - 2$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{2}} - 2 = 8 - 2 = 6$$

۵۰۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha, \quad \cot \alpha + \tan \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

بنابراین، اگر اتحادهای فوق را برای  $\alpha = \frac{x}{2}$  استفاده کنیم، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \tan^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2} = \left( \tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} \right) \left( \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{2}{\sin x} \times (-2 \cot x) = -\frac{4 \cot x}{\sin x} \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \xrightarrow{\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{3}{4}} 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25} \xrightarrow{0 < x < \frac{\pi}{2}} \sin x = \frac{4}{5}$$

$$A = \frac{-4 \times \frac{3}{4}}{\frac{4}{5}} = -\frac{15}{4}$$

۵۰۷- گزینه ۳ از اتحاد  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{\cos 2^\circ}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1} + 1 &= \frac{2 \cos^2 1^\circ - 1}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1} + 1 \\ &= \frac{(\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1)(\sqrt{2} \cos 1^\circ - 1)}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1} + 1 = \sqrt{2} \cos 1^\circ - 1 + 1 \\ &= \sqrt{2} \cos 1^\circ = \sqrt{2} \cos(9^\circ - 8^\circ) = \sqrt{2} \sin 8^\circ \end{aligned}$$

۵۰۸- گزینه ۱ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که حاصل ضرب جواب‌های

معادله برابر  $2m - 1$  است. بنابراین

$$\tan \alpha \cot \alpha = 2m - 1 \Rightarrow 1 = 2m - 1 \Rightarrow m = 1$$

اکنون توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر  $m + 3$  است. پس

$$\tan \alpha + \cot \alpha = m + 3 = 4 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 4$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 4 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = 4 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

۵۰۸- گزینه ۱ راه‌حل دوم برای تعیین  $\sin 2\alpha$  می‌توانیم از اتحاد زیر استفاده کنیم:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

بنابراین

$$\tan \alpha + \cot \alpha = m + 3 = 4 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2\alpha} = 4 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

**۵۱۷- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر  $a-2$  است که با توجه به نمودار تابع برابر  $-1$  است. پس  
 $a-2=-1 \Rightarrow a=1$

از طرف دیگر با توجه به نمودار دوره تناوب تابع برابر  $\frac{4\delta}{8} = \frac{\delta}{2} = \delta$  است. پس  
 $T = \frac{2\pi}{\delta} = \delta \Rightarrow |b| = \delta \Rightarrow b = \pm \delta$   
 $\left| \frac{2\pi}{b} \right|$

اگر  $b = -\delta$ . آن گاه  $f(x) = 1 + 2 \sin\left(-\frac{2\pi}{\delta}x + \frac{\pi}{4}\right)$  که در این صورت تابع باید در همسایگی راست  $x=0$  نزولی باشد که این طور نیست. پس  $b = \delta$  و در نتیجه  $b-a=4$ .

توجه کنید که اگر  $b = -\delta$ . آن گاه  $f(x) = 1 + 2 \sin\left(-\frac{2\pi}{\delta}x + \frac{\pi}{4}\right)$  و  $f\left(\frac{\delta}{8}\right) = 1$  که با توجه به شکل این طور نیست.

**۵۱۸- گزینه ۳** دامنه تابع از نامساوی  $\left\{ \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$  به دست می آید. پس  $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**۵۱۹- گزینه ۱** توجه کنید که اگر  $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ . آن گاه

$$\tan x \geq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \text{ و در نتیجه } \tan x \geq -\sqrt{3} \text{ بنابراین}$$

$$\frac{2-m}{\sqrt{3}} \geq -\sqrt{3} \Rightarrow 2-m \geq -3 \Rightarrow m \leq 5$$

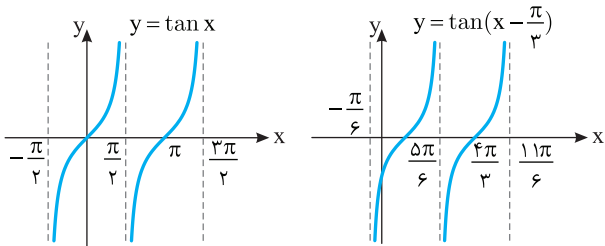
پس حداکثر مقدار  $m$  برابر  $5$  است.

**۵۲۰- گزینه ۱** اگر نمودار تابع  $y = \tan x$  را  $\frac{\pi}{3}$  واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع  $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  به دست می آید که به صورت

زیر است. بنابراین تابع  $f$  روی بازه  $\left(\frac{\delta\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$  اکیداً صعودی است و حداقل

مقدار  $a$  برابر  $\frac{\delta\pi}{6}$  است.

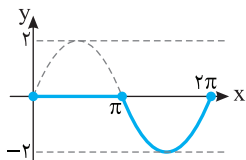


**۵۲۱- گزینه ۳** ضابطه تابع به شکل زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x + \sin x & \pi < x \leq 2\pi \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ 2 \sin x & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. توجه کنید که در بازه  $[\pi, 2\pi]$  نمودار تابع

از دو برابر کردن عرض نقاط روی نمودار تابع  $y = \sin x$  به دست آمده است.



**۵۱۲- گزینه ۴** چون نمودار تابع از نقاط  $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}-1\right)$  و  $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

می گذرد، پس

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}-1 \Rightarrow a \cos \frac{\pi}{4} - b = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} - b = \sqrt{2}-1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a \cos \frac{\pi}{3} - b = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = b$$

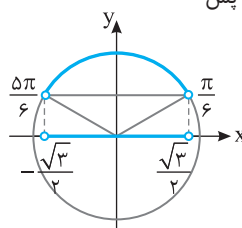
در نتیجه

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} - b = b\sqrt{2} - b = b(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1 \Rightarrow b=1$$

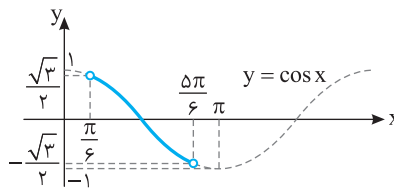
بنابراین  $a=2b=2$ . پس مقدار  $ab$  برابر  $2$  است.

**۵۱۳- گزینه ۴** با توجه به هر یک از شکل های زیر می توان فهمید که اگر

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, \text{ آن گاه } -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ پس}$$



$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{3}m < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$$



**۵۱۴- گزینه ۲** چون  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \delta \sin^2 x \leq \delta$$

$$-3 \leq \delta \sin^2 x - 3 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq f(x) \leq 2$$

بنابراین کمترین و بیشترین مقدار تابع به ترتیب  $-3$  و  $2$  هستند که

حاصل ضرب آن ها  $-6$  است. توجه کنید که  $f(0) = -3$  و  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

**۵۱۵- گزینه ۳** دوره تناوب تابع  $f$  برابر است با  $\frac{2\pi}{|k|}$ ، بنابراین

$$\frac{2\pi}{|k|} = \frac{\pi}{2k+1} \Rightarrow |k| = 4k+2$$

اگر  $k > 0$ ، آن گاه

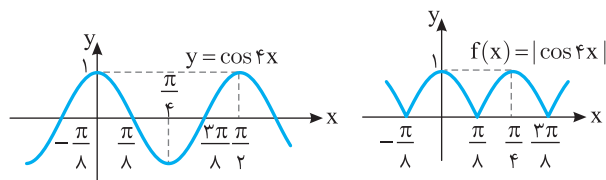
$$k = 4k+2 \Rightarrow k = -\frac{2}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

اگر  $k < 0$ ، آن گاه

$$-k = 4k+2 \Rightarrow k = -\frac{2}{5}$$

**۵۱۶- گزینه ۳** از روی نمودار تابع  $f$  در شکل زیر معلوم است که دوره

$$\text{تناوب آن برابر است با } \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

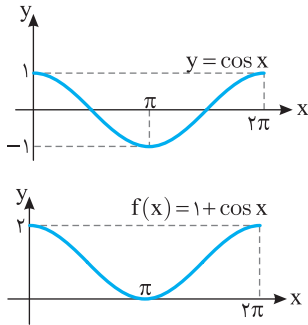


۵۲۷- گزینه ۲ ضابطه تابع به شکل زیر است. توجه کنید که از اتحاد

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$f(x) = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \left( \frac{1 + \cos x}{2} \right) = 1 + \cos x$$

بنابراین کافی است نمودار تابع  $y = \cos x$  را در بازه  $[0, 2\pi]$  یک واحد به بالا انتقال دهیم.



۵۲۸- گزینه ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است. این

مقدار زمانی به دست می‌آید که  $\cos(\frac{\pi}{2} - bx) = 1$ ، پس

$$a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

در نتیجه

$$f(x) = -1 + 2 \sin bx$$

با توجه به شکل دوره تناوب تابع برابر با  $\frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$  است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \pm 3$$

برای  $x > 0$  نمودار تابع  $f(x) = -1 + 2 \sin bx$  به صورت صعودی شروع می‌شود، پس  $b = 3$  قابل قبول است، یعنی  $f(x) = -1 + 2 \sin 3x$  و مقدار  $b - a$  برابر است با ۴. توجه کنید که اگر  $b = -3$ ، آن‌گاه  $f(\frac{\pi}{18}) = -2$  و  $f(x) = -1 + 2 \sin(-3x)$  که با توجه به شکل این‌طور نیست.

۵۲۹- گزینه ۳ تابع  $y = \tan x$  روی بازه  $[0, \frac{\pi}{4}]$  اکیداً صعودی است، پس

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 0 \leq \tan x \leq \tan \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\tan x \leq 0 \Rightarrow 1 \leq \frac{3 - \tan x}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$R_f = \left[ 1, \frac{3}{2} \right]$$

۵۳۰- گزینه ۲ توجه کنید که اگر  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه  $\tan x > 1$  و اگر

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{m-1}{2} > 1 \Rightarrow m-1 > 2 \Rightarrow m > 3$$

$$\frac{m-1}{2} < -1 \Rightarrow m-1 < -2 \Rightarrow m < -1$$

۵۲۲- گزینه ۲ با توجه به شکل  $f(0) = 2$  و کمترین مقدار تابع برابر ۱

است. بنابراین  $f(0) = 2a - b = 2$  و  $f_{\min} = 2a - b - |a + b|$ . با توجه به

شکل ضریب  $\sin x$  مثبت است، پس مینیمم تابع برابر است با  $\begin{cases} 2a - b = 2 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$  از حل دستگاه معادله‌های

می‌شود  $a = 1$  و  $b = 0$ . بنابراین  $f(x) = \sin x + 2$  که بیشترین مقدار آن برابر ۳ است.

۵۲۳- گزینه ۴ با توجه به شکل‌های زیر، اگر  $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ ، آن‌گاه

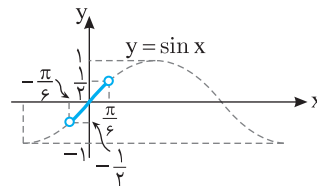
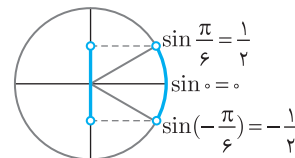
$$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{m+1}{2m} < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < \frac{m+1}{m} < 1 \Rightarrow \left| \frac{m+1}{m} \right| < 1$$

$$|m+1| < |m|, m \neq 0$$

در نتیجه

$$m^2 + 2m + 1 < m^2 \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$$



۵۲۴- گزینه ۳ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cos^2 x = 1 + 2 \cos^2 x$$

چون  $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 \cos^2 x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 1 + 2 \cos^2 x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$$

بنابراین برد تابع بازه  $[1, 3]$  است.

۵۲۵- گزینه ۱ کمترین مقدار تابع  $f$  برابر  $3a - a^2$  است که وقتی

$$\cos ax = -1$$

$$3a - a^2 = 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$$

دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $\frac{2\pi}{|a|}$  است. پس اگر  $a = 1$ ، آن‌گاه دوره تناوب این تابع

برابر  $2\pi$  است و اگر  $a = 2$ ، آن‌گاه دوره تناوب آن برابر  $\pi$  است.

۵۲۶- گزینه ۱ توجه کنید که از اتحاد  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$  استفاده

می‌کنیم. بنابراین

$$f(x) = \cos^2 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2} = \frac{3 \cos 8x + 1}{2}$$

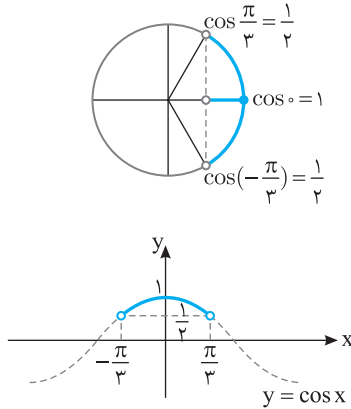
در نتیجه، دوره تناوب تابع  $f$  برابر است با  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .



۵۳۳- گزینه ۲ با توجه به شکل‌های زیر اگر  $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ ، آن‌گاه

$$\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m^2 + 1}{4} \leq 1 \Rightarrow 2 < m^2 + 1 \leq 4 \Rightarrow 1 < m^2 \leq 3 \Rightarrow 1 < |m| \leq \sqrt{3}$$



۵۳۴- گزینه ۱ ضابطه تابع را به شکل  $f(x) = (\sin^2 x + 1)^2 - 1$

می‌نویسیم. چون  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sin^2 x + 1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 \leq 4$$

$$0 \leq (\sin^2 x + 1)^2 - 1 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 3$$

بنابراین برد تابع بازه  $[0, 3]$  است.

۵۳۵- گزینه ۴ دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $\frac{2\pi}{|a\pi|}$  است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|a\pi|} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}$$

کمترین مقدار تابع  $f$  برابر  $|a| - |b|$  است. بنابراین

$$|a| - |b| = -3 \Rightarrow \frac{1}{2} - |b| = -3 \Rightarrow |b| = \frac{7}{2}$$

بیشترین مقدار تابع  $f$  برابر  $|a| + |b|$  است که برابر است با  $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$ .

۵۳۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \cos^2 ax (1 - \cos^2 ax) = \cos^2 ax \sin^2 ax = (\cos ax \sin ax)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sin 2ax\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2ax = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4ax}{2}\right)$$

بنابراین دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $\frac{2\pi}{|4a|}$  است. پس

$$\frac{2\pi}{|4a|} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

۵۳۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = 4 |\sin x \cos x| = 4 \left|\frac{1}{2} \sin 2x\right| = |2 \sin 2x|$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع  $y = \sin x$  را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = 2 \sin 2x$  به دست آید. سپس قرینه قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم.

۵۳۱- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع  $y = \cos x$  را رسم می‌کنیم، سپس آن

را به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

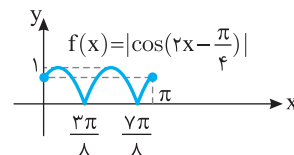
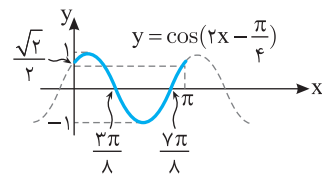
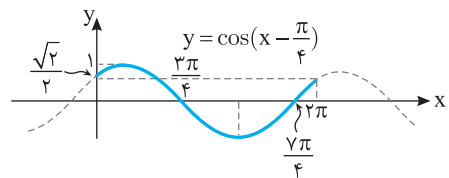
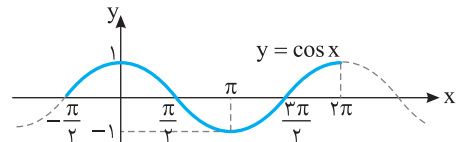
به دست آید. سپس طول نقاط روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع

$y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$  به دست آید. در آخر قرینه قسمت‌هایی از نمودار به دست

آمده را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و

قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع

$f(x) = \left|\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$  به دست آید.



۵۳۲- گزینه ۲ نمودار تابع از نقطه  $(0, 2)$  عبور می‌کند، یعنی  $f(0) = 2$ .

بنابراین

$$f(0) = a - 2b \sin 0 = a = 2$$

پس ضابطه تابع به صورت  $f(x) = 2 - 2b \sin x$  است. بیشترین مقدار تابع

برابر ۶ است که یا به ازای  $\sin x = 1$  به دست می‌آید یا به ازای  $\sin x = -1$

(بستگی به علامت  $b$  دارد). اگر  $b > 0$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای

$\sin x = -1$  به دست می‌آید که برابر است با  $2 + 2b$ .

بنابراین

$$2 + 2b = 6 \Rightarrow b = 2$$

و در نتیجه  $f(x) = 2 - 4 \sin x$ . اگر  $b < 0$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به

ازای  $\sin x = 1$  به دست می‌آید که برابر است با  $2 - 2b$ .

بنابراین

$$2 - 2b = 6 \Rightarrow b = -2$$

و در نتیجه  $f(x) = 2 + 4 \sin x$ . با توجه به اینکه برای  $x$ هایی که کمی

بزرگ‌تر از صفر هستند، مقدار تابع کمتر از ۲ است، ضابطه  $f(x) = 2 + 4 \sin x$

قابل قبول نیست. بنابراین  $b = 2$  و در نتیجه  $ab = 4$ .

۵۴۱- گزینه ۱ جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند

$$3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های به صورت  $\frac{2k\pi}{5}$  شامل جواب‌های به صورت  $2k\pi$  هم هستند (مثلاً

اگر در  $\frac{2k\pi}{5}$  قرار دهید  $k=5$ ، آن‌گاه جواب  $2\pi$  به دست می‌آید که از فرار

دادن  $k=1$  در  $2k\pi$  حاصل می‌شود. پس جواب‌های کلی معادله به صورت  $\frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$  هستند.

۵۴۲- گزینه ۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 8k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 8k\pi + 3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

۵۴۳- گزینه ۳ اگر نمودار تابع  $f$  محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول  $x$

قطع کند،  $f(x)=0$  پس

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$$

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(3k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{(3k+1)\pi}{6} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -3 < 3k+1 < 9 \Rightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{8}{3}$$

بنابراین به ازای  $k=0, k=1, k=2$  و  $k=-1$  چهار مقدار برای  $x$  به دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع  $f$  با محور طول‌ها هستند.

۵۴۴- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{5}) = -\sin x \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x + \frac{\pi}{5} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{3\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x + \frac{\pi}{5} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = k\pi - \frac{7\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}$$

۵۴۵- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

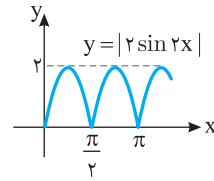
$$\sin 2x(\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \text{ یا } \cos 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های معادله دوم جزء جواب‌های معادله اول هستند. بنابراین جواب‌های

معادله اصلی  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  است.



اکنون کافی است نمودار تابع را فقط در یک دوره تناوب مثلاً در بازه  $[0, \frac{\pi}{2}]$  رسم کنیم.

۵۳۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر  $|a| - 1$

است که با توجه به نمودار تابع، برابر  $-1$  است:

$$|a| - 1 = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار مقدار  $f(0)$  مثبت است:

$$f(0) > 0 \Rightarrow 1 + a \sin \frac{\pi}{4} > 0 \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} + 1 > 0 \Rightarrow a > -\sqrt{2}$$

بنابراین فقط  $a=2$  قابل قبول است. با توجه به نمودار تابع، دوره تناوب تابع

برابر  $\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$  است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{b} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{2}$$

با توجه به اینکه تابع  $f(x) = 1 + 2 \sin(\frac{\pi}{b}x + \frac{\pi}{4})$  در یک همسایگی صفر

صعودی است، فقط مقدار  $b=2$  قابل قبول است. پس  $a+b=4$ . توجه کنید

که اگر  $b=-2$ ، آن‌گاه  $f(x) = 1 + 2 \sin(-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4})$  و  $f(\frac{1}{2}) = 1$  که با

توجه به شکل این طور نیست.

۵۳۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$$

از طرف دیگر تابع  $y = \tan x$  روی بازه  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$  اکیداً صعودی است، پس

تابع  $f$  روی این بازه اکیداً نزولی است. بنابراین

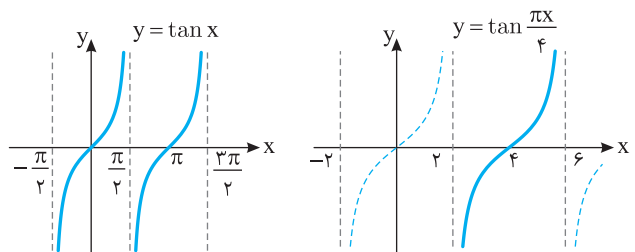
$$-\tan \frac{\pi}{6} \leq -\tan(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3}) \leq -\tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq \sqrt{3}$$

پس  $R_f = [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$ .

۵۴۰- گزینه ۳ برای رسم نمودار تابع  $f$  ابتدا نمودار تابع  $y = \tan x$  را

رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در  $\frac{4}{\pi}$  ضرب می‌کنیم. پس

حداکثر مقدار  $a$  برای اینکه تابع  $f$  روی دامنه‌اش یعنی بازه  $(2, a)$  اکیداً صعودی باشد برابر  $6$  است.



جواب‌های به صورت  $\frac{2k\pi}{9}$  شامل جواب‌های به صورت  $2k\pi$  هم هستند (مثلاً

اگر در  $\frac{2k\pi}{9}$  قرار دهید  $k=9$ ، آن‌گاه جواب  $2\pi$  به دست می‌آید که از قرار

دادن  $k=1$  در  $2k\pi$  حاصل می‌شود). پس جواب‌های کلی معادله به صورت  $\frac{2k\pi}{9}$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  هستند.

**راه‌حل دوم**  $x=0$  جواب معادله است، پس گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند (به ازای هیچ مقدار صحیح  $k$ ،  $x=0$  به دست نمی‌آید). اگر  $k=9$ ، آن‌گاه  $\frac{k\pi}{9}=\pi$ ، اما  $x=\pi$  جواب معادله نیست، پس گزینه (۳) هم رد می‌شود.

**۵۵۲- گزینه ۳** ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin x = -\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

**۵۵۳- گزینه ۳** در نقاطی که  $\sin 3x = 1$ ، نمودار تابع  $f$  حداکثر مقدار خود را دارد. پس

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

k	-1	0	1	2
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین نمودار تابع در بازه  $[-\pi, 2\pi]$ ، چهار بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد. برای پیدا کردن نقاطی که نمودار تابع در آن‌ها حداکثر می‌شود، می‌توانیم به شکل زیر نیز عمل کنیم:

$$-\pi \leq \frac{(4k+1)\pi}{6} \leq 2\pi \Rightarrow -6 \leq 4k+1 \leq 12 \Rightarrow -7 \leq 4k \leq 11$$

$$-\frac{7}{4} \leq k \leq \frac{11}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

**۵۵۴- گزینه ۱** معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin \frac{x}{2} = \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{2x}{3}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{2x}{3} \Rightarrow x = \frac{(-12k+3)\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 12k\pi - 3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  را مشخص می‌کنیم. واضح است که هیچ‌یک از جواب‌های به صورت  $x = 12k\pi - 3\pi$  در بازه  $(0, 2\pi)$  قرار ندارند.

پس جواب‌های به صورت  $x = \frac{(-12k+3)\pi}{7}$  را بررسی می‌کنیم

k	0	1	-1
x	$\frac{3\pi}{7}$	$\frac{-9\pi}{7}$	$\frac{15\pi}{7}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله فقط یک جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد.

**۵۴۶- گزینه ۲** اگر فرض کنیم  $t = \sin 2x$ ، آن‌گاه معادله به صورت

$$2t^2 - 7t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{2} \text{ و } t = \frac{5}{4}$$

$$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x = \frac{5}{4} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

**۵۴۷- گزینه ۴** معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin 2x \cos 2x = \sqrt{2} \sin 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \left(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه  $[0, \pi]$  عبارت‌اند از  $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$ . پس معادله پنج جواب در این بازه دارد.

**۵۴۸- گزینه ۳** با استفاده از اتحاد  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$  معادله

به صورت زیر درمی‌آید:

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos x - 1 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cos x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

**۵۴۹- گزینه ۱** ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 2x + 2 \sin^2 x = \sin 2x \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 x = \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

**۵۵۰- گزینه ۴** ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x (1 - \sin^2 x) - \cos x (1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x = 0$$

$$\sin x \cos x (\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x (\cos x - \sin x) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$  عبارت‌اند از صفر،  $\frac{\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{4}, 2\pi$  و

$$\frac{5\pi}{4} \text{ که مجموع آن‌ها برابر است با } \frac{13\pi}{4}$$

**۵۵۱- گزینه ۱** **راه‌حل اول** جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\delta x = 2k\pi + 4x \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\delta x = 2k\pi - 4x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه  $(0, \pi)$  به صورت زیر هستند:

$$2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \quad 2x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$2x = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \quad 2x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در بازه  $(0, \pi)$  برابر است با  $2\pi$ .

**۵۶- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که

$$x + \frac{\pi}{9} - (x - \frac{7\pi}{18}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{7\pi}{18} = (x + \frac{\pi}{9}) - \frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$$\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2\sin^2(-\frac{\pi}{2} + (x + \frac{\pi}{9})) = 2$$

$$\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2\cos^2(x + \frac{\pi}{9}) = 2$$

$$1 - \cos^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2\cos^2(x + \frac{\pi}{9}) = 2$$

$$\cos^2(x + \frac{\pi}{9}) = 1 \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{9}) = \pm 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{9}) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر است:

$$x + \frac{\pi}{9} = k\pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{9}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**۵۶۱- گزینه ۳** جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$5x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = 2k\pi + \pi - 3x \Rightarrow x = \frac{k\pi + \pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**۵۶۲- گزینه ۱** معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 4k\pi \pm \frac{4\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های معادله در بازه  $(-\pi, 2\pi)$  را به دست می‌آوریم:

k	۰	۱	-۱
$x = 4k\pi - \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$4\pi - \frac{4\pi}{3}$	$-4\pi - \frac{4\pi}{3}$
	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	-۱
$x = 4k\pi + \frac{4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$4\pi + \frac{4\pi}{3}$	$-4\pi + \frac{4\pi}{3}$
	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)

بنابراین معادله فوق یک جواب در بازه  $(-\pi, 2\pi)$  دارد.

**۵۶۳- گزینه ۳** در نقاطی که  $\cos 4x = 1$  تابع  $f$  به حداقل مقدار خود

می‌رسد. پس

$$4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	-۱	۰	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین در بازه  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  نمودار تابع ۵ بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

**۵۵۵- گزینه ۲** معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{یا} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه  $(0, 2\pi)$  عبارت‌اند از  $\pi$  و  $\frac{3\pi}{4}$  و  $\frac{\pi}{4}$  که

مجموع آن‌ها برابر  $2\pi$  است.

**۵۵۶- گزینه ۳** ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x - 3 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$

اگر فرض کنیم  $t = \sin x$  معادله به صورت  $2t^2 + 3t + 1 = 0$  درمی‌آید. از

حل این معادله نتیجه می‌شود  $t = -1$  و  $t = -\frac{1}{2}$ . بنابراین

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, \quad \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$$

توجه کنید که فقط جواب‌های واقع در بازه  $(-\pi, 0)$  را مشخص کرده‌ایم که تعداد آن‌ها سه‌تاست.

**۵۵۷- گزینه ۱** چون  $\sin 4x \neq 0$  معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin 4x} \Rightarrow \sin 4x = \cos 2x \Rightarrow 2\sin 2x \cos 2x = \cos 2x$$

$$2\sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x (2\sin 2x - 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه  $[0, \pi]$  عبارت‌اند از  $\frac{\pi}{12}$  و  $\frac{5\pi}{12}$  که مجموع آن‌ها برابر

$\frac{\pi}{2}$  است.

**۵۵۸- گزینه ۲** معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{3 \sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin 2x \cos x = 3 \sin x \cos 2x$$

اکنون از اتحادهای  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  و  $\sin 2x = 2 \cos^2 x - 1$  استفاده می‌کنیم

$$2 \sin x \cos^2 x - 3 \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 6 \cos^2 x + 3) = 0 \Rightarrow \sin x (3 - 4 \cos^2 x) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه  $(0, 2\pi)$  به صورت زیر هستند:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر است با  $5\pi$ .

**۵۵۹- گزینه ۲** معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{16}{3}$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = 3$$

$$16 \sin^2 x \cos^2 x = 3 \Rightarrow 4(2 \sin x \cos x)^2 = 3$$

$$4 \sin^2 2x = 3 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 4k\pi \pm \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

از جواب‌های  $x = 4k\pi - \frac{4\pi}{3}$  هیچ یک در بازه  $(0, 2\pi)$  قرار ندارند، ولی از

جواب‌های  $x = 2k\pi + \pi$  و  $x = 4k\pi + \frac{4\pi}{3}$  جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  است.

به ازای  $k=0$  به دست می‌آید که  $\pi$  و  $\frac{4\pi}{3}$  هستند و مجموع آن‌ها  $\frac{7\pi}{3}$  است.

**۵۶۹- گزینه ۲** طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x \rightarrow 1 - \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$  عبارتند از  $x=0$ ،  $x=\pi$  و  $x=2\pi$ . ولی توجه کنید که جواب  $x=0$  در معادله اصلی صدق نمی‌کند و قابل قبول نیست. این جواب به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده است. بنابراین معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  دو جواب دارد.

**۵۷۰- گزینه ۳** معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که از

اتحادهای چاق و لاغر و  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  استفاده می‌کنیم.

$$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) - (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$$

$$(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x - \cos x - \sin x) = 0$$

$$(\cos x - \sin x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر هستند:

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

**۵۷۱- گزینه ۳** جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$3x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x - \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x + \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{13\pi}{36}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  را به دست می‌آوریم:

$$0 < k\pi + \frac{\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow -\frac{1}{9} < k < \frac{17}{9} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0, 1\}$$

$$0 < \frac{k\pi}{2} + \frac{13\pi}{36} < 2\pi \Rightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{59}{18} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

بنابراین معادله در بازه  $(0, 2\pi)$  شش جواب دارد.

**۵۷۲- گزینه ۲** ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{3}$$

**۵۶۴- گزینه ۳** ابتدا معادله را به صورت  $\cos(\frac{\pi}{2} + 2x) = \cos(2x - \frac{\pi}{9})$

می‌نویسیم. پس جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{11\pi}{18}, k \in \mathbb{Z} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

**۵۶۵- گزینه ۲** جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$2 \cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0, \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون جواب‌های معادله را در بازه  $(0, 2\pi)$  می‌خواهیم، پس این جواب‌ها به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

بنابراین معادله شش جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد.

**۵۶۶- گزینه ۳** با توجه به  $\sin(\pi+x) = -\sin x$  معادله را به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \Rightarrow (\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

**۵۶۷- گزینه ۳ راه حل اول** معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x$$

اکنون از اتحاد  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  استفاده می‌کنیم:

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \text{ یا } x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

پس جواب‌های معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  عبارت‌اند از صفر،  $\pi$  و  $2\pi$ .

**راه حل دوم** از اتحاد  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$  استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$1 - \cos 2x = \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

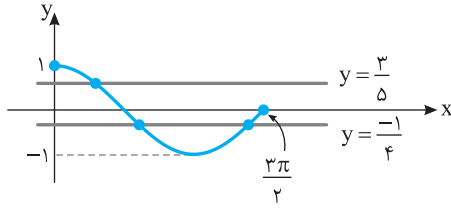
$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, x = \pi, x = 2\pi$$

**۵۶۸- گزینه ۴** معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم، سپس از اتحاد

$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  استفاده می‌کنیم.

$$1 + \cos \frac{x}{2} = -\cos x \xrightarrow{\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1}$$

$$1 + \cos \frac{x}{2} = -2 \cos^2 \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1) = 0$$



۵۷۶- گزینه ۲ راه حل اول معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x \sin x} = 2 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵۷۷- گزینه ۳ راه حل دوم معادله را به کمک اتحاد  $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$  به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2}{\sin 2x} = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵۷۷- گزینه ۳ با توجه به اتحاد  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha$  معادله را

به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos \lambda x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \lambda x = 1$$

$$\cos \lambda x = -\cos 2x \Rightarrow \cos \lambda x = \cos(\pi - 2x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\lambda x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{10}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda x = 2k\pi - \pi + 2x \Rightarrow x = (2k-1)\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
$x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{2}$

(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x = (2k-1)\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

پس جواب‌های معادله که در بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  قرار دارند عبارت‌اند از  $\frac{\pi}{10}$  و  $\frac{3\pi}{10}$ .

۵۷۸- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 \Rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$$

$$\cos 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  به ازای  $k=1, 2$  به دست می‌آیند که

عبارت‌اند از  $\pi$  و  $2\pi$  و مجموع آن‌ها برابر  $3\pi$  است.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{9} = \frac{(6k+1)\pi}{9}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(0, \pi)$  را معین می‌کنیم

k	۰	۱	۲
$x = (6k+1)\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{9}$

(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x = (6k-1)\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازه  $(0, \pi)$  برابر است با

$$\frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} = \frac{13\pi}{9}$$

۵۷۳- گزینه ۱

با استفاده از اتحاد  $2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$  معادله را

به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(3x - \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0$$

$$3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵۷۴- گزینه ۲ چون  $\cos(x - \frac{\pi}{6}) \neq 0$  معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = -\sin 3x \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 3x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{3} \quad x \in (0, \pi) \rightarrow$$

$$0 < -k\pi - \frac{\pi}{3} < \pi \Rightarrow -\frac{1}{3} < -k < \frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} < k < -\frac{1}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow k \in \{-1\}$$

$$x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \quad x \in (0, \pi) \rightarrow$$

$$0 < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} < \pi \Rightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{25}{12} \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow k \in \{1, 2\}$$

پس جواب‌های واقع در بازه  $(0, \pi)$  عبارت‌اند از  $\frac{2\pi}{3}$ ،  $\frac{5\pi}{12}$  و  $\frac{11\pi}{12}$  که  $\frac{2\pi}{3}$

قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج در معادله اصلی می‌شود (توجه

کنید که این جواب در اثر ضرب کردن طرفین معادله در  $\cos(x - \frac{\pi}{6})$  به

وجود آمده است). بنابراین معادله دو جواب در بازه  $(0, \pi)$  دارد.

۵۷۵- گزینه ۳ جواب‌های معادله به صورت  $\cos x = -\frac{1}{4}$  یا

$\cos x = \frac{3}{5}$  هستند. پس با توجه به نمودار تابع  $y = \cos x$  و خطوط

$y = \frac{3}{5}$  و  $y = -\frac{1}{4}$  معادله  $\cos x = \frac{3}{5}$  در بازه  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  یک جواب و معادله

$\cos x = -\frac{1}{4}$  در این بازه دو جواب دارد. پس معادله مورد نظر در بازه فوق

سه جواب دارد.

۵۸۳- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می نویسیم

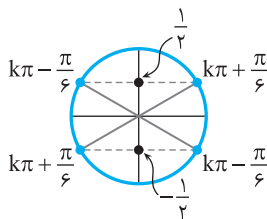
$$\sin^2(\Delta x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(\Delta x - \frac{\pi}{3}) = \pm \frac{1}{2}$$

با توجه به شکل زیر جواب های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\Delta x - \frac{\pi}{3} = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta x = k\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{k\pi}{5} + \frac{2\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta x = k\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{30}, k \in \mathbb{Z}$$



بنابراین می تواند مقادیر ۳ و ۱ را داشته باشد که مجموع آن ها برابر ۴ است.

۵۸۴- گزینه ۱ چون  $\cos 2x \neq 0$ ، طرفین معادله را در  $\cos 2x$  ضرب می کنیم

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos 2x \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

بنابراین جواب های معادله به صورت زیر هستند:

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x = -\frac{(2k+1)\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب های واقع در بازه  $(0, \pi)$  را به دست می آوریم:

k	0	1	2
$x = \frac{(2k+1)\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$

(غ.ق.ق.)

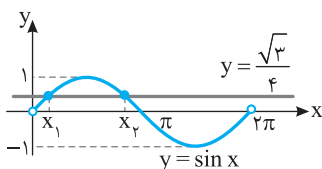
k	0	1	-1
$x = -\frac{(2k+1)\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

جواب های واقع در بازه  $(0, \pi)$  عبارت اند از  $\frac{\pi}{12}$  و  $\frac{3\pi}{12}$  ولی  $\frac{3\pi}{12}$  قابل قبول نیست، زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادله اصلی می شود (توجه کنید که  $x = \frac{3\pi}{12}$  در اثر ضرب کردن معادله در  $\cos 2x$  به وجود آمده است). پس تعداد جواب ها در بازه  $(0, \pi)$  برابر یک است.

۵۸۵- گزینه ۲ توجه کنید که  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$  یا  $\cos x = \frac{\sqrt{13}}{4}$  با

توجه به نمودار تابع  $y = \sin x$  و خط  $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ، معادله  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$  دو جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد.



۵۷۹- گزینه ۳ اگر فرض کنیم  $t = \cos x$ ، آن گاه  $\sin^2 x = 1 - t^2$  و

معادله به صورت  $(2 - \sqrt{2})(1 - t^2) + t - 1 = 0$  در می آید. بنابراین

$$(2 - \sqrt{2})(1 - t)(1 + t) - (1 - t) = 0$$

$$(1 - t)((2 - \sqrt{2})(1 + t) - 1) = 0$$

$$(1 - t)(2 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})t - 1) = 0$$

$$t = 1, \quad t = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس جواب های معادله در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}$$

بنابراین تعداد جواب های معادله در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  سه است.

۵۸۰- گزینه ۲ دو طرف معادله داده شده را به توان دو می رسانیم و از

اتحاد  $2 \sin x \cos x = \sin 2x$  استفاده می کنیم.

$$2(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) = 3 \Rightarrow 2(1 + \sin 2x) = 3$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب های معادله در بازه  $(0, \pi)$  به ازای  $k=0$ ،  $\frac{5\pi}{12}$  و  $\frac{\pi}{12}$  است، پس

مجموع جواب ها برابر  $\frac{\pi}{2}$  است.

۵۸۱- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

بنابراین جواب های آن به صورت زیر هستند:

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi = -\frac{7\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{13\pi}{24}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب های واقع در بازه  $(-\pi, 2\pi)$  را به دست می آوریم:

k	0	1	2	-1	-2
x	$\frac{13\pi}{24}$	$\frac{29\pi}{24}$	$\frac{61\pi}{24}$	$-\frac{11\pi}{24}$	$-\frac{35\pi}{24}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

پس معادله سه جواب در بازه فوق دارد.

۵۸۲- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin(x + \frac{5\pi}{36}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x + \frac{5\pi}{36} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{7\pi}{36}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{5\pi}{36} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{11\pi}{18}$$

پس می تواند برابر ۲ یا ۱۱ باشد.

۵۸۸- گزینه ۳ راه‌حل اول معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = \sin x$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \sin x$$

$$\sin x - \sin^2 x \cos x + \cos x - \sin x \cos^2 x = \sin x$$

$$\cos x(-\sin^2 x + 1 - \sin x \cos x) = 0$$

$$\cos x(\cos^2 x - \sin x \cos x) = 0 \Rightarrow \cos^2 x(\cos x - \sin x) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

پس معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \sin x \Rightarrow \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin x(1 - \sin^2 x) - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \sin x \cos^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x(\sin x - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

پس معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  چهار جواب دارد.

۵۸۹- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^2 x = 2 - 2 \sin^2 x \Rightarrow \tan^2 x = 2(1 - \sin^2 x)$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cos^2 x \xrightarrow{\cos x \neq 0} \sin^2 x = 2 \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = 2 \cos^2 x \Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

$$(\cos^2 x + 1)(\cos^2 x - 1) = 0$$

چون  $\cos^2 x + 1 \neq 0$ ، بنابراین

$$2 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵۹۰- گزینه ۲ از  $\cos(2\pi \sin x) = -1$  نتیجه می‌شود

$$2\pi \sin x = 2k\pi + \pi \Rightarrow \sin x = k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

با توجه به  $-1 \leq \sin x \leq 1$  نتیجه می‌شود که  $k$  می‌تواند مقادیر صفر و  $-1$  را داشته باشد. بنابراین جواب‌های معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر هستند:

$$k = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$$

$$k = -1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$$

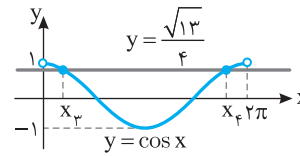
پس مجموع جواب‌ها برابر است با  $4\pi$ .

۵۹۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \theta$$

$$. A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \tan \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 0/2} = 3$$



همچنین با توجه به نمودار تابع

$$y = \cos x \text{ و خط } y = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\text{معادله } \cos x = \frac{\sqrt{13}}{4} \text{ دو}$$

جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد.

ولی توجه کنید که یکی از این جواب‌ها  $(x_3)$  همان جواب معادله

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ در بازه } (0, \frac{\pi}{2}) \text{ است } (x_1), \text{ زیرا } (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 + (\frac{\sqrt{13}}{4})^2 = 1$$

بنابراین معادله مورد نظر مسئله سه جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد.

۵۸۶- گزینه ۲ راه‌حل اول معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه

کنید که  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ .

$$-(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

واضح است که جواب‌های  $\frac{2k\pi}{3}$  شامل جواب‌های  $2k\pi$  نیز می‌شوند، پس

جواب‌های کلی به صورت  $\frac{2k\pi}{3}$  هستند.  $k \in \mathbb{Z}$

راه‌حل دوم  $x = 0$  جواب معادله است. پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند.

به ازای  $k = 3$ ، گزینه (۱) برابر  $\pi$  می‌شود، اما  $x = \pi$  جواب معادله نیست:

$$\sin^2 \pi - \cos^2 \pi = -1, \quad \sin(\frac{3\pi}{2} - \pi) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

بنابراین گزینه (۱) هم رد می‌شود.

۵۸۷- گزینه ۴ از اتحاد مثلثاتی  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  کمک

می‌گیریم و معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$$

طرفین معادله را در  $\cos x + \sin x$  ضرب می‌کنیم

$$\cos x - \sin x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2$$

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 0 & (1) \\ (\cos x + \sin x)^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

از معادله (۱) جواب‌های زیر در بازه  $[0, \pi]$  به دست می‌آید:

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

از معادله (۲) جواب‌های زیر در بازه  $[0, \pi]$  به دست می‌آید:

$$\cos^2 x + \sin^2 x + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$$

پس مجموع جواب‌های واقع در بازه  $[0, \pi]$  برابر  $\frac{7\pi}{4}$  است.



۵۹۶- گزینه ۱ معادله را به صورت  $\cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x)$  نوشته و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

با توجه به  $\cos x \neq 0$ ، جواب  $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$  غیر قابل قبول است. پس جواب

کلی  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  است. خارج از کشور تجربی - ۹۴

۵۹۷- گزینه ۱ ابتدا دقت کنید که  $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ . در ادامه معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right) = 1$$

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر هستند که مجموع آن‌ها برابر  $\frac{3\pi}{4}$  است:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \Rightarrow x_1 + x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۵۹۸- گزینه ۴ زاویه  $\frac{\pi}{2} - x$  متمم زاویه  $x$  است. پس

$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0$$

$$\sin 2x = -\sin x \Rightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$

$$2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, \quad 2x = 2k\pi + \pi + x \Rightarrow x = (2k+1)\pi$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  عبارت‌اند از  $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$ .

مجموع این جواب‌ها برابر  $5\pi$  است. خارج از کشور تجربی - ۹۶

۵۹۹- گزینه ۱ معادله داده شده را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی،

بازنویسی کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$$

$$-2 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-4}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 2 \quad (\text{غ.ق.}) \end{cases}$$

تجربی - ۹۵

۶۰۰- گزینه ۳ راه حل اول با توجه به اتحاد  $2 \cos^2 x = \cos 2x + 1$

معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x + \cos 2x + 1 = 0$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۵۹۲- گزینه ۴ از اتحادهای  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  و

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$
 استفاده می‌کنیم و عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}$$

اکنون از اتحاد  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sin^4 \theta \cos^4 \theta} = \frac{1}{\frac{1}{16} \sin^4 2\theta} = 16 \sin^{-4} 2\theta$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۵۹۳- گزینه ۱ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دوره

تناوب، برابر ۳ است، پس دوره تناوب تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  برابر ۱ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 1 \Rightarrow b = \pm 2$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است. پس

$$|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

با توجه به نمودار که در شروع به صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \sin(-2\pi x)$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -3 \sin(2\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار  $ab$  برابر  $-6$  است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۵۹۴- گزینه ۲ از اتحاد  $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$  استفاده

می‌کنیم. اگر  $\alpha = \frac{x}{2}$ ، آن‌گاه

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -2 \cot x = -\frac{2}{\tan x} = \frac{-2}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{2}$$

تجربی - ۹۶

۵۹۵- گزینه ۴ کافی است صورت و مخرج برابر باشند به شرطی که

مخرج صفر نباشد:

$$\sin 3x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \sin 3x = \sin x$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \quad (\text{غ.ق.}) \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

به‌ازای  $x = k\pi$  مخرج کسر صفر می‌شود، پس این جواب غیر قابل قبول است

و جواب  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۶۰۴- گزینه ۴ با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

تجربی - ۹۲

۶۰۵- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$  معادله را ساده می‌کنیم:

$$2\cos 2x = \frac{\cos x}{\sin x} \left(4\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = 4\cos x + 1$$

$$2(2\cos^2 x - 1) = 4\cos x + 1 \Rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

$$(2\cos x + 1)(2\cos x - 3) = 0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\cos x = \frac{3}{2} \text{ (غ.ق.ق.)}, \quad \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۶۰۶- گزینه ۲ با استفاده از اتحاد  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$-(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

واضح است که جواب  $\frac{2k\pi}{3}$  شامل جواب  $2k\pi$  نیز می‌شود، پس جواب‌های

کلی به صورت  $\frac{2k\pi}{3}$  هستند.

تجربی - ۹۱

۶۰۷- گزینه ۱ از اتحادهای  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$  و  $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$  استفاده می‌کنیم. ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2\cos^2 x - 1) + 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow k = -\frac{1}{4} \text{ (غ.ق.ق.)} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

راه‌حل دوم با توجه به اتحاد  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$  معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \\ \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

این جواب‌ها همان  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  هستند.

تجربی - ۹۶

۶۰۱- گزینه ۱ از اتحاد  $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$  استفاده می‌کنیم. ابتدا دو طرف عبارت داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

چون  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\frac{3}{4}$ ، بنابراین  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$

تجربی - ۹۵

۶۰۲- گزینه ۳ عبارت را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $2^\circ$  می‌نویسیم:

$$A = \frac{\sin(27^\circ - 2^\circ) + \sin(72^\circ - 2^\circ)}{\cos(54^\circ + 2^\circ) - \cos(9^\circ + 2^\circ)} = \frac{-\cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ + \sin 2^\circ}$$

سپس صورت و مخرج را بر  $\cos 2^\circ$  تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{-\cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \frac{-1 - \tan 2^\circ}{1 + \tan 2^\circ} = \frac{-1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{5}}{-1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{2}{5}} = 3$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۰۳- گزینه ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است، این

مقدار زمانی به دست می‌آید که  $\cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) = -1$ ، پس

$$a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

در نتیجه  $y = -1 - 2\cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) = -1 + 2\sin(bx)$  با توجه به شکل

دوره تناوب تابع برابر با  $\frac{12\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$  است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \pm 3$$

برای  $x > \frac{\pi}{18}$  نمودار تابع  $y = -1 + 2\sin(bx)$  به صورت صعودی شروع

می‌شود، پس  $b = 3$  قابل قبول است، یعنی  $y = -1 + 2\sin(3x)$  و مقدار  $a + b$  برابر است با  $-1 + 3 = 2$ .

ریاضی - ۹۵

پس جواب‌های معادله در بازه  $[0, \pi]$  عبارت‌اند از  $\frac{\pi}{4}$ ،  $\frac{3\pi}{4}$ ،  $\frac{11\pi}{12}$  و  $\frac{7\pi}{12}$

ریاضی - ۹۵

که مجموعشان برابر  $\frac{30\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$  است.

راه‌حل دوم برای به دست آوردن جواب‌های کلی معادله  $\cos 2x = -\sin 2x$

به کمک دایره مثلثاتی متوجه می‌شویم:

$$2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

تجربی - ۹۴

۶۰۸- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin x \cos x = \sin^2 x \Rightarrow \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

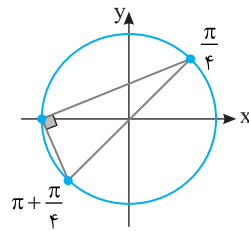
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \quad \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

دقت کنید که به ازای  $x = 2k\pi$  مخرج کسر صفر می‌شود. پس جواب‌های

معادله  $x = (2k+1)\pi$  و  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  هستند که روی دایره مثلثاتی مطابق

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

شکل زیر مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند.



۶۰۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که برای تعریف شدن عبارت سمت

چپ معادله لازم است که

$$1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq 2k\pi + \pi$$

با شرط فوق معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi + \pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \text{ (غ.ق.)} \end{cases}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۶۱۰- گزینه ۳ از اتحاد‌های

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

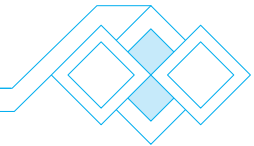
و اتحاد مزدوج برای ساده کردن معادله استفاده می‌کنیم:

$$2 \sin 2x \cos 2x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

## فصل سوم



۶۱۹- گزینه ۱ توجه کنید که بنابر قضایای حد،  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  وجود دارد.

از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x+4)}{\lim_{x \rightarrow 3} f(x)} = \frac{7}{6}$$

بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$  همچنین  $\lim_{t \rightarrow 3} f(t) = 6$  بنابرین  $\lim_{x \rightarrow 1} f(2x+1) = \lim_{t \rightarrow 3} f(t) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1)}{x+2} = \frac{6}{1+2} = 2$$

۶۲۰- گزینه ۲ حد چپ و حد راست تابع در  $x=2$  را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (6x^2 - x^3) = 24 - 8 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2 - x^3) = 12 - 8 = 4$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع در  $x=2$  برابر  $20$  است.

۶۲۱- گزینه ۴ ابتدا نامعادله را حل می‌کنیم

$$|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

پس بازه  $(-1, 3)$  مجموعه جواب‌های نامعادله است که همسایگی نقطه  $x=-2$  نیست.

۶۲۲- گزینه ۲ با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2a, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a-2, \quad f(a) = a$$

بنابراین

$$2a - (a-2) = 3a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۶۲۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر  $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه  $(1-x^2) \rightarrow 0^-$

و اگر  $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه  $(1-x^2) \rightarrow 0^+$  بنابرین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^2) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 3 - 1 = 2$$

۶۲۴- گزینه ۳ در سمت راست نقطه  $-1$ ،  $[x] = -1$  و  $|x| = -x$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{|x|}{[x]}\right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{-x}{-1}\right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1$$

۶۲۵- گزینه ۴ چون

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow (-1)^+, \quad x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 1^-$$

می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) = \lim_{t \rightarrow (-1)^+} f(t) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (f \circ f)(x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (f \circ f)(x) = -1 - 1 = -2$$

۶۱۱- گزینه ۴ کافی است  $x=2$  عضو بازه  $(a-2, 2a)$  باشد. یعنی

$$a-2 < 2 \Rightarrow a < 4, \quad 2a > 2 \Rightarrow a > 1$$

بنابراین  $1 < a < 4$ .

۶۱۲- گزینه ۳ دامنه تابع از شرط  $[x] \neq 2$  به دست می‌آید که به صورت

زیر است:

$$D_f = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$$

بنابراین تابع در همسایگی چپ نقطه  $x=3$  تعریف نشده است.

۶۱۳- گزینه ۴ توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$  و  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 3$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر  $7$  است.

۶۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$  در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 0$$

از طرف دیگر، اگر  $x \rightarrow 9^+$ ، آن‌گاه  $\frac{x}{3} \rightarrow 3^+$  بنابرین

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} f\left(\frac{x}{3}\right) = \lim_{t \rightarrow 3^+} f(t) = 1$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر  $1$  است.

۶۱۵- گزینه ۲ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطه  $1$ ،  $[x] = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x[x]) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2$$

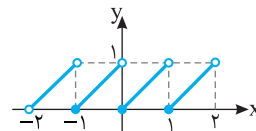
۶۱۶- گزینه ۴ با توجه به نمودار،

$$x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = -2$$

۶۱۷- گزینه ۳ نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که تابع در

نقطه‌های  $x=-1$ ،  $x=0$  و  $x=1$  از بازه  $(-2, 2)$  حد ندارد.



۶۱۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \delta^-} f(x) = 2a(\delta) - 3 = 10a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \delta^+} f(x) = \delta^2 - a(\delta) + b = 25 - 5a + b$$

اکنون توجه کنید که چون  $\lim_{x \rightarrow \delta} f(x) = 17$ ، پس هر یک از حدهای بالا برابر

$17$  است:

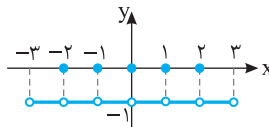
$$\begin{cases} 10a - 3 = 17 \\ 25 - 5a + b = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow ab = 4$$

**۶۲۶- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1 \Rightarrow f(x) = -1$$

بنابراین نمودار تابع  $f$  در بازه  $(-3, 3)$  به شکل زیر است. با توجه به نمودار، تابع  $f$  در تمام نقاط این بازه حد دارد و حد آن برابر  $-1$  است.



**۶۲۷- گزینه ۱** این تابع در تمام نقاط  $\mathbb{R}$  حد دارد. پس در  $x=2$  و

$x=-2$  نیز حد دارد. بنابراین باید حد چپ و حد راست تابع در هر یک از این نقاط برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^3 + x^2) = 8a + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+b) = 2+b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax^3 + x^2) = -8a + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x+b) = -2+b$$

بنابراین

$$\begin{cases} 8a+4=2+b \\ -8a+4=-2+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=8a+2 \\ b=-8a+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow ab=1$$

**۶۲۸- گزینه ۴** اگر فرض کنیم  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ ، طبق قضایای حد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)}{2f(x)+1} = 3 \Rightarrow \frac{2L}{L+1} = 3 \Rightarrow 2L = 3L+3 \Rightarrow L = -3$$

$$\text{در نتیجه } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-1}{f(x)} = \frac{2 \times (-3) - 1}{-3} = \frac{7}{3}$$

**۶۲۹- گزینه ۳** ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه  $x=-2$  را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (ax[3x]+x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-7ax+x) = 14a-2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax[3x]+x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-6ax+x) = 12a-2$$

بنابراین

$$14a-2+12a-2=11 \Rightarrow 26a=15 \Rightarrow a=\frac{15}{26}$$

**۶۳۰- گزینه ۲** ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطه  $x=1$  حساب

می‌کنیم. اگر  $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه  $x \rightarrow (-1)^-$  و  $-x \rightarrow 2^+$  و اگر  $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه  $x \rightarrow (-1)^+$  و  $-x \rightarrow 2^-$ . در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} [2x] + (m+1) \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x] = 1 + (m+1)(-1) = -m \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [2x] + (m+1) \lim_{x \rightarrow 1^+} [-x] = 2 + (m+1)(-2) = -2m \end{aligned}$$

در نتیجه

$$-2m = -m \Rightarrow m = 0$$

**۶۳۱- گزینه ۳** دامنه تابع را پیدا می‌کنیم:

$$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$x-[x] \neq 0 \Rightarrow x \neq [x] \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

بنابراین دامنه تابع به صورت  $D_f = (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$  است، پس نقاط  $x = \pm 1$  و  $x = 0$  در دامنه تابع قرار ندارند ولی همسایگی محذوف آن‌ها در دامنه تابع قرار دارد.

**۶۳۲- گزینه ۱** توجه کنید اگر  $x \rightarrow 3^-$ ، آن‌گاه  $t = (x-1) \rightarrow 2^-$ .

بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = -1$ . همچنین اگر  $x \rightarrow 0^+$ ، آن‌گاه

$t = (x+1) \rightarrow 1^+$ ، بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = -2$ .

مقدار مورد نظر برابر  $-3$  است.

**۶۳۳- گزینه ۴** در یک همسایگی راست  $x=0$  مقدارهای تابع  $f$  نزدیک

$2$  و کمتر از آن هستند، یعنی  $f(x) \rightarrow 2^-$  و  $[f(x)] = 1$ . بنابراین

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = 1$ . همچنین در یک همسایگی چپ  $x=0$  مقدارهای تابع  $f$

نزدیک  $-1$  و کمتر از آن هستند، یعنی  $f(x) \rightarrow (-1)^-$  و  $[f(x)] = -2$ . بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = -2 \text{، در نتیجه}$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = 2 - (-2) = 4$$

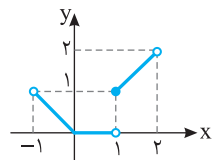
**۶۳۴- گزینه ۱** ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

پس نمودار تابع به شکل روبه‌رو است و تابع فقط در نقطه  $x=1$  از بازه  $(-1, 2)$  حد ندارد.



**۶۳۵- گزینه ۴** اگر  $x$  در یک همسایگی راست  $1$  باشد،  $x > 1$ ، پس

$2-x < 1$ . در نتیجه  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x) = \lim_{y \rightarrow 1^-} f(y) = 2a$ . همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(2-x)}{f(x)} = \frac{2a}{a} = 2 \text{، در نتیجه } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$$

**۶۳۶- گزینه ۱** چون تابع‌های  $f$  و  $g$  در  $x=a$  حد دارند، پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - 2g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 2g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (2f(x) - 3g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 3g(x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 6 \end{aligned}$$

بنابراین اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} L_1 - 2L_2 = 2 \\ 2L_1 - 3L_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow L_1 = 6, L_2 = 2$$

بنابراین  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \times L_2 = 12$

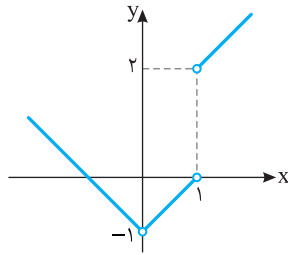
۶۴۳- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{-x} + \frac{-(x-1)}{x-1} = -x-1$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{-(x-1)}{x-1} = x-1$$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{x-1}{x-1} = x+1$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. پس تابع فقط در نقطه  $x=1$  حد ندارد.



۶۴۴- گزینه ۱ تابع  $f$  فقط در  $x=2$  و  $x=-2$  ممکن است حد

نداشته باشد. حد چپ و حد راست تابع را در این نقاط حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x^2 - 2x) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} x^2 = 4$$

پس تابع در  $x=2$  حد دارد ولی در  $x=-2$  حد ندارد.

۶۴۵- گزینه ۱ توجه کنید که  $x^3 - x = x(x^2 - 1)$ . در نتیجه اگر  $x$  از

سمت چپ به صفر نزدیک شود، آن‌گاه  $x^3 - x > 0$ . بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\sqrt{t+9}) = 3$$

۶۴۶- گزینه ۲ حد چپ و حد راست تابع در  $x=2$  را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 3) = 4a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3a) = 4 + 3a$$

باید حد چپ و حد راست تابع در  $x=2$  برابر باشند، یعنی

$$4 + 3a = 4a + 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3a) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3) = 12$$
 بنابراین

۶۴۷- گزینه ۳ اگر فرض کنیم  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{3f(x)}{4f(x)+2} = 1 \Rightarrow \frac{3 \lim_{x \rightarrow a} f(x)}{4 \lim_{x \rightarrow a} f(x)+2} = 1 \Rightarrow \frac{3L}{4L+2} = 1 \Rightarrow 3L = 4L+2 \Rightarrow L = -2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{f(x)-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)-3} = \frac{L}{L-3} = \frac{-2}{-2-3} = \frac{2}{5}$$

۶۳۷- گزینه ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  را

به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x[x]+2a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+2a) = 4+2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (b[-x]+3x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2b+3x) = -2b+6$$

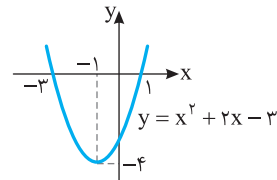
چون تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  حد دارد، در نتیجه حد چپ و حد راست تابع  $f$  در این نقطه برابرند:

$$4+2a = -2b+6 \Rightarrow 2a+2b = 2 \Rightarrow a+b = 1$$

۶۳۸- گزینه ۱ در شکل زیر نمودار تابع  $y = x^2 + 2x - 3$  رسم شده

است. توجه کنید  $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 2x - 3) = 0$ . اما در سمت چپ  $x = -3$ ،

مقدارهای تابع مثبت هستند. در نتیجه در سمت چپ  $x = -3$ ،  $[x^2 + 2x - 3] = 0$ . در نتیجه حاصل حد نیز صفر می‌شود.



۶۳۹- گزینه ۳ مطابق قضیه‌های محاسبه حد، اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1+f^2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{1+(\lim_{x \rightarrow a} f(x))^2} = \frac{L}{1+L^2}$$
 آن‌گاه

در بقیه گزینه‌ها ممکن است حد مخرج کسر تابع برابر صفر و حد صورت کسر برابر صفر نباشد و در نتیجه تابع حد نداشته باشد.

۶۴۰- گزینه ۳ در نقطه‌هایی که مقدار  $2x$  عددی صحیح نشود، تابع

$y = [2x]$  حد دارد. در نقطه‌هایی که مقدار  $2x$  عددی صحیح شود، تابع

$y = [2x]$  حد ندارد. این نقطه‌ها را به دست می‌آوریم

$$2x = k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k}{2}$$

$$0 < \frac{k}{2} < 3 \Rightarrow 0 < k < 6 \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

پس تابع در پنج نقطه از بازه  $(0, 3)$  حد ندارد.

۶۴۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر  $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه  $(1-x^3) \rightarrow 0^-$

و اگر  $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه  $(1-x^3) \rightarrow 0^+$ . بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^3) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^3) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 4 + 2 = 6$$

۶۴۲- گزینه ۱ با توجه به نمودار واضح است که  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

بنابراین  $[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)] = [3] = 3$ . از طرف دیگر در یک همسایگی محذوف

$x=1$  مقادیر تابع  $f$  نزدیک ۳ و کمتر از آن هستند، یعنی  $f(x) \rightarrow 3^-$

بنابراین در این بازه  $[f(x)] = 2$ ، پس  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]}{[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)]} = \frac{2}{3}$$

۶۵۴- گزینه ۳ از روی شکل معلوم می‌شود که  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$ . در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) - 64}{f(x) - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) - 4^2}{f(x) - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(f(x) - 4)(f^2(x) + 4f(x) + 16)}{f(x) - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (f^2(x) + 4f(x) + 16) = 4^2 + 4 \times 4 + 16 = 48 \end{aligned}$$

۶۵۵- گزینه ۳ یک عامل  $x-1$  را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + 3x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 - 3x + 3}{x^3 - 1 + 3x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) - 3(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^2 + x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 4} = \frac{0}{6} = 0 \end{aligned}$$

۶۵۶- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2 - 3x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x-1} = -1 \end{aligned}$$

۶۵۷- گزینه ۳ چون حد صورت کسر صفر است، باید حد مخرج آن هم

صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. که این طور نیست ( $b \neq 0$ ). پس

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + ax + 3) = 9 + 3a + 3 = 12 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + ax + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-1} = \frac{3+3}{3-1} = 3 \end{aligned}$$

بنابراین  $a+b = -4+3 = -1$

۶۵۸- گزینه ۲ از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x^3}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - 2x^3})(1 + \sqrt{1 - 2x^3})}{x^3(1 + \sqrt{1 - 2x^3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2x^3)}{x^3(1 + \sqrt{1 - 2x^3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^3(1 + \sqrt{1 - 2x^3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2x^3}} = \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

۶۵۹- گزینه ۴ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-4}}{x^2 - 6x + 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-4})(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})}{(x^2 - 6x + 5)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4(x-4)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-3(x-5)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-3}{(x-1)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} = \frac{-3}{4(2+2)} = \frac{-3}{16} \end{aligned}$$

۶۴۸- گزینه ۲ تابع  $y=x$  در تمام نقاط حد دارد. تابع  $y=x-[x]$

در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد. پس ضرب این دو تابع یعنی در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد.

در نقاط صحیح غیر صفر حد چپ و حد راست تابع  $y=x-[x]$  یکسان نیستند پس تابع  $f$  نیز در این نقاط حد ندارد. ولی در  $x=0$  چون حد تابع  $y=x$  برابر صفر است، پس حد تابع  $f$  هم برابر صفر است. بنابراین تابع  $f$  در نقاط  $x=1$  و  $x=-1$  از بازه  $(-2, 2)$  حد ندارد.

۶۴۹- گزینه ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در  $x=2$  را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{4a}{x^2} + x^2 \right) = \frac{4a}{4} + 4 = a + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{3a}{x^2} + x^2 \right) = \frac{3a}{4} + 4$$

بنابراین

$$a + 4 + \frac{3a}{4} + 4 = 10 \Rightarrow \frac{7a}{4} = 2 \Rightarrow a = \frac{8}{7}$$

۶۵۰- گزینه ۴ اگر تابع  $y=|x|+f(x)$  در  $x=a$  حد داشته باشد،

آن‌گاه تفاضل این تابع و تابع  $y=|x|$  باید در  $x=a$  حد داشته باشد. تفاضل این دو تابع همان تابع  $y=f(x)$  است که باید در  $x=a$  حد داشته باشد و این خلاف فرض مسئله است. پس تابع  $y=|x|+f(x)$  در  $x=a$  حد ندارد.

برای رد گزینه‌های (۱) و (۳)، تابع  $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

این تابع در  $x=0$  حد ندارد، ولی

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{f(x)} = 0$$

برای رد گزینه (۲)، تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x < 0 \\ 3 & x \geq 0 \end{cases}$  را در نظر بگیرید که در

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \text{ حد ندارد ولی}$$

۶۵۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2}$$

۶۵۲- گزینه ۲ حد مورد نظر به صورت  $\frac{0}{0}$  است. توجه کنید که

$$\text{بنابراین } x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4x + 4) = x^2(x+2)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x+2)^2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$$

۶۵۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4), \quad x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = \frac{4+4+4}{2+2} = 3 \end{aligned}$$

۶۶۰- گزینه ۱ به کمک اتحادهای مزدوج و جاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3} &= \lim_{x \rightarrow 8} \left( \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3} \times \frac{\sqrt[3]{x^2+2\sqrt[3]{x}+4}}{\sqrt[3]{x^2+2\sqrt[3]{x}+4}} \times \frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left( \frac{x-8}{x+1-9} \times \frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2+2\sqrt[3]{x}+4}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2+2\sqrt[3]{x}+4}} = \frac{3+3}{4+4+4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۶۶۱- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت  $\frac{0}{0}$  است، توجه کنید که

$$\begin{aligned} (2x+1)^3 + (2x-1)^3 &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 + 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \\ &= 16x^3 + 12x = 4x(4x^2 + 3) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)^3 + (2x-1)^3}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(4x^2 + 3)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 + 3) = 3$$

۶۶۲- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت  $\frac{0}{0}$  است. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^2 - 9x^2}{x - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^2(x^2 - 3)}{x - \sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (3x^2(x + \sqrt{3})) \\ &= 3(\sqrt{3})^2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

۶۶۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} x^2 - 27x &= x(x^2 - 27) = x(x-3)(x^2 + 3x + 9) \\ x^2 - x - 6 &= (x-3)(x+2) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 27x}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 + 3x + 9)}{x+2} = \frac{3(9+9+9)}{3+2} = \frac{81}{5} \end{aligned}$$

۶۶۴- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = 3$$

۶۶۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که  $[x]$  در سمت چپ ۳ مساوی ۲ است. پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x[x] - 3}{x[x] - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+1)}{2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{2} = 2 \end{aligned}$$

۶۶۶- گزینه ۱ بنابر اتحاد جاق و لاغر،  $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)(x^2+2x+4)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} \right) \times \left( \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2+2x+4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \right) \times \frac{1}{12} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} \right) \times \frac{1}{12} = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

۶۶۷- گزینه ۲ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x - \sqrt{x+2}}{3x - \sqrt{15x+6}} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{3x + \sqrt{15x+6}} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - x - 2}{9x^2 - 15x - 6} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(9x+3)} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x+1}{9x+3} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right) = \frac{3}{21} \times \frac{6+6}{2+2} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

۶۶۸- گزینه ۴ حد مورد نظر به صورت  $\frac{0}{0}$  است. فرض می‌کنیم  $\sqrt{x} = t$

در این صورت، اگر  $x \rightarrow 64$ ، آن‌گاه  $t \rightarrow 8$ ، بنابراین  $t > 0$ . اکنون می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} &= \lim_{t \rightarrow 8} \frac{t^2-8}{t^3-4} = \lim_{t \rightarrow 8} \frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 8} \frac{t^2+2t+4}{t+2} = \frac{2^2+2 \times 2+4}{2+2} = 3 \end{aligned}$$

۶۶۹- گزینه ۳ اگر فرض کنیم  $t = \sqrt[3]{x}$ ، آن‌گاه  $x = t^3$  و  $t \rightarrow 1$

بنابراین  $t > 0$  و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t^3}-t^3}{\sqrt[3]{t^3}-\sqrt{t^3}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{\frac{3}{2}}-t^3}{t^3-t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^{\frac{3}{2}}(t^{\frac{3}{2}}-1)}{t^3(t-1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^{\frac{3}{2}}(t-1)(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}+\dots+t+1)}{t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} (-t^{\frac{3}{2}}(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}+\dots+t+1)) = -6 \end{aligned}$$

۶۷۰- گزینه ۳ چون حد صورت کسر برابر صفر است و حد مورد نظر صفر

نیست، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، تا حد به صورت  $\frac{0}{0}$  در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-3) = 0 \Rightarrow \sqrt{b}=3 \Rightarrow b=9$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، مقدار حد را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{ax+9}-3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sqrt{ax+9}-3} \times \frac{\sqrt{ax+9}+3}{\sqrt{ax+9}+3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{ax+9-9} \times \frac{\sqrt{ax+9}+3}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+9}+3}{a} = \frac{6}{a} \end{aligned}$$

بنابراین  $\frac{6}{a} = \frac{1}{2}$  و در نتیجه  $a = 12$ . پس  $a+b = 21$

۶۷۱- گزینه ۱ دامنه تابع  $f$  به صورت  $(0, 2] \cup (0, -2]$  است، بنابراین

این تابع در نقطه  $x=2$  فقط پیوستگی چپ دارد، در نقطه  $x=-2$  فقط پیوستگی راست دارد و در نقطه  $x=0$  نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی

راست. تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  پیوسته است:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{3} = f(1)$

۶۷۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(2) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x) = 4 + 2 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x) = 4 - 2 = 2$$

بنابراین مقدار تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  نه با حد چپ آن در این نقطه برابر است نه با حد راست آن. پس این تابع در نقطه  $x=2$  نه پیوستگی چپ دارد، نه پیوستگی راست.



۶۷۹- گزینه ۲ راه حل اول در نقطه‌هایی که مقدار  $\frac{x+1}{4}$  عددی صحیح

شود، تابع  $y = \lceil \frac{x+1}{4} \rceil$  ناپیوسته است:

$$\frac{x+1}{4} = k \Rightarrow x = 4k - 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

یعنی در نقطه‌هایی به صورت  $4k-1$  تابع ناپیوسته است. پس تابع روی بازه  $(-1, 3)$  پیوسته است و در  $x=3$  ناپیوسته است. سپس روی بازه  $(3, 7)$  پیوسته است، یعنی حداکثر مقدار  $k$  برابر ۳ است.

راه حل دوم

$$-1 < x < k \xrightarrow{+1} 0 < x+1 < k+1 \xrightarrow{+4} 0 < \frac{x+1}{4} < \frac{k+1}{4}$$

برای اینکه  $\lceil \frac{x+1}{4} \rceil$  در این بازه پیوسته باشد، باید  $\frac{k+1}{4} = 1$ ، پس  $k=3$ .

۶۸۰- گزینه ۳ در نقطه‌هایی که مقدار  $\sqrt{x}$  عددی صحیح شود تابع

$y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$  ناپیوسته است.

$$\sqrt{x} = k \in \mathbb{R} \Rightarrow x = k^2$$

پس تابع در نقطه‌های  $x=0, x=1, x=4, x=9, \dots$  ناپیوسته است. یعنی تابع روی بازه  $(1, 4)$  پیوسته است، در  $x=4$  ناپیوسته است سپس روی بازه  $(4, 9)$  پیوسته است. پس حداکثر مقدار  $k$  برابر ۹ است.

۶۸۱- گزینه ۴ توجه کنید که  $f(4) = \lfloor \frac{4}{4} \rfloor + \lfloor -\frac{4}{4} \rfloor = 2 - 2 = 0$  و

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2 - 3 = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین تابع در  $x=4$  نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع در این نقطه حد دارد ولی پیوسته نیست.

۶۸۲- گزینه ۲ در  $x=4, x=16, x=64$  مقدار عبارت  $\frac{\sqrt{x}}{2}$

عدد صحیح می‌شود. پس تابع  $f(x) = \lfloor \frac{\sqrt{x}}{2} \rfloor$  در این نقطه‌ها پیوسته نیست.

در نقطه  $x=9$  مقدار عبارت  $\frac{\sqrt{x}}{2}$  عدد صحیح نیست. پس تابع  $y = \lfloor \frac{\sqrt{x}}{2} \rfloor$

در این نقطه پیوسته است.

۶۸۳- گزینه ۱ توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2-3x) = 5$

همچنین  $f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = |-3-a| = |3+a|$  در نتیجه

$$|3+a| = 5 \Rightarrow 3+a=5 \text{ یا } 3+a=-5 \Rightarrow a=2 \text{ یا } a=-8$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن  $a$  برابر  $-6$  است.

۶۸۴- گزینه ۲ توجه کنید که  $f(\frac{\pi}{4}) = 1+ab$  و

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (\sin 2x - a) = \sin \frac{\pi}{2} - a = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} (-2 - \sin 2x) = -2 - \sin \frac{\pi}{2} = -3$$

برای اینکه تابع  $f$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{4}$  پیوسته باشد، باید  $-3 = 1 - a = 1 + ab$  در

نتیجه  $a=4$  و  $a+b=3$ ، بنابراین  $b=-1$ ،  $1+ab=1+4b=-3$  و  $a+b=3$  پس

۶۷۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (7 - m^2 x^2) = 7 - 9m^2$$

همچنین  $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 6) = 3$  در نتیجه

$$7 - 9m^2 = 3 \Rightarrow 9m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm \frac{2}{3}$$

بنابراین حاصل ضرب مقدارهای ممکن  $m$  برابر  $-\frac{4}{9}$  است.

۶۷۴- گزینه ۱ چون تابع روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است، پس در  $x=-1$  هم

پیوسته است. بنابراین حدهای چپ و راست تابع و مقدار تابع در این نقطه برابرند:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{a}{x-2} = \frac{a}{-3}$$

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+2a}{x+2} = \frac{-1+2a}{-1+2} = 2a-1$$

بنابراین

$$2a-1 = -\frac{a}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{7}$$

۶۷۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(2) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2b) = 2 + 2b$$

بنابراین  $a=5$  و  $2+2b=5$ ، پس  $b=\frac{3}{2}$  و در نتیجه  $ab=\frac{15}{2}$

۶۷۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - a + 4) = a - a + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}} = 4$$

بنابراین به ازای هر مقدار  $a$  تابع  $f$  در  $x=1$  پیوسته است. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 4$$

۶۷۷- گزینه ۳

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x}{(x-1)(x-2)} \geq 0$$

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$4$	$+\infty$
$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$		+	-	+	-	+

بنابراین تابع  $f$  روی بازه‌های  $(-\infty, 0]$  و  $(1, 2)$ ،  $[4, +\infty)$  پیوسته است و حداکثر مقدار  $a$  برابر صفر است.

۶۷۸- گزینه ۱ توجه کنید که اگر  $x \geq 0$ ، آن‌گاه  $\lfloor x \rfloor \geq 0$  و  $f(x) = 0$  و

اگر  $x < 0$ ، آن‌گاه  $\lfloor x \rfloor < 0$  و  $f(x) = 2\lfloor x \rfloor$ . بنابراین تابع  $f$  در نقاط صحیح مثبت پیوسته است ولی در نقاط صحیح نامثبت، یعنی در نقاط  $x=0, x=-1, x=-2$  از بازه  $(-4, 4)$  ناپیوسته است.

۶۸۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (3x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (ax-b)$$

$$-3 = -a - b \quad (1)$$

همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax-b) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-1)$$

$$2a-b=3 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید  $a=2$  و  $b=1$  پس  $\frac{a}{b}=2$ .

۶۸۶- گزینه ۳

مخرج نباید هیچ جا صفر شود، در نتیجه باید دلتای معادله  $x^2 - 6x + m + 1 = 0$  منفی باشد:

$$\Delta = 36 - 4(m+1) < 0 \Rightarrow m > 8$$

پس  $m$  مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۶۸۷- گزینه ۱

مجموعه نقطه‌های ناپیوستگی تابع  $f$  مقدارهایی از  $x$  است که مخرج، یعنی  $x^2 - ax + b$ ، به ازای آن‌ها صفر است. بنابراین  $-3$  و  $4$  ریشه‌های مخرج هستند. به این ترتیب

$$a = \text{مجموع ریشه‌ها} = 4 - 3 = 1$$

$$b = \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = 4(-3) = -12$$

$$a + b = -11$$

۶۸۸- گزینه ۲

این تابع در تمام نقاطی که  $2x + \frac{1}{y}$  مقدار صفر داشته باشد، ناپیوسته است:

$$2x + \frac{1}{y} = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x = k - \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{2ky - 1}{4}$$

پس در تمام نقاطی که به صورت  $\frac{2k-1}{4}$  باشند و  $k$  عددی صحیح باشد، این

تابع ناپیوسته است. برای اینکه معلوم شود در بازه  $(-1, 2)$  چند نقطه به این صورت است، کافی است نامعادله  $-1 < x < 2$  را حل کنیم:

$$-1 < \frac{2k-1}{4} < 2 \Rightarrow -4 < 2k-1 < 8 \Rightarrow -\frac{3}{2} < k < \frac{9}{2}$$

$$k \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

بنابراین تابع  $f$  در شش نقطه از بازه  $(-1, 2)$  ناپیوسته است که این نقاط به صورت زیر هستند:

$k$	-1	0	1	2	3	4
$x$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$

۶۸۹- گزینه ۳

باید  $x^2 + kx + 4 \geq 0$  در نتیجه  $\Delta \leq 0$ ، یعنی

$$k^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq k \leq 4$$

بنابراین اگر  $k$  یکی از عددهای صحیح زیر باشد، تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

۶۹۰- گزینه ۲

$$7 - |x-2| \geq 0 \Rightarrow |x-2| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq x-2 \leq 7 \Rightarrow -5 \leq x \leq 9$$

بنابراین تابع  $f$  روی بازه  $[-5, 9]$  پیوسته است.

۶۹۱- گزینه ۱

توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 0$  و در یک همسایگی

چپ نقطه  $-2$  مقادیر تابع  $f$  منفی هستند. بنابراین  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty$ .

۶۹۲- گزینه ۴ توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow 3} |x-3| = 0$ ، و چون مقادیر  $|x-3|$

در یک همسایگی محذوف ۳ مثبت‌اند، پس  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{|x-3|} = +\infty$ .

۶۹۳- گزینه ۳ اگر  $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه  $x \rightarrow (-1)^+$  و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[-x]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

توجه کنید که مخرج کسر تابع  $f$  سه ریشه دارد:

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$$

این اعداد ریشه‌های صورت کسر تابع نیستند. از طرف دیگر،  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ . پس تابع  $f$  در نقطه  $x=0$  حد چپ نامتناهی دارد.

همین‌طور در نقطه‌های  $x=2$  و  $x=-2$  حد چپ تابع  $f$  نامتناهی است.

۶۹۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(x-1)}$$

از طرف دیگر،  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x(x-1) = 0$  و اگر  $x \rightarrow 0^-$ ، مقادیر  $x(x-1)$  مثبت

$$\text{هستند، پس } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(x-1)} = +\infty$$

۶۹۶- گزینه ۴ توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin x = 0$

اگر  $x \rightarrow \pi^+$ ، مقادیر  $\sin x$  منفی‌اند و اگر  $x \rightarrow \pi^-$ ، مقادیر  $\sin x$

$$\text{مثبت‌اند. بنابراین } \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = -\infty$$

۶۹۷- گزینه ۲ اگر  $x \rightarrow \pi^+$ ، آن‌گاه  $\cos x \rightarrow (-1)^+$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\cos x]}{\cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-1}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۶۹۸- گزینه ۲ حد مخرج  $f(x)$  در  $x=2$  و  $x=-3$  باید برابر صفر

باشد، یعنی  $x=2$  و  $x=-3$  جواب‌های معادله  $ax^2 + bx + 2 = 0$  هستند. با توجه به مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها معلوم می‌شود:

$$\begin{cases} 2x(-3) = \frac{2}{a} \\ 2 + (-3) = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

بنابراین  $a = -\frac{1}{3}$  و  $b = -\frac{1}{3}$  پس

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1+1}{-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 2} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$$

۶۹۹- گزینه ۴ چون حد مخرج وقتی  $x \rightarrow 2$  صفر است و حد مورد نظر

وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت  $\frac{0}{0}$  دربیاید.

بنابراین  $x=2$  یکی از عامل‌های صورت است و صورت را می‌توان این‌طور نوشت

$(2x^2 + mx + n) = (x-2)(2x+k)$ . به این ترتیب، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+k)}{(x-2)(x+2)} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{2 \times 2 + k}{2+2} = \frac{5}{2} \Rightarrow k=6$$

اکنون می‌توان نوشت  $2x^2 + mx + n = (x-2)(2x+6) = 2x^2 + 2x - 12$

$$\text{پس } m=2 \text{ و } n=-12 \text{ و در نتیجه } m-n=14$$

بنابراین علامت عبارت  $2x - \sqrt{x+3}$  را می‌توانیم با عددگذاری مشخص کنیم. مثلاً اگر  $x=2$ ، آن‌گاه مقدار عبارت برابر  $4 - \sqrt{5}$  است که عددی مثبت است و اگر  $x=0$ ، آن‌گاه مقدار عبارت برابر  $-\sqrt{3}$  است که عددی منفی است.

$x$	$-3$	$1$	$+\infty$
$2x - \sqrt{x+3}$	$-$	$+$	$+$

در یک همسایگی چپ  $x=1$  مقدار عبارت منفی است، پس  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ .

در یک همسایگی راست  $x=1$  مقدار عبارت مثبت است، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

**۷۰۸-گزینه ۳** چون  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1$  پس باید  $ax^2 + 6x + b$  در

$x=2$  برابر صفر شود و مقدار این عبارت در دو طرف  $x=2$  عددی منفی باشد. بنابراین باید  $x=2$  ریشه مضاعف معادله  $ax^2 + 6x + b = 0$  باشد.

یعنی این عبارت باید به صورت  $a(x-2)^2$  باشد. چون  $a < 0$ ، پس

$$ax^2 - 4ax + 4a = ax^2 + 6x + b, \quad -4a = 6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, \quad b = 4a = -6$$

پس  $ab = 9$ .

**۷۰۹-گزینه ۳** چون حد مخرج وقتی  $x \rightarrow 1$  برابر صفر است و حد

مورد نظر وجود دارد، باید حد صورت هم صفر باشد، تا حد به صورت  $\frac{0}{0}$

در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+b}) = 0 \Rightarrow \sqrt{2+a} = \sqrt{1+b} \Rightarrow b = a+1$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج مقدار حد را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+a+1}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+a+1}}{x-1} \times \frac{\sqrt{2x+a} + \sqrt{x+a+1}}{\sqrt{2x+a} + \sqrt{x+a+1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+a-x-a-1}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{2x+a} + \sqrt{x+a+1}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{a+2}} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2\sqrt{a+2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \sqrt{a+2} = 3 \Rightarrow a = 7$$

پس  $b = 8$  و در نتیجه  $ab = 56$ .

**۷۱۰-گزینه ۴** ابتدا ضابطه تابع  $f$  را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}, \quad x \neq 2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

پس نمودار تابع  $f$  در اطراف خط  $x=1$  به صورت مقابل است:



**۷۱۱-گزینه ۲** توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)-2) = 0$  و مقادیر  $f(x)-2$

در یک همسایگی محذوف نقطه صفر منفی هستند. زیرا در این همسایگی مقادیر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)-2} = -\infty \text{ بنابراین } f(x) \text{ کمتر از } 2 \text{ هستند.}$$

**۷۰۰-گزینه ۴** توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4-3}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0-3}{x-1} = +\infty$$

بنابراین نمودار تابع  $f$  در اطراف خط  $x=1$  به صورت زیر است:



**۷۰۱-گزینه ۳** توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0$  و مقادیر  $f$  در یک

همسایگی چپ نقطه  $4$ ، منفی هستند. بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty$  بقیه

گزینه‌ها نادرست هستند.

**۷۰۲-گزینه ۳** توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (2x+1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2+x) = 0$$

از طرف دیگر، وقتی  $x \rightarrow (-1)^+$ ، مقادیر  $x^2+x$  منفی هستند

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x+1}{x^2+x} = +\infty \text{ پس } (x^2+x = \frac{x}{x+1}) \text{ مثبت منفی}$$

**۷۰۳-گزینه ۱** اگر  $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه  $x$  و  $f(x) = \frac{2}{x-2}$  در

نتیجه  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  است. اگر  $x \rightarrow 2^-$ ، آن‌گاه  $x$  و  $f(x) = \frac{-1}{x-2}$

و در نتیجه  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ .

**۷۰۴-گزینه ۱** در ریشه‌های مخرج ممکن است تابع حد چپ نامتناهی

داشته باشد. ریشه‌های مخرج  $x=1$  و  $x=2$  هستند. از طرف دیگر،

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2}{x-2}, \quad x \neq 1$$

پس  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$  بنابراین تابع فقط در  $x=2$  حد

چپ نامتناهی دارد.

**۷۰۵-گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که اگر  $x \neq 1$ ، آن‌گاه

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{-2x^2 + 4x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{-2(x-1)^2} = \frac{x-2}{-2(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{-2x^2 + 4x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{-2(x-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

**۷۰۶-گزینه ۲** اگر  $x \rightarrow (\frac{1}{3})^+$ ، آن‌گاه

$$\pi x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+ \Rightarrow \cos(\pi x) \rightarrow (\frac{1}{2})^-$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3})^+} \frac{3x+1}{2 \cos(\pi x) - 1} = \frac{2}{-1} = -2$$

**۷۰۷-گزینه ۳** باید علامت عبارت  $2x - \sqrt{x+3}$  را در اطراف نقطه

$x=1$  مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که  $x=1$  تنها جواب معادله

$$2x - \sqrt{x+3} = 0$$

$$2x = \sqrt{x+3} \Rightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -\frac{3}{4} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

## ۷۱۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 2x^2) = 0$$

از طرف دیگر، چون  $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ ، وقتی  $x \rightarrow 0$ ، مقادیر

$$x^3 - 2x^2 \text{ منفی هستند. پس } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^3 - 2x^2} = +\infty$$

۷۱۳- گزینه ۴ توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow 5^-} ([x]^2 - 25) = 16 - 25 = -9$  و

$\lim_{x \rightarrow 5} (x-5) = 0$  و مقادیر  $x-5$  در یک همسایگی چپ ۵ منفی‌اند.

$$\text{بنابراین } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{[x]^2 - 25}{x-5} = +\infty$$

۷۱۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اعداد صحیح، ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع  $f$  هستند:

$$x - [x] = 0 \Rightarrow x = [x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

اکنون دقت کنید که از اعداد صحیح فقط  $x=0$  و  $x=1$  ریشهٔ صورت  $f(x)$  هستند. حد چپ و حد راست تابع در این نقاط را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$$

بنابراین تابع در نقطه‌های  $x=0$  و  $x=1$  حد چپ منتهای و حد راست منتهای دارد. در بقیهٔ اعداد صحیح حد صورت کسر صفر نیست، درحالی‌که حد راست مخرج کسر صفر است. پس تابع  $f$  در این نقاط حد راست نامتناهی دارد.

۷۱۵- گزینه ۲ فرض می‌کنیم  $\sqrt{x} = t$ . در این صورت اگر  $x \rightarrow 0^+$  آن‌گاه  $t \rightarrow 0^+$  و

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt{x}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 - t^3}{t^6 - t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t-1}{t(t^3-1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t(t^2+t+1)} = +\infty \end{aligned}$$

۷۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x - 2 \sin x}} = \frac{1}{2 \sin x (\cos x - 1)}$$

عبارت  $\cos x - 1$  همواره نامثبت است. یعنی  $\cos x - 1 \leq 0$ . از طرف دیگر اگر  $x \rightarrow 0^-$ ، آن‌گاه  $\sin x \rightarrow 0^+$  و اگر  $x \rightarrow 0^+$ ، آن‌گاه  $\sin x \rightarrow 0^+$ . بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2 \sin x (\cos x - 1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \sin x (\cos x - 1)} = -\infty$$

۷۱۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 &= (x-1)(x^2 - 3x + 2) \\ &= (x-1)(x-1)(x-2) = (x-1)^2(x-2) \end{aligned}$$

بنابراین در هر دو حالت  $x \rightarrow 1^+$  و  $x \rightarrow 1^-$ :

$$(x-1)^2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow (x-1)^2(x-2) \rightarrow 0^-$$

پس  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

۷۱۸- گزینه ۱ در یک همسایگی راست  $x=2$  تساوی  $[x]=2$  برقرار

$$\text{است. پس } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2[x]+k}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6+k}{x-2} = +\infty$$

چون  $(x-2) \rightarrow 0^+$ ، پس  $6+k > 0$  و در نتیجه  $k > -6$ .

در یک همسایگی چپ  $x=2$  تساوی  $[x]=1$  برقرار است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2[x]+k}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2+k}{x-2} = +\infty$$

چون  $(x-2) \rightarrow 0^-$ ، پس  $2+k < 0$  و در نتیجه  $k < -2$ . بنابراین  $-6 < k < -2$ .

۷۱۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (x) = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (\sin x - \cos x) = 0$$

از طرف دیگر، وقتی  $x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-$  مقادیر  $\sin x$  از مقادیر  $\cos x$

کوچک‌ترند، پس مقادیر  $\sin x - \cos x$  منفی‌اند. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{x}{\sin x - \cos x} = -\infty$$

۷۲۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \frac{f}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \frac{f}{0^-} = -\infty$$

پس نمودار تابع  $f$  در اطراف خط  $x=-2$  به‌صورت مقابل است.

۷۲۱- گزینه ۳ از روی شکل معلوم است که  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  و

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۲ است.

۷۲۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ . بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -2$$

۷۲۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \frac{1}{x} + x^2}{2x - \frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2(x-1) + x - 1 + x^3}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{(2x^2 - 1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{2x^2 - 2x^2 - x + 1} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

$f(x) > 1$  پس در  $+\infty$  نمودار تابع  $f$  پایین‌تر از خط  $y=1$  قرار دارد و در  $-\infty$  نمودار تابع  $f$  بالاتر از خط  $y=1$  قرار دارد.



**گزینه ۳ - ۷۳۱** فرض می‌کنیم  $t=1-x$ . در این صورت اگر  $x \rightarrow +\infty$ .

آن‌گاه  $t \rightarrow -\infty$ . اکنون از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(1-x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -2$$

**گزینه ۲ - ۷۳۲** ابتدا توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . از طرف دیگر

اگر  $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه  $f(x) > 2$ . بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty$$

**گزینه ۲ - ۷۳۳** ابتدا توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  و

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ . همچنین اگر  $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه  $f(x) > 1$  و

$[f(x)] = 1$  و اگر  $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه  $f(x) < -2$  و  $[f(x)] = -3$ . بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -3$$

پس  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -3 - 1 = -4$

**گزینه ۲ - ۷۳۴** ابتدا توجه کنید که اگر  $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه  $\frac{1}{x} \rightarrow 0^+$

در نتیجه  $[\frac{1}{x}] = 0$ . بنابراین  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot [\frac{1}{x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$

در واقع در  $+\infty$  تابع  $f(x) = x[\frac{1}{x}]$  تابع  $g(x) = 0$  مساوی‌اند و حد آن‌ها برابر صفر است.

**گزینه ۳ - ۷۳۵** ابتدا توجه کنید که اگر  $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر  $2x$ ،  $x$  و

$3x-1$  همگی منفی‌اند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x| + |x|}{|3x-1| - |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-x}{1-2x-(-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{-x+1} = 3$$

**گزینه ۴ - ۷۳۶** توجه کنید که اگر  $n=1$ ، آن‌گاه مقدار حد برابر صفر

است که وجود دارد. اگر  $n > 1$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{n-1} - 2x}{x^f - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^{n-1-f}) = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-5}$$

برای اینکه این حد وجود نداشته باشد، باید  $n-5 \geq 1$ ، یعنی  $n \geq 6$ . بنابراین کوچک‌ترین عددی که ویژگی مورد نظر را دارد، ۶ است.

**گزینه ۳ - ۷۳۷** توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|mx| - 2x + 1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|m||x| - 2x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-|m|-2)x}{-x} = |m| + 2$$

بنابراین

$$|m| + 2 = 6 \Rightarrow |m| = 4 \Rightarrow m = \pm 4$$

به این ترتیب، عددهای ۴ و -۴ ویژگی مورد نظر را دارند و حاصل ضرب آن‌ها برابر -۱۶ است.

**گزینه ۴ - ۷۲۴** ابتدا توجه کنید که وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر  $1-3x$

مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |1-3x|}{5x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (1-3x)}{5x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-1}{5x-3} = 1$$

**گزینه ۲ - ۷۲۵** توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x-2)^f (4x^2+1)^f}{(6x^f - 2x^3 + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3^f x^f \dots)(4^f x^f + \dots)}{6^2 x^f + \dots}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^f \times 4^f x^f \dots}{6^2 x^f + \dots} = \frac{3^f \times 4^f}{6^2} = 36$$

**گزینه ۱ - ۷۲۶** توجه کنید که اگر  $n$  عددی طبیعی باشد،  $3n+4$  و

$2n+6$  از ۱ بیشترند، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3n+4} + x + 1}{x^{2n+6} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3n+4-(2n+6)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-2}$$

اگر این حد صفر باشد، باید  $n-2 < 0$ ، یعنی  $n < 2$ . بنابراین فقط  $n=1$  ویژگی مورد نظر را دارد.

**گزینه ۲ - ۷۲۷** اگر  $m$  عددی مثبت باشد، وقتی  $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر

$1-mx$  منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(mx-1)+2x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m+2)x-2}{3x+1} = \frac{m+2}{3}$$

بنابراین  $\frac{m+2}{3} = 3$ . پس  $m=7$ . اگر  $m$  عددی منفی باشد، وقتی

$x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر  $1-mx$  مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-mx)+2x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-m)x}{3x+1} = \frac{2-m}{3}$$

بنابراین  $\frac{2-m}{3} = 3$ . پس  $m=-7$ . اگر  $m=0$ ، حد مورد نظر برابر  $\frac{2}{3}$

می‌شود که درست نیست. بنابراین مقادیر  $m$  عددهای ۷ و -۷ هستند و حاصل ضرب آن‌ها -۴۹ است.

**گزینه ۴ - ۷۲۸** چون حد مورد نظر برابر  $-\infty$  شده است، پس باید

درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت کمتر باشد و ضریب بزرگ‌ترین جمله در صورت باید منفی باشد. برای اینکه درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت کمتر باشد، باید

$5-a=0$ ، یعنی  $a=5$ . توجه کنید که اگر  $a=5$ ، بزرگ‌ترین جملهٔ صورت  $-x^2$  می‌شود، بنابراین حد مورد نظر برابر  $-\infty$  است.

**گزینه ۳ - ۷۲۹** چون درجهٔ مخرج کسر داده شده برابر ۲ است، اگر در صورت

این کسر جمله شامل  $x^3$  وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر  $-\infty$  یا  $+\infty$  می‌شود. بنابراین ضریب  $x^3$  در صورت کسر داده شده صفر است، یعنی  $a=3$ .

در نتیجه حد مورد نظر برابر است با  $\frac{b+2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b+2)x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 1} = \frac{b+2}{3}$$

بنابراین  $\frac{b+2}{3} = 5$ . پس  $b=13$ . به این ترتیب  $a+b=16$ .

**گزینه ۴ - ۷۳۰** توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

از طرف دیگر  $f(x) = \frac{x-1}{x+3} = 1 - \frac{4}{x+3}$ . اگر  $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه

$\frac{4}{x+3} \rightarrow 0^+$ ، پس  $f(x) < 1$ . اگر  $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه  $\frac{4}{x+3} \rightarrow 0^+$

**۷۴۴- گزینه ۴** توجه کنید که جمله دارای بزرگ‌ترین توان در صورت کسر برابر  $(3x^2)^3 - (2x^3)^2 = -23x^6$  است و جمله دارای بزرگ‌ترین توان در مخرج کسر برابر  $9x^6 = (3x^2)^2$  است. پس حد مورد نظر برابر است با  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-23x^6}{9x^6} = -\frac{23}{9}$

**۷۴۵- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که اگر  $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر  $3x^2 - 1$ ،  $2x^2 - 3$  و  $5x^2 - x$  مثبت‌اند، پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3x^2 - 1| - |2x^2 - 3|}{|5x^2 - x| - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 1 - 2x^2 + 3}{5x^2 - x - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{4x^2 - x} = \frac{1}{4}$$

**۷۴۶- گزینه ۴** توجه کنید که باید  $m \neq 0$  و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)^5 (mx+2)^y}{(2mx-1)^f (6x-1)^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3^5 x^5 + \dots)(m^y x^y + \dots)}{(2^f m^f x^f - \dots)(6^a x^a - \dots)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^5 m^y x^{12} + \dots}{2^f \times 6^a m^f x^{12} + \dots} = \frac{3^5 m^y}{2^f \times 6^a m^f} = \frac{m^3}{2^{12} \times 3^3}$$

بنابراین  $\frac{m^3}{2^{12} \times 3^3} = -1$ ، پس  $m = -48$ .

**۷۴۷- گزینه ۲** توجه کنید که اگر  $n$  عددی طبیعی باشد،  $3n+2$  و  $2n+5$  از ۲ بیشتر هستند، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3n+2} + x^2 + 1}{x^{2n+5} - x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3n+2-(2n+5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-3}$$

اگر این حد صفر باشد، باید  $n-3 < 0$ ، یعنی  $n < 3$ ، بنابراین فقط  $n=1$  و  $n=2$  ویژگی مورد نظر را دارند.

**۷۴۸- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل  $x^3$  وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر  $-\infty$  یا  $+\infty$  می‌شود. بنابراین ضریب  $x^3$  در صورت کسر داده شده صفر است. در نتیجه  $2a-1=0$ ، پس  $a=\frac{1}{2}$ . به

این ترتیب حد مسئله می‌شود  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{3x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = 1$ . نتیجه  $a+b=\frac{3}{2}$  و  $b=1$ .

**۷۴۹- گزینه ۳** اگر  $n > 3$ ، آن‌گاه  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^n} = 1$ ، اگر  $n=3$ ، آن‌گاه  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x^3 - 1}{x^3 - 2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{-x^3} = -5$ ، اگر  $n < 3$ ، آن‌گاه  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{-2x^3} = -2$ ، پس سه مقدار مختلف برای  $L$  وجود دارد.

**۷۵۰- گزینه ۴** توجه کنید که اگر  $f(x) = ax+b$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}}{ax+b} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{b}{a}}{ax + \frac{b}{a}} = \frac{1}{a^2}$$

بنابراین  $\frac{1}{a^2} = 16$ ، چون  $a$  منفی است، پس  $a = -\frac{1}{4}$ . به این ترتیب

$$b = \frac{15}{4} \text{ در نتیجه } -\frac{3}{4} + b = 3 \text{، پس } f(3) = 3 \text{ و } f(x) = -\frac{1}{4}x + b$$

$$\text{بنابراین } f(-1) = 4 \text{، پس } f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$$

**۷۳۸- گزینه ۲** اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل  $x^2$  وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر  $-\infty$  یا  $+\infty$  می‌شود. بنابراین ضریب  $x^2$  باید صفر باشد، یعنی  $a+1=0$ ، پس  $a=-1$ . در این صورت، حد مورد نظر برابر است با  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x+4}{(b-2)x-1} = \frac{-5}{b-2}$ ، بنابراین  $\frac{-5}{b-2} = \frac{1}{2}$ ، در نتیجه  $b=-8$ . به این ترتیب،  $ab=8$ .

**۷۳۹- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل  $x^3$  وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر  $-\infty$  یا  $+\infty$  می‌شود. بنابراین ضریب  $x^3$  در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه  $2a-1=0$ ، پس  $a=\frac{1}{2}$ . به این ترتیب حد مسئله می‌شود  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{4}{2} = 2$ . در نتیجه  $a+b=\frac{5}{2}$  و  $b=2$ .

**۷۴۰- گزینه ۲** توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  همچنین اگر  $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه  $f(x) > 0$  و اگر  $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه  $f(x) < 0$ . بنابراین نمودار تابع  $f$  در  $+\infty$  بالای خط  $y=0$  و در  $-\infty$  پایین خط  $y=0$  قرار دارد.

**۷۴۱- گزینه ۴** **گزینه ۱**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-f(x)) = 0$  و اگر  $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر  $1-f(x)$  مثبت‌اند. بنابراین  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f}{1-f(x)} = +\infty$

**گزینه ۲**  $\lim_{x \rightarrow +1^+} f(x) = +\infty$

**گزینه ۳**  $\lim_{x \rightarrow +1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +1^-} ((x+2)f(x)) = -\infty$

**گزینه ۴**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-f(x)) = 0$

و اگر  $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر  $1-f(x)$  منفی‌اند. بنابراین  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-f}{1-f(x)} = +\infty$

پس گزینه (۴) درست نیست.

**۷۴۲- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

اگر  $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه  $f(x) < -2$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-2)^-} f(t) = -\infty$$

از طرف دیگر اگر  $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه  $f(x) > 2$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

**۷۴۳- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که اگر  $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه  $-\frac{1}{x} \rightarrow 0^-$  و در نتیجه  $[-\frac{1}{x}] = -1$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[-\frac{1}{x}] - 1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

ولی در نقطه  $x=3$  که به ازای آن  $\frac{1}{3}x-1=0$ ، عامل صفر کننده  $x-3$  موجب پیوستگی می‌شود. پس تابع  $f$  فقط در یک نقطه از بازه  $(0, 9)$  ناپیوسته است.

ریاضی - ۸۵

**گزینه ۲ - ۷۵۵** برای آنکه تابع روی دامنه‌اش پیوسته باشد، باید در  $x=a$  پیوسته باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \frac{a}{4} \Rightarrow 4 = 4a - a^2$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a=2$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

**گزینه ۳ - ۷۵۶** حد چپ و حد راست تابع در نقطه  $x=2$  باید برابر مقدار تابع در این نقطه باشند، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + bx - 1) = 5 \Rightarrow 4 + 2b - 1 = 5 \Rightarrow b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$$

چون  $b=1$ ، در نتیجه  $2a+1=5$ ، یعنی  $a=2$ .

خارج از کشور تجربی - ۹۱

**گزینه ۲ - ۷۵۷** برای برقراری شرط پیوستگی تابع روی  $\mathbb{R}$ ، پیوستگی آن در نقاط  $x = \pm 1$  را بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a+b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1 \times [1^-] = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a+b=0$$

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -a+b \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= (-1) \times [(-1)^+] = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a+b=1$$

بنابراین  $a = -\frac{1}{2}$  و  $b = \frac{1}{2}$ ، در نتیجه به ازای  $|x| \geq 1$ ،  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

ریاضی - ۹۰

**گزینه ۱ - ۷۵۸** توجه کنید که اگر  $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه  $[x] + [-x] = -1$ .

بنابراین تابع به صورت  $f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$  است و به ازای  $a = -1$

ریاضی - ۹۶

**گزینه ۲ - ۷۵۹** در نقطه  $x = -1$ ، باید حد چپ و حد راست تابع با هم برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2\sqrt{3-x}}{1} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -a+1$$

بنابراین

$$\frac{1}{4} = -a+1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

**گزینه ۱ - ۷۵۱** ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه  $x = \pi$  را پیدا

می‌کنیم. توجه کنید که اگر  $x \rightarrow \pi^-$ ، آن‌گاه  $\frac{x}{2} \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-$ ، بنابراین

$$\cos \frac{x}{2} \rightarrow 0^+, \lim_{x \rightarrow \pi^-} [\cos \frac{x}{2}] = 0 \text{ و } 2x \rightarrow (2\pi)^-, \text{ بنابراین}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin 2x] = -1 \text{ پس } \sin 2x \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sin \frac{x}{2} \times 0 - \cos x \times (-1)) = \cos \pi = -1$$

از طرف دیگر، اگر  $x \rightarrow \pi^+$ ، آن‌گاه  $\frac{x}{2} \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+$ ، بنابراین  $\cos \frac{x}{2} \rightarrow 0^-$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\cos \frac{x}{2}] = -1 \text{ و } 2x \rightarrow (2\pi)^+, \text{ بنابراین } \sin 2x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin 2x] = 0$$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (\sin \frac{x}{2} \times (-1) - \cos x \times 0) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -1$$

**گزینه ۱ - ۷۵۲** چون حد مخرج کسر صفر است و حد مورد نظر وجود

دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد به صورت  $\frac{0}{0}$  دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{ax+b} - 2) = 0 \Rightarrow \sqrt{a+b} = 2 \Rightarrow a+b=4 \Rightarrow b=4-a$$

اکنون با استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{ax+b} - 2) \times (\sqrt{ax+b} + 2)}{(x^2 - 1) \times (\sqrt{ax+b} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax + b - 4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - a}{(x-1)(x+1)} \times \frac{1}{2+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{x+1} \times \frac{1}{4} = \frac{a}{8}$$

بنابراین  $\frac{a}{8} = \frac{3}{2}$  و در نتیجه  $a = 12$ ، پس  $b = -8$ .

**گزینه ۳ - ۷۵۳** چون  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{2x^2 + ax + b} = -\infty$ ، بنابراین باید مخرج

کسر به صفر میل کند. همچنین چون حد چپ و راست برابر  $-\infty$  است، پس  $x=3$  باید ریشه مضاعف مخرج کسر باشد. بنابراین

$$2x^2 + ax + b = 2(x-3)^2 \Rightarrow 2x^2 + ax + b = 2x^2 - 12x + 18$$

$$a = -12, b = 18 \Rightarrow a+b = 6$$

ریاضی - ۹۳

**گزینه ۱ - ۷۵۴** باید تعداد نقاطی را پیدا کنیم که به ازای آن‌ها

$$(\frac{1}{3}x - 1) \in \mathbb{Z}$$

$$0 < x < 9 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3}x < 3 \Rightarrow -1 < \frac{1}{3}x - 1 < 2$$

$$\frac{(\frac{1}{3}x - 1) \in \mathbb{Z}}{\longrightarrow} (\frac{1}{3}x - 1) \in \{0, 1\}$$

**۷۶۴- گزینه ۱** وقتی  $x \rightarrow (\frac{1}{e})^+$  ،  $\cos \pi x$  با مقادیرهای کوچک‌تر از

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ به } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ نزدیک می‌شود، پس}$$

$$\cos \pi x \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2})^- \Rightarrow 4 \cos^2 \pi x \rightarrow 3^- \Rightarrow [4 \cos^2 \pi x] = 2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{[4 \cos^2 \pi x] - 12x}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{2 - 12x}{ax + b} = \frac{1}{2}$$

چون حد صورت برابر صفر است، حد مخرج کسر نیز باید صفر شود تا حد به صورت  $\frac{0}{0}$  دربیاید، زیرا در غیر این صورت حاصل حد برابر صفر می‌شود.

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} (ax + b) = 0 \Rightarrow \frac{a}{e} + b = 0 \Rightarrow a = -eb$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{2 - 12x}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{2 - 12x}{-ebx + b} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{2(1 - 6x)}{b(1 - 6x)} = \frac{2}{b}$$

بنابراین  $\frac{2}{b} = \frac{1}{2}$ ، یعنی  $b = 4$ ، چون  $a = -eb$  پس  $a = -24$ .

در نتیجه  $a + b = -20$ .

[خارج از کشور ریاضی - ۹۲](#)

**۷۶۵- گزینه ۴** ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه  $x = 3$  را

حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax - 3a - \frac{3}{x}) = 3a - 3a - \frac{3}{3} = -\frac{3}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3} \times \frac{1 + \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{1 + \sqrt{x - \sqrt{x+1}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - x + \sqrt{x+1}}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{1 + \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{1 - x + \sqrt{x+1}}{x - 3} \times \frac{1 - x - \sqrt{x+1}}{1 - x - \sqrt{x+1}} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1-x)^2 - (x+1)}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{1 - x - \sqrt{x+1}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x(x-3)}{x-3} \times \frac{1}{-4} \times \frac{1}{-4} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

از طرف دیگر  $f(3) = -\frac{3}{8}$ . بنابراین تابع به‌ازای هر مقدار  $a$  در نقطه  $x = 3$  پیوسته است.

[خارج از کشور ریاضی - ۹۴](#)

**۷۶۶- گزینه ۴** برای اینکه تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته باشد، باید حد

تابع در این نقطه برابر  $a$  باشد، پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1} \times \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\sqrt{2}\sqrt{(1-x)^2}} = -\infty \end{aligned}$$

**۷۶۰- گزینه ۴** در نقطه  $x = 0$ ، باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1-x}) = 2 \end{aligned}$$

بنابراین اگر  $f(0) = a = 2$ ، تابع در نقطه  $x = 0$  پیوسته است.

**۷۶۱- گزینه ۲** چون حد مورد نظر برابر عددی غیر صفر و حد صورت

برابر صفر است، باید حد مخرج هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax + b) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، حد مورد نظر می‌شود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax - 2a} \times \frac{x + \sqrt{3x-2}}{x + \sqrt{3x-2}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{a(x-2)(x + \sqrt{3x-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{a(x-2)(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{1}{a(2+2)} = \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

[خارج از کشور تجربی - ۹۵](#)

چون  $b = -2a$ ، پس  $b = -1$ .

**۷۶۲- گزینه ۲** توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2||x+1|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{|x-2||x+1|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{2x + \sqrt{x^2 + 12}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2||x+1|(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{2(x^2 - 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{2(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{2(x+2)} = \frac{-(3) \times 8}{2 \times 4} = -2 \end{aligned}$$

[ریاضی - ۹۰](#)

**۷۶۳- گزینه ۴** از فرض سؤال نتیجه می‌شود  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x^2|}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1$

پس  $a = -1$ . برای محاسبه حد راست عبارت در  $x = -2$  دقت کنید که به ازای  $-2 < x < 2$ ، عبارت  $x^2 - 4$  منفی است. بنابراین باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4 - x^2}{-x^2 - x + 2} &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(-x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2-x}{-x+1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

[خارج از کشور ریاضی - ۹۰](#)



۷۷۰- گزینه ۲ با توجه به آنکه  $f(x) = [x^2 - 3] = [x^2] - 3$  باید  $y = [x^2]$  روی این بازه پیوسته باشد. تابع مورد نظر در نقاط  $x = \pm\sqrt{n}$  (که  $n \in \mathbb{N}$ ) ناپیوسته است. پس در نقاط  $x = \sqrt{5}$  و  $x = 2$  ناپیوسته است و در نتیجه بازه مورد نظر  $[2, \sqrt{5}]$  است، بنابراین  $k = \sqrt{5} - 2$ . ریاضی - ۸۸

با توجه به اینکه تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای  $a$  پیدا نمی‌شود.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۷۶۷- گزینه ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه  $x = 2$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 2 - a = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{a(1 + \sqrt{1-x})}{x^2 - 2x} \times \frac{1 - \sqrt{1-x} + \sqrt{(1-x)^2}}{1 - \sqrt{1-x} + \sqrt{(1-x)^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1+x)}{x(x-2)(1 - \sqrt{1-x} + \sqrt{(1-x)^2})} = \frac{-a}{6} \end{aligned}$$

برای اینکه تابع  $f$  همواره پیوسته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در نقطه  $x = 2$  برابر باشند، بنابراین

$$\frac{-a}{6} = 2 - a \Rightarrow 12 - 6a = -a \Rightarrow 12 = 5a \Rightarrow a = 2/5$$

ریاضی - ۹۴

۷۶۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

پیوستگی تابع در نقطه‌های  $x = 0$  و  $x = 1$  را بررسی می‌کنیم تا گزینه درست مشخص شود:

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$$

$$f(1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = -1$$

پس تابع در  $x = 0$  پیوسته و در  $x = 1$  ناپیوسته است. به همین ترتیب این تابع در تمام نقطه‌های زوج پیوسته و در تمام نقطه‌های فرد ناپیوسته است.

ریاضی - ۹۳

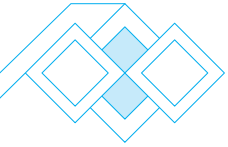
۷۶۹- گزینه ۳ نشان می‌دهیم تابع  $g \circ f$  در  $x = 0$  پیوسته است. حد چپ و حد راست تابع  $g \circ f$  در نقطه  $x = 0$  را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 0^- : f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-\frac{1}{2})} g(t) = -2 \times \frac{-1}{2} = 1$$

$$x \rightarrow 0^+ : f(x) = 2x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 1$$

با توجه به اینکه  $g(f(0)) = 1$ ، تابع  $g \circ f$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته است. ناپیوستگی توابع دیگر نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. (بررسی سایر گزینه‌ها بر عهده خواننده)

خارج از کشور ریاضی - ۸۶



۷۷۶- گزینه ۲ اگر  $-h^2 = k$  و  $h \rightarrow 0$ ، آن گاه  $k \rightarrow 0^-$  و در نتیجه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h^2) - f(1)}{h^2} = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{f(1+k) - f(1)}{-k}$$

$$= - \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{f(1+k) - f(1)}{k} = -f'(1) = -2$$

۷۷۷- گزینه ۴ می توان نوشت

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)^2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} ((x+1)^2(x^2+1)^2) = (1+1)^2(1+1)^2 = 16$$

۷۷۸- گزینه ۱ مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x=0$  را به کمک تعریف به دست

می آوریم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|+1} = 1$$

بنابراین تابع  $f$  در نقطه  $x=0$  مشتق پذیر است.

۷۷۹- گزینه ۴ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع در

$x=2$  را به دست می آوریم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = +\infty$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = -\infty$$

۷۸۰- گزینه ۱ مشتق چپ و مشتق راست تابع  $f$  در  $x=0$  را به دست

می آوریم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt[3]{x}) = 0$$

بنابراین  $f'(0) = 0$  و نمودار تابع در این نقطه، خط مماس موازی محور طول ها دارد.

۷۸۱- گزینه ۲ شیب خطی که از نقطه های  $A(-1, 3)$  و  $B(4, 4)$

می گذرد، برابر است با  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{5}$ . از طرف دیگر، مشتق تابع  $f$  در نقطه  $-1$

با شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه  $A$  برابر است. بنابراین  $f'(-1) = \frac{1}{5}$ .

۷۸۲- گزینه ۲ اگر  $x \rightarrow 3$ ، آن گاه شیب خطی که نقطه های  $A$  و  $B$  را

به هم وصل می کند، به شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f$  در  $x=3$  نزدیک و نزدیک تر می شود. بنابراین

$$2 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{k}{x} \Rightarrow 2 = \frac{k}{3} \Rightarrow k = 6$$

۷۷۱- گزینه ۱ در نقاط  $x=b$  و  $x=c$  شیب خط مماس بر نمودار

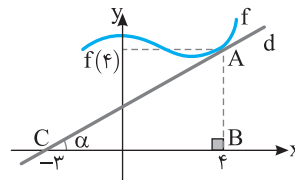
تابع  $f$  صفر است. در نقطه  $x=d$  شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f$  مثبت و در نقطه  $x=a$  شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f$  منفی است. بنابراین مشتق تابع  $f$  در  $x=a$  از بقیه کوچک تر است.

۷۷۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که شیب خط  $d$  برابر است با  $f'(4)$ . از

طرف دیگر، شیب خط  $d$  برابر با  $\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{f(4)}{4}$  است. به این ترتیب

$$\text{پس } f'(4) = \frac{f(4)}{4}$$

$$f(4) + f'(4) = 2 \Rightarrow f(4) + \frac{f(4)}{4} = 2 \Rightarrow f(4) = \frac{8}{5}$$



۷۷۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x) - f(2))}{x-2} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 2f'(2) = 6$$

۷۷۴- گزینه ۱ راه حل اول اگر به جای ۲ در صورت کسر داده شده،

$\sqrt{f(2)}$  را قرار دهیم، نتیجه می شود

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(2)}}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(2)}}{x(x-2)} \times \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(2)}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(2)})x}$$

$$= f'(2) \times \frac{1}{2(\sqrt{f(2)} + \sqrt{f(2)})} = f'(2) \times \frac{1}{4\sqrt{f(2)}} = \frac{2 \times 2}{2-1} \times \frac{1}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم. (درس هشتم همین فصل را

بینید.)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = \frac{2 \times 2}{2-1} = \frac{1}{2}$$

۷۷۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{2h^2 + 3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \times \frac{1}{3+h} \right)$$

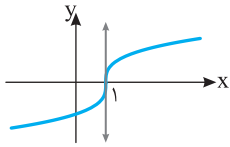
$$= f'(3) \times \frac{1}{3+0} = \frac{6}{3} = 2$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + |x| \sqrt{x+8} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - x \sqrt{x+8}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \sqrt{x+8}) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین  $f'_+(0) - f'_-(0) = 4$ .

**گزینه ۴ - ۷۸۹** تابع  $f(x) = \sqrt{x-1}$  در نقطه  $x=1$  مشتق ندارد، زیرا



$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} - 0}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

ولی خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه وجود دارد و موازی محور عرض‌ها است.

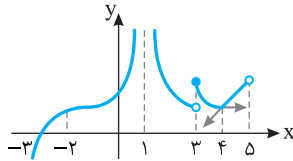
**گزینه ۳ - ۷۹۰** تابع  $f$  در نقطه ۳ پیوسته نیست، پس در این نقطه

مشتق پذیر نیست. تابع در نقطه ۴ نیز مشتق پذیر نیست، زیرا مشتق چپ و

مشتق راست آن در این نقطه با هم برابر نیستند. در بقیه نقاط، دامنه تابع مشتق

وجود دارد. بنابراین مجموع مورد نظر برابر ۷ است.

توجه کنید که نقطه  $x=1$  در دامنه تابع قرار ندارد.



**گزینه ۱ - ۷۹۱** نمودار تابع  $f$  روی بازه  $[0, 2]$  پاره‌خطی است که

نقطه‌های  $(0, 0)$  و  $(2, 1)$  را به هم وصل می‌کند، پس شیب آن برابر  $\frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$

است، در نتیجه  $f'(1) = \frac{1}{2}$ . نمودار تابع  $f$  روی بازه  $[2, 4]$  پاره‌خطی است که

شیب آن صفر است، پس  $f'(3) = 0$ . نمودار تابع  $f$  روی بازه  $[4, +\infty)$

نیم‌خطی است که از نقطه‌های  $(4, 1)$  و  $(6, 5)$  می‌گذرد، پس شیب آن برابر

$$\frac{f'(1) + f'(3)}{f'(5)} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \frac{1}{4}$$

است، در نتیجه  $f'(5) = 2$ . بنابراین  $\frac{5-1}{6-4} = 2$ .

**گزینه ۳ - ۷۹۲** ابتدا توجه کنید که

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 3$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - 3)(f(x) + 3)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 3}{x + 2} = f'(2) \times \frac{f(2) + 3}{2 + 2}$$

$$= 3 \times \frac{3 + 3}{4} = \frac{9}{2}$$

**گزینه ۲ - ۷۹۳** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 6$$

**گزینه ۳ - ۷۸۳** اگر به جای ۴ مقدار  $f(1)$  را قرار دهیم، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{f(x) - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{f(x) - f(1)} = \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} = \frac{2}{f'(1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

**گزینه ۲ - ۷۸۴** توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - 3f(3)}{x^2 - 9} = 3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= 3 \left( \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} \right) = 3 \times f'(3) \times \frac{1}{3+3} = 3 \times 4 \times \frac{1}{6} = 2$$

**گزینه ۴ - ۷۸۵** اگر فرض کنیم  $x = 2 - h$ . آن‌گاه  $h \rightarrow 0$  و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - h - 2}{f(2 - h) - f(2)} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(2 - h) - f(2)}$$

$$= - \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 - h) - f(2)}{h}} = - \frac{1}{4}$$

**گزینه ۴ - ۷۸۶** **راه‌حل اول** به جای ۸ قرار می‌دهیم  $f''(1)$  و از تعریف

مشتق در نقطه  $x=1$  استفاده کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(1+h) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(1+h) - f''(1)}{h}$$

توجه کنید که به کمک اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(1+h) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(1+h) - f''(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(1+h) - f(1))(f''(1+h) + f''(1))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} (f''(1+h) + f''(1)) = f'(1) \times (f''(1) + 2f(1) + 4) = 24$$

**راه‌حل دوم** از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(1+h) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f'(1+h)f''(1+h)}{1} = 3f'(1)f''(1)$$

$$= 3 \times (\sqrt[3]{1+1}) \times 2^2 = 24$$

**گزینه ۳ - ۷۸۷** توجه کنید که  $f(2) = 0$ . اکنون با استفاده از تعریف

مشتق در نقطه  $x=2$  مقدار  $f'(2)$  را به دست می‌آوریم:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2) \sqrt{\frac{x+2}{x+7}} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( (x-1) \sqrt{\frac{x+2}{x+7}} \right)$$

$$= (2-1) \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

**گزینه ۳ - ۷۸۸** مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع  $f$  در نقطه  $x=0$

را به کمک تعریف به دست می‌آوریم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + |x| \sqrt{x+8} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x \sqrt{x+8}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sqrt{x+8}) = 1 + 2 = 3$$

بنابراین

۷۹۹- گزینه ۲ برای تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  تساوی‌های داده شده برقرار هستند:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

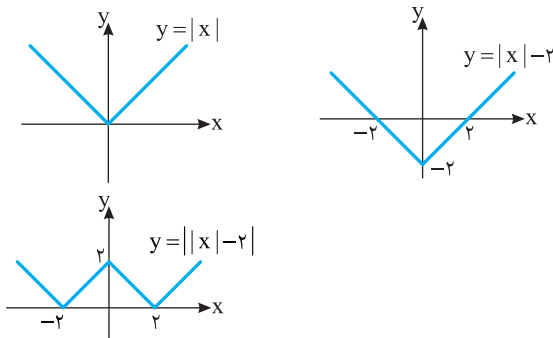
برای توابع دیگر توجه کنید که

(۱) گزینه ۱:  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$

(۳) گزینه ۳:  $f(x) = -\sqrt{|x|} \Rightarrow f'_+(0) = -\infty, f'_-(0) = +\infty$

(۴) گزینه ۴:  $f(x) = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) = -\infty$

۸۰۰- گزینه ۳ نمودار تابع به شکل زیر است.



بنابراین تابع در نقاط  $x=0$ ,  $x=2$  و  $x=-2$  مشتق ناپذیر است.

۸۰۱- گزینه ۲ توجه کنید که  $f'(x) = 3x^2 - 3$  پس

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{9} - 3 = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$$

۸۰۲- گزینه ۲ بنابر قاعده ضرب،

$$f'(x) = a(x-2) + ax + 1 = 2ax - 2a + 1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} f'(1) = -a + 1 \\ f'(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow a = -4$$

۸۰۳- گزینه ۳ بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{(x-4+x-2)x^2 - 2x(x-2)(x-4)}{x^4} = \frac{(2x-6)x^2 - 2x(x-2)(x-4)}{x^4}$$

در نتیجه  $f'(-2) = \frac{(-10)4 + 4(-4)(-6)}{16} = \frac{7}{2}$

۸۰۴- گزینه ۳ توجه کنید که  $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+k) - (2x)(x^3)}{(x^2+k)^2}$

در نتیجه

$$f'(-1) = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{3(1+k)-2}{(1+k)^2} = \frac{5}{8} \Rightarrow k=3, k=-\frac{1}{5} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

۸۰۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

در نتیجه  $f'(2^{-6}) = \frac{1}{\sqrt{2^{-6}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^{-12}}} = 2^3 + 2^4 = 24$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 27}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x)-3)(f^2(x)+3f(x)+9)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} ((f^2(x)+3f(x)+9)(\sqrt{x}+1)) = f'(1) \times (f^2(1)+3f(1)+9)(1+1) = 3\sqrt{1+3}(3^2+3 \times 3+9) \times 2 = 324$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 27}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f'(x)f^2(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{3 \times 3 \sqrt{1+3} \times 3^2}{\frac{1}{2 \times 1}} = 324$$

۷۹۴- گزینه ۴ راه حل اول اگر فرض کنیم  $x=2-h$ , آن‌گاه  $h \rightarrow 0$  و

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{f(x) - f(2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-h)^3 - 8}{f(2-h) - f(2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-12+6h-h^2)}{f(2-h) - f(2)} = \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h}} \times \lim_{h \rightarrow 0} (-12+6h-h^2) = \frac{1}{4} \times (-12) = -3$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f'(2-h)}{1} = -f'(2) = 4 \Rightarrow f'(2) = -4$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{f(x) - f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{f'(x)} = \frac{12}{-4} = -3$$

۷۹۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3-h)}{h} = (2-(-1))f'(3)$$

بنابراین  $f'(3) = 12$ . در نتیجه  $f'(3) = 4$ .

۷۹۶- گزینه ۴ توجه کنید که حد خواسته شده برابر مشتق چپ تابع در

نقطه  $x=1$  است، ولی چون تابع در این نقطه پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ هم ندارد و این حد وجود ندارد. به صورت مستقیم هم می‌توان حاصل این حد را به دست آورد:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2(1+h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h - 3}{h} = +\infty$$

۷۹۷- گزینه ۳ توجه کنید که  $g(0) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$  پس

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - 2f(x)} = \frac{1}{4}$$

۷۹۸- گزینه ۳ مشتق راست و مشتق چپ تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  را به

کمک تعریف به دست می‌آوریم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|[x]}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|[x]}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

بنابراین  $f'_+(2) - f'_-(2) = 3$

**۳- گزینۀ ۸۱۴**

بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{(1)(x+a) - (1)(x)}{(x+a)^2} = \frac{a}{(x+a)^2}$$

در نتیجه

$$f'(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3$$

**۴- گزینۀ ۸۱۵**

بنابر قاعده ضرب،

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) + (\sqrt{x}-1)(2x)$$

بنابراین  $f'(4) = \frac{1}{2 \times 2}(17) + (2-1)(8) = \frac{49}{4}$

**۴- گزینۀ ۸۱۶**

بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - (-\frac{1}{2\sqrt{x}})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2}$$

در نتیجه  $f'(\frac{1}{4}) = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{2})^2} = 8$

**۱- گزینۀ ۸۱۷**

ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} (x^2 + 2) = x^{-6} + 2x^{-2}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{11}{6}x^{-7} + 3x^{-3} \Rightarrow f'(1) = \frac{11}{6} + 3 = \frac{29}{6}$$

**۲- گزینۀ ۸۱۸**

چون  $x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$ ، در یک همسایگی نقطه ۲ علامت عبارت  $x^3 - 2x$  مثبت است، بنابراین

$$f(x) = x^2 + (x^3 - 2x) = x^3 + x^2 - 2x$$

در نتیجه  $f'(2) = 14$  و  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$

**۳- گزینۀ ۸۱۹**

توجه کنید که در یک همسایگی نقطه  $\frac{3}{2}$  مقدار  $[x]$

برابر ۱ است و در نتیجه

$$f(x) = \frac{x^3}{x+5} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x+5) - x^3}{(x+5)^2} = \frac{2x^2 + 15x^2}{(x+5)^2} \Rightarrow f'(\frac{3}{2}) = \frac{162}{169}$$

**۲- گزینۀ ۸۲۰**

در نزدیکی نقطه  $\frac{4}{5}$ ، علامت عبارت  $x^2 - 1$  منفی است

و  $1 < 2x < 2$ ، پس در نزدیکی نقطه  $\frac{4}{5}$ ،  $[2x] = 1$ ، بنابراین

$$f(x) = \frac{-(x^2-1)}{x+1} = -(x-1)$$

در نتیجه  $f'(\frac{4}{5}) = -1$  و  $f'(x) = -1$

**۱- گزینۀ ۸۲۱**

توجه کنید که  $f'(x) = 3ax^2 - 2ax + 4$ ، بنابراین

$$f'(-2) = 12 \Rightarrow 12a + 4a + 4 = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

در نتیجه  $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + 4$ ، پس  $f'(1) = \frac{9}{2}$

**۴- گزینۀ ۸۰۶** بنابر قاعده تقسیم،  $(\frac{f}{g})'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$

از طرف دیگر،  $f(1) = 1$ ،  $g(1) = -\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}, \quad g'(x) = \frac{1}{2}(2x) = x \Rightarrow g'(1) = 1$$

بنابراین  $(\frac{f}{g})'(1) = \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) - 1 \times 1}{\frac{1}{4}} = -5$

**۳- گزینۀ ۸۰۷**

توجه کنید که

$$f(x) = \frac{6\sqrt{x}-24}{\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{24}{\sqrt{x}} = 6x^{\frac{1}{2}} - 24x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 6x^{\frac{1}{2}} - 24x^{-\frac{1}{2}}$$

بنابراین  $f'(1) = 1 + 8 = 9$ ، پس  $f'(x) = \frac{6}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{24}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

**۱- گزینۀ ۸۰۸**

توجه کنید که در یک همسایگی نقطه ۳ علامت عبارت  $x - 4$  منفی است، بنابراین در یک همسایگی نقطه ۳،  $f(x) = -(x-4) + 2x = x + 4$

در نتیجه  $f'(3) = 1$  و  $f'(x) = 1$

**۳- گزینۀ ۸۰۹**

توجه کنید که در یک همسایگی نقطه  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{2} < \frac{x}{2} + 1 < 2$

پس در یک همسایگی نقطه  $\frac{1}{2}$ ، مقدار  $[\frac{x}{2} + 1]$  برابر ۱ است، و در نتیجه

$$f(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = 3$$

**۲- گزینۀ ۸۱۰**

توجه کنید که  $\sqrt{x} - 8$  به ازای  $x = 64$  برابر با صفر است، پس عامل صفر کننده است و مشتق آن به ازای  $x = 64$  برابر  $\frac{1}{16}$  است:

$$y = \sqrt{x} - 8 \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(64) = \frac{1}{16}$$

بنابراین مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x = 64$  برابر است با

$$\frac{1}{16} \times (\sqrt{64} + 4)(\sqrt{64}) = \frac{1}{16} \times 8 \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

**۲- گزینۀ ۸۱۱**

توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})(2x) + 2 = x^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})x + 2$$

بنابراین  $f'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{2} + 2 = 2 + 2\sqrt{6} - 4 + 2 = 2\sqrt{6}$

**۲- گزینۀ ۸۱۲**

توجه کنید که  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ ، در نتیجه

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2+1) - (2x)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

در نتیجه،  $f'(-1) = \frac{2-4}{4} = -\frac{1}{2}$

**۳- گزینۀ ۸۱۳**

ابتدا مشتق تابع  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$g'(x) = \frac{2xf(x) - x^2f'(x)}{f^2(x)}$$

بنابراین  $g'(2) = \frac{4f(2) - 4f'(2)}{f^2(2)} = \frac{12 - (-8)}{9} = \frac{20}{9}$

۸۲۹- گزینه ۳ در یک همسایگی  $x=2$  مقدار عبارت  $x^2-3x$  منفی

است و مقدار عبارت  $x^2+3x$  مثبت است. بنابراین ضابطه تابع در این همسایگی به صورت  $f(x)=-x^2+3x-x^2-3x=-2x^2$  است. بنابراین

$$f'(x)=-4x \Rightarrow f'(2)=-8$$

۸۳۰- گزینه ۳ اگر ضابطه تابع را به صورت

$$f(x)=(x^2-49)\underbrace{(x^2-50)(x^2-20)(x^2-21)\dots(x^2-48)}_{g(x)}$$

بنویسیم، در این صورت

$$f(x)=(x^2-49)g(x) \Rightarrow f'(x)=2xg(x)+(x^2-49)g'(x)$$

واضح است که اگر  $f'(v)$  را حساب کنیم، مقدار عبارت  $(x^2-49)g'(x)$  صفر می‌شود و کافی است مقدار عبارت  $2xg(x)$  را حساب کنیم:

$$f'(v)=2v \cdot v g(v)=2v \cdot v \cdot (49-50)(49-20)(49-21)\dots(49-48)=-14 \times 29!$$

۸۳۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=1-2x+3x^2-4x^3+\dots+49x^{48}-50x^{49}$$

بنابراین  $f'(-1)=1+2+3+4+\dots+49+50=1275$

۸۳۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که چون مقدار  $x+1$  به ازای  $x=-1$  صفر است، پس مشتق عبارت  $(ax+4)(x+1)(x+2)(x+3)$  به ازای

$x=-1$  برابر است با  $8-2a$ . بنابراین  $(-1+2)(-1+3)(-1+4)=8-2a$

$$8-2a=2 \Rightarrow a=3$$

۸۳۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم  $f(x)=ax+b$ . در این صورت

$$f'(x)=a \Rightarrow f'(x)f(x)=a^2x+ab=4x-8$$

بنابراین  $a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$ ,  $f'(3)=a \Rightarrow f'(3)=\pm 2$

۸۳۴- گزینه ۳ ابتدا مشتق تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+mx+1}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+mx+1)-(2x+m)(x^2-x+1)}{(x^2+mx+1)^2}$$

بنابراین  $f'(0)=\frac{(-1)(1)-(m)(1)}{1^2}=-1-m$  در نتیجه

$$-1-m=2m \Rightarrow m=-\frac{1}{3}$$

۸۳۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{g(x)-1}{x^2+1} \Rightarrow (x^2+1)f(x)=g(x)-1$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم  $x=1$ ، به دست می‌آید  $(2x)f(x)+(x^2+1)f'(x)=g'(x) \Rightarrow 2f(1)+2f'(1)=g'(1) \Rightarrow g'(1)=12$

۸۳۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)}{2h} = \frac{2}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)}{2h} = \frac{2}{3} f'(2)$$

از طرف دیگر،  $f(x)=2x^2+8x^{-2}$ ، پس

$$f'(x)=4x+8(-2)x^{-3}=4x-\frac{16}{x^3}$$

بنابراین  $f'(2)=8-2=6$  و مقدار حد مورد نظر برابر است با  $\frac{2}{3} \times 6=4$ .

۸۲۲- گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم و مشتق آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x(x^2-1)(x^2-2)=x^5-3x^3+2x \Rightarrow f'(x)=5x^4-9x^2+2$$

بنابراین

$$f'(x)=0 \Rightarrow 5x^4-9x^2+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{9+\sqrt{41}}{10} \\ x^2=\frac{9-\sqrt{41}}{10} \end{cases}$$

پس در نقاط  $x=\pm\sqrt{\frac{9-\sqrt{41}}{10}}$  و  $x=\pm\sqrt{\frac{9+\sqrt{41}}{10}}$  مشتق تابع  $f$  برابر صفر

است. حاصل ضرب این اعداد برابر است با  $-\frac{2}{5}$ .

۸۲۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x)=x^{-10}+x^{-9}+\dots+x^{-1}+1+x+x^2+\dots+x^{10}$$

بنابراین  $f'(x)=-10x^{-11}-9x^{-10}-\dots-x^{-2}+1+2x+\dots+10x^9$

در نتیجه  $f'(1)=-10-9-\dots-1+1+2+\dots+10=0$

۸۲۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(x^5+x^2)-(x^3+1)}{x^3+1}=\frac{x^2(x^3+1)-(x^3+1)}{x^3+1}=x^2-1 \quad (x \neq -1)$$

در نتیجه برای هر  $x \neq -1$  مشتق تابع  $f$  برابر  $2x$  است و  $f'(\frac{\sqrt{2}-1}{2})=\sqrt{2}-1$

۸۲۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2x-m)(x^2+5x+3)-(2x+5)(x^2-mx+4)}{(x^2+5x+3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(-1)=0 \Rightarrow (-2-m)(1-5+3)-(-2+5)(1+m+4)=0 \Rightarrow m=-\frac{13}{2}$$

۸۲۶- گزینه ۴ توجه کنید که  $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$  به ازای  $x=1$  برابر صفر است، پس عامل صفر کننده است. از طرف دیگر،

$$y=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y'(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

در نتیجه  $f'(1)=\frac{1}{6} \times \frac{1}{1+1}=\frac{1}{12}$

۸۲۷- گزینه ۱ ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{xx^2(xx^2+1)}=x^{-6}+x^{-2}$$

بنابراین

$$f'(x)=-\frac{6}{x^7}-\frac{2}{x^3} \Rightarrow f'(1)=-\frac{6}{1}-\frac{2}{1}=-8$$

۸۲۸- گزینه ۲ اگر در تساوی  $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-1}{2x}$  قرار دهیم  $x=-1$ ،

چون  $f(-1)=1$ ، به دست می‌آید  $g(-1)=0$ . اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=\frac{(2x)(2x)-2(x^2-1)}{4x^2}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم  $x=-1$ ، به دست می‌آید  $\frac{g'(-1)-0}{1}=1$ ، بنابراین

$$g'(-1)=1$$

۸۴۲- گزینه ۱ بنابر قاعده ضرب و اینکه  $(g^n)' = ng'g^{n-1}$

$$f'(x) = ((x^2-1)^2)'(x+2)^2 + (x^2-1)^2((x+2)^2)'$$

$$= (2(x^2-1)(x^2-1)')(x+2)^2 + (x^2-1)^2(2(x+2)(1))'$$

$$= 4x(x^2-1)(x+2)^2 + 2(x^2-1)^2(x+2)$$

بنابراین  $f'(0) = 0 + 2(1)(2)^2 = 32$

۸۴۳- گزینه ۳ بنابر قاعده زنجیری،  $(gof)'(l) = f'(l)g'(f(l))$

طرف دیگر،  $f(x) = x^3 - x + 1$ ، در نتیجه  $f'(x) = 3x^2 - 1$  بنابراین  $f'(1) = 2$  و  $f(1) = 1$  همچنین

$$g(x) = 2 - x^2 \Rightarrow g'(x) = -2x \Rightarrow g'(f(1)) = g'(1) = -2$$

بنابراین  $(gof)'(1) = 2 \times (-2) = -4$

۸۴۴- گزینه ۱ توجه کنید که  $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = (-3)(3 - \frac{1}{x^2})(3x + \frac{1}{x})^{-3}$$

در نتیجه،  $f'(1) = (-3)(2)(4)^{-3} = -\frac{3}{128}$ ، بنابراین  $f'(1) = -\frac{3}{128}$

۸۴۵- گزینه ۴ توجه کنید که  $(\sqrt[3]{g})' = \frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}} \Rightarrow f'(5) = \frac{10}{27}$$

۸۴۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{4}{\sqrt{9}} - \frac{1}{2 \times 2} = \frac{13}{12}$$

۸۴۷- گزینه ۳ اگر از دو طرف تساوی  $f(2x) = -x^2 + 3x + 4$  طبق

قاعده زنجیری مشتق بگیریم، به دست می آید

$$(2x)'f'(2x) = -2x + 3 \Rightarrow 2f'(2x) = -2x + 3$$

$$\xrightarrow{x=2} 2f'(4) = -4 + 3 \Rightarrow f'(4) = -\frac{1}{2}$$

۸۴۸- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست می آید

$$\left(\frac{1}{3x-1}\right)'f'\left(\frac{1}{3x-1}\right) = 6x \Rightarrow \frac{-3}{(3x-1)^2} f'\left(\frac{1}{3x-1}\right) = 6x$$

اگر در این تساوی قرار دهیم  $x=1$ ، به دست می آید  $-\frac{3}{4}f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6$

$$\text{پس } f'\left(\frac{1}{2}\right) = -8$$

۸۴۹- گزینه ۱ توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$

دیگر، اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست می آید

$$-f'(1-x) = 6x + 1 \xrightarrow{x=1} -f'(2) = -5 \Rightarrow f'(2) = 5$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر ۵ است.

۸۵۰- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی  $g(x) = f^2(x^3)$  مشتق

بگیریم، به دست می آید

$$g'(x) = 2(f(x^3))'f'(x^3) = 2(3x^2)'f'(x^3) = 6x^2 f'(x^3) f'(x^3)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم  $x=2$ ، به دست می آید

$$g'(2) = 6 \times 4 \times f'(8) f'(8) = 6 \times 4 \times \frac{1}{6} = 4$$

۸۳۷- گزینه ۲ ابتدا مشتق تابع  $f$  را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^3 + \sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + \sqrt{x})'(x^3 + \sqrt[3]{x}) - (x^3 + \sqrt[3]{x})'(x^2 + \sqrt{x})}{(x^3 + \sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^3 + \sqrt[3]{x}) - (3x^2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(x^2 + \sqrt{x})}{(x^3 + \sqrt[3]{x})^2}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم  $x=1$ ، نتیجه می شود

$$f'(1) = \frac{(2 + \frac{1}{2})(1+1) - (3 + \frac{1}{3})(1+1)}{(1+1)^2} = -\frac{5}{12}$$

۸۳۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$(f \times g)'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1)$$

ابتدا ضابطه تابع  $f \times g$  را به دست می آوریم:

$$(f \times g)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + \sqrt{x^2 + x^2})^9 (x^2 - \sqrt{x^2 + x^2})^9$$

$$= ((x^2 + \sqrt{x^2 + x^2})(x^2 - \sqrt{x^2 + x^2}))^9 = (x^2 - x^2 - x^2)^9 = -x^{18}$$

بنابراین

$$(f \times g)'(x) = (-x^{18})' = -18x^{17} \Rightarrow (f \times g)'(1) = -18 \times 1^{17} = -18$$

۸۳۹- گزینه ۴ در یک همسایگی نقطه  $x=1$  علامت عبارت  $2x - x^2 \sqrt{x}$

مثبت است و در یک همسایگی نقطه  $x=4$  علامت این عبارت منفی است.

بنابراین در یک همسایگی نقطه ۱.

$$f(x) = 2x - x^2 \sqrt{x} = 2x - x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(1) = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

و در یک همسایگی نقطه ۴.

$$f(x) = -2x + x^2 \sqrt{x} = -2x + x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = -2 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(4) = -2 + \frac{5}{2} \times 8 = 18$$

بنابراین  $f'(1)f'(4) = -9$

۸۴۰- گزینه ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطه  $\frac{21}{2}$  مقدار

عبارت های  $x$ ،  $x-1$ ،  $x-2$  و ... و  $x-10$  مثبت و مقدار عبارت های

$x-11$ ،  $x-12$ ، ... و  $x-20$  منفی است. بنابراین ضابطه تابع در همسایگی

این نقطه به شکل زیر است:

$$f(x) = x + (x-1) + (x-2) + \dots + (x-10) - (x-11) - (x-12) - \dots - (x-20)$$

در نتیجه  $f(x) = x + k$ ، که  $k$  مقداری ثابت است. بنابراین  $f'\left(\frac{21}{2}\right) = 1$

۸۴۱- گزینه ۲ توجه کنید که  $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 3(3x-2)'(3x-2)^{3-1} - 4(2x-3)'(2x-3)^{4-1}$$

$$= 3(3)(3x-2)^2 - 4(2)(2x-3)^3$$

در نتیجه  $f'(-1) = 9(-3-2)^2 - 8(-2-3)^3 = 9 \times 5^2 + 8 \times 5^3 = 49 \times 5^2$

۸۵۱- گزینه ۱ بنابر قاعده زنجیری،

$$(f \circ g)'(-1) = g'(-1)f'(g(-1))$$

از طرف دیگر،

$$g(x) = x^2 - 3x \Rightarrow g'(x) = 2x - 3 \Rightarrow g'(-1) = 0$$

بنابراین  $(f \circ g)'(-1) = 0$ .

۸۵۲- گزینه ۳ توجه کنید که  $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1+(2+x^2)^2)'(1+(2+x^2)^2)^{3-1} \\ &= 3(2(2x)(2+x^2)^{-1})(1+(2+x^2)^2)^2 = 12x(2+x^2)(1+(2+x^2)^2)^2 \\ \text{بنابراین } f'(1) &= 12 \times 1 \times 3 \times 1 \times 0^2 = 3600 \end{aligned}$$

۸۵۳- گزینه ۳ توجه کنید که  $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 3\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + 1\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + x\right)^2$$

در نتیجه  $f'(1) = 9$ .

۸۵۴- گزینه ۴ توجه کنید که  $(\sqrt[3]{g})' = \frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{3(1)^2} = -\frac{1}{3}$$

۸۵۵- گزینه ۲ بنابر قاعده ضرب،

$$f'(x) = (2x+3)\sqrt{x^2+3} + (x^2+3x) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

بنابراین  $f'(1) = 5 \times 2 + 4 \times \frac{1}{2} = 12$ .

۸۵۶- گزینه ۴ توجه کنید که  $f^2(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ ، اگر از دو طرف این

تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم  $x=1$ ، به دست می‌آید

$$2f'(x)f(x) = \frac{(2)(x+2)-(1)(2x+1)}{(x+2)^2} \Rightarrow 2f'(1)f(1) = \frac{6-3}{9} = \frac{1}{3}$$

بنابراین  $f'(1)f(1) = \frac{1}{6}$ .

۸۵۷- گزینه ۱ توجه کنید که  $g(4) = \frac{2+1}{3} = 1$  و

$$(f \circ g)'(4) = g'(4)f'(g(4)) = g'(4)f'(1)$$

از طرف دیگر

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}, \quad f'(1) = \frac{2}{4^2} = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}}}{x^2-7} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}}}{x^2-7}$$

$$g'(4) = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{8}{6}}{9} = -\frac{13}{36}$$

بنابراین  $(f \circ g)'(4) = \frac{1}{2} \times -\frac{13}{36} = -\frac{13}{72}$ .

۸۵۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2ax)\sqrt{3x+1} - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(ax^2+a)}{3x+1}$$

بنابراین

$$f'(1) = \frac{21}{8} \Rightarrow \frac{(2a)(2) - \frac{3}{2 \times 2}(a+a)}{4} = \frac{21}{8} \Rightarrow \frac{5a}{4} = \frac{21}{8} \Rightarrow a = \frac{21}{5}$$

۸۵۹- گزینه ۱ اگر از دو طرف تساوی  $f(x) = g(x^2+2x)$  مشتق

بگیریم، به دست می‌آید  $f'(x) = (2x+2)g'(x^2+2x)$ . اگر در این تساوی قرار دهیم  $x=3$ ، به دست می‌آید  $f'(3) = 8g'(15)$ ، پس  $g'(15) = 9$ .

۸۶۰- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده طبق قاعده زنجیری

مشتق بگیریم، به دست می‌آید  $4xf'(2x^2-4) = 3f'(x-3) + 5$ . اگر در

این تساوی قرار دهیم  $x=1$ ، به دست می‌آید

$$4ff'(-2) = 3f'(-2) + 5 \Rightarrow f'(-2) = 5$$

۸۶۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2\left(\frac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^2-1)}{(x^2-1)^2}\right)\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right) \Rightarrow f'(-2) = 0$$

۸۶۲- گزینه ۱ چون نقطه  $(2, 3)$  روی نمودار تابع  $f$  است، پس

$f(2) = 3$ . چون خط  $d$  از نقطه‌های  $(2, 3)$  و  $(5, 0)$  گذشته است، شیب آن

برابر است با  $-1$ ، بنابراین  $f'(2) = -1$ . اکنون توجه کنید که

$$g'(x) = f(3x-4) + x(3f'(3x-4))$$

$$g'(2) = f(2) + 6f'(2) = 3 - 6 = -3$$

۸۶۳- گزینه ۱ بنابر قاعده ضرب،

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}(\sqrt{x+4-1}) + (\sqrt{x-1}+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

در نتیجه  $f'(5) = \frac{1}{2 \times 2}(2) + 4 \times \frac{1}{2 \times 3} = \frac{7}{6}$ .

۸۶۴- گزینه ۴ توجه کنید که  $f(x) = ((x^2+2)(\sqrt{x+2x}))^2$  و

بنابراین  $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ .

$$f'(x) = 2((2x^2)(\sqrt{x+2x}) + (x^2+2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\right))(x^2+2)(\sqrt{x+2x})$$

در نتیجه  $f'(1) = 2(3(3) + 3(\frac{1}{2}+2))(3)(3) = 297$ .

۸۶۵- گزینه ۲ توجه کنید که  $f'(x) = \frac{3x^2+3a}{3\sqrt[3]{(x^3+3ax)^2}}$ ، بنابراین

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \times 2^2 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

۸۶۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt[3]{(\sqrt{x^2-1})^3 + 1}$$

$$= \sqrt{x^2-1} + 1 = \sqrt{x^2} = |x|$$

بنابراین

$$g'(x)f'(g(x)) = (f \circ g)'(x) = (|x|)' = \frac{x}{|x|}$$



در گزینه (۴) تابع در نقطه  $x=1$  پیوسته است و

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 2x^2 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 6x & x > 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$$

همچنین.  $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x) = 4$  و  $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x) = 6$  چون

$f'_+(1) = f'_-(1)$  پس تابع گزینه (۴) در نقطه  $x=1$  مشتق پذیر است.

**۴- ۸۷۲- گزینه** توجه کنید

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'_+(-1)$$

چون تابع  $f$  در نقطه  $x=-1$  پیوستگی راست ندارد، پس مشتق راست هم ندارد. بنابراین حد فوق وجود ندارد. دقت کنید که می‌توانیم بدون استفاده از مفهوم مشتق هم نشان دهیم این حد وجود ندارد:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(-1+h)^2 - 3}{h} = -\infty$$

**۳- ۸۷۳- گزینه** چون تابع در نقطه  $x=-1$  مشتق پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

$$-a+2 = -a+2 = 1-b \Rightarrow a-b=1$$

$$\text{از طرف دیگر، } f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 & x > -1 \\ 2x+b & x < -1 \end{cases}$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (3ax^2) = 3a, f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2x+b) = -2+b$$

$$f'_+(-1) = f'_-(-1) \Rightarrow 3a = b-2$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات } \begin{cases} a-b=1 \\ 3a-b=-2 \end{cases} \text{ نتیجه می‌شود } a = -\frac{3}{2} \text{ و } b = -\frac{5}{2}$$

و در نتیجه  $a+b = -4$ .

**۲- ۸۷۴- گزینه** ابتدا توجه کنید که تابع در نقطه  $x=1$  پیوسته و

مشتق پذیر است:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 1 \\ 2x+1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2) = 3 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3 \end{cases}$$

بنابراین  $f'(1) = 3$ . از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = f'(1) \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

**۲- ۸۷۵- گزینه** توجه کنید که  $f(1) = 2$  و

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x = 4$$

پس تابع در  $x=1$  پیوستگی چپ ندارد و  $f'_-(1)$  وجود ندارد، از طرف دیگر

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x > 1 \\ 4 & x < 1 \end{cases}$$

$$\text{بنابراین } f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 + 1) = 4$$

**۲- ۸۶۷- گزینه** طبق قاعده مشتق تابع مرکب:

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = (x + \sqrt{1+x^2})' f'(x + \sqrt{1+x^2}) \\ = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

**۲- ۸۶۸- گزینه** توجه کنید که چون  $g(-1) = 2$  پس  $f(g(-1)) = f(2)$ .

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(g(x)) - f(2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(g(x)) - f(g(-1))}{x - (-1)}$$

$$= (f \circ g)'(-1) = g'(-1) f'(g(-1)) = 5 \times f'(2) = 5 \times (-3) = -15$$

**۱- ۸۶۹- گزینه** ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(x^3) = \frac{x}{f(x^2)} \Rightarrow 3x^2 g'(x^3) = \frac{f(x^2) - 2x^2 f'(x^2)}{f^2(x^2)}$$

$$g'(x^3) = \frac{f(x^2) - 2x^2 f'(x^2)}{3x^2 f^2(x^2)}$$

اکنون در تساوی فوق قرار می‌دهیم  $x=2$  و نتیجه می‌شود

$$g'(\lambda) = \frac{f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)}{12 f^2(\lambda)} = \frac{1 - \lambda \times \frac{1}{\lambda}}{12 \times 1} = -1$$

**۲- ۸۷۰- گزینه** ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x+k}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2-k}{(x+2)^2}$$

بنابراین

$$g(x) = (f \circ f)(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) f'(f(x))$$

$$g'(\circ) = f'(\circ) f'(f(\circ)) = f'(\circ) f'\left(\frac{k}{2}\right)$$

در نتیجه

$$\frac{2-k}{4} \times \frac{2-k}{\left(\frac{k}{2} + 2\right)^2} = 4 \Rightarrow (2-k)^2 = 16 \left(\frac{k}{2} + 2\right)^2$$

$$\begin{cases} 2-k = 4\left(\frac{k}{2} + 2\right) \\ 2-k = -4\left(\frac{k}{2} + 2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -10 \end{cases}$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای  $k$  برابر ۲۰ است.

**۴- ۸۷۱- گزینه** توابع گزینه‌های (۱) و (۳) در نقطه  $x=1$  پیوسته

نیستند، پس مشتق پذیر نیستند.

در گزینه (۲)، ابتدا توجه کنید که تابع در  $x=1$  پیوسته است:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x^3 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 3x^2 & x < 1 \end{cases}$$

همچنین  $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2) = 3$  و  $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2$  چون

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$  پس این تابع هم در نقطه  $x=1$  مشتق ندارد.

۸۸۳- گزینه ۴ توجه کنید که  $f(2)=3$  و

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 7$$

پس تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه وجود ندارند.

۸۸۴- گزینه ۴ چون تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  مشتق‌پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (cx^2 + c) \Rightarrow b = 4 + 2a = \Delta c \quad (I)$$

از طرف دیگر

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & x > 2 \\ 2cx & x < 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + a) = 4 + a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2cx) = 4c$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 4 + a = 4c \Rightarrow a = 4c - 4$$

$$\xrightarrow{(I)} 4 + 2(4c - 4) = \Delta c \Rightarrow c = \frac{16}{3}$$

$$f(2) = \Delta c = \frac{16}{3}$$

۸۸۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4a & x > 2 \\ 3ax^2 + 2 & x < 2 \end{cases}$$

پس

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 4a) = 4 + 4a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3ax^2 + 2) = 12a + 2$$

چون تابع در  $x=2$  مشتق‌پذیر است، پس

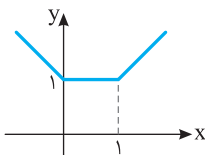
$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 4 + 4a = 12a + 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f'(4a) = f'(1) = 3a + 2 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

۸۸۶- گزینه ۴ نمودار تابع به شکل زیر است و در نقاط  $x=0$  و  $x=1$

نقطه گوشه‌ای دارد. پس  $D_{f'} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ . توجه کنید که  $x=0$  و  $x=1$

ریشه‌های ساده عبارت‌های داخل قدرمطلق هستند.



۸۷۶- گزینه ۳ توجه کنید که تابع  $f$  در  $x=2$  پیوستگی چپ ندارد.

پس مشتق چپ هم ندارد. از طرف دیگر

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - \lambda}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - \lambda}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2(x+2) = 8$$

$$2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 8$$

$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 4$$

۸۷۷- گزینه ۴ اگر  $g(x) = (x+1)(x-2)^2$ ، آن‌گاه  $g(2) = g'(2) = 0$ .

بنابراین تابع  $f(x) = |g(x)|$  در نقطه  $x=2$  مشتق‌پذیر است.

۸۷۸- گزینه ۲ چند جمله‌ای داخل قدرمطلق یعنی  $x^2 + 4x + m^2$  باید

دو ریشه متمایز داشته باشد. پس

$$\Delta = 16 - 4m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 2$$

۸۷۹- گزینه ۲ تابع  $f(x) = (x-2)|(x-2)(x-3)|$  تابع را به صورت

می‌نویسیم. تابع  $y = |(x-2)(x-3)|$  در نقاط  $x=2$  و  $x=3$  مشتق ندارد.

ولی عامل صفر کننده  $(x-2)$  در پشت قدرمطلق باعث می‌شود که تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  مشتق‌پذیر باشد. پس تابع  $f$  فقط در نقطه  $x=3$  مشتق ندارد.

۸۸۰- گزینه ۱ عبارت داخل قدرمطلق  $(x^2 - 4) = (x-2)(x+2)$  دو

ریشه ساده  $2$  و  $-2$  دارد. برای آنکه تابع مورد نظر مشتق‌پذیر باشد، باید

$x^2 + ax + b$  به ازای  $x=2$  و  $x=-2$  برابر صفر شود:

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow 2^2 + a \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -4 \\ x=-2 \Rightarrow (-2)^2 + a(-2) + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -4 \end{cases}$$

پس  $a=0$  و  $b=-4$ . بنابراین  $3a + b = -4$ .

۸۸۱- گزینه ۳ توجه کنید که  $f'(x) = \begin{cases} 4x - 3 & x < 3 \\ 9 & x > 3 \end{cases}$  چون

تابع  $f$  روی بازه  $(-\infty, 3]$  پیوسته و روی بازه  $(-\infty, 3)$  مشتق‌پذیر است.

همین‌طور روی بازه  $[3, +\infty)$  پیوسته و روی بازه  $(3, +\infty)$  مشتق‌پذیر است و

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4x - 3) = 9 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (9) = 9 \quad (2)$$

پس مقدار حد (۱) برابر  $f'_-(3)$  و مقدار حد (۲) برابر  $f'_+(3)$  است. و چون

این دو مقدار برابرند، پس  $f'(3) = 9$ .

۸۸۲- گزینه ۱ توجه کنید که  $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases}$  بنابراین

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 2) = 4 + 2 = 6$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2) = 3 \times 4 = 12$$

در نتیجه  $f'_+(2) - f'_-(2) = 6 - 12 = -6$ .

۸۹۳- گزینه ۲ در نقاطی که خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست، مقدار مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

بنابراین معادله فوق دو جواب دارد و در دو نقطه، خط مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌هاست.

۸۹۴- گزینه ۴ شیب خط  $y = 9x - 1$  برابر ۹ است، پس مشتق تابع  $f$  در نقطه مورد نظر باید برابر ۹ باشد:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 15 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)}, x = 3$$

مقدار تابع در نقطه‌ای با طول مثبت مد نظر است، پس

$$f(3) = 27 - 27 + 15 = 15$$

۸۹۵- گزینه ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، مقدار تابع و مقدار مشتق آن صفر است. بنابراین:

$$f'(x) = 3x^2 + m = 0 \Rightarrow m = -3x^2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + (-3x^2)x - 54 = 0 \Rightarrow x^3 = -27 \Rightarrow x = -3$$

بنابراین  $m = -27$ .

۸۹۶- گزینه ۲ شیب خط  $y = -x + b$  برابر  $-1$  است، بنابراین مقدار مشتق تابع  $f$  به ازای  $x = 2$  برابر  $-1$  است:

$$f'(x) = \frac{a(x+1) - (ax+3)}{(x+1)^2} = \frac{a-3}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{a-3}{(2+1)^2} = -1 \Rightarrow a = -6$$

۸۹۷- گزینه ۱ شیب خط  $y = \frac{2}{9}x + 1$  برابر  $\frac{2}{9}$  است. بنابراین مقدار

مشتق تابع  $f$  به ازای  $x = 1$  برابر  $\frac{2}{9}$  است.

$$f'(x) = \frac{(2x-m)(x+2) - (x^2 - mx + 1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(2-m)(3) - (2-m)}{(1+2)^2} = \frac{2(2-m)}{9}$$

بنابراین

$$\frac{2(2-m)}{9} = \frac{2}{9} \Rightarrow 2-m=1 \Rightarrow m=1$$

۸۹۸- گزینه ۳ ابتدا نقطه‌ای با طول منفی روی نمودار تابع

$f(x) = x^3 - x^2$  پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب خط  $y = x + k$  یعنی ۱ باشد:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین خط  $y = x + k$  در نقطه  $A(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{27})$  بر نمودار تابع مماس

می‌شود و نقطه  $A$  روی این خط قرار دارد. یعنی

$$-\frac{4}{27} = -\frac{1}{3} + k \Rightarrow k = \frac{5}{27}$$

۸۸۷- گزینه ۳ تابع در نقطه  $x = 1$  مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد:

$$x \geq 1 \Rightarrow f(x) = x(x^2 - x) = x^3 - x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'_+(1) = 3 - 2 = 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x(x - x^2) = x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 2x - 3x^2 \Rightarrow f'_-(1) = 2 - 3 = -1$$

ولی در نقطه  $x = 0$  مشتق پذیر است:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x^2 - x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x^2 - x| = 0$$

توجه کنید که تابع  $y = |g(x)|$  در ریشه‌های ساده  $g(x) = 0$  مشتق ندارد.

پس  $y = |x^2 - x|$  در  $x = 0$  و  $x = 1$  مشتق ندارد ولی تابع  $y = x|x^2 - x|$

به دلیل وجود عامل صفرکننده  $x$  که در قدرمطلق ضرب شده است در  $x = 0$  مشتق پذیر است.

۸۸۸- گزینه ۱ توجه کنید که ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = |x^3 - x^2| = |x^2(x-1)| = x^2|x-1|$$

بنابراین تابع فقط در  $x = 1$  مشتق پذیر نیست، زیرا عبارت داخل قدرمطلق فقط یک ریشه ساده  $x = 1$  دارد.

۸۸۹- گزینه ۱ برای اینکه تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر باشد، باید

چند جمله‌ای  $y = x^2 - 2x + m$  ریشه نداشته باشد یا ریشه مضاعف داشته باشد. زیرا اگر این تابع دو ریشه متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع  $f$  در این دو ریشه مشتق پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4 - 4m \leq 0 \Rightarrow m \geq 1$$

۸۹۰- گزینه ۲ برای اینکه تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  مشتق پذیر باشد، باید

دو عامل  $x - 1$  در آن وجود داشته باشد. یعنی باید

$$x^2 + ax + b = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow a = -2$$

۸۹۱- گزینه ۱ شیب خط مماس برابر  $f'(2)$  است.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

خط مورد نظر از نقطه  $(2, f(2))$  می‌گذرد. پس معادله خطی را می‌خواهیم که

از نقطه  $(2, \frac{5}{4})$  عبور کرده و شیب آن برابر  $\frac{5}{4}$  باشد، یعنی

$$y - \frac{5}{4} = \frac{5}{4}(x - 2) \Rightarrow 5x - 4y - 4 = 0$$

۸۹۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x = 5$$

بنابراین معادله خط مماس در نقطه  $(5, 2)$  را می‌خواهیم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(5) = \frac{1}{4}$$

بنابراین شیب خط مماس مورد نظر برابر  $\frac{1}{4}$  است و معادله آن به صورت زیر است:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 5) \Rightarrow 4y - x = 3$$

۹۰۴- گزینه ۱ چون A نقطه‌ای به طول صفر روی سهمی به معادله

$y = -x^2 + bx + 2$  است، پس عرض آن برابر است با  $y = 2$ . چون خط d از نقطه‌های  $(0, 2)$  و  $(3, 0)$  گذشته است، پس شیب آن برابر است با

$\frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$ . چون خط d در نقطه‌ای به طول صفر بر سهمی مماس است،

مقدار  $y'$  به ازای  $x = 0$  برابر با شیب خط d است:

$$y = -x^2 + bx + 2 \Rightarrow y' = -2x + b \xrightarrow{x=0} b = -\frac{2}{3}$$

۹۰۵- گزینه ۴ فرض کنید نقطه تماس  $(x_0, y_0)$  باشد. در این صورت

مقدار  $f'(x_0)$  برابر با شیب خط  $y = x + 2$  است، یعنی  $f'(x_0) = 1$ . اکنون

توجه کنید که

$$f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x_0) = 1 \Rightarrow 2x_0 + 1 = 1 \Rightarrow x_0 = 0, y_0 = 2$$

اگر  $x_0 = -2$ ، چون نقطه  $(x_0, y_0)$  روی خط  $y = x + 2$  است، پس

$y_0 = 0$  و چون نقطه  $(-2, 0)$  روی نمودار تابع f است، پس

$$0 = -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2 + k \Rightarrow k = -\frac{4}{3}$$

اگر  $x_0 = 1$ ، آن‌گاه  $y_0 = 3$  و نتیجه می‌شود  $k = \frac{19}{6}$  که قابل قبول نیست زیرا

طبق فرض سؤال باید  $k < 0$ .

۹۰۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

بنابراین

$$f(-1) = -2 \Rightarrow -a + b = -2 \quad (1)$$

از طرف دیگر، شیب خط  $y = 3x + 1$  برابر ۳ است و چون نمودار تابع f در

نقطه  $x = -1$  بر این خط مماس است، پس  $f'(-1) = 3$ . در نتیجه

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2 \Rightarrow f'(-1) = 3a - 2b + 2 = 3 \Rightarrow 3a - 2b = 1 \quad (2)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $a = -3$  و  $b = -5$ .

بنابراین  $a + b = -8$ .

۹۰۷- گزینه ۳ شیب خط  $2x + y = 3$  برابر  $-2$  است. پس شیب خط

مماس بر نمودار تابع f برابر  $\frac{1}{2}$  است. بنابراین باید نقاطی را پیدا کنیم که مقدار

مشتق تابع در آن‌ها برابر  $\frac{1}{2}$  است. پس

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+2)}{(x+2)^2} = \frac{8}{(x+2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$(x+2)^2 = 16 \Rightarrow x = 2, x = -6$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{5 \times 2 + 2}{2 + 2} = 3$$

$$x = -6 \Rightarrow f(-6) = \frac{5 \times (-6) + 2}{-6 + 2} = 7$$

پس نقاط مورد نظر  $A(2, 3)$  و  $B(-6, 7)$  هستند که فاصله آن‌ها برابر است

$$با \quad AB = \sqrt{(-6-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{80}$$

۸۹۹- گزینه ۳ باید شیب خط یعنی a بتواند با مشتق تابع برابر شود.

بنابراین  $f'(x) = 3x^2 - 1 = a$ . واضح است که  $-1 \geq 3x^2 - 1$  بنابراین  $a \geq -1$ .

۹۰۰- گزینه ۳ اگر نمودار تابع  $y = -x^2$  را k واحد به بالا انتقال دهیم، به

نمودار تابع  $f(x) = -x^2 + k$  تبدیل می‌شود ( $k > 0$ ). می‌خواهیم خط

$y = 2x + 3$  بر نمودار تابع f مماس شود. ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع f را پیدا

می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب این خط یعنی ۲ باشد:

$$f'(x) = -2x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1$$

پس نقطه  $A(-1, 1)$  نقطه مورد نظر است که باید روی نمودار تابع

$f(x) = -x^2 + k$  باشد. پس

$$-1 + k = 1 \Rightarrow k = 2$$

۹۰۱- گزینه ۲ نقطه برخورد نمودار تابع f با محور عرض‌ها  $(0, 3)$  و

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر  $f'(0)$  است.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{4}$$

بنابراین معادله خطی با شیب  $\frac{1}{4}$  را که از نقطه  $(0, 3)$  عبور می‌کند، می‌نویسیم.

$$y - 3 = \frac{1}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 3$$

۹۰۲- گزینه ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که  $f(2) = \frac{3}{4}$  و  $f'(2) = \frac{3}{4}$

برابر است با شیب خطی که از نقاط  $(0, 3)$  و  $(4, 0)$  می‌گذرد، پس

$$f'(2) = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$$

به طول ۲ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$g(x) = 4f^2(x) + x \Rightarrow g'(x) = 8f'(x)f(x) + 1 \Rightarrow g'(2) = 8f'(2)f(2) + 1$$

$$= 8 \times \frac{-3}{4} \times \frac{3}{4} + 1 = -8$$

همچنین  $g(2) = 4f^2(2) + 2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 = 11$  بنابراین می‌خواهیم معادله

خطی با شیب  $-8$  را بنویسیم که از نقطه  $(2, 11)$  می‌گذرد:

$$y - 11 = -8(x - 2) \Rightarrow y = -8x + 27$$

۹۰۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $f(1) = 3$  و  $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$

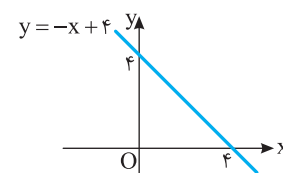
بنابراین  $f'(1) = -1$  و در نتیجه معادله خط مماس در نقطه  $(1, 3)$  به صورت

زیر است:

$$y - 3 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x + 4$$

این خط محورهای مختصات را در نقاط  $A(0, 4)$  و  $B(4, 0)$  قطع می‌کند.

$$\text{بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با } \frac{4 \times 4}{2} = 8$$



**راه حل دوم** فرض کنید این خطها در نقطه  $B(\alpha, f(\alpha))$  بر نمودار تابع مماس شوند. در این صورت شیب این خطها برابر  $f'(\alpha)$  خواهد بود. بنابراین

$$f(x) = \frac{\Delta x + 1}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-6}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

از طرف دیگر، شیب این خطها که از دو نقطه  $A(0, 2)$  و  $B(\alpha, f(\alpha))$  می گذرند برابر است با  $\frac{f(\alpha) - 2}{\alpha - 0}$ . بنابراین

$$\frac{f(\alpha) - 2}{\alpha} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow \frac{\frac{\Delta \alpha + 1}{\alpha - 1} - 2}{\alpha} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{3\alpha + 3}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow 3(\alpha+1)(\alpha-1) = -6\alpha \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

مقادیر  $\alpha$  که از معادله فوق به دست می آیند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آنها  $-2$  است.

**۹۱۱- گزینه ۲** آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[-1, 2]$  برابر است با

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{0 - (-\frac{3}{2})}{3} = \frac{1}{2}$$

**۹۱۲- گزینه ۱** آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[1, a]$  برابر

$$\frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = \frac{1 - a}{a(a-1)} = -\frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a} = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

**۹۱۳- گزینه ۲** آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[4, a]$  برابر

$$\frac{f(a) - f(4)}{a - 4} = \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 4}$$

$$\frac{\sqrt{a} - 2}{a - 4} = \frac{1}{6} \Rightarrow \sqrt{a} - 2 = \frac{a - 4}{6} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{a + 8}{6}$$

$$6\sqrt{a} = a + 8 \Rightarrow 36a = a^2 + 16a + 64$$

$$a^2 - 20a + 64 = 0 \Rightarrow (a - 16)(a - 4) = 0 \Rightarrow a = 16, a = 4 \text{ (غ.ق.)}$$

**۹۱۴- گزینه ۳** آهنگ تغییر متوسط تابع  $f(x) = \frac{1}{x-4}$  در بازه

$$\frac{f(a) - f(-a)}{2a} \text{ برابر } [-a, a] \text{ است:}$$

$$\frac{f(a) - f(-a)}{2a} = \frac{\frac{1}{a-4} - \frac{1}{-a-4}}{2a} = \frac{-a-4-a+4}{2a(16-a^2)} = \frac{-1}{a^2-16}$$

$$\frac{-1}{a^2-16} = \frac{-1}{7} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, a = -3 \text{ (غ.ق.)}$$

**۹۱۵- گزینه ۱** آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[a-1, a]$  برابر

$$\frac{f(a) - f(a-1)}{1} = \frac{a - \frac{1}{a} - (a-1 - \frac{1}{a-1})}{1} = \frac{-1}{a} + \frac{1}{a-1} + 1 = 1 + \frac{1}{a^2 - a}$$

$$1 + \frac{1}{a^2 - a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{a^2 - a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1, 2$$

**۹۰۸- گزینه ۴** معادله خطی که نقاط  $(1, 0)$  و  $(-1, 0)$  را به هم وصل می کند، به صورت  $y = 0$  است. یعنی می خواهیم بدانیم تابع در چه نقطه ای بر محور طولها مماس است. بنابراین

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x^2 = \frac{1}{2}$$

اگر  $x = 0$ ، آن گاه  $f(x) = 0$ ، پس نمودار تابع در  $(0, 0)$  بر محور طولها مماس است. اگر  $x^2 = \frac{1}{2}$ ، آن گاه  $f(x) = -\frac{1}{4}$ ، پس نمودار تابع در این نقاط

بر محور طولها مماس نیست. توجه کنید که شرطهای  $f'(x) = 0$  و  $f(x) = 0$  برای نقاطی که در آنها نمودار تابع  $f$  بر محور طولها مماس است، برقرار است.

**۹۰۹- گزینه ۴** **راه حل اول** اگر مختصات نقطه تماس را  $(\alpha, 2\alpha - \alpha^2)$  در نظر بگیریم، معادله خط مماس به صورت

$$y - (2\alpha - \alpha^2) = f'(\alpha)(x - \alpha) \text{ به صورت } f'(x) = 2 - 2\alpha$$

$$\text{پس } f'(\alpha) = 2 - 2\alpha \Rightarrow y - (2\alpha - \alpha^2) = (2 - 2\alpha)(x - \alpha)$$

$$1 - (2\alpha - \alpha^2) = (2 - 2\alpha)(\alpha - \alpha) \Rightarrow 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \alpha = 1$$

اگر  $\alpha = 1$ ، آن گاه  $f'(\alpha) = 0$  و اگر  $\alpha = 1$ ، آن گاه  $f'(\alpha) = -12$ . بنابراین مجموع شیبهای خطوط مماس برابر  $-12$  است.

**راه حل دوم** فرض کنید خطی که از نقطه  $A(4, 1)$  می گذرد در نقطه  $B(\alpha, f(\alpha))$  بر نمودار تابع مماس شود. در این صورت شیب این خط برابر

$$\frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 4} \text{ است. از طرف دیگر، شیب این خط برابر } f'(\alpha) \text{ است. پس}$$

$$\frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 4} = f'(\alpha) \text{ را به دست می آوریم:}$$

$$f(x) = 2x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x \Rightarrow f'(\alpha) = 2 - 2\alpha$$

$$\frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 4} = 2 - 2\alpha \Rightarrow \frac{2\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha - 4} = 2 - 2\alpha$$

$$2\alpha - \alpha^2 - 1 = 2\alpha - 8 + 2\alpha^2 + 8\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha - 7) = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \alpha = 7$$

اگر  $\alpha = 1$ ، آن گاه  $f'(\alpha) = 0$  و اگر  $\alpha = 7$ ، آن گاه  $f'(\alpha) = -12$ . بنابراین مجموع شیبهای خطوط مماس برابر  $-12$  است.

**۹۱۰- گزینه ۳** **راه حل اول** اگر مختصات نقطه تماس را  $(\alpha, \frac{\Delta \alpha + 1}{\alpha - 1})$  در نظر بگیریم، معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$y - \frac{\Delta \alpha + 1}{\alpha - 1} = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$\text{چون } f'(\alpha) = \frac{-6}{(\alpha-1)^2} \text{ پس } y - \frac{\Delta \alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}(x - \alpha)$$

نقطه  $(0, 2)$  در معادله فوق صدق می کند. پس

$$2 - \frac{\Delta \alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}(\alpha - \alpha) \Rightarrow \frac{2(\alpha-1) - (\Delta \alpha + 1)}{\alpha - 1} = \frac{-6(-\alpha)}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{2\alpha - 2 - \Delta \alpha - 1}{\alpha - 1} = \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow -3\alpha - 3 = \frac{6\alpha}{\alpha - 1} \Rightarrow -3\alpha^2 - 6\alpha + 3 = 0$$

مقادیر  $\alpha$  که از معادله فوق حاصل می شوند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آنها  $-2$  است.

۹۱۶- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[-3, 0]$  برابر است با

$$\frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \frac{0 - (-3^3)}{3} = 10.$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع  $f$  در نقطه  $x=a$  برابر است با  $f'(a)$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 + 1$$

بنابراین

$$3a^2 + 1 = 10 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3} \text{ (غ.ق.ق.)}, a = -\sqrt{3}$$

۹۱۷- گزینه ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[0, 1]$  برابر است با

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 - k.$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  برابر است با

$$f'(x) = 3x^2 - 2kx \xrightarrow{x=1} f'(1) = 3 - 2k$$

بنابراین

$$3 - 2k = 1 - k \Rightarrow k = 2$$

۹۱۸- گزینه ۱ اگر  $S$  مساحت و  $P$  محیط دایره‌ای به شعاع  $r$  باشد، آن‌گاه

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad P = 2\pi r = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\pi} \sqrt{S}$$

بنابراین

$$P(S) = 2\sqrt{\pi} \sqrt{S} \Rightarrow P'(S) = 2\sqrt{\pi} \times \frac{1}{2\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}$$

مقدار  $P'(4\pi)$  خواسته شده که برابر  $\frac{1}{2}$  است.

۹۱۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$S = x(6-x) \Rightarrow S(x) = 6x - x^2 \Rightarrow S'(x) = 6 - 2x$$

مقدار  $S'(2)$  خواسته شده که برابر ۲ است.

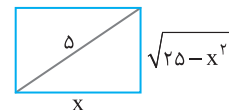
۹۲۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که با استفاده از قضیه فیثاغورس عرض

مستطیل برابر است با  $\sqrt{25-x^2}$ . پس

$$P(x) = 2(x + \sqrt{25-x^2})$$

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{25-x^2}}$$

مقدار  $P'(4) = 2 - \frac{8}{\sqrt{25-16}} = \frac{2}{3}$  خواسته شده که برابر است با  $\frac{2}{3}$ .



۹۲۱- گزینه ۲ ابتدا مشتق اول و دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 2$$

بنابراین باید تعداد جواب‌های معادله  $3x^2 - 2x + 1 = 6x - 2$  را مشخص کنیم:

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس در دو نقطه تساوی  $f'(x) = xf''(x)$  برقرار است.

۹۲۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \xrightarrow{x=1} 14 = 4 + 2a + b \\ f''(x) = 12x^2 + 2a \xrightarrow{x=1} 16 = 12 + 2a \end{cases}$$

از این دستگاه معادلات نتیجه می‌شود  $a=2$  و  $b=6$ ، پس  $a+b=8$ .

۹۲۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = (x+k)^r (x-1)$$

$$f'(x) = r(x+k)(x-1) + (x+k)^r$$

$$f''(x) = r(x-1) + r(x+k) + r(x+k)$$

$$f''(2) = r + r(2+k) \xrightarrow{f''(2)=2} 2 + 4(2+k) = 2 \Rightarrow k = -2$$

۹۲۴- گزینه ۳ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x(x^2+4)^2 - 4x(x^2+4)(-x^2+4)}{(x^2+4)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2+4) - 4x(-x^2+4)}{(x^2+4)^3} = \frac{2x^3 - 24x}{(x^2+4)^3} \end{aligned}$$

بنابراین

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 24x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{12}$$

پس در سه نقطه مشتق دوم تابع  $f$  برابر صفر است.

۹۲۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^6}{x^2} + \frac{x^4}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^4 + x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$$

بنابراین

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 2 + \frac{6}{x^4}$$

$$f''(1) = 12 + 2 + 6 = 20.$$

۹۲۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = (x^3-1)(x^2+1) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$$

$$f'(x) = 5x^4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{5}{36}x^{-\frac{5}{6}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(1) = -\frac{5}{36} - \frac{2}{9} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{9}$$

۹۲۷- گزینه ۴ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{1}{(3+1)\sqrt{3+1}} = \frac{1}{8}$$

بنابراین

۹۳۸- گزینه ۳ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

۹۳۹- گزینه ۴ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{3}}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

۹۴۰- گزینه ۴ با استفاده از قاعده هوییتال مقدار حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+9} - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{a}{2\sqrt{9}} = \frac{a}{6}$$

پس  $\frac{a}{6} = 4$  و در نتیجه  $a = 24$ .

۹۴۱- گزینه ۱ مقدار حد خواسته شده، همان  $f'(2)$  است. پس ابتدا  $f'(x)$  را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2} \left(\frac{x+2}{2x-3}\right) \times \frac{1}{(2x-3)^2} \times (-3-2(x+2))$$

تجربی - ۹۵

$$\text{بنابراین } f'(2) = \frac{2}{2} \times \sqrt{4} \times (-7) = -21$$

۹۴۲- گزینه ۲ تابع  $f$  باید در نقطه  $x = -2$  پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2)$$

$$fa - 2b + 4 = -8 + 2 \Rightarrow 2a - b = -5$$

از طرف دیگر چون تابع  $f$  در نقطه  $x = -2$  مشتق پذیر است، پس مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابرند:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq -2 \\ 3x^2 - 1 & x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(-2) = f'_-(-2) \Rightarrow -fa + b = 11$$

بنابراین از حل دستگاه معادلات  $\begin{cases} 2a - b = -5 \\ -fa + b = 11 \end{cases}$  نتیجه می‌شود  $a = -3$  و  $b = -1$

تجربی - ۹۷

$$f(1) = a + b + 4 = 0 \Rightarrow b = -1 - a$$

۹۴۳- گزینه ۴ تابع باید در  $x = 1$  پیوسته باشد، بنابراین  $a + b = 2$  از

طرف دیگر مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه باید برابر باشند:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2x^2} & x \geq 1 \\ ax^2 + bx & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -x^{-3} & x > 1 \\ 2ax + b & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = -1 \\ f'_-(1) = 2a + b \end{cases} \Rightarrow 2a + b = -1$$

از حل دستگاه  $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$  نتیجه می‌شود  $a = -3$  و  $b = 5$ .

خارج از کشور ریاضی - ۸۹

۹۴۴- گزینه ۲ ابتدا مقدار جزء صحیح و علامت تابع قدرمطلق را در یک

همسایگی راست نقطه  $x = -3$  مشخص می‌کنیم:

$$x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow [x] = -3, \quad |x| = -x \Rightarrow f(x) = (x-3)\sqrt[3]{9x}$$

۹۲۸- گزینه ۱ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست

می‌آید  $2f'(2x-3) = 3x^2 + 2ax + b$  اگر باز هم از دو طرف این تساوی

مشتق بگیریم، به دست می‌آید  $4f''(2x-3) = 6x + 2a$  اگر در این تساوی

قرار دهیم  $x = 1$ ، به دست می‌آید

$$4f''(-1) = 6 + 2a \Rightarrow 4 \times 4 = 6 + 2a \Rightarrow a = 5$$

۹۲۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

چون تابع در نقطه  $x = 0$  مشتق اول ندارد، پس مشتق دوم هم ندارد.

۹۳۰- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 4x^3 + 6ax^2 + 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12ax + 12 = 12(x^2 + ax + 1)$$

پس معادله  $x^2 + ax + 1 = 0$  نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta = a^2 - 4 < 0 \Rightarrow |a| < 2$$

۹۳۱- گزینه ۴ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^7 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^4}{7x^6} = \frac{5}{7}$$

۹۳۲- گزینه ۲ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^6 + x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{6x^5 + 3x^2 + 1}$$

توجه کنید که این حد هم حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  است. بنابراین باز هم از قاعده

هوییتال نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{6x^5 + 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x + 2}{12x^4 + 6x} = \frac{-6 + 2}{12 - 6} = -\frac{2}{3}$$

۹۳۳- گزینه ۳ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^4 - (2x-3)^4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-1)^3 - 8(2x-3)^3}{2x} = \frac{4 - 8}{4} = -1$$

۹۳۴- گزینه ۲ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n-1}}{2x} = \frac{n}{2} = 1 \Rightarrow n = 2$$

۹۳۵- گزینه ۲ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-8} - 2}{\sqrt{5x+1} - 5} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{4}{2\sqrt{4x-8}}}{\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}} = \frac{2 \times 2}{2 \times 5} = \frac{2}{5}$$

۹۳۶- گزینه ۱ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{3x^2} = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$$

۹۳۷- گزینه ۲ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+14} - 2x}{\sqrt{x+25} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2}{\frac{1}{2\sqrt{x+25}} - 3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

۹۵۰- گزینه ۲ باید معادله برخورد خط و نمودار ریشه مضاعف داشته باشد:

$$(m+3)x^2 + mx = 2x - 4 \Rightarrow (m+3)x^2 + (m-2)x + 4 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 16(m+3) = 0$$

$$m^2 - 20m - 44 = 0 \Rightarrow (m-22)(m+2) = 0 \Rightarrow m_1 = 22, m_2 = -2$$

ریاضی - ۹۰

۹۵۱- گزینه ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow f} \frac{f(x) - f(f)}{x - f} = f'(f)$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow f} \frac{f(x) + \gamma}{x - f} = -\frac{\gamma}{f} \Rightarrow f(f) = -\gamma, f'(f) = -\frac{\gamma}{f}$$

بنابراین

$$y = \frac{1}{x} f(2x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} f(2x) + 2f'(2x) \times \frac{1}{x}$$

$$y'(2) = -\frac{1}{4} f(4) + 2f'(4) \times \frac{1}{2} = \frac{\gamma}{4} - \frac{\gamma}{4} = 0$$

ریاضی - ۹۶

۹۵۲- گزینه ۳ تابع f در نقطه x=1 باید پیوسته باشد و مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b + 1 \end{cases} \Rightarrow a + b + 1 = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 2x + a & x < 1 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) \Rightarrow 2 = 2 + a$$

از دو شرط  $2 = 2 + a$  و  $a + b + 1 = 0$  نتیجه می‌شود  $a = 0$  و  $b = -1$  پس

$$f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 + a(1 - \sqrt{2}) + b = 3 - 2\sqrt{2} - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۹۵۳- گزینه ۳ چون  $f(0) = 0$  پس

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{-\sqrt{x^2}}$$

دقت کنید که چون  $x < 0$ ، به جای x می‌توانیم  $-\sqrt{x^2}$  قرار دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1 - 1 + x^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ریاضی - ۸۹

۹۵۴- گزینه ۴ به دلیل حضور جزء صحیح‌ها در هر نقطه‌ای که تابع ناپیوسته باشد، مشتق ناپذیر است. یعنی باید نقاطی را بیابیم که  $x \in \mathbb{Z}$  یا

$x + \frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$ . در هر یک از این نقاط یکی از دو تابع  $[x]$  و  $[x + \frac{1}{3}]$  پیوسته و دیگری ناپیوسته است، بنابراین مجموع آن دو نیز ناپیوسته است. در بازه

(۰، ۳) این نقاط عبارت‌اند از:  $\{\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}, 2, \frac{8}{3}\}$

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

بنابراین  $f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}} = (x-3)$  پس

$$f'_+(-3) = -3 + \frac{9}{3 \times 9}(-6) = -5$$

ریاضی - ۹۳

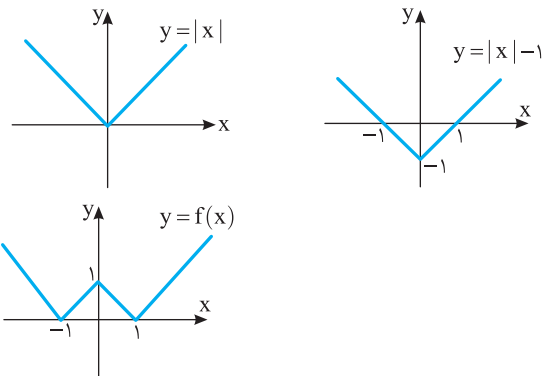
۹۴۵- گزینه ۱ ضابطه تابع را می‌توانیم به صورت  $f(x) = x|x|$  نشان

دهیم که به وضوح در  $x=0$  پیوسته است. همچنین تابع در این نقطه مشتق پذیر است، زیرا

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0, f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = 0$$

ریاضی - ۸۷

۹۴۶- گزینه ۴ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



از نمودار تابع مشخص است که سه نقطه گوشه‌ای (و بنابراین مشتق ناپذیر) وجود دارد.

ریاضی - ۸۶

۹۴۷- گزینه ۱ از قاعده زنجیری استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right) \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$f'(-8) = 2(-2-4)\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\right) = -1$$

ریاضی - ۸۸

۹۴۸- گزینه ۲ به جای اینکه حاصل  $f'(x) \times g'(f(x))$  را بیابیم،

مشتق تابع  $g \circ f$  را به دست می‌آوریم:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} = x$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

بنابراین  $(g \circ f)'(x) = 1$ .

۹۴۹- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه  $[4, 6/25]$  برابر

است با

$$\frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{4}}{6/25 - 4} = \frac{2/5 - 2}{2/25 - 4} = \frac{2}{25} \cdot \frac{9}{9} = \frac{2}{25}$$

اما آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه  $x=4$  برابر  $f'(4)$  است:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}, \text{ مقدار مورد نظر} = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳



۹۶۰- گزینه ۱ شیب خط  $(m+2)y=mx$  برابر  $\frac{m}{m+2}$  است. پس

باید مشتق تابع  $y=\sqrt{1+x^2}$  در نقطه  $x_0$  واقع بر منحنی برابر  $\frac{m}{m+2}$

باشد. یعنی

$$y'(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = \frac{m}{m+2} \Rightarrow \frac{x_0^2}{1+x_0^2} = \frac{m^2}{(m+2)^2}$$

$$m^2 x_0^2 + m^2 = (m+2)^2 x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = \frac{m^2}{4(m+1)} \geq 0$$

ریاضی - ۹۵

بنابراین  $m+1 > 0$  پس  $m > -1$ .

۹۶۱- گزینه ۱ توجه کنید که  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$  همان تعریف

مشتق تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول یک است. پس ابتدا  $f'(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \times \frac{4x+5 - 5x}{(x+3)^2}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} \times \frac{4-5}{16} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

۹۶۲- گزینه ۲ برای آنکه تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  مشتق پذیر باشد، ابتدا

لازم است در این نقطه پیوسته باشد و همچنین، مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه برابر باشند:

$$3-5=1+a+b \Rightarrow a+b=-3$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x^2} & x > 1 \\ 2x+a & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = -3 \\ f'_-(1) = 2+a \end{cases}$$

$$2+a = -3 \Rightarrow a = -5, b = 2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۹۶۳- گزینه ۴ در یک همسایگی راست  $\sqrt{2}$ ،  $f(x) = x^3 - 4x$ ، پس در این همسایگی،

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f'_+(\sqrt{2}) = 3 \times 2 - 4 = 2$$

خارج از کشور تجربی با کمی تغییر - ۹۴

۹۶۴- گزینه ۳ با فرض  $g(x) = f(x + \sqrt{1+x^2})$  طبق قاعده زنجیری

نتیجه می‌شود

$$g'(x) = f'(x + \sqrt{1+x^2}) \times (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \times \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

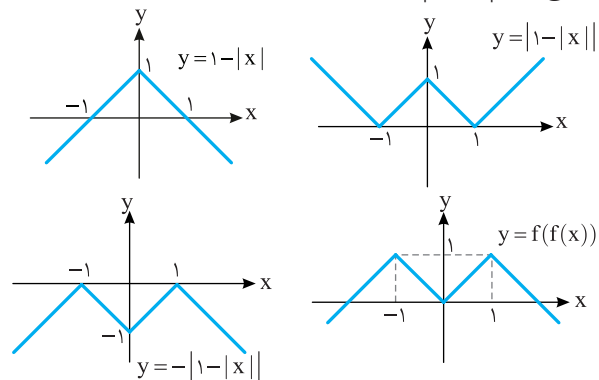
۹۶۵- گزینه ۲ حاصل مورد نظر همان مشتق تابع  $y=f(g(x))$

است. پس،

$$y = f(g(x)) = \frac{x-1-2}{1+x-1} = \frac{x-3}{x} \Rightarrow y' = \frac{3}{x^2}$$

ریاضی - ۹۲

۹۵۵- گزینه ۳ توجه کنید که  $f(f(x)) = 1 - |x|$  اکنون نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار،  $y=1-|x|$  در سه نقطه  $x=0$  و  $x=\pm 1$  مشتق ناپذیر است.

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۹۵۶- گزینه ۲ ابتدا تابع‌های  $f$  و  $g$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ 5 & 0 < x < 3 \\ x & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 5x & x \geq 0 \\ 3x & x \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(5x) & x \geq 0 \\ f(3x) & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ 3x & x \leq 0 \end{cases}$

تجربی - ۹۴

نتیجه  $(f \circ g)'(x) = 3$ .

۹۵۷- گزینه ۲ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = x + 1 + (g(x))^5 \Rightarrow f'(x) = 1 + 5g'(x)g^4(x) \quad (1)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0) = 1 + 5g'(0)g^4(0) \Rightarrow 1 = 1 + 5g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$$

اکنون از دو طرف تساوی (۱) مشتق می‌گیریم:

$$f''(x) = 0 + 5g''(x)g^4(x) + 20g'(x)g^3(x)g'(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} f''(0) = 5g''(0) \times 1^4 + 20 \times 0 \times 1 \times 1 = 5g''(0)$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۹۵۸- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[1, 1/44]$  برابر است

$$\frac{f(1/44) - f(1)}{1/44 - 1} = \frac{1/2 - 5}{1/44 - 1} = \frac{5}{6}$$

با  $x=1$  نیز آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در  $x=1$  نیز

این گونه به دست می‌آید:

$$f'(x) = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

اختلاف این دو مقدار  $\frac{1}{6}$  است.

۹۵۹- گزینه ۴ معادله خط مماس گذرنده از  $(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1})$  را می‌نویسیم

و مختصات  $A(-1, 0)$  را در آن قرار می‌دهیم:

$$y' = \frac{2+1}{(x+1)^2} \Rightarrow m = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله مماس}} y - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2} (x - \alpha)$$

$$\xrightarrow{A(-1, 0)} -\frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2} (-1 - \alpha) \Rightarrow 2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 2$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۹۶۶- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع‌های  $f$  و  $g$  را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} (a + \frac{3}{4})x & x \geq 0 \\ (\frac{3}{4} - a)x & x < 0 \end{cases}$$

اکنون تابع  $g \circ f$  را به دست می‌آوریم:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (a + \frac{3}{4}) \times 4x & x \geq 0 \\ (\frac{3}{4} - a) \times 2x & x < 0 \end{cases}$$

در نهایت از تابع به دست آمده مشتق می‌گیریم:

$$(g \circ f)'(x) = \begin{cases} 4a + 3 & x \geq 0 \\ \frac{3}{2} - 2a & x < 0 \end{cases}$$

از برابری مشتق چپ و مشتق راست تابع  $g \circ f$  در نقطه  $x = 0$  نتیجه می‌شود:

$$4a + 3 = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۹۶۷- گزینه ۲ ابتدا آهنگ تغییر متوسط در بازه  $[4, 12]$  و سپس آهنگ

تغییر لحظه‌ای در نقطه  $x = 4$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \\ f'(x) = -\frac{3}{2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-\frac{1}{4} - (-\frac{3}{2})}{\frac{1}{4} - (-\frac{3}{2})} = \frac{11}{54}$$

تجربی - ۹۳

۹۶۸- گزینه ۲ ابتدا معادله خط گذرنده از دو نقطه  $(1, 2)$  و  $(-1, 3)$

را می‌نویسیم:

$$y - 2 = \frac{3 - 2}{-1 - 1}(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

این خط در نقطه  $x = 3$  بر نمودار تابع  $f$  مماس است. پس در این نقطه با تابع

مشترک است و شیب این خط، همان مشتق تابع در این نقطه است:

$$f(3) = \frac{-1}{2} \times 3 + \frac{5}{2} = \frac{-3}{2} + \frac{5}{2} = 1, \quad f'(3) = -\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{f(x) - 1}{x - 3} \times \frac{f'(x) + 5}{-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3} (-f'(x) - 5) \\ &= f'(3) \times (-f(3) - 5) = -\frac{1}{2} \times (-1 - 5) = 3 \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۹۶۹- گزینه ۲ شیب خط  $y = 5x + a$  برابر ۵ است. پس ابتدا نقطه‌ای

از تابع  $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$  را مشخص می‌کنیم که شیب خط مماس بر

نمودار تابع در آن نقطه (یعنی مشتق تابع) برابر ۵ باشد:

$$f'(x) = 4x - 3 = 5 \Rightarrow x = 2$$

پس خط در نقطه  $(2, f(2))$  بر نمودار تابع مماس است. این نقطه متعلق به خط هم هست. پس در معادله خط صدق می‌کند:

$$f(2) = 5 \times 2 + a \Rightarrow 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 6 = 10 + a \Rightarrow 8 = 10 + a \Rightarrow a = -2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۹۷۰- گزینه ۱ دو نقطه عبارت‌اند از  $A(1, 3+a)$  و  $B(-1, -3+a)$ .

معادله خط گذرنده از  $A$  و  $B$  را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{3+a - (-3+a)}{1 - (-1)} = 3$$

$$AB \text{ معادله: } y - (3+a) = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x + a$$

فرض کنید  $f(x) = 3x + a$  و  $g(x) = x^3 + ax^2 + 2x$ . برای آنکه خط بر منحنی مماس باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$g'(x) = f'(x) \Rightarrow 3x^2 + 2ax + 2 = 3$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow x^3 + ax^2 + 2x = 3x + a$$

$$x^3(x+a) - (x+a) = 0 \Rightarrow (x+a)(x^2-1) = 0$$

از شرط دوم نتیجه می‌گیریم  $x = -a$  یا  $x = \pm 1$  که با جای گذاری این نتایج در معادله اول مقدار  $a$  به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = \pm 1 \Rightarrow 3 \pm 2a = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ x = -a \Rightarrow 3a^2 - 2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1$$

ریاضی - ۹۰

۹۷۱- گزینه ۱ با توجه به تعریف مشتق، مشتق تابع  $f$  در  $x = -1$  مورد نظر

است. برای به دست آوردن مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x = -1$  از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)\sqrt{x^2-7x}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} ((x-2)\sqrt{x^2-7x}) = -6 \end{aligned}$$

ریاضی - ۹۲

۹۷۲- گزینه ۲ تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته و مشتق پذیر است. پس

می‌توان نوشت:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + b = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & x \leq 1 \\ \frac{4}{\sqrt{4x-3}} & x \geq 1 \end{cases}, \quad f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow 4 = 3a + b$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود  $a = 1$  و  $b = 1$ .

۹۷۳- گزینه ۳ با توجه به ضابطه، نقطه مشتق‌ناپذیری تابع  $x = 0$

است. توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & x > 0 \\ \sqrt{1-x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} & x > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(0) = \frac{1}{2} \\ f'_-(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{x=0 \text{ در } f \text{ مشتق پذیر}} f'_+(0) - f'_-(0) = 1$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۹۷۹- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در بازه

$[1, 1/21]$  محاسبه می‌کنیم:  $\frac{\sqrt{1/21} - \sqrt{1}}{1/21 - 1} = \frac{1/1 - 1}{1/21 - 1} = \frac{0}{-20/21} = \frac{1}{21}$  اکنون

آهنگ تغییر لحظه‌ای  $f$  را در نقطه  $x=1$  حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{2}$$

بنابراین اختلاف آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{21} = \frac{21 - 2}{42} = \frac{1}{42}$$

تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۹۸۰- گزینه ۱ راه‌حل اول شیب نیمساز ناحیه اول برابر ۱ است. پس

ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع  $f(x) = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$  را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه (مشتق) برابر یک باشد:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow 4x + m + 1 = 1 \Rightarrow x = -\frac{m}{4}$$

بنابراین خط  $y=x$  در نقطه  $(-\frac{m}{4}, -\frac{m}{4})$  بر نمودار تابع  $f$  مماس شده

است. این نقطه روی نمودار تابع  $f$  است، پس مختصات آن در معادله تابع صدق می‌کند:

$$-\frac{m}{4} = 2(-\frac{m}{4})^2 + (m+1)(-\frac{m}{4}) + m + 6$$

$$m^2 - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$

$m = 12$  قابل قبول نیست، چون در این صورت نقطه تماس  $(-3, -3)$

می‌شود که در ناحیه اول قرار ندارد.

راه‌حل دوم شرط آنکه یک تابع بر یک خط مماس باشد آن است که معادله

حاصل از تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف داشته باشد. پس

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x$$

$$2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} m^2 - 8(m+6) = 0$$

$$m^2 - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$

$$\begin{cases} m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

چون نمودار تابع بر نیمساز ناحیه اول مماس است، پس باید طول نقطه تماس مثبت

باشد. پس  $x=1$  و در نتیجه  $m=-4$  قابل قبول است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۹۷۴- گزینه ۴ اگر  $x < -1$ ، آن‌گاه  $-\frac{1}{x} > -1$ ، بنابراین  $[\frac{1}{x}] = -1$ .

پس تابع  $f$  روی بازه  $(-\infty, -1)$  تابعی ثابت و مشتق‌پذیر است. گزینه‌های (۱) و (۲)

به راحتی رد می‌شوند، زیرا  $\frac{1}{x}$  در نامتناهی نقطه از آن‌ها مقدار صحیح می‌شود.

همچنین در گزینه (۳)،  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x - 1} = -\infty$  پس تابع

ریاضی - ۹۱

روی بازه  $[1, +\infty)$  مشتق‌پذیر نیست.

۹۷۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{4\} \mid \frac{x+2}{x-4} \in \mathbb{R} - \{-3\}\}$$

$$\frac{x+2}{x-4} = -3 \Rightarrow x+2 = -3x+12 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

بنابراین  $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{4, \frac{5}{2}\}$ . پس تابع  $f \circ g$  در نقاط  $x = \frac{5}{2}$  و  $x = 4$

ریاضی - ۸۴

مشتق‌پذیر نیست.

۹۷۶- گزینه ۴ چون حد مخرج کسر صفر است، حد صورت نیز باید

صفر باشد تا حد به صورت  $\frac{0}{0}$  دربیاید. یعنی باید

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(-2+h) + 3) = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(-2+h) = -3 \Rightarrow f(-2) = -3$$

پس حد داده شده همان تعریف مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x = -2$  است:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = f'(-2) = \frac{1}{2}$$

پس

$$g(x) = x^2 f(x) \Rightarrow g'(x) = (x^2 f(x))' = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$g'(-2) = -4f(-2) + 4f'(-2) = 12 + 2 = 14$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۹۷۷- گزینه ۲ با توجه به فرض سؤال  $f'(2) = -\frac{1}{3}$  همچنین اگر

فرض کنیم  $g(x) = f(\sqrt{|x+3|})$ ، در یک همسایگی  $x = -1$ ،

$$g(x) = f(\sqrt{3-x}) \Rightarrow g'(x) = f'(\sqrt{3-x}) \times \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$\xrightarrow{x=-1} g'(-1) = -\frac{1}{4} f'(2) = \frac{1}{12}$$

ریاضی - ۸۷

۹۷۸- گزینه ۲ اگر  $g(x) = f(xf(x))$ ، آن‌گاه طبق قاعده زنجیری،

$$g'(x) = f'(xf(x)) \times (f(x) + xf'(x))$$

$$\xrightarrow{x=2} g'(2) = f'(2f(2)) \times (f(2) + 2f'(2))$$

چون  $f(2) = -\frac{1}{2}$  و  $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$  پس  $f'(2) = -\frac{1}{4}$

$$f'(2f(2)) = f'(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{-1+2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow g'(2) = -\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2} + 2 \times -\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

ریاضی - ۸۹

## فصل پنجم

۹۸۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x-2)(x+1)$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'(x)		+	-	+

بنابراین تابع f روی بازه (۳, ۴) اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۹۸۲- گزینه ۱ تابع مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = -9x^2 + 9x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f'(x)		-	+	-

بنابراین تابع f روی بازه  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  صعودی است و بیشترین مقدار b-a برابر  $\frac{1}{3}$  است.

۹۸۳- گزینه ۴ برای اینکه تابع f روی  $\mathbb{R}$  صعودی باشد باید  $f'(x) \geq 0$ . مشتق توابع گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

گزینه (۱)  $y = x^2 - x + 1 \Rightarrow y' = 2x - 1 \Rightarrow \Delta = 1 > 0$

گزینه (۲)  $y = x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x \Rightarrow \Delta = 4 > 0$

گزینه (۳)  $y = x^3 + x^2 - x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow \Delta = 16 > 0$

گزینه (۴)  $y = x^3 + x^2 + x - 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \Delta = -8 < 0$

واضح است که مشتق تابع گزینه (۴) یعنی عبارت  $3x^2 + 2x + 1$  همواره مثبت است و تابع صعودی است.

۹۸۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f''(x) = 2x - 4$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''(x)		-	+

بنابراین تابع f' روی بازه (۳, ۵) اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۹۸۵- گزینه ۲ توجه کنید که همواره  $3x^2 - x + 1 > 0$  پس  $D_f = \mathbb{R}$ .

از طرف دیگر،  $f'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
f'(x)		-	+

پس تابع f روی بازه  $(-\infty, \frac{1}{6})$  اکیداً نزولی است.

۹۸۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که  $D_f = [0, +\infty)$  و

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x	0	4	$+\infty$
f'(x)		+	-

یعنی تابع f روی بازه  $[4, +\infty)$  نزولی است و حداقل مقدار a برابر ۴ است.

۹۸۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که  $D_f = (0, +\infty)$  و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2\sqrt{2x}}{2x^2\sqrt{2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 2\sqrt{2x} \Rightarrow x^4 = 8x \Rightarrow x = 0, x = 2$$

بنابراین جدول تعیین علامت f'(x) به صورت زیر است:

x	0	2	$+\infty$
f'(x)		-	+

بنابراین تابع f روی بازه  $[2, +\infty)$  صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۹۸۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $D_f = [-1, 2]$  و

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{2-x}\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{x+1} \Rightarrow 2-x = x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت f'(x) به صورت زیر است:

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
f'(x)		+	-

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً  $f'(0) > 0$ )

پس تابع f روی بازه  $[-1, \frac{1}{2}]$  صعودی و روی بازه  $[\frac{1}{2}, 2]$  نزولی است. در

نتیجه حداکثر مقدار b-a برابر  $\frac{3}{4}$  است.

۹۸۹- گزینه ۱ مشتق تابع به صورت زیر است:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

پس  $f'(x) > 0$  و در نتیجه تابع همواره صعودی است.

۹۹۰- گزینه ۲ مشتق تابع به صورت  $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 3$  است.

برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن همواره نامنفی باشد. پس

$$\Delta = 4a^2 - 36 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq a \leq 3$$

۹۹۵- گزینه ۱ توجه کنید که  $D_f = [0, +\infty)$  و برای هر  $x > 0$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$3^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{6}} = 2^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{6}} \Rightarrow x = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

بنابراین جدول تعیین علامت  $f'(x)$  به صورت زیر است.

x	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+

(برای تعیین علامت می‌توانید عددگذاری کنید، مثلاً  $f'(1) > 0$ ) بنابراین تابع

روی بازه  $\left[0, \left(\frac{2}{3}\right)^6\right]$  اکیداً نزولی است و حداکثر مقدار a برابر  $\left(\frac{2}{3}\right)^6$  است.

۹۹۶- گزینه ۲ مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس جدول تعیین علامت  $f'(x)$  به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+	-	-

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید، مثلاً  $f'(\sqrt{1}) = -\frac{1}{\sqrt{1}} < 0$ )

پس تابع f روی بازه‌های  $(-\infty, -1]$  و  $[1, +\infty)$  نزولی و روی بازه  $[-1, 1]$  صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر 1 است.

۹۹۷- گزینه ۳ تابع مشتق تابع f را به دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

با توجه به مثبت بودن مخرج کسر فوق، جدول تعیین علامت  $f'(x)$  به صورت زیر است:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-

بنابراین ابتدا تابع در بازه  $[0, 1]$  صعودی، سپس در بازه  $[1, +\infty)$  نزولی است.

۹۹۸- گزینه ۴ از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازه  $(1, 3)$

مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است، بنابراین  $f'(x) > 0$ . همچنین، مقادیر تابع f منفی‌اند، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. در مورد گزینه (۴) توجه

کنید که  $(f^2)'(x) = 2f'(x)f(x) < 0$ . پس گزینه (۴) درست نیست.

۹۹۱- گزینه ۲ به جدول تعیین علامت تابع  $f'$  توجه کنید:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	-

بنابراین تابع f روی بازه  $[-1, 1]$  صعودی است و حداکثر مقدار b-a برابر ۲ است.

۹۹۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = x^2(x-1) - 3x^2 + 5x - 2 = x^2(x-1) - (3x-2)(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2 - 3x + 2) = (x-1)(x-1)(x-2) = (x-1)^2(x-2)$$

بنابراین  $D_f = [2, +\infty)$ . از طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 8x + 5}{2\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}} = \frac{(3x-5)(x-1)}{2\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}}$$

بنابراین  $f'$  ریشه‌های در بازه  $[2, +\infty)$  ندارد و روی این بازه همواره مثبت است. بنابراین f روی بازه  $[2, +\infty)$  اکیداً صعودی است.

۹۹۳- گزینه ۴ توجه کنید که  $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$  و

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - 3}{3x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^4} = 3 \Rightarrow x^4 = 27 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{27}$$

پس جدول تعیین علامت تابع  $f'$  به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{27}$	0	$\sqrt[4]{27}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	+

پس تابع f روی بازه‌های  $(-\infty, -\sqrt[4]{27})$  و  $(\sqrt[4]{27}, +\infty)$  صعودی است و روی بازه‌های  $(-\sqrt[4]{27}, 0)$  و  $(0, \sqrt[4]{27})$  نزولی است. بنابراین کمترین مقدار a برابر  $\sqrt[4]{27}$  است.

۹۹۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که  $D_f = [-3, +\infty)$  و

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2x\sqrt{x+3} - 4}{\sqrt{x+3}}$$

مخرج کسر فوق مثبت است، پس باید صورت آن را تعیین علامت کنیم تا علامت  $f'(x)$  معلوم شود. بدین منظور ابتدا ریشه‌های صورت کسر فوق را به دست می‌آوریم:

$$2x\sqrt{x+3} - 4 = 0 \Rightarrow x\sqrt{x+3} = 2 \xrightarrow{x > 0} x^2(x+3) = 4$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 + 3x^2 - 3 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1)(x+1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + 4x + 4) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع  $f'$  به صورت زیر است:

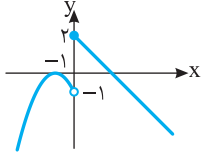
x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	+

پس تابع f روی بازه  $[1, +\infty)$  صعودی است و کمترین مقدار a برابر 1 است.

۱۰۰۴-گزینه ۱ نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. تابع  $f$  در  $x=0$

پیوسته نیست، پس مشتق‌پذیر نیست و  $f'(-1)=0$ . بنابراین  $(0, 2)$  و  $(-1, 0)$  نقاط بحرانی تابع  $f$  هستند که فاصله آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$$



۱۰۰۵-گزینه ۳ تابع در  $x=0$  مشتق‌پذیر نیست (نقطه گوشه‌ای دارد).

عرض نقطه بحرانی برابر است با  $f(0)=3$ .

۱۰۰۶-گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ -x & 0 < x < 1 \\ x^2+2x & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & 0 < x < 1 \\ 2x+2 & x < 0 \end{cases}$$

تابع  $f$  در نقاط  $x=0$  و  $x=1$  مشتق‌پذیر نیست. زیرا

$$\begin{cases} f'_+(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty^+} (-1) = -1 \\ f'_-(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty^-} (2x+2) = \infty \Rightarrow f'_+(\infty) \neq f'_-(\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1 \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \end{cases}$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

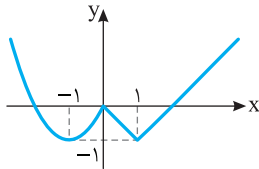
بنابراین نقطه‌های  $(1, -1)$ ،  $(0, 0)$  و  $(-1, -1)$  نقطه‌های بحرانی تابع  $f$

هستند که مجموع عرض‌هایشان برابر  $-2$  است.

راه‌حل دوم نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است و این تابع در نقطه‌های  $x=0$  و

$x=1$  مشتق‌پذیر نیست و  $f'(-1)=0$ . پس  $(0, 0)$ ،  $(1, -1)$  و  $(-1, -1)$

نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر  $-2$  است.



۱۰۰۷-گزینه ۴ تابع  $f$  در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x+1}-2=0 \Rightarrow x+1=4 \Rightarrow x=3$$

پس  $x=3$  طول تنها نقطه بحرانی تابع است که عرض آن برابر است با  $-5$ .

۱۰۰۸-گزینه ۳ توجه کنید که  $D_f = \mathbb{R}$  و  $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt{x^2-1}}$

تابع  $f$  در  $x=1$  و  $x=-1$  مشتق‌پذیر نیست و  $f'(0)=0$ . پس تابع سه نقطه بحرانی دارد.

۹۹۹-گزینه ۳ به جز در ریشه‌های مخرج ضابطه تابع  $f$ ،

$$f'(x) = \frac{(2ax+2)(3x^2+bx+2b) - (6x+b)(ax^2+2x+b)}{(3x^2+bx+2b)^2} \\ = \frac{(ab-6)x^2 + 2b(2a-3)x + 4b-b^2}{(3x^2+bx+2b)^2}$$

اگر  $f$  تابعی ثابت باشد، مشتق آن صفر است. بنابراین چندجمله‌ای صورت ضابطه  $f'$  باید چندجمله‌ای ثابت صفر باشد. در نتیجه ضریب‌های این چندجمله‌ای صفرند:

$$ab-6=0, \quad 2b(2a-3)=0, \quad 4b-b^2=0$$

توجه کنید که  $b \neq 0$ . زیرا اگر  $b=0$ ، تساوی  $ab-6=0$  درست نیست.

بنابراین از معادله دوم نتیجه می‌شود  $2a-3=0$ ، یعنی  $a=\frac{3}{2}$ . بنابراین

$$a+b=\frac{11}{2}, \quad \text{یعنی } b=4, \quad \text{یعنی } \frac{3}{2}b-6=0.$$

۱۰۰۰-گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{x^2+a^2-2x(x+a)}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-x^2-2ax+a^2}{(x^2+a^2)^2}$$

اگر مشتق تابع  $f$  نامنفی باشد، آن‌گاه تابع  $f$  اکیداً صعودی است. پس باید عبارت  $-x^2-2ax+a^2$  نامنفی باشد:

$$-x^2-2ax+a^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+2ax-a^2 \leq 0 \Rightarrow (x+a)^2 \leq 2a^2$$

$$-\sqrt{2}a \leq x+a \leq \sqrt{2}a \Rightarrow -(\sqrt{2}+1)a \leq x \leq (\sqrt{2}-1)a$$

پس باید  $a \leq -(\sqrt{2}+1)a$  و  $a \geq (\sqrt{2}-1)a$  تا تابع  $f$  روی بازه  $[0, 1]$

اکیداً صعودی باشد که چون  $a$  عددی مثبت است، پس  $a \leq -(\sqrt{2}+1)a$

برقرار است و در نتیجه

$$(\sqrt{2}-1)a \geq 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow a \geq \sqrt{2}+1$$

۱۰۰۱-گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که  $f$  در تمام نقاط  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 4x^2(x-3)=0 \Rightarrow x=0, x=3$$

بنابراین تابع  $f$  در  $x=0$  و  $x=3$  نقطه بحرانی دارد و مجموع مقادیر تابع  $f$  در

این نقاط را باید حساب کنیم:

$$f(0)=1, \quad f(3)=-26, \quad f(0)+f(3)=-25$$

۱۰۰۲-گزینه ۲ تابع  $f$  در تمام نقاط  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر است و

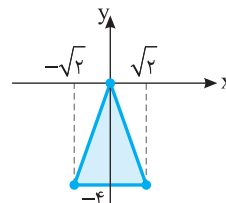
$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2) = 0 \Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{2}$$

بنابراین  $(-\sqrt{2}, -4)$  و  $(\sqrt{2}, -4)$ ،  $(0, 0)$

نقاط بحرانی تابع هستند و مساحت مثلثی

که تشکیل می‌دهند برابر است با

$$\frac{2\sqrt{2} \times 4}{2} = 4\sqrt{2}$$



۱۰۰۳-گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

پس نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است و تابع در تمام نقاط  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر است و  $f'(0)=0$ . پس  $x=0$  طول تنها نقطه بحرانی تابع است.

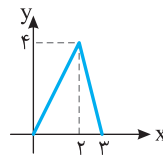
۱۰۰۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = |x^2(x-3)| = |x^2||x-3| = x^2|x-3|$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 3 \\ -x^3 + 3x^2 & x < 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x > 3 \\ -3x^2 + 6x & x < 3 \end{cases}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

همچنین تابع  $f$  در  $x=3$  مشتق پذیر نیست. پس  
نقاط بحرانی تابع  $f$   $(0,0)$  و  $(2,4)$  و  $(3,0)$  و مساحت مثلثی که تشکیل می دهند برابر است با



$$\frac{3 \times 4}{2} = 6$$

۱۰۱۰- گزینه ۳ تابع  $f$  در نقطه های  $x=0$ ،  $x=-1$  و  $x=1$  مشتق پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} -x + x^2 - 1 & x \leq -1 \\ -x - x^2 + 1 & -1 < x \leq 0 \\ x - x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ x + x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + 2x & x < -1 \\ -1 - 2x & -1 < x < 0 \\ 1 - 2x & 0 < x < 1 \\ 1 + 2x & x > 1 \end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$$

بنابراین تابع  $f$  پنج نقطه بحرانی دارد.

۱۰۱۱- گزینه ۱ تابع  $f$  در تمام نقاط  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس نقاط بحرانی تابع  $f$  نقاط  $(-1, 3)$  و  $(1, -1)$  هستند که مجموع عرض های آنها برابر ۲ است.

۱۰۱۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که چون تابع  $f$  همه جا مشتق پذیر است، طول نقاط بحرانی آن ریشه های معادله  $f'(x) = 0$  هستند. از طرف دیگر

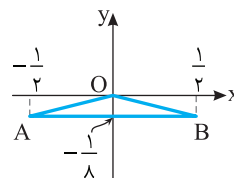
$$f'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$$

بنابراین نقطه های بحرانی تابع  $f$  نقطه های  $O(0,0)$ ،  $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$  و  $B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$  هستند. از روی شکل زیر معلوم است که

$$B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$$

$$AB=1, \quad OA=OB=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}} = \frac{\sqrt{17}}{\lambda}$$

$$1 + 2x \frac{\sqrt{17}}{\lambda} = 1 + \frac{\sqrt{17}}{\mu} \quad \text{برابر است با}$$



۱۰۱۳- گزینه ۲ تابع  $f$  در تمام نقاط دامنه اش مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین تابع  $f$  دو نقطه بحرانی به طول های  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  دارد.

۱۰۱۴- گزینه ۴ توجه کنید  $D_f = (2, +\infty)$  و اگر  $x \in D_f$ ، آن گاه

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{-(2x-3)}{2\sqrt{x^2-3x+2}} = -\frac{2x-3}{2(x^2-3x+2)^{3/2}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

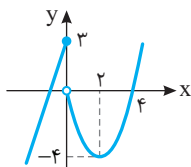
و چون  $\frac{3}{2}$  در دامنه تابع  $f$  نیست و تابع  $f$  در همه نقاط دامنه اش مشتق پذیر است، پس تابع  $f$  نقطه بحرانی ندارد.

۱۰۱۵- گزینه ۳ توجه کنید که  $f'(x) = \frac{4-2x}{3\sqrt{(4x-x^2)^2}}$  تابع  $f$  در

$x=4$  و  $x=0$  مشتق پذیر نیست و  $f'(2) = 0$ . پس این تابع سه نقطه بحرانی دارد.

۱۰۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که  $f'(x) = 2x + \frac{2x}{3\sqrt{(x^2-1)^2}}$  تابع  $f$  در

نقطه های  $x=1$  و  $x=-1$  مشتق پذیر نیست و  $f'(0) = 0$ . پس تابع  $f$  سه نقطه بحرانی دارد.



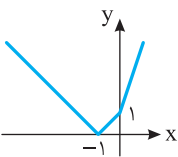
۱۰۱۷- گزینه ۱ نمودار تابع  $f$  به صورت

مقابل است و این تابع در نقطه  $x=0$  مشتق پذیر نیست و  $f'(2) = 0$ . پس  $(0, 3)$  و  $(2, -4)$  نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض های آنها برابر  $-1$  است.

۱۰۱۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = |2x + x + 1| = 3x + 1$$

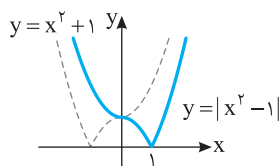
$$x \leq 0 \Rightarrow f(x) = |2x - x + 1| = |x + 1|$$



پس نمودار تابع  $f$  به صورت روبه رو است و این تابع در نقطه های  $x=0$  و  $x=-1$  مشتق ندارد (نقطه گوشه ای) و هیچ جا مشتق آن صفر نیست. پس تابع  $f$  دو نقطه بحرانی دارد.

۱۰۱۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر  $x \geq 0$ ، آن گاه  $f(x) = |x^2 - 1|$  و

اگر  $x < 0$ ، آن گاه  $f(x) = |-x^2 - 1| = x^2 + 1$  بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. پس تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  مشتق ندارد (نقطه گوشه ای) و در نقطه  $x=0$  مشتق تابع  $f$  برابر صفر است. پس این تابع دو نقطه بحرانی دارد.



۱۰۲۷- گزینه ۳ توجه کنید که  $D_f = [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$  و

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ x=-1 \end{cases}$$

پس  $x=-1$  طول اکسترمم نسبی تابع  $f$  است که با توجه به صورت مسئله طول ماکزیمم نسبی است. بنابراین  $f(-1) = \sqrt{2}$  مقدار ماکزیمم نسبی تابع است.

۱۰۲۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $D_f = [0, +\infty)$  و

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

پس  $x=4$  طول اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با  $f(4) = -4$ .

۱۰۲۹- گزینه ۲ چون تابع  $f$  همه جا مشتق پذیر است، پس نقاط

اکسترمم نسبی تابع  $f$  جواب‌های معادله  $f'(x) = 0$  هستند. توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

بنابراین تابع  $f$  در نقطه ۱ ماکزیمم نسبی و در نقطه ۳ مینیمم نسبی دارد. یعنی  $a=3$  و  $b=1$ ، پس  $a-b=2$ .

۱۰۳۰- گزینه ۱ چون تابع  $f$  روی دامنه‌اش مشتق پذیر است، پس

نقطه‌های اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادله  $f'(x) = 0$  هستند. بنابراین  $f'(1) = 0$  اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2x-a)(x+1) - (1)(x^2 - ax)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - a}{(x+1)^2}$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{1+2-a}{4} = 0 \Rightarrow a = 3$$

۱۰۳۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+	+

تابع  $f$  در نقطه‌های  $-2$ ،  $-1$  و صفر برابر صفر است و در این نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین تابع  $f$  در نقطه‌های  $-2$ ،  $-1$  و صفر اکسترمم نسبی دارد. مجموع طول این نقطه‌ها  $-3$  است.

۱۰۳۲- گزینه ۱ ابتدا طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2)$$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+

پس تابع  $f$  در نقطه‌های  $x=0$  و  $x=2$  مینیمم نسبی و در نقطه  $x=1$  ماکزیمم نسبی دارد. مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر است با  $f(1) = -1$ .

۱۰۳۳- گزینه ۴ ابتدا طول نقاط اکسترمم نسبی تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 3 - 2x(x+1)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3, \quad x = 1$$

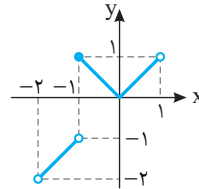
پس تابع  $f$  در نقاط  $x=1$  و  $x=-3$  اکسترمم نسبی دارد.

$$f(-3)f(1) = -\frac{2}{12} \times \frac{2}{4} = -\frac{1}{12}$$

۱۰۲۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x & -2 < x < -1 \\ -x & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است و تابع  $f$  در  $x=0$  و  $x=-1$  نقطه بحرانی دارد، زیرا در نقطه  $x=-1$  پیوسته نیست و مشتق پذیر هم نیست و در نقطه  $x=0$  مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد، پس مشتق پذیر نیست.



۱۰۲۱- گزینه ۱ تابع  $f$  در نقطه‌های  $x=2$  و  $x=0$  به ترتیب

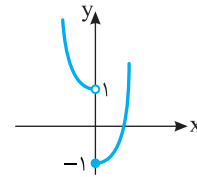
ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد. بنابراین  $f$  دو نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۱۰۲۲- گزینه ۳ تابع  $f'$  در نقطه‌های  $-4$ ،  $-1$ ،  $2$  و  $5$  برابر صفر است

و در نقطه‌های  $-4$ ،  $-1$  و  $2$  تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه، این نقطه‌ها، نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع  $f$  هستند و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۸ است.

۱۰۲۳- گزینه ۱ نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. واضح است که تابع

فقط در نقطه  $x=0$  مینیمم نسبی دارد و در هیچ نقطه‌ای ماکزیمم نسبی ندارد.



۱۰۲۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$3$	$4$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+	+

چون  $f'(3) = 0$  و تغییر علامت تابع  $f'$  در نقطه  $x=3$  از منفی به مثبت است، پس تابع  $f$  در نقطه  $x=3$  مینیمم نسبی دارد.

۱۰۲۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3}$$

عبارت  $f'(x)$  در  $x=0$  تغییر علامت نمی‌دهد ولی در  $x=\sqrt{3}$  و  $x=-\sqrt{3}$  تغییر علامت می‌دهد. پس تابع  $f$  دو نقطه اکسترمم نسبی به طول‌های  $\sqrt{3}$  و  $-\sqrt{3}$  دارد و حاصل ضرب طول آن‌ها برابر  $-3$  است.

۱۰۲۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین جدول تعیین علامت  $f'(x)$  به صورت زیر است:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

پس تابع  $f$  در  $x=0$  ماکزیمم نسبی دارد و این ماکزیمم برابر  $f(0) = -1$  است.



اکنون توجه کنید که

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = 4 \Rightarrow \frac{k \times \frac{1}{k} + 1}{\sqrt{\frac{1}{k}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{k}}} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{k} = 4 \Rightarrow k = 4$$

توجه کنید که **۴-۱۰۴۱** گزینه

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$ ,  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$   
چون  $f'$  در نقطه‌های  $x = -1$  و  $x = 2$  تغییر علامت می‌دهد. پس نقاط  $(-1, -1)$  و  $(2, -28)$  نقاط اکسترمم نسبی تابع  $f$  هستند و فاصله آن‌ها برابر است با  $\sqrt{(2+1)^2 + (-28+1)^2} = \sqrt{728}$ .

توجه کنید که **۴-۱۰۴۲** گزینه

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(x^2 + 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس تابع در نقاط  $x = -1$  و  $x = 1$  اکسترمم نسبی دارد. حاصل جمع مقادیر  $f(1)$  و  $f(-1)$  را می‌خواهیم:

$$f(1) = 2, f(-1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f(1) + f(-1) = \frac{8}{3}$$

مختصات نقطه اکسترمم نسبی در ضابطه تابع صدق می‌کنند: **۴-۱۰۴۳** گزینه

$$1 = \frac{1+a}{1+b} \Rightarrow a = b, \quad f(x) = \frac{x+a}{x^2+a}$$

از طرف دیگر چون تابع  $f$  در دامنه‌اش مشتق پذیر است، پس مشتق آن در نقطه اکسترمم نسبی برابر صفر است:

$$f'(x) = \frac{x^2 + a - 2x(x+a)}{(x^2+a)^2} = \frac{-x^2 - 2ax + a}{(x^2+a)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-1-a}{(a+1)^2} = 0 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین  $a = b = -1$  و در نتیجه  $a + b = -2$ .

ابتدا طول نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع را به دست می‌آوریم: **۴-۱۰۴۴** گزینه

$$f(x) = \frac{\Delta x}{x^2 + k^2}$$

$$f'(x) = \frac{\Delta(x^2 + k^2 - 2x^2)}{(x^2 + k^2)^2} = \frac{\Delta(k^2 - x^2)}{(x^2 + k^2)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm k$$

پس نقاط  $A(k, \frac{\Delta}{2k})$  و  $B(-k, \frac{-\Delta}{2k})$  نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند.

اختلاف مقدار ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع برابر است با  $|\frac{\Delta}{2k} - \frac{-\Delta}{2k}|$ . بنابراین

$$|\frac{\Delta}{k}| = 1 \Rightarrow |k| = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{2}$$

چون تابع  $f$  همه‌جا مشتق پذیر است، پس مشتق آن در نقطه اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است: **۴-۱۰۴۵** گزینه

توجه کنید که

$$f'(x) = 3ax^2 - b \Rightarrow f'(-1) = 3a - b = 0$$

از طرف دیگر مختصات نقطه اکسترمم نسبی در معادله تابع صدق می‌کنند:

$$f(-1) = 4 \Rightarrow -a + b + 2 = 4 \Rightarrow -a + b = 2$$

بنابراین  $a = 1$  و  $b = 3$ . در نتیجه  $ab = 3$ .

توجه کنید که  $D_f = [0, +\infty)$  و **۴-۱۰۳۴** گزینه

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

پس  $x = 1$  طول نقطه اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع  $f$  است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با  $f(1) = -2$ .

توجه کنید که  $D_f = [0, +\infty)$  و **۴-۱۰۳۵** گزینه

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

پس  $x = 1$  طول نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f$  است.

ابتدا توجه کنید که  $D_f = [\frac{1}{2}, +\infty)$  و **۴-۱۰۳۶** گزینه

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow 2x-1 = 1 \Rightarrow x = 1$$

پس  $x = 1$  طول نقطه اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با  $f(1) = 0$ .

$x$	$\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗
		min نسبی	

توجه کنید که  $f'(x) = x^2 + 2ax + 1$ . ضریب  $x^2$  در **۴-۱۰۳۷** گزینه

$f'(x)$  مثبت است، پس این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد. بنابراین برای اینکه تابع  $f$  اکسترمم نسبی نداشته باشد، باید  $f'(x) \geq 0$  یعنی

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4a^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$

توجه کنید که تابع  $f$  در نقطه  $x = 7$  مشتق پذیر است و **۴-۱۰۳۸** گزینه

برای اینکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید  $f'(7) = 0$ . پس

$$f'(x) = a - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}} \Rightarrow f'(7) = 0 \Rightarrow a - \frac{1}{3\sqrt[3]{8^4}} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{48}$$

چون  $(-1, -1)$  نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f$  است و تابع  $f$  در نقطه  $-1$  مشتق پذیر است، پس  $f'(-1) = 0$  و  $f(-1) = -1$ . از طرف دیگر، **۴-۱۰۳۹** گزینه

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

بنابراین

$$\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b = -1 \\ \frac{2a+2(-a+b)}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 0$$

پس  $a + b = 2$ .

ابتدا توجه کنید که  $D_f = (0, +\infty)$ . از طرف دیگر، **۴-۱۰۴۰** گزینه

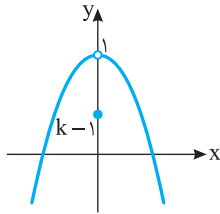
$$f'(x) = \frac{k\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(kx+1)}{x} = \frac{2kx - (kx+1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{kx-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow kx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{k}$$

پس طول نقطه مینیمم نسبی تابع  $f$  برابر  $\frac{1}{k}$  است.

۱۰۵۰-گزینه ۴ نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است که نقطه  $(0, k-1)$  هر جایی روی محور  $Y$  می‌تواند باشد. چون تابع مینیمم نسبی دارد، پس این نقطه باید پایین‌تر از نقطه  $(0, 1)$  باشد چون در غیر این صورت تابع در نقطه  $x=0$  ماکزیمم نسبی دارد و مینیمم نسبی ندارد. بنابراین

$$k-1 < 1 \Rightarrow k < 2$$



۱۰۵۱-گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4) = 0 \Rightarrow x=0, x=4 \text{ (غ.ق.)}$$

پس برای مشخص کردن مقدار مینیمم مطلق باید مقادیر  $f(3)$ ،  $f(0)$  و  $f(-1)$  را مقایسه کنیم:  $f(0)=0$ ،  $f(-1)=-7$  و  $f(3)=-27$ . پس مقدار مینیمم مطلق تابع برابر  $-27$  است.

۱۰۵۲-گزینه ۲ توجه کنید که تابع  $f$  همه جا مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

بنابراین باید مقادیر  $f(1)$ ،  $f(-1)$  و  $f(2)$  را مقایسه کنیم تا اکسترم‌های مطلق تابع مشخص شوند:  $f(1)=k-2$ ،  $f(-1)=k+2$  و  $f(2)=k+2$ . پس ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $f$  در بازه  $[-1, 2]$  هستند. بنابراین

$$k+2+k-2=4 \Rightarrow k=2$$

۱۰۵۳-گزینه ۱ تابع  $f$  در تمام نقاط  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

پس باید مقادیر  $f(2)$ ،  $f(1)$  و  $f(-1)$  را مقایسه کنیم تا اکسترم‌های مطلق تابع مشخص شوند:  $f(1)=1$ ،  $f(-1)=-1$  و  $f(2)=\frac{4}{5}$ . پس ماکزیمم مطلق تابع برابر  $\frac{4}{5}$  و مینیمم مطلق آن برابر  $-1$  است و حاصل ضرب آن‌ها برابر  $-1$  است.

۱۰۵۴-گزینه ۴ تابع  $f$  مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 9x^2 = x^2(5x^2 - 4x - 9)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0, \quad x=-1, \quad x=\frac{9}{5} \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین باید مقادیر  $f(-2)$ ،  $f(-1)$  و  $f(1)$  را مقایسه کنیم تا مقدار ماکزیمم مطلق تابع معلوم شود (توجه کنید که چون  $f'$  در نقطه  $x=0$  تغییر علامت نمی‌دهد، مقدار  $f(0)$  را حساب نمی‌کنیم):

$$f(-2)=-15, \quad f(-1)=10, \quad f(1)=6$$

بنابراین  $(-1, 10)$  نقطه ماکزیمم مطلق تابع  $f$  روی بازه  $[-2, 1]$  است. بنابراین  $a=-1$ ،  $b=10$  و  $a+b=9$ .

۱۰۴۶-گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که  $f'(x) = 3a^2x^2 + 4ax + 1$  و چون

تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول  $x=-1$  ماکزیمم نسبی دارد و در این نقطه مشتق پذیر است، پس  $f'(-1)=0$ . در نتیجه

$$3a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow a=1, \quad a=\frac{1}{3}$$

اگر  $a=1$  آن‌گاه  $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$  و

$x$	$-\infty$	$-1$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

پس تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول  $x=-1$  ماکزیمم نسبی دارد. اگر  $a=\frac{1}{3}$  آن‌گاه

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

پس تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول  $x=-1$  مینیمم نسبی دارد. بنابراین  $a=1$  تنها مقدار ممکن برای  $a$  است.

۱۰۴۷-گزینه ۲ توجه کنید که  $D_f = [3, +\infty)$  و

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2\sqrt{x-3} = \sqrt{x} \Rightarrow 4(x-3) = x \Rightarrow x=4$$

پس  $x=4$  طول نقطه مینیمم نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با  $f(4)=3$ .

۱۰۴۸-گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{3\sqrt{(x+2)^2}} = \frac{\sqrt{(x+2)^2} - 1}{\sqrt{(x+2)^2}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (x+2)^2 = 1 \Rightarrow x=-1, \quad x=-3$$

بنابراین جدول تعیین علامت  $f'(x)$  به شکل زیر است.

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+	+

بنابراین  $x=-3$  طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع  $f$  است و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر  $f(-3)=0$  است.

۱۰۴۹-گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 36x = x(4x^2 + 3ax + 36)$$

برای اینکه تابع  $f$  سه نقطه اکسترم نسبی داشته باشد باید علامت  $f'(x)$  در سه نقطه تغییر کند. بنابراین باید معادله  $f'(x)=0$  سه جواب داشته باشد.

چون  $x=0$  یک جواب این معادله است، پس باید معادله  $4x^2 + 3ax + 36 = 0$  دو جواب غیرصفر داشته باشد. پس

$$\Delta = 9a^2 - 16 \times 36 > 0 \Rightarrow a^2 > \frac{36 \times 16}{9} \Rightarrow |a| > 8$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} -(2x+4) & -1 < x < 0 \\ -(2x-4) & 0 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

اکنون توجه کنید که  $f(-1) = 3$ ،  $f(0) = 0$ ،  $f(2) = 4$  و  $f(3) = 3$ . بنابراین ماکزیمم مطلق تابع  $f$  برابر ۴ است.

**۱۰۵۹- گزینه ۳** توجه کنید که  $D_f = [0, 8]$  و تابع  $f$  روی بازه  $(0, 8)$

مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{8-x} = \sqrt{x} \Rightarrow 8-x = x \Rightarrow x = 4$$

پس باید مقادیر  $f(0)$ ،  $f(4)$  و  $f(8)$  را مقایسه کنیم تا کمترین و بیشترین مقدار تابع معین شوند:

$$f(0) = \sqrt{8}, \quad f(4) = \sqrt{8}, \quad f(8) = 4$$

بنابراین ۴ و  $\sqrt{8}$  به ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع هستند و حاصل ضرب آن‌ها برابر  $8\sqrt{2}$  است.

**۱۰۶۰- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که  $D_f = [-2, 2]$  و تابع  $f$  روی بازه

$(-2, 2)$  مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} + x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = -x$$

$$\xrightarrow{x \leq 0} 4 - x^2 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \text{ (غ.ق.)} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین باید  $f(-2)$ ،  $f(2)$ ،  $f(-\sqrt{2})$  و  $f(\sqrt{2})$  را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع در بازه  $[-2, 2]$  مشخص شوند:  $f(2) = 2$ ،  $f(-2) = -2$  و  $f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$  و  $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$  کمترین مقدار و بیشترین مقدار تابع است و نسبت آن‌ها برابر  $-\sqrt{2}$  است.

**۱۰۶۱- گزینه ۴** تابعی است که در تمام نقاط مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 3, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{3} \text{ (غ.ق.)} \end{cases}$$

پس باید مقادیر  $f(1)$ ،  $f(3)$  و  $f(-\frac{1}{3})$  را مقایسه کنیم تا ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $f$  روی بازه  $[-1, 4]$  مشخص شوند:

$$f(1) = -5, \quad f(3) = -17, \quad f(-\frac{1}{3}) = -11$$

بنابراین در بازه داده شده ماکزیمم مطلق تابع ۵- و مینیمم مطلق آن ۱۷- است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۲ است.

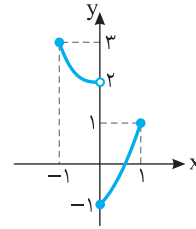
**۱۰۶۲- گزینه ۲** تابع  $f$  در تمام نقاط مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 4x^3 + 32x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 8) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس باید مقادیر  $f(1)$ ،  $f(-1)$  و  $f(0)$  را مقایسه کنیم تا اکستریم‌های مطلق تابع را معین کنیم:  $f(1) = 18$  و  $f(-1) = 18$ ،  $f(0) = 1$ . پس ماکزیمم مطلق تابع ۱۸ و مینیمم مطلق آن ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۷ است.

**۱۰۵۵- گزینه ۲** راه حل اول نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. از روی

این شکل معلوم است که ماکزیمم مطلق تابع  $f$  برابر ۳ و مینیمم مطلق تابع  $f$  برابر ۱- است. پس مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



**راه حل دوم** تابع  $y = 2 - x^3$  روی بازه  $[-1, 0]$  اکیداً نزولی است.

$(y' = -3x^2 < 0)$  و مقادیرش در بازه  $[f(0), f(-1)]$  یعنی  $(2, 3)$  هستند.

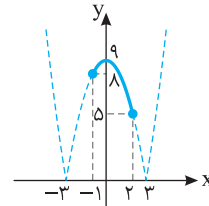
تابع  $y = x^2 + x - 1$  روی بازه  $[0, 1]$  اکیداً صعودی است  $(y' = 2x + 1 > 0)$  و

مقادیرش در بازه  $[f(0), f(1)]$  یعنی  $[-1, 1]$  هستند. بنابراین ماکزیمم مطلق

تابع  $f$  برابر ۳ و مینیمم مطلق آن برابر ۱- است، که مجموعشان می‌شود ۲.

**۱۰۵۶- گزینه ۳** راه حل اول نمودار تابع به صورت زیر است.

مینیمم مطلق تابع در بازه  $[-1, 2]$  برابر ۵ است.



**راه حل دوم** با توجه به اینکه در بازه  $[-1, 2]$  مقدار  $9 - x^2$  منفی است، پس

$$f(x) = |x^2 - 9| = 9 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس باید مقادیر  $f(0)$ ،  $f(-1)$  و  $f(2)$  را مقایسه کنیم تا کمترین مقدار تابع معین شود:

$$f(0) = 9, \quad f(-1) = 8, \quad f(2) = 5$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع در بازه  $[-1, 2]$  برابر ۵ است.

**۱۰۵۷- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 + 3x & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & 0 < x < 1 \\ 3x^2 + 3 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

پس تابع  $f$  در  $x = 0$  مشتق پذیر نیست. بنابراین باید مقادیر  $f(-1)$ ،  $f(1)$  و  $f(0)$  را مقایسه کنیم تا اکستریم‌های مطلق تابع مشخص شوند:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -2, \quad f(-1) = -4$$

پس ماکزیمم مطلق تابع برابر صفر و مینیمم مطلق آن برابر ۴- است و مجموع این دو مقدار برابر ۴- است.

**۱۰۵۸- گزینه ۲** توجه کنید که تابع  $f$  در نقطه  $x = 0$  مشتق پذیر

نیست. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 + 4x) & -1 \leq x < 0 \\ -(x^2 - 4x) & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

۱۰۶۸- گزینه ۴ توجه کنید که  $D_f = [0, 5]$  و تابع  $f$  روی بازه  $(0, 5)$

مشق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x} \Rightarrow 4(5-x) = x \Rightarrow x = 4$$

پس باید مقادیر  $f(0)$ ،  $f(4)$  و  $f(5)$  را با هم مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به دست آیند:

$$f(0) = \sqrt{5}, \quad f(4) = 5, \quad f(5) = 2\sqrt{5}$$

پس بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به ترتیب برابر است با  $5$  و  $2\sqrt{5}$ . بنابراین حاصل ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع  $f$  برابر  $5\sqrt{5}$  است.

۱۰۶۹- گزینه ۲ توجه کنید که  $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$ ، پس

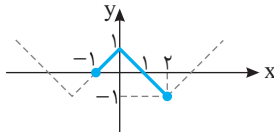
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

چون تابع  $f$  فقط یک نقطه بحرانی دارد و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

پس کمترین مقدار تابع  $f$  روی بازه  $(0, +\infty)$ ، به ازای  $x = 2$  به دست می‌آید و برابر است با  $f(2) = 12$ .

۱۰۷۰- گزینه ۱ نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است و حداکثر مقدار تابع در

بازه  $[-1, 2]$  برابر ۱ است.



۱۰۷۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که  $y = 4 - x$  و در نتیجه

$xy = x(4 - x)$ . بنابراین بیشترین مقدار تابع  $f(x) = 4x - x^2$  روی بازه  $[0, 4]$  را می‌خواهیم:

$$f'(x) = 4 - 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 3 = f_{\max}$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن  $xy$  برابر ۳ است.

۱۰۷۲- گزینه ۲ فرض کنید طول ضلع‌های باغچه  $x$  و  $y$  باشند (شکل را

بینید). در این صورت، طبق فرض  $x + y + \frac{x}{2} = 120$ ، یعنی  $\frac{3}{2}x + y = 120$ .

بنابراین

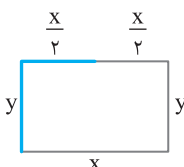
$$xy = x(120 - \frac{3}{2}x)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع  $f(x) = x(120 - \frac{3}{2}x)$  را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 120 - 3x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع  $f$ ، یعنی بیشترین مقدار مساحت باغچه به ازای  $x = 40$  به دست می‌آید و برابر است با

$$\text{مساحت باغچه} = 40 \times 60 = 2400$$



۱۰۶۳- گزینه ۴ توجه کنید که  $f(x) = 2 + \frac{x^2}{x+1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = -2 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین باید مقادیر  $f(-\frac{1}{3})$ ،  $f(0)$  و  $f(2)$  را حساب کنیم:

$$f(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}, \quad f(0) = 2, \quad f(2) = \frac{10}{3}$$

در نتیجه، کمترین مقدار تابع  $f$  روی بازه  $[-\frac{1}{3}, 2]$  برابر ۲ است.

۱۰۶۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ، پس

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2$$

پس برای پیدا کردن مقدار مینیمم مطلق تابع  $f$  روی بازه  $[-1, 2]$  باید مقادیر  $f(0)$ ،  $f(2)$  و  $f(-1)$  را مقایسه کنیم. چون  $f(0) = a$ ،  $f(-1) = a - 4$  و  $f(2) = a - 4$ ، بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع  $f$  روی بازه  $[-1, 2]$  برابر  $a - 4$  است. پس

$$a - 4 = 4 \Rightarrow a = 8$$

۱۰۶۵- گزینه ۲ تابع  $f$  مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 10x^9 - 10 = 10(x^9 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین باید مقادیر  $f(1)$ ،  $f(-1)$  و  $f(2)$  را مقایسه کنیم تا مقدار مینیمم مطلق تابع معلوم شود:  $f(1) = -8$ ،  $f(-1) = 12$ ،  $f(2) = 1005$ . پس  $(1, -8)$  نقطه مینیمم مطلق تابع  $f$  روی بازه  $[-1, 2]$  است. بنابراین  $a = 1$ ،  $a + b = -7$  و  $b = -8$ .

۱۰۶۶- گزینه ۲ توجه کنید که  $f'(x) = 3mx^2 + 6mx$ ، چون

$$f''(x) = 6mx + 6m, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

پس تنها نقطه بحرانی تابع  $f'$  نقطه  $x = -1$  است و بیشترین مقدار تابع  $f'$  به ازای  $x = -1$  به دست می‌آید:

$$f'(-1) = 12 \Rightarrow 3m - 6m = 12 \Rightarrow m = -4$$

۱۰۶۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & 2 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 3x - 2 & 0 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & 2 < x < 3 \\ -2x + 3 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

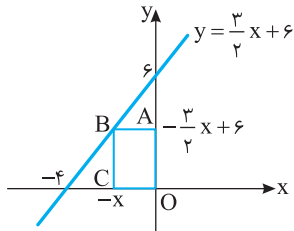
بنابراین تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  مشتق پذیر نیست و  $f'(\frac{3}{2}) = 0$  پس باید

مقادیر  $f(0)$ ،  $f(2)$ ،  $f(3)$  و  $f(\frac{3}{2})$  را مقایسه کنیم تا مقادیر اکسترم‌های مطلق

تابع به دست آیند:  $f(0) = -2$ ،  $f(3) = 2$ ،  $f(2) = 0$ ،  $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$ ، بنابراین

مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲ و مقدار مینیمم مطلق آن برابر  $-2$  است و اختلاف این دو مقدار برابر ۴ است.

پس باید بیشترین مقدار تابع  $y = x(-\frac{3}{4}x + 6)$  را پیدا کنیم. چون  $y' = -3x + 6$ ، اگر  $y' = 0$ ، آن گاه  $x = 2$ . بنابراین بیشترین مقدار تابع  $y$ ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل  $OABC$  به ازای  $x = 2$  به دست می‌آید و برابر است با  $2 \times 3 = 6$ .



**۱۰۷۸ - گزینه ۴** تابع هزینه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$C = 100(xl) + 60(2xh + 2lh) = 100xl + 120h(x+l)$$

$$= 100x(2x) + 120h(x+2x) = 200x^2 + 360xh \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که

$$100 = x \times l \times h \Rightarrow x(2x)h = 100 \Rightarrow h = \frac{50}{x^2} \quad (2)$$

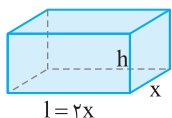
با جای گذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) به دست می‌آید

$$C(x) = 200x^2 + 360x \left(\frac{50}{x^2}\right) = 200x^2 + \frac{18000}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

نقطه بحرانی تابع  $C$  را به دست می‌آوریم:

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 400x - \frac{18000}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{400x^3 - 18000}{x^2} = 0$$

$$400x^3 - 18000 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$



پس کمترین مقدار تابع  $C$  به ازای  $x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$

به دست می‌آید.

**۱۰۷۹ - گزینه ۴** اگر قطار با سرعت ثابت  $v$  کیلومتر بر ساعت حرکت کند، آن گاه

$$C = 2000t + (4v^2)t$$

$$C = 2000\left(\frac{x}{v}\right) + 4v^2\left(\frac{x}{v}\right)$$

$$C(v) = \frac{2000}{v} + 4v$$

بنابراین

$$C'(v) = -\frac{2000}{v^2} + 4, \quad C'(v) = 0 \Rightarrow v^2 = 500 \Rightarrow v = 10\sqrt{5}$$

**۱۰۸۰ - گزینه ۴** باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

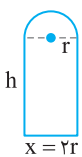
$$9 = 2h + x + \frac{1}{2}(2\pi r) = 9 \Rightarrow 2h + 2r + \pi r = 9$$

$$h = \frac{9}{2} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت نیم دایره + مساحت مستطیل  $S$ : مساحت پنجره

$$S(r) = 2r\left(\frac{9}{2} - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 = -\left(\frac{\pi+4}{2}\right)r^2 + 9r$$

$$S'(r) = -(\pi+4)r + 9, \quad S'(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{9}{\pi+4}$$



**۱۰۷۳ - گزینه ۳** فرض کنید شعاع‌های دایره‌ها  $r_1$  و  $r_2$  باشد. در این صورت

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 10\pi \Rightarrow r_1 + r_2 = 5$$

از طرف دیگر،

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 + (5-r_1)^2) = \pi(2r_1^2 - 10r_1 + 25)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع  $f(r_1) = 2r_1^2 - 10r_1 + 25$  را پیدا کنیم. چون

$$f'(r_1) = 4r_1 - 10, \quad f'(r_1) = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{5}{4}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع  $f$  وقتی به دست می‌آید که  $r_1 = \frac{5}{4}$  و برابر است با

$$\frac{25}{4}. \quad \text{در نتیجه مجموع مساحت‌های دایره‌ها حداقل } \frac{25\pi}{4} \text{ است.}$$

**۱۰۷۴ - گزینه ۳** فاصله نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3x-x)^2 + (x+6-3)^2} = \sqrt{4x^2 + 6x + 9}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 6x + 9}$  را پیدا کنیم. توجه

کنید که همواره  $4x^2 + 6x + 9 > 0$  و

$$f'(x) = \frac{10x+6}{2\sqrt{4x^2+6x+9}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

چون تابع  $f$  فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به ازای  $x = -\frac{3}{5}$

به دست می‌آید.

**۱۰۷۵ - گزینه ۲** مختصات نقطه  $B$  به صورت  $(x, x^2)$  است. بنابراین

$$AB = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2-0)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$$

اگر  $y = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$ ، آن گاه  $y' = \frac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}$  و در نتیجه

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 1) + (x - 1) = 0$$

$$(x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع  $y$  به ازای  $x = 1$  به دست می‌آید. به این ترتیب،

نقطه  $B(1, 1)$  است.

**۱۰۷۶ - گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که خط  $d$  از نقطه‌های  $(0, 4)$  و  $(4, 0)$

گذشته است، پس معادله‌اش به صورت  $y = 4 - x$  است. در نتیجه

$$x^2 + y^2 = x^2 + (4-x)^2 = 2(x^2 - 4x + 8)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع  $f(x) = 2(x^2 - 4x + 8)$  را پیدا کنیم. توجه

کنید که

$$f'(x) = 4x - 8 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین کمترین مقدار تابع  $f$  به ازای  $x = 2$  به دست می‌آید و برابر است با ۸.

**۱۰۷۷ - گزینه ۲** فرض کنید طول نقطه  $C$  برابر  $-x$  باشد. در این

صورت طول نقطه  $B$  هم برابر  $-x$  است. نقطه  $B$  روی خطی است که از

نقطه‌های  $(-4, 0)$  و  $(0, 6)$  می‌گذرد. معادله این خط  $y = \frac{3}{4}x + 6$  است.

بنابراین عرض نقطه  $B$  برابر  $-\frac{3}{4}x + 6$  است. به این ترتیب،

$$OABC = x\left(-\frac{3}{4}x + 6\right)$$

۱۰۸۵- گزینه ۴ فرض کنید B نقطه‌ای روی نمودار تابع  $2y=x^2$

باشد. در این صورت مختصات نقطه B به صورت  $(x, \frac{x^2}{2})$  است. بنابراین

$$AB = \sqrt{(x-4)^2 + (\frac{x^2}{2}-1)^2}$$

اگر  $y = \sqrt{(x-4)^2 + (\frac{x^2}{2}-1)^2}$  آن‌گاه

$$y' = \frac{x-4 + x(\frac{x^2}{2}-1)}{\sqrt{(x-4)^2 + (\frac{x^2}{2}-1)^2}} = \frac{\frac{x^3}{2} - 4}{\sqrt{(x-4)^2 + (\frac{x^2}{2}-1)^2}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای  $x=2$  به دست می‌آید. به این ترتیب، B نقطه  $(2, 2)$  است.

۱۰۸۶- گزینه ۱ با نمادگذاری شکل زیر معلوم می‌شود که بنا بر قضیه

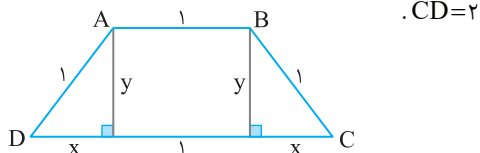
پیتاگورس  $y^2 + x^2 = 1$  پس  $y = \sqrt{1-x^2}$  در نتیجه مساحت ذوزنقه مورد نظر برابر است با  $\frac{1}{2}y(1+1+2x) = y(1+x) = \sqrt{1-x^2}(1+x)$  بنابراین باید

بیشترین مقدار تابع  $f(x) = \sqrt{1-x^2}(1+x)$  را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{-x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f به ازای  $x = \frac{1}{2}$  به دست می‌آید و در این صورت



۱۰۸۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$2 \text{ lit} = 2000 \text{ cm}^3 \Rightarrow \pi r^2 h = 2000 \Rightarrow h = \frac{2000}{\pi r^2}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده = S = مساحت کل استوانه

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r (\frac{2000}{\pi r^2}) = \pi r^2 + \frac{4000}{r}$$

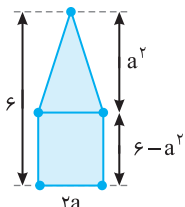
$$S'(r) = 2\pi r - \frac{4000}{r^2}, \quad S'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}}$$

۱۰۸۸- گزینه ۳ این پنج ضلعی از یک مستطیل به ابعاد ۲a، ۶-a<sup>2</sup> و

یک مثلث به ارتفاع a<sup>2</sup> و قاعده ۲a تشکیل شده است. بنابراین مساحت آن

$$\text{برابر است با } S(a) = 2a(6-a^2) + \frac{1}{2}a^2(2a) = 12a - a^3 \text{ بنابراین}$$

$$S'(a) = 12 - 3a^2, \quad S'(a) = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, \quad a = -2 \text{ (غ.ق.ق.)}$$



پس نقطه  $(2, 16)$ ، نقطه ماکزیمم تابع S

است و در نتیجه بیشترین مقدار مساحت

پنج ضلعی برابر ۱۶ است.

۱۰۸۱- گزینه ۴ توجه کنید که  $y = \frac{4}{x}$  و در نتیجه  $x+y = x + \frac{4}{x}$

بنابراین کمترین مقدار تابع  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  با دامنه  $[\frac{1}{3}, 3]$  را می‌خواهیم:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, \quad x = -2 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

پس برای پیدا کردن مینیمم مطلق تابع f روی بازه  $[\frac{1}{3}, 3]$  باید مقادیر  $f(\frac{1}{3})$

$$f(2) \text{ و } f(3) \text{ را مقایسه کنیم: } f(2) = 4 = f_{\min} \text{ و } f(3) = \frac{13}{3}, \quad f(\frac{1}{3}) = \frac{17}{3}$$

پس کمترین مقدار  $x+y$  برابر ۴ است.

۱۰۸۲- گزینه ۲ چون  $x-y=2$ ، پس  $y=x-2$ ، در نتیجه

$$x^3 - y^3 = x^3 - (x-2)^3 \Rightarrow f(x) = 6x^2 - 12x + 8 \Rightarrow f'(x) = 12x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای  $x=1$  به دست می‌آید و برابر است با

$$f(1) = 2$$

۱۰۸۳- گزینه ۱ فرض می‌کنیم طول ضلع زمین در امتداد شمال- جنوب

برابر X و در امتداد شرق- غرب برابر Y باشد. در این صورت،  $XY = 10000$

و هزینه نرده‌کشی برابر است با

$$S = 15000(2X) + 60000(2Y) = 30000X + 120000Y = 3 \times 10^4 X + \frac{12 \times 10^4}{X}$$

بنابراین  $S' = 3 \times 10^4 - \frac{12 \times 10^4}{X^2}$  و اگر  $S' = 0$ ،  $X = 200$ ، بنابراین کمترین

مقدار تابع S به ازای  $X = 200$  به دست می‌آید. در این حالت، طول یک ضلع

زمین برابر ۲۰۰ است و طول ضلع دیگر زمین برابر است با  $\frac{10000}{200} = 50$

بنابراین محیط زمین برابر است با  $2(200+50) = 500$

۱۰۸۴- گزینه ۱ توجه کنید که  $X_1 + X_2 = -1$  و

$$X_1 X_2 = -(m^2 + m + 1)$$

بنابراین

$$X_1^3 + X_2^3 = (X_1 + X_2)((X_1 + X_2)^2 - 3X_1 X_2) \\ = -(1 + 3(m^2 + m + 1)) = -3m^2 - 3m - 4$$

بنابراین باید بیشترین مقدار ممکن تابع  $f(m) = -3m^2 - 3m - 4$  را پیدا

کنیم. توجه کنید که

$$f'(m) = -6m - 3, \quad f'(m) = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} f(m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(m) = -\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به ازای  $m = -\frac{1}{2}$  به دست می‌آید و برابر است با

$$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{13}{4}$$

چون تابع  $f'$  در  $x=4$  تغییر علامت نمی‌دهد، پس تابع  $f$  فقط در نقطه  $x=1$  اکسترمم نسبی دارد. همچنین،

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع  $f$  به‌ازای  $x=1$  به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(1) = 216$$

**۱۰۹۳-گزینه ۳** فرض کنید  $P$  نقطه  $(x, y)$

باشد. چون نقطه  $P$  روی سهمی به معادله  $y = x^2 - 5x$  است، پس نقطه  $P$  نقطه  $(x, x^2 - 5x)$  است و مجموع مختصات  $P$  برابر است با  $x + x^2 - 5x = x^2 - 4x$ .

البته چون  $P$  نقطه‌ای زیر محور  $x$  است، پس  $0 < x < 5$ . به این ترتیب، باید کمترین مقدار تابع  $f(x) = x^2 - 4x$  را روی بازه  $(0, 5)$  پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 2x - 4, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

چون تابع  $f$  فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به‌ازای  $x=2$  به‌دست می‌آید و برابر است با  $4 - 8 = -4$ .

**۱۰۹۴-گزینه ۱** توجه کنید که

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{1}{2}(\Delta - x)(12 + x^2 + 8x + 4) = \frac{1}{2}(\Delta - x)(x^2 + 8x + 16)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع  $f(x) = \frac{1}{2}(\Delta - x)(x^2 + 8x + 16)$  را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 8x + 16) + (\Delta - x)(x + 4) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -4 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

توجه کنید که به‌ازای  $x = -4$ ، طول قاعده بزرگ دوزنقه عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. بنابراین بیشترین مقدار تابع  $f$ ، یعنی بیشترین مقدار مساحت دوزنقه مورد نظر به‌ازای  $x=2$  به‌دست می‌آید و برابر است با  $\frac{1}{2}(3)(36) = 54$ .

**۱۰۹۵-گزینه ۲** فرض کنید طول نقطه  $C$  برابر  $x$  باشد. در این صورت،

طول نقطه  $A$  هم برابر  $x$  است و چون نقطه  $A$  روی نمودار تابع  $y = \sqrt{6-x}$  است، پس عرض نقطه  $A$  برابر با  $\sqrt{6-x}$  است. بنابراین  $AC = \sqrt{6-x}$ .

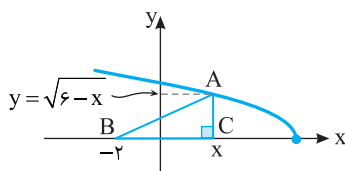
از طرف دیگر،  $BC = x + 2$ . به این ترتیب

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{6-x}$$

بنابراین باید  $x$  ای را پیدا کنیم که تابع  $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{6-x}$  به‌ازای آن بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{6-x} + \frac{1}{2}(x+2)\frac{-1}{2\sqrt{6-x}}$$

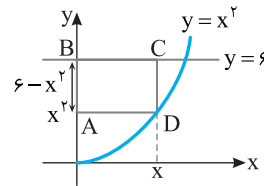
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{6-x} = \frac{x+2}{4\sqrt{6-x}} \Rightarrow 6-x = \frac{x+2}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$



**۱۰۸۹-گزینه ۱** فرض کنید طول نقطه  $D$  برابر  $x$  باشد. در این صورت، چون نقطه  $D$  روی نمودار تابع  $y = x^2$  است، پس عرض آن برابر  $x^2$  است. به این ترتیب عرض نقطه  $A$  هم برابر  $x^2$  است و در نتیجه  $AB = 6 - x^2$ . بنابراین  $2(x+6-x^2) = \text{محیط مستطیل } ABCD$ . اگر

$$y = 2(x+6-x^2), \quad \text{آن‌گاه } y' = 2-4x \text{ و در نتیجه } y' = 0, \text{ پس } x = \frac{1}{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع  $y$ ، یعنی بیشترین مقدار محیط مستطیل  $ABCD$  به‌ازای  $x = \frac{1}{2}$  به‌دست می‌آید و برابر است با  $2(\frac{1}{2} + 6 - \frac{1}{4}) = \frac{25}{2}$ .



**۱۰۹۰-گزینه ۲** فرض کنید طول نقطه  $D$  برابر  $x$  باشد. در این صورت طول نقطه  $C$  هم برابر  $x$  است و چون نقطه  $C$  روی خط  $y = -x + 3$  است، پس عرض آن برابر  $-x + 3$  است. بنابراین عرض نقطه  $B$  هم برابر  $-x + 3$  است و چون این نقطه روی خط  $y = x + 5$  است، پس طول نقطه  $B$  برابر است با  $5 - (-x + 3) = -x - 2$ . به این ترتیب،

$$BC = x - (-x - 2) = 2x + 2$$

در نتیجه

$$\text{مساحت مستطیل } ABCD = BC \times CD = (2x+2)(-x+3)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع  $y = (2x+2)(-x+3)$  را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$y' = 2(-x+3) + (-1)(2x+2) = -4x+4, \quad y' = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن تابع  $y$ ، یعنی بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل  $ABCD$  به‌ازای  $x=1$  به‌دست می‌آید و برابر است با  $4 \times 2 = 8$ .

**۱۰۹۱-گزینه ۳** توجه کنید که  $y = 4 - x$  و چون  $y < 0$ ، پس  $x > 4$  و باید بیشترین مقدار تابع

$$f(x) = x^2 + (4-x)^3, \quad x \in (4, +\infty)$$

را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(x) = 2x - 3(4-x)^2 = -3x^2 + 26x - 48$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 6, x = \frac{8}{3} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین تابع  $f$  فقط یک نقطه بحرانی دارد و چون

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 16, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad f(6) = 28$$

پس بیشترین مقدار ممکن تابع  $f$  برابر ۲۸ است.

**۱۰۹۲-گزینه ۳** چون  $2x + y = 8$ ، پس  $y = 8 - 2x$  و

$$xy^3 = x(8-2x)^3 = 8x(4-x)^3$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع  $f(x) = 8x(4-x)^3$  را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 8(4-x)^3 - 24x(4-x)^2 = 32(4-x)^2(1-x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4, x = 1$$

**۱۰۹۹-گزینه ۲** فرض کنید طول نقطه B برابر  $-x$  باشد. در این صورت طول نقطه A هم برابر  $-x$  است و چون نقطه A روی نمودار تابع  $y = x^3 + 8$  است، پس عرض نقطه A برابر است با  $8 - x^3$ . بنابراین

$$\text{مساحت مثلث OAB} = \frac{1}{2}x(8 - x^3)$$

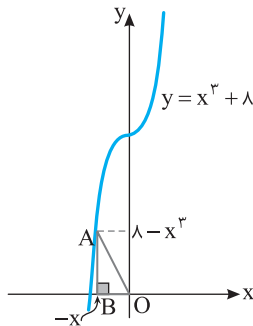
اگر  $f(x) = \frac{1}{2}x(8 - x^3)$ ، آن‌گاه  $f(x) = 4x - \frac{x^4}{2}$ ، پس  $f'(x) = 4 - 2x^3$ .

در نتیجه

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع  $f$ ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث OAB وقتی به دست می‌آید که  $x = \sqrt[3]{2}$  و برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(6) = 3\sqrt[3]{2}$$



**۱۱۰۰-گزینه ۳** فرض کنید طول نقطه A برابر  $-x$  باشد. چون نقطه A روی نمودار تابع  $y = x^2 + 1$  است، پس عرض نقطه A برابر  $x^2 + 1$  است. به

این ترتیب، عرض نقطه D هم برابر  $x^2 + 1$  است و در نتیجه

$$CD = 7 - (x^2 + 1) = 6 - x^2$$

بنابراین  $\text{مساحت مستطیل ABCD} = x(6 - x^2)$ .

اگر  $f(x) = x(6 - x^2)$ ، آن‌گاه  $f(x) = 6x - x^3$ ، در نتیجه

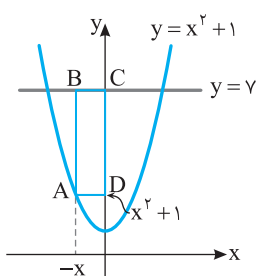
$$f'(x) = 6 - 3x^2$$

پس

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \quad (x > 0)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع  $f$ ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به ازای  $x = \sqrt{2}$  به دست می‌آید و برابر است با

$$\sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$$



**۱۰۹۶-گزینه ۳** فرض کنید طول نقطه D برابر  $x$  باشد. چون نقطه D روی نمودار تابع  $y = x^2$  است، پس عرض نقطه D برابر  $x^2$  است. در نتیجه، عرض نقطه A نیز برابر  $x^2$  است. از طرف دیگر عرض نقطه B برابر عرض نقطه C است، پس عرض نقطه B برابر ۹ است. به این ترتیب، بنابراین  $BA = 9 - x^2$

$$\text{مساحت دوزنقه ABCD} = \frac{1}{2}AB(BC + AD) = \frac{1}{2}(9 - x^2)(3 + x)$$

اگر  $f(x) = \frac{1}{2}(9 - x^2)(3 + x)$ ، آن‌گاه  $f'(x) = \frac{3}{2}(3 + x)(1 - x)$ ، پس

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (x > 0)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع  $f$ ، یعنی بیشترین مقدار مساحت دوزنقه ABCD به ازای  $x = 1$  به دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{1}{2}(9 - 1)(3 + 1) = 16$$

**۱۰۹۷-گزینه ۱** فرض کنید طول ضلع‌های نظیر رأس قائمه در این مثلث  $x$  و  $y$  باشند. در این صورت  $x^2 + y^2 = 4$ . از طرف دیگر،

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع  $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}$  را پیدا کنیم ( $0 < x < 2$ ). توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

چون  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ ، پس بیشترین مقدار تابع  $f$ ، یعنی

بیشترین مقدار مساحت مثلث مورد نظر به ازای  $x = \sqrt{2}$  به دست می‌آید و برابر است با  $\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$ .

**۱۰۹۸-گزینه ۲** فرض کنید  $(x, y)$  نقطه‌ای روی خط  $y = 4x + 2$  باشد. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4x + 2)^2} = \sqrt{17x^2 + 16x + 4}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع  $f(x) = \sqrt{17x^2 + 16x + 4}$  را پیدا کنیم.

$$f'(x) = \frac{34x + 16}{2\sqrt{17x^2 + 16x + 4}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{17}$$

پس  $y = 4x + 2 = \frac{2}{17}$ ، یعنی نقطه مورد نظر  $(-\frac{8}{17}, \frac{2}{17})$  است.



پس  $x=3$  باید جواب معادله  $2ax^2+3x+b=0$  باشد و این معادله نباید جواب دیگری غیر از  $x=0$  داشته باشد. بنابراین

$$x=0 \Rightarrow 0+0+b=0 \Rightarrow b=0, \quad x=3 \Rightarrow 18a+9+0=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

تجربی - ۹۲

۱۱۰۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x} + \frac{x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{6x^2 + x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

تابع  $f$  در نقطه  $x=0$  مشتق پذیر نیست و در نقطه‌های  $x=2$  و  $x=-2$  مشتق آن صفر است. پس مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع  $f$  به صورت  $\{-2, 0, 2\}$  است.

تجربی - ۸۳

۱۱۰۶- گزینه ۴ توجه کنید که تابع  $f$  در ابتدا و انتهای بازه  $[-1, 2]$

مشتق پذیر نیست. پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین،  $f(x) = |x||x^2-1|$ . بنابراین نقطه‌های  $x=0$  و  $x=1$  نیز نقطه‌های بحرانی

$$\text{تابع } f \text{ هستند. از طرف دیگر, } f(x) = \begin{cases} x^3 - x & -1 \leq x \leq 0 \\ -x^3 + x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{در نتیجه } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & -1 < x < 0 \\ -3x^2 + 1 & 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ریاضی - ۹۰

پس تابع  $f$  شش نقطه بحرانی دارد.

۱۱۰۷- گزینه ۴ تابع  $f$  در ابتدا و انتهای بازه  $[-2, 2]$  مشتق پذیر نیست.

پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین تابع  $f$  در نقطه‌های  $x=1$  و  $x=-1$  مشتق پذیر نیست، پس این نقطه‌ها نیز نقطه‌های بحرانی

$$\text{هستند. از طرف دیگر, } f(x) = \begin{cases} x^3 - x & -2 \leq x \leq -1 \\ -x^3 + x & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & -2 < x < -1 \\ -3x^2 + 1 & -1 < x < 1 \\ 3x^2 - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

پس تابع  $f$  شش نقطه بحرانی دارد.

۱۱۰۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow 3(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1, x = 3 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

۱۱۰۱- گزینه ۱ از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 4x^2 - 12x + 8 = 4(x-1)(x^2 + x - 2) = 4(x-1)^2(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

با توجه به جدول بالا تابع فقط یک مینیمم نسبی دارد. خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۱۰۲- گزینه ۲ نقطه  $(1, -2)$  روی نمودار تابع است، پس  $f(1) = -2$

در نتیجه  $a+b = -2$ . همچنین

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} -a + 2b = 0 \rightarrow a + b = -2$$

$$3b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}, a = -\frac{4}{3}$$

$$\text{بنابراین } f'(x) = \frac{4}{3} \left( \frac{1-x^2}{x^2} \right)$$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

ریاضی - ۸۹

پس نقطه  $(1, -2)$  نقطه ماکزیمم نسبی است.

۱۱۰۳- گزینه ۱ ابتدا مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2 + 2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}} + 2(x-1)\sqrt[3]{x} = \frac{2(x-1)^2 + 6x(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

اکنون معادله  $f'(x) = 0$  را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x=1, x=\frac{1}{4}$$

تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{1}{4}$	$1$	$+\infty$
$2(x-1)(4x-1)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$+$
$\sqrt[3]{x}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$0$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$	$\nearrow$

با توجه به جدول،  $x = \frac{1}{4}$  طول نقطه ماکزیمم نسبی است. خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۱۰۴- گزینه ۲ با توجه به نمودار تابع  $f$  مشخص است که تابع فقط یک

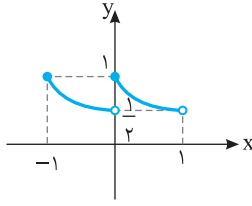
نقطه اکسترمم نسبی به طول ۳ دارد. بنابراین  $x=3$  جواب معادله  $f'(x) = 0$

است و  $f'(x)$  در این نقطه تغییر علامت می‌دهد:

$$f(x) = ax^2 + 2x^3 + bx^2$$

$$f'(x) = 4ax^2 + 6x^2 + 2bx = 2x(2ax^2 + 3x + b)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad 2ax^2 + 3x + b = 0$$



ریاضی - ۹۱

**۱۱۱۳- گزینه ۴** توجه کنید که تابع  $f$  در نقطه‌های  $x = \pm\sqrt{3}$  مشتق پذیر نیست، بنابراین این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی تابع  $f$  هستند. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & x \leq -\sqrt{3} \\ -x^3 + 3x & -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ x^3 - 3x & x \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{پس در نتیجه } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & x < -\sqrt{3} \\ -3x^2 + 3 & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 3x^2 - 3 & x > \sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

اکنون توجه کنید که

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$1$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	+	-	+
$f(x)$		↗	↘	↗	↘	↗

پس تابع  $f$  در چهار نقطه اکسترمم نسبی دارد.

**۱۱۱۴- گزینه ۳** اگر تابع  $f$  در نقطه  $c$  مشتق پذیر باشد، مشتق آن در این نقطه برابر صفر است، پس مشتق راست تابع نیز در این نقطه برابر صفر است. اگر تابع  $f$  در نقطه  $c$  مشتق پذیر نباشد، مشتق راست آن در این نقطه مثبت است.



خارج از کشور ریاضی ۹۰

**۱۱۱۵- گزینه ۳** عبارات گزینه‌های (۲) و (۴) درست هستند. همچنین می‌دانیم اگر  $f'$  در نقطه  $c$  اکسترمم نسبی  $c$  موجود باشد، آن‌گاه  $f'(c) = 0$ ، پس گزینه (۱) نیز عبارتی درست است. گزینه (۳) نادرست است، زیرا هر نقطه بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست، مانند  $x = 0$  در  $f(x) = x^3$ . ریاضی - ۹۰

**۱۱۱۶- گزینه ۱** مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

پس تابع  $f'$  ریشه ندارد و در همه نقاط دامنه  $f$ ، تابع مشتق پذیر است، بنابراین تابع  $f$  نقطه بحرانی ندارد.

**۱۱۱۷- گزینه ۳** در تابع  $f(x) = (x-1)|(x-1)(x+2)|$ ،  $x = -2$  ریشه ساده عبارت داخل قدرمطلق است، پس تابع  $f$  در نقطه  $x = -2$  مشتق پذیر نیست.

در  $x = 1$  نیز مشتق تابع برابر صفر است و به همین دلیل این نقطه نیز جزء نقاط بحرانی تابع است. اکنون توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2) \geq 0 \\ -(x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2) < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow ((x-1)^2(x+2))' = 0$$

$$2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = (x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow x = 1, -1$$

اکنون مقادیر  $f(-2)$ ،  $f(2)$  و  $f(-1)$  را پیدا می‌کنیم تا بیشترین مقدار تابع  $f$  در بازه  $[-2, 2]$  مشخص شود:  $f(-2) = 3$ ،  $f(2) = -17$  و  $f(-1) = 10$ . پس بیشترین مقدار تابع  $f$  در این بازه برابر ۱۰ است.

**۱۱۰۹- گزینه ۲** طول نقاط بحرانی تابع روی بازه  $(-4, 3)$  را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 15$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 5$$

$x = 5$  در بازه مورد نظر نیست. برای یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم، مقدار تابع را در نقاط زیر با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(-4) = -\frac{64}{3} - 16 + 60 = -\frac{64}{3} + 44 = \frac{68}{3} = 22\frac{2}{3}$$

$$f(-3) = -\frac{27}{3} - 9 + 45 = -18 + 45 = 27$$

$$f(3) = \frac{27}{3} - 9 - 45 = -45$$

پس  $f(-3) = 27$  مقدار ماکزیمم مطلق و  $f(3) = -45$  مینیمم مطلق تابع داده شده در بازه مورد نظر است.

تجربی - ۹۰

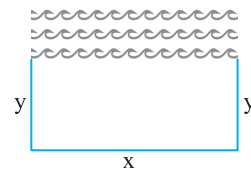
**۱۱۱۰- گزینه ۲** با توجه به شکل زیر،

$$x + 2y = 88 \Rightarrow x = 88 - 2y$$

می‌خواهیم مساحت مستطیل یعنی  $S = xy$  ماکزیمم باشد:

$$S(y) = (88 - 2y)y = -2y^2 + 88y$$

$$S'(y) = -4y + 88 = 0 \Rightarrow y = 22 \Rightarrow S_{\max} = 968 \text{ m}^2$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۱

**۱۱۱۱- گزینه ۴** توجه کنید که

$$f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = \frac{2x^3 - a}{x^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

$x = 0$  جزء دامنه تابع نیست و تنها باید  $x = x_0$  را بررسی کنیم. در همسایگی این نقطه، علامت  $f'$  از منفی به مثبت تغییر می‌کند (به ازای همه مقادیر  $a$ )، بنابراین همواره  $x = x_0$  نقطه مینیمم نسبی تابع است و تابع ماکزیمم نسبی ندارد.

**۱۱۱۲- گزینه ۲** چون  $0 \leq x - [x] < 1$ ، پس  $-1 < f(x) \leq 0$ ، بنابراین از

اینکه تابع  $g(x) = 2^x$  اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود

$$g(-1) < g(f(x)) \leq g(0) \Rightarrow \frac{1}{2} < (g \circ f)(x) \leq 1$$

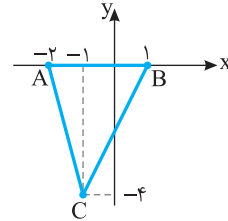
پس تابع  $g \circ f$  مقدار ماکزیمم نسبی دارد و مقدار مینیمم نسبی ندارد. به نمودار تابع در بازه  $[-1, 1]$  توجه کنید.

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -1 - x \Rightarrow (g \circ f)(x) = 2^{-x-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = -x \Rightarrow (g \circ f)(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

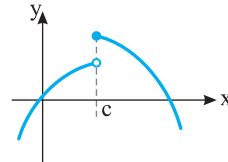
پس نقطه بحرانی سوم، نقطه‌ای به طول  $x = -1$  است. بنابراین  
 نقاط بحرانی:  $A(-2, 0)$ ،  $B(1, 0)$ ،  $C(-1, -4)$

$$\text{در نتیجه } S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۲

**۱۱۱۸- گزینه ۴** با توجه به شکل زیر هر سه گزینه (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند. گزینه (۴) درست است، زیرا با توجه به اینکه تابع  $f$  در همسایگی نقطه  $x = c$  تعریف شده است، در این نقطه مقدار تابع  $f$  در تعریف اکسترمم نسبی صدق می‌کند.



ریاضی - ۸۸

**۱۱۱۹- گزینه ۴** توجه کنید که

$$f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} = \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

واضح است که برای هر  $x$  حقیقی  $x^3 - x^2 \leq x^3$  پس  $\sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq \sqrt[3]{x^3}$  و در نتیجه  $f(x) \geq 0$ . از طرف دیگر  $f(0) = 0$ . پس کمترین مقدار تابع برابر صفر است.

ریاضی - ۹۲

**۱۱۲۰- گزینه ۴** شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه به طول  $x$

$$\text{برابر با } f'(x) \text{ است. بنابراین } m = f'(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

بیشترین مقدار  $f'(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$m' = -2x + 4 \stackrel{m' = 0}{\rightarrow} x = 2 \Rightarrow m = 3$$

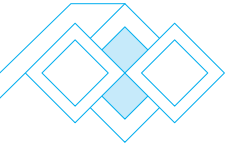
بنابراین خطی با شیب ۳ مورد نظر است که در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار تابع  $f$  مماس شده است. معادله این خط را می‌نویسیم:

$$y - f(2) = 3(x - 2) \Rightarrow y - \frac{10}{3} = 3x - 6$$

این خط محور  $y$  را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند:

$$x = 0 \Rightarrow y - \frac{10}{3} = 0 - 6 \Rightarrow y = -\frac{8}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۷



$$PA=PB \Rightarrow \sqrt{(4m+3)^2 + (2m-1-1)^2} = \sqrt{(4m+9)^2 + (2m-1+2)^2}$$

$$(4m+3)^2 + (2m-1)^2 = (4m+9)^2 + (2m+1)^2$$

$$16m^2 + 24m + 9 + 4m^2 - 44m + 12 = 16m^2 + 72m + 81 + 4m^2 + 4m + 1$$

$$96m = 48 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

**۱۱۲۷- گزینۀ ۲** شیب خط  $2y+x=1$  برابر  $-\frac{1}{2}$  است. شیب خط عمود بر این خط ۲ است. پس معادله خطی را که شیب آن ۲ باشد و از نقطه  $(-1, 2)$  بگذرد می‌نویسیم:

$$y-2=2(x+1) \Rightarrow y=2x+4 \Rightarrow 2x-y+4=0$$

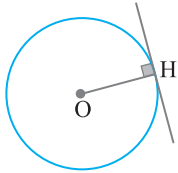
فاصله مبدأ مختصات از این خط، مطلوب مسئله است که برابر است با

$$\frac{|0-0+4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

**۱۱۲۸- گزینۀ ۴** شعاع دایره برابر فاصله نقطه O از خط  $6x+8y+1=0$

است:  $R = \frac{|6-8+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{1}{10}$ . بنابراین مساحت دایره برابر است با

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi}{100}$$



**۱۱۲۹- گزینۀ ۲** چون مختصات نقطه A در معادله خط داده شده صدق

نمی‌کنند، پس  $y=2x-1$  معادله AD و AB نیست. پس با معادله BC

است یا DC. هر کدام که باشد، اگر فاصله نقطه  $A(2, 1)$  تا خط  $y=2x-1$

را حساب کنیم، طول ضلع مربع به دست می‌آید:

$$2x-y-1=0, \quad a = \frac{|4-1-1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مساحت مربع ABCD برابر

$$S = a^2 = \frac{4}{5}$$

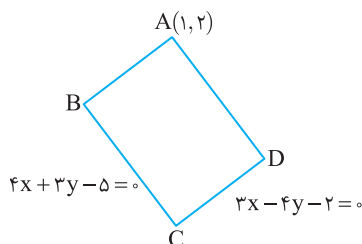
**۱۱۳۰- گزینۀ ۳** رأس A روی هیچ کدام از خط‌های داده شده قرار ندارد، زیرا

مختصات آن در معادله‌های داده شده صدق نمی‌کنند. پس برای محاسبه طول و

عرض مستطیل کافی است فاصله A از دو خط داده شده را به دست آوریم:

$$AB = \frac{|4+6-5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{5}{5} = 1, \quad AD = \frac{|3-8-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{7}{5}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با  $S = 1 \times \frac{7}{5} = \frac{7}{5}$



**۱۱۲۱- گزینۀ ۲** طول پاره خط AB برابر است با  $(2a+1)-(a-1)$ . بنابراین

$$AB = 2a+1-a+1=5 \Rightarrow a=3$$

پس طول پاره خط BC برابر است با

$$BC = (5a-2)-(2a+1) = 3a-3=6$$

**۱۱۲۲- گزینۀ ۲** فاصله نقطه  $(a, a\sqrt{3})$  از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a| = 6$$

بنابراین  $a = \pm 3$ .

**۱۱۲۳- گزینۀ ۲** مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+m}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3m+1}{2}$$

چون M روی خط  $2y+3x-1=0$  است، پس

$$2\left(\frac{-3m+1}{2}\right) + 3\left(\frac{2+m}{2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow -3m+1+3+\frac{3m}{2}-1=0$$

$$-\frac{3m}{2} = -3 \Rightarrow m=2$$

بنابراین M نقطه  $(\frac{2+2}{2}, \frac{-3 \times 2 + 1}{2})$ ، یعنی  $(2, -\frac{5}{2})$  است.

**۱۱۲۴- گزینۀ ۴** حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -۱

است. در نتیجه

$$\frac{3}{k} \times \frac{-(k-5)}{2} = -1 \Rightarrow 3(k-5) = 2k \Rightarrow k=15$$

**۱۱۲۵- گزینۀ ۳** اگر رأس B قائمه باشد، آن‌گاه AB بر BC عمود است،

یعنی حاصل ضرب شیب‌های خط‌های AB و BC برابر -۱ است:

$$m_{AB} = \frac{6-4}{7-4} = \frac{2}{3}, \quad m_{BC} = \frac{4-a^2}{4-2a}$$

توجه کنید که اگر  $a=2$ ، نقطه‌های B و C بر هم منطبق می‌شوند که درست

نیست. بنابراین  $a \neq 2$  و در نتیجه  $m_{BC} = \frac{2+a}{4-a}$ . به این ترتیب

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{2+a}{4-a} = -1 \Rightarrow a = -5$$

**۱۱۲۶- گزینۀ ۴** راه‌حل اول وسط پاره خط واصل نقطه‌های  $(-3, 10)$  و

$(-9, -2)$  نقطه  $(\frac{-3-9}{2}, \frac{10-2}{2})$ ، یعنی  $(-6, 4)$  است. چون نقطه

$(4m, 2m-1)$  روی عمودمنصف پاره خط مورد نظر است، پس حاصل ضرب

شیب خطی که از نقطه‌های  $(4m, 2m-1)$  و  $(-6, 4)$  می‌گذرد و شیب خطی

که از نقطه‌های  $(-3, 10)$  و  $(-9, -2)$  می‌گذرد برابر -۱ است:

$$\frac{2m-1-4}{4m+6} \times \frac{10+2}{-3+9} = -1 \Rightarrow \frac{2m-5}{4m+6} \times 2 = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم چون نقطه  $P(4m, 2m-1)$  روی عمودمنصف پاره خط واصل

نقاط  $A(-3, 10)$  و  $B(-9, -2)$  است، پس

**۱۱۳۶- گزینه ۲ راه حل اول** می دانیم عمود منصف AB از وسط این

پاره خط یعنی نقطه  $M(-1, 3)$  می گذرد. شیب خط گذرنده از A و B برابر ۱ است، بنابراین شیب عمود منصف برابر  $-1$  است. در نتیجه معادله این خط به صورت  $y-3=-(x+1)$  یا به طور ساده تر  $x+y=2$  است.

**راه حل دوم** می دانیم هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است. فرض می کنیم نقطه  $P(x, y)$  روی عمود منصف پاره خط AB

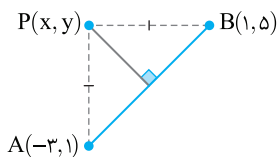
باشد. در این صورت

$$PA=PB \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}$$

$$(x+3)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-5)^2$$

$$x^2+6x+9+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2-10y+25$$

$$8x+8y=16 \Rightarrow x+y=2$$



**۱۱۳۷- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید شیب خطی که BC روی آن قرار دارد،

برابر  $\frac{1}{4}$  است، پس شیب خطی که AH روی آن قرار دارد برابر  $-2$  است.

بنابراین معادله این خط به صورت زیر است:

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)$$

$$y-2=-2(x-1) \Rightarrow y=-2x+4$$

بنابراین برای پیدا کردن مختصات نقطه H کافی است محل تقاطع دو خط

$$y=-2x+4 \text{ و } 2x-4y+1=0 \text{ را پیدا کنیم:}$$

$$\begin{cases} y=-2x+4 \\ 2x-4y+1=0 \end{cases} \xrightarrow{y=-2x+4} 2x-4(-2x+4)+1=0$$

$$10x=15 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=-2\left(\frac{3}{2}\right)+4 \Rightarrow y=1$$

پس H نقطه  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$  است.

**۱۱۳۸- گزینه ۳** با توجه به شکل زیر، اندازه AH را حساب می کنیم:

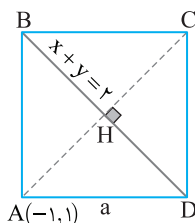
$$AH = \frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

بنابراین طول قطر مربع برابر  $2\sqrt{2}$  است. طول ضلع مربع را حساب می کنیم:

$$a^2+a^2=(2\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2a^2=8$$

$$a^2=4 \Rightarrow a=2$$

بنابراین محیط مربع برابر ۸ است.



**۱۱۳۱- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$AB=|x_B-x_A|=|2m-(m-1)|=|m+1|$$

$$BC=|x_C-x_B|=|3m+1-2m|=|m+1|$$

بنابراین

$$2|m+1|-|m+1|=3 \Rightarrow |m+1|=3 \Rightarrow \begin{cases} m+1=3 \Rightarrow m=2 \\ m+1=-3 \Rightarrow m=-4 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با  $-2$ .

**۱۱۳۲- گزینه ۱** توجه کنید که

$$AB = \sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(2a+3\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \left(a-\frac{1}{4}\right)^2 + (2a+3)^2 = \frac{13}{4}$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} + 4a^2 + 12a + 9 = \frac{13}{4} \Rightarrow 5a^2 + 11a + 6 = 0$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن a برابر است با مجموع جواب های این معادله،

یعنی  $-\frac{11}{5}$ . توجه کنید که این معادله دو جواب دارد.

**۱۱۳۳- گزینه ۴ راه حل اول** در متوازی الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف

می کنند. بنابراین نقطه وسط پاره خط AC همان نقطه وسط پاره خط BD است.

$$\text{بنابراین } \left(\frac{-2+x}{2}, \frac{-3+y}{2}\right) = \left(\frac{y-x-1}{2}, \frac{2-y+3}{2}\right) \text{ در نتیجه}$$

$$-2+x=6-x \Rightarrow x=4, \quad -3+y=5-y \Rightarrow y=4$$

یعنی C نقطه (۴, ۴) است.

**راه حل دوم** در متوازی الاضلاع، ضلع های روبرو موازی اند. پس

$$AB \parallel CD \Rightarrow m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \frac{-3-2+y}{-2-7+x} = \frac{y-3}{x+1} \Rightarrow \frac{-5+y}{-9+x} = \frac{y-3}{x+1}$$

$$-5x-5+yx+y=-9y+27+xy-3x \Rightarrow -x+5y=16$$

به همین ترتیب،

$$AD \parallel BC \Rightarrow m_{AD} = m_{BC} \Rightarrow \frac{-3-3}{-2+1} = \frac{2-y-y}{y-x-x}$$

$$6 = \frac{2-2y}{y-2x} \Rightarrow 6y-12x=2-2y \Rightarrow 6x-y=20$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات } \begin{cases} -x+5y=16 \\ 6x-y=20 \end{cases} \text{ به دست می آید } x=4 \text{ و } y=4$$

بنابراین C نقطه (۴, ۴) است.

**۱۱۳۴- گزینه ۱** شیب خط راستی که از نقطه های (۶, -۱) و (-۲, -۳)

می گذرد برابر است با  $\frac{6+3}{-1+2}=9$ . بنابراین شیب خط راستی که بر این خط

عمود است برابر است با  $-\frac{1}{9}$ . معادله خط راستی که شیب آن  $-\frac{1}{9}$  است و از

نقطه (۰, -۵) می گذرد به صورت زیر است:

$$y-(-5)=-\frac{1}{9}(x-0) \Rightarrow x+9y+45=0$$

**۱۱۳۵- گزینه ۳** شیب خطی را که از نقطه های A و B می گذرد حساب

می کنیم  $m_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{0-2}{-1-1} = 1$ . پس شیب ارتفاع CH برابر  $-1$

است، زیرا  $CH \perp AB$ . اکنون معادله خطی را که از رأس C با شیب  $-1$

می گذرد می نویسیم:

$$y-y_C = m_{CH} \times (x-x_C) \Rightarrow y+1 = -(x-3) \Rightarrow y = -x+2$$

۱۱۴۳- گزینه ۳ مختصات نقطه M وسط ضلع AC را حساب می‌کنیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

بنابراین طول میانه BM برابر است با

$$BM = \sqrt{(m-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(m-3)^2 + 4}$$

چون  $BM = 2$ ، پس

$$\sqrt{(m-3)^2 + 4} = 2 \Rightarrow (m-3)^2 + 4 = 4 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

۱۱۴۴- گزینه ۲ خط  $3x + y = 4$  بر خط  $x - ay = 7$  عمود است، پس

حاصل ضرب شیب این خطها  $-1$  است:

$$-3 \times \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = 3$$

خط  $x - 3y = 7$  بر خط  $bx + 2y = -5$  عمود است، پس حاصل ضرب

شیب این خطها نیز  $-1$  است:

$$\frac{1}{3} \times \left(-\frac{b}{2}\right) = -1 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین  $a + b = 9$ .

۱۱۴۵- گزینه ۱ اگر نقطه H وسط پاره خط AA' باشد، آن‌گاه

$$x_H = \frac{1-3}{2} = -1, \quad y_H = \frac{2+4}{2} = 3$$

با توجه به شکل زیر مختصات نقطه H در معادله خط  $y = ax + b$  صدق

می‌کنند. پس

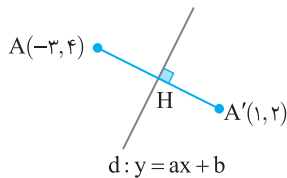
$$3 = a(-1) + b \Rightarrow b = a + 3$$

از طرف دیگر عکس و قرینه شیب خطی که از A و A' می‌گذرد، برابر a،

شیب خط  $y = ax + b$  است، پس

$$m_{AA'} = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{2-4}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$$

بنابراین  $b = 5$  و در نتیجه  $ab = 10$ .



۱۱۴۶- گزینه ۲ ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{18}, \quad AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-1-5)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{185}$$

واضح است که تساوی  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  بین طول ضلع‌های مثلث

برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$\frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \sqrt{18} \times \sqrt{5} = 10$$

۱۱۴۷- گزینه ۳ ابتدا خطها را به صورت  $2x - y + k = 0$  و  $x - 2y - 1 = 0$

می‌نویسیم. اکنون اگر فاصله A از دو خط به ترتیب برابر AH و AH' باشد، آن‌گاه

$$AH = \frac{|2k+1+k|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|3k+1|}{\sqrt{5}}, \quad AH' = \frac{|k+2-1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|k+1|}{\sqrt{5}}$$

$$AH = 2AH' \Rightarrow |3k+1| = 2|k+1| \Rightarrow \begin{cases} 3k+1 = 2k+2 \Rightarrow k = 1 \\ 3k+1 = -2k-2 \Rightarrow k = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

۱۱۳۹- گزینه ۴ چون خطهای داده شده موازی اند، پس شیب‌های آنها

برابر است، در نتیجه  $-\frac{a}{2} = -3$ ، پس  $a = 6$ . اگر دو طرف معادله خط دوم

را در ۲ ضرب کنیم، به شکل  $6x + 2y + 2k = 0$  درمی‌آید. چون فاصله این دو

خط  $\sqrt{10}$  است، پس

$$\frac{|2k+6|}{\sqrt{6^2+2^2}} = \sqrt{10} \xrightarrow{k > 0} \frac{2k+6}{\sqrt{40}} = \sqrt{10} \Rightarrow k = 7$$

بنابراین  $a + k = 13$ .

۱۱۴۰- گزینه ۱ ابتدا معادله خط دوم را به صورت  $2x - y - \frac{3}{2} = 0$

می‌نویسیم. اکنون فرض می‌کنیم نقطه  $(x_0, y_0)$  روی خط مورد نظر باشد.

فاصله این نقطه از دو خط باید برابر باشد

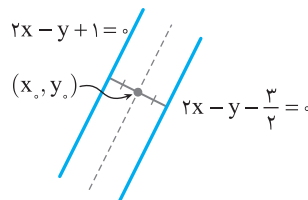
$$\frac{|2x_0 - y_0 + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2x_0 - y_0 - \frac{3}{2}|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow |2x_0 - y_0 + 1| = |2x_0 - y_0 - \frac{3}{2}|$$

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 + 1 = 2x_0 - y_0 - \frac{3}{2} \Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} \text{ (غ.ق.)} \\ 2x_0 - y_0 + 1 = -2x_0 + y_0 + \frac{3}{2} \Rightarrow 4x_0 - 2y_0 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

پس مختصات تمام نقطه‌هایی که از دو خط داده شده به یک فاصله باشند، در

معادله  $4x - 2y - \frac{1}{2} = 0$  صدق می‌کنند، یعنی معادله خط مورد نظر

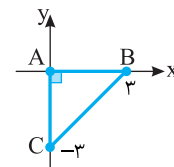
$$4x - 2y - \frac{1}{2} = 0 \text{ است.}$$



۱۱۴۱- گزینه ۴ با توجه به شکل مقابل واضح

است که  $\hat{A} = 90^\circ$  و  $AB = AC = 3$ . بنابراین

مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.



۱۱۴۲- گزینه ۱ چون خطهای MN و BC موازی هستند، پس شیب

آنها برابر است. شیب خط MN را به دست می‌آوریم:

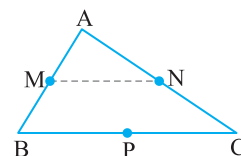
$$m_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-1-4}{-2-5} = \frac{5}{7}$$

معادله خطی را که از نقطه  $P(-3, -4)$  با شیب  $\frac{5}{7}$  می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y + 4 = \frac{5}{7}(x + 3) \Rightarrow 7y = 5x - 13$$

پس معادله خطی که BC روی آن قرار

دارد،  $7y = 5x - 13$  است.

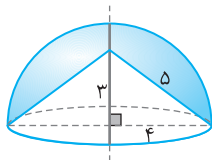


۱۱۵۶- گزینه ۲ ابتدا به کمک قضیه فیثاغورس شعاع ربع دایره را تعیین می‌کنیم:

$$5^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow r = 4$$

جسم حاصل نیم کره‌ای به شعاع ۴ است که مخروطی به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است. بنابراین حجم این جسم برابر است با

$$\frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi \times 4^3 \right) - \frac{\pi \times 4^2 \times 3}{3} = \frac{80\pi}{3}$$



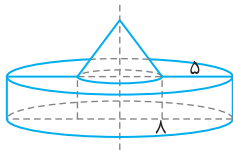
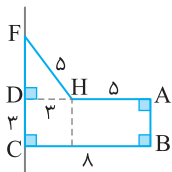
۱۱۵۷- گزینه ۳ به شکل زیر توجه کنید. برای به دست آوردن FD از

قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$FD^2 = FH^2 - DH^2 \Rightarrow FD = \sqrt{25 - 9} = 4$$

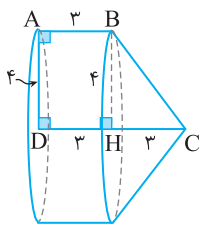
بنابراین جسم مورد نظر از یک استوانه به شعاع قاعده ۸ و ارتفاع ۳ و از یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ درست شده است. بنابراین حجم مورد نظر

$$\pi \times 8^2 \times 3 + \frac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = 204\pi$$



۱۱۵۸- گزینه ۱ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ است که مخروطی به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ به آن اضافه شده است. بنابراین

$$\pi \times 4^2 \times 3 + \frac{\pi \times 4^2 \times 3}{3} = 64\pi$$



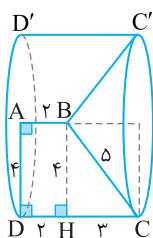
۱۱۵۹- گزینه ۲ به شکل زیر توجه کنید. برای به دست آوردن HC از

قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$HC^2 = BC^2 - BH^2 \Rightarrow HC = \sqrt{25 - 16} = 3$$

بنابراین جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ است که مخروطی به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است. بنابراین حجم حاصل برابر

$$\pi \times 4^2 \times 5 - \frac{\pi \times 4^2 \times 3}{3} = 64\pi$$



۱۱۴۸- گزینه ۲ خط راست گذرنده از B و C از نقاط (۰, ۱) و (۲, ۰) نیز

می‌گذرد. بنابراین معادله آن  $y - 0 = \frac{0-1}{2-0}(x-2)$  یا  $y - 0 = \frac{-1}{2}(x-2)$  است. طول

ارتفاع وارد بر BC برابر با فاصله A از BC است:  $\frac{|2 \times 4 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با  $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

۱۱۴۹- گزینه ۲ طول ضلع BC برابر است با

$$BC = \sqrt{(5-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$$

معادله خط گذرنده از نقاط B و C به صورت  $y - 3 = \frac{4-3}{5-3}(x-3)$  یا  $y - 3 = \frac{1}{2}(x-3)$

است. بنابراین طول ارتفاع وارد بر BC یا همان فاصله A از

خط گذرنده از نقاط B و C برابر است با  $\frac{|2(1) - (-7) - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ . بنابراین

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با  $\frac{6}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 6$

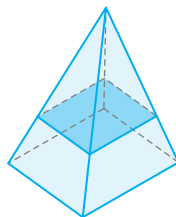
۱۱۵۰- گزینه ۴ فاصله خط‌های موازی  $3x + 4y + 6 = 0$  و

$3x + 4y - 6 = 0$  برابر است با  $\frac{|6+6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{12}{5}$ . در نتیجه، چون مساحت

مستطیل ۱۲ است، پس طول ضلع دیگرش برابر با ۵ است. بنابراین طول ضلع بزرگ‌تر این مستطیل برابر ۵ است.

۱۱۵۱- گزینه ۳ همان‌گونه که در شکل مقابل

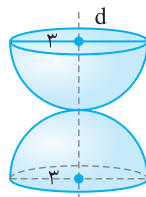
دید می‌شود، سطح مقطع حاصل یک مربع است.



۱۱۵۲- گزینه ۳ جسم حاصل از دو نیم کره

هر یک به شعاع ۳ درست شده است. بنابراین حجم

$$\text{آن برابر است با } 2 \times \left( \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi \times 3^3 \right) \right) = 36\pi$$



۱۱۵۳- گزینه ۱ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱۲ و ارتفاع ۴

است که استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۴ از آن حذف شده است.

$$\pi \times 12^2 \times 4 - \pi \times 2^2 \times 4 = 560\pi$$

بنابراین حجم آن برابر است با  $560\pi$

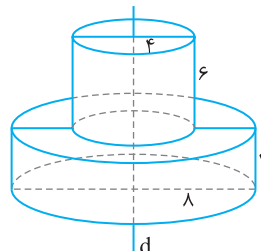
۱۱۵۴- گزینه ۳ از دوران هر نیم دایره حول خط d یک کره ایجاد می‌شود.

پس شکل ایجاد شده فضای بین دو کره است.

۱۱۵۵- گزینه ۴ جسم مورد نظر از دو استوانه درست شده است. یکی به

شعاع قاعده ۸ و ارتفاع ۴ و دیگری به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۶. بنابراین حجم

$$\text{مورد نظر برابر است با } \pi \times 8^2 \times 4 + \pi \times 4^2 \times 6 = 352\pi$$



**۱۱۶۶- گزینه ۳** محل برخورد خط  $y=2x+4$  با محور  $x$  نقطه  $(-2, 0)$  است. پس  $F$  نقطه  $(-2, 0)$  است. در نتیجه  $c=OF=2$ . محل برخورد خط  $y=2x+4$  با محور  $y$  نقطه  $(0, 4)$  است، پس  $b=OB=4$ . اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی برابر است با  $2a = 4\sqrt{5}$ .

**۱۱۶۷- گزینه ۳** توجه کنید که  $c=FO=F'O=2$  و در نتیجه  $\frac{c}{a} = \frac{2}{5}$ . بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با  $\frac{c}{a} = \frac{2}{5}$ .

**۱۱۶۸- گزینه ۲** راه حل اول طول قطر بزرگ بیضی برابر  $2a$  است.

بنابراین  $2a = 16$  پس  $a = 8$ . از طرف دیگر، خروج از مرکز بیضی برابر  $\frac{c}{a}$

است. بنابراین

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 4$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 48 \Rightarrow b = 4\sqrt{3}$$

طول قطر کوچک بیضی برابر  $2b$  است، پس برابر است با  $8\sqrt{3}$ .

**راه حل دوم** چون  $a = 8$  و  $e = \frac{1}{2}$  پس

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{64}} \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{b^2}{64} \Rightarrow b^2 = 48 \Rightarrow b = 4\sqrt{3}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با  $2b = 8\sqrt{3}$ .

**۱۱۶۹- گزینه ۳** توجه کنید که  $c=OF=12$  و چون  $2b=18$  پس  $b=9$ . بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow a = 15$$

در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با  $\frac{c}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ .

**۱۱۷۰- گزینه ۱** نقطه‌های  $F'$  و  $B$  به ترتیب محل برخورد خط

$y = -2x + 1$  با محور  $x$  و محور  $y$  هستند. بنابراین  $F'$  نقطه  $(\frac{1}{2}, 0)$  و  $B$

نقطه  $(0, 1)$  است. در نتیجه  $b=OB=1$  و  $c=OF'=\frac{1}{2}$ . بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با  $\frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**۱۱۷۱- گزینه ۲** مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر  $2a$  است. بنابراین  $2a = PF + PF' = 10$  پس  $a = 5$ .

فاصله هر سر قطر کوچک بیضی تا هر یک از کانون‌های بیضی برابر  $a$  است. پس  $B'F' = a = 5$ .

**۱۱۷۲- گزینه ۳** طول قطر بزرگ بیضی برابر  $2a$  است، پس

$2a = AA' = 8$ . از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا

کانون‌های بیضی برابر  $2a$  است. در نتیجه  $MF + MF' = NF + NF' = 2a = 8$ .

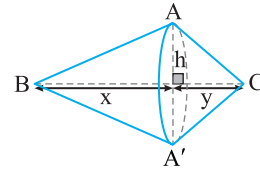
بنابراین محیط چهارضلعی  $FMF'N$  برابر است با  $8 + 8 = 16$ .

**۱۱۶۰- گزینه ۳** جسم حاصل از دو مخروط به هم چسبیده درست شده است. شعاع قاعده هر دو مخروط برابر ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  مثلث  $ABC$  است. اگر ارتفاع‌های آن‌ها برابر  $x$  و  $y$  باشد، آن‌گاه  $x + y = BC = 6$ . اکنون توجه کنید که

$$S_{ABC} = 12 \Rightarrow \frac{1}{2} h \times BC = 12 \Rightarrow \frac{1}{2} h \times 6 = 12 \Rightarrow h = 4$$

بنابراین حجم مورد نظر برابر است با

$$\frac{\pi h^2 x}{3} + \frac{\pi h^2 y}{3} = \frac{\pi h^2}{3} (x + y) = \frac{\pi \times 4^2 \times 6}{3} = 32\pi$$



**۱۱۶۱- گزینه ۲** مرکز بیضی وسط پاره خط  $FF'$ ، یعنی نقطه

$$\left(\frac{6+6}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (6, 1)$$

**۱۱۶۲- گزینه ۴** مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر  $2a$  است. بنابراین

$$2a = PF + PF' = \sqrt{(-6+6)^2 + (5-0)^2} + \sqrt{(-6-6)^2 + (5-0)^2} = 5 + 13 = 18$$

پس طول قطر بزرگ بیضی برابر  $18$  است.

**۱۱۶۳- گزینه ۲** راه حل اول طبق فرض،

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3, \quad 2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = \frac{9}{4} + c^2 \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

به این ترتیب، فاصله کانونی بیضی برابر است با  $2c = 3\sqrt{3}$ .

**راه حل دوم** چون  $a^2 = b^2 + c^2$ ، پس  $4a^2 = 4b^2 + 4c^2$ . در نتیجه

$$(2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2$$

$$6^2 = 3^2 + (2c)^2 \Rightarrow (2c)^2 = 27 \Rightarrow 2c = 3\sqrt{3}$$

**۱۱۶۴- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که  $2c = FF' = 6$  پس  $c = 3$ . طول

قطر بزرگ بیضی برابر  $2a$  است، پس  $2a = 10$ ، یعنی  $a = 5$ . بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b = 4$$

در نتیجه، طول قطر کوچک بیضی برابر است با  $2b = 8$ .

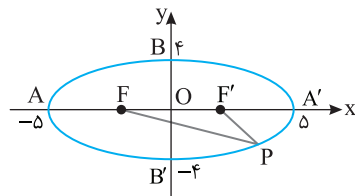
**۱۱۶۵- گزینه ۴** توجه کنید که

$$PFF' \text{ محیط مثلث } = (PF + PF') + FF' = 2a + 2c$$

از طرف دیگر  $a = OA' = 5$  و  $b = OB = 4$ . اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c = 3$$

بنابراین محیط مثلث  $PFF'$  برابر است با  $2a + 2c = 16$ .





۱۱۷۹- گزینه ۱ توجه کنید که  $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ، پس  $c = \frac{a}{2}$  و  $2b = 12$ ، پس

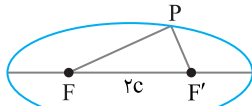
$b = 6$ ، بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 36 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

بنابراین  $c = \frac{a}{2} = 2\sqrt{3}$ ، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های

بیضی برابر  $2a$  است، بنابراین

$$PF + PF' + FF' = 2a + 2c = 12\sqrt{3} = PFF'$$



۱۱۸۰- گزینه ۳ توجه کنید که  $c = OF = 5$ ، پس  $FF' = 2c = 10$ ، از

طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر است

با  $2a$ ، در نتیجه  $PF + PF' = 2a$ ، اکنون توجه کنید که

$$PFF' = (PF + PF') + FF' \Rightarrow 24 = 2a + 10 \Rightarrow a = 7$$

در نتیجه، خروج از مرکز بیضی برابر است با  $\frac{c}{a} = \frac{5}{7}$ ،

۱۱۸۱- گزینه ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر  $2a$  است، بنابراین

$$2a = KF + KF' = 13 + 7 = 20 \Rightarrow a = 10$$

از طرف دیگر، فاصله هر یک از دو سر قطر کوچک بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر  $a$  است، پس  $BF' = 10$ ،

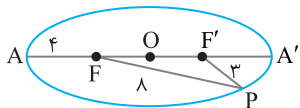
۱۱۸۲- گزینه ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر  $2a$  است، بنابراین

$$2a = PF + PF' = 8 + 3 = 11$$

از طرف دیگر  $AA' = 2a$  و  $AF' = AF = 4$ ، پس

$$FF' = AA' - AF - AF' = 11 - 4 - 4 = 3$$



۱۱۸۳- گزینه ۲ توجه کنید که  $2a = AA' = 10$ ، پس  $a = 5$ ، از طرف

دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر  $2a$  است، بنابراین

$$PF + PF' = 2a \Rightarrow 4 + PF' = 10 \Rightarrow PF' = 6$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $PFF'$

$$PF^2 + FF'^2 = PF'^2 \Rightarrow 16 + FF'^2 = 36 \Rightarrow FF' = 2\sqrt{5}$$

۱۱۸۴- گزینه ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر  $2a$  است، بنابراین  $2a = PF + PF' = 11 + 5 = 16$ ، پس  $a = 8$ ،

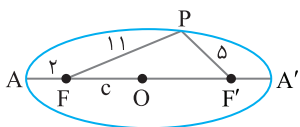
اگر  $O$  مرکز بیضی باشد، آن‌گاه

$$AO = AF + FO \Rightarrow a = 2 + c \Rightarrow 8 = 2 + c \Rightarrow c = 6$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 36 \Rightarrow b = 2\sqrt{7}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با  $2b = 4\sqrt{7}$ ،



۱۱۷۳- گزینه ۳ فاصله کانونی بیضی برابر است با  $2c$ ، بنابراین  $2c = 8$ ،

یعنی  $c = 4$ ، طول قطر کوچک بیضی برابر است با  $2b$ ، بنابراین  $2b = 4$ ،

یعنی  $b = 2$ ، اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با  $4\sqrt{5}$ ،

۱۱۷۴- گزینه ۳ طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک بیضی به ترتیب برابر

$2a$  و  $2b$  هستند، بنابراین

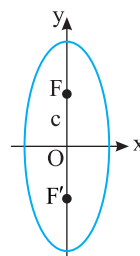
$$2a = 12 \Rightarrow a = 6, \quad 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 6^2 = 5^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{11}$$

بنابراین  $OF' = c = \sqrt{11}$ ، در نتیجه کانون‌های بیضی

نقطه‌های  $(0, \sqrt{11})$  و  $(0, -\sqrt{11})$  هستند.



۱۱۷۵- گزینه ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر  $2a$  است، بنابراین  $2a = PF + PF' = 26$ ،  $a = 13$ ،

همین‌طور،  $2b = BB' = 24$ ، پس  $b = 12$ ، اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13^2 = 12^2 + c^2 \Rightarrow c = 5$$

در نتیجه  $AF = a - c = 13 - 5 = 8$ ،

۱۱۷۶- گزینه ۳ توجه کنید که محور  $x$  از وسط پاره خط  $FF'$  می‌گذرد و

بر آن عمود است، بنابراین قطر کوچک بیضی مورد نظر است، در نتیجه

$BF = BF' = a$ ، اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویه  $BFF'$  بنابر

قضیه فیثاغورس،

$$BF^2 + BF'^2 = FF'^2 \Rightarrow a^2 + a^2 = 8^2 \Rightarrow 2a^2 = 64 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با  $2a = 8\sqrt{2}$ ،

۱۱۷۷- گزینه ۳ از شرط‌های مسئله نتیجه می‌شود که قطر بزرگ و

قطر کوچک بیضی روی محورهای مختصات هستند، بنابراین  $b = \sqrt{13}$ ، از

طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر  $2a$

است، بنابراین  $2a = PF + PF' = 14$ ، پس  $a = 7$ ،

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 49 = 13 + c^2 \Rightarrow c = 6$$

بنابراین، خروج از مرکز بیضی برابر است با  $\frac{c}{a} = \frac{6}{7}$ ،

۱۱۷۸- گزینه ۱ چون محور  $y$  عمود منصف  $FF'$  است، پس قطر کوچک

بیضی روی محور  $y$  است، در نتیجه  $b = OB = 3$ ، مجموع فاصله‌های هر

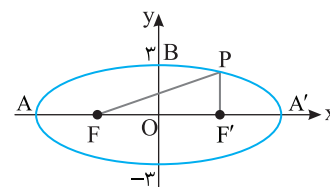
نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر با  $2a$  است، بنابراین

$$2a = PF + PF' = 18 \Rightarrow a = 9$$

در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = 6\sqrt{2}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با  $\frac{c}{a} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ،



۱۱۹۰-گزینه ۳ راه‌حل اول توجه کنید که  $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$  پس  $c = \frac{a}{3}$  و

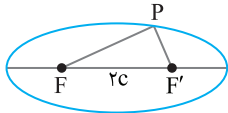
$2b = 8$  پس  $b = 4$  بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + \frac{a^2}{9} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

بنابراین  $c = \frac{a}{3} = \sqrt{2}$ . مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های

بیضی برابر  $2a$  است. بنابراین

$$PF + PF' + FF' = 2a + 2c = 8\sqrt{2}$$



راه‌حل دوم برای به دست آوردن  $a$  و  $c$  از  $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$  استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{16}{a^2}} \Rightarrow \frac{1}{9} = 1 - \frac{16}{a^2} \Rightarrow \frac{16}{a^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

از طرفی  $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$  پس  $c = \sqrt{2}$ .

۱۱۹۱-گزینه ۲ معادله دایره‌ای که مرکزش نقطه  $(\alpha, \beta)$  و شعاعش  $r$

است به صورت  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$  است. بنابراین معادله دایره مورد نظر  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$  است.

۱۱۹۲-گزینه ۳ اندازه شعاع دایره  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  برابر

$$\text{است با } \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \text{ بنابراین } \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-3)^2 - 4(-3)} = \frac{5}{2}$$

ابتدا توجه کنید که

$$(2x - 1)^2 + (2y + 3)^2 = k + 1 \Rightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = k + 1$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{k + 1}{4}$$

بنابراین شعاع دایره برابر  $\sqrt{\frac{k + 1}{4}}$  است. پس

$$\sqrt{\frac{k + 1}{4}} = 5 \Rightarrow \frac{k + 1}{4} = 25 \Rightarrow k + 1 = 100 \Rightarrow k = 99$$

۱۱۹۴-گزینه ۴ شعاع دایره مورد نظر برابر فاصله نقطه‌های  $(-1, 3)$  و

$(2, 5)$  است. پس  $r = \sqrt{(2 + 1)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{13}$  به این ترتیب، چون

مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(-1, 3)$  است، معادله‌اش به صورت زیر است:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y - 3 = 0$$

۱۱۹۵-گزینه ۳ برای اینکه  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  معادله یک

دایره باشد باید  $a^2 + b^2 - 4c > 0$ ، در نتیجه باید  $k^2 + 2^2 > 4 \times 3$ ، بنابراین  $k^2 > 8$  و در نتیجه  $|k| > 2\sqrt{2}$ .

۱۱۹۶-گزینه ۳ مختصات نقاط داده شده را در معادله دایره قرار می‌دهیم:

$$A(2, -2): 4 + 4 - 8 - 12 = -12 < 0, \quad B(4, 0): 16 + 0 - 16 + 0 = 0$$

$$C(3, 1): 9 + 1 - 12 + 6 = 4 > 0, \quad D(1, -2): 1 + 4 - 4 - 12 = -11 < 0$$

بنابراین  $A$  و  $D$  درون دایره،  $B$  روی دایره و  $C$  بیرون دایره است.

۱۱۸۵-گزینه ۱ توجه کنید که  $BF = BF' = a$  پس  $2a = 20$ ، یعنی

$a = 10$ . از طرف دیگر،  $c = OF' = OA' - F'A' = 10 - 4 = 6$ . اکنون توجه

کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 36 \Rightarrow b = 8$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با  $2b = 16$ .

۱۱۸۶-گزینه ۱ توجه کنید که

$$2a = AA' = 8 \Rightarrow a = 4, \quad 2b = BB' = 6 \Rightarrow b = 3$$

از طرف دیگر،

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویه  $BOF'$ ،  $\cos \alpha = \frac{OF'}{BF'} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .

۱۱۸۷-گزینه ۳ راه‌حل اول مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا

کانون‌های بیضی برابر  $2a$  است. همچنین،  $FF' = 2c$ ، بنابراین

$$PF + PF' + FF' = 2a + 2c$$

$$18 = 2(a + c) \Rightarrow a + c = 9$$

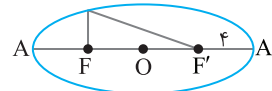
از طرف دیگر، اگر  $O$  مرکز بیضی باشد، آن‌گاه

$$A'O = A'F' + F'O \Rightarrow a = c + c \Rightarrow a - c = 4$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = (a - c)(a + c) = 36 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با  $2b = 12$ .



راه‌حل دوم برای به دست آوردن  $b$ ، از رابطه  $AF' = a + c$  استفاده می‌کنیم.

توجه کنید که

$$2a = AA' = AF' + F'A' \Rightarrow 2a = 9 + 4 = 13$$

$$a = \frac{13}{2}, \quad a + c = 9 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

بنابراین  $b = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 6$  پس  $2b = 12$ .

۱۱۸۸-گزینه ۲ راه‌حل اول بنا بر فرض مسئله  $\frac{2a}{2b} = \frac{13}{12}$ ، پس  $\frac{a}{b} = \frac{13}{12}$

یعنی  $b = \frac{12}{13}a$  بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 = \left(\frac{12}{13}a\right)^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - \frac{144}{169}a^2 = c^2$$

$$\frac{25}{169}a^2 = c^2 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$  و چون  $\frac{2a}{2b} = \frac{13}{12}$ ، پس  $\frac{b}{a} = \frac{12}{13}$

بنابراین

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{169 - 144}{169}} = \frac{5}{13}$$

۱۱۸۹-گزینه ۴ نقطه‌های  $A$  و  $B$  به ترتیب محل برخورد خط

$2x - 3y + 6 = 0$  با محور  $x$  و محور  $y$  هستند. بنابراین  $A$  نقطه  $(-3, 0)$

و  $B$  نقطه  $(0, 2)$  است. بنابراین  $a = OA = 3$  و  $b = OB = 2$ . در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 3^2 = 2^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

۱-۱۲۰۱ گزینۀ ۱ معادله دایره مورد نظر به صورت  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

است که به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

۱-۱۲۰۲ گزینۀ ۱ ابتدا دو طرف معادله دایره را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا

به صورت  $x^2 + y^2 + 2x - 3y - \frac{3}{4} = 0$  نوشته شود. بنابراین مرکز این دایره

نقطه  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  یعنی  $(-1, \frac{3}{2})$  است و شعاعش برابر است با

$$\frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-3)^2 - 4(-\frac{3}{4})} = 2$$

۱-۱۲۰۳ گزینۀ ۴ مرکز دایره نقطه  $(-\frac{a}{2}, -b)$  است. بنابراین

$$-\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = -4, \quad -b = -4 \Rightarrow b = 4$$

پس معادله دایره به صورت  $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 5$  است و شعاع آن برابر

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 8^2 - 4(-5)} = 5$$

۱-۱۲۰۴ گزینۀ ۴ در معادله دایره جمله شامل  $xy$  وجود ندارد. بنابراین

ضریب  $xy$  باید صفر باشد، پس  $a+b=0$ . از طرف دیگر، در معادله دایره

ضریب جمله‌های شامل  $x^2$  و  $y^2$  برابر ۱ است. اگر طرفین معادله داده شده

را بر ۶ تقسیم کنیم، معادله  $x^2 + \frac{2a-b}{6}y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 0$  به دست می‌آید.

بنابراین  $\frac{2a-b}{6} = 1$ ، یعنی  $2a-b=6$ . اکنون توجه کنید که

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-b=6 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=-2 \Rightarrow a-b=4$$

۱-۱۲۰۵ گزینۀ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر معادله

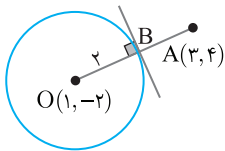
$x^2 + y^2 + 4x - 2y + a = 0$  مربوط به یک دایره باشد، باید

$4^2 + (-2)^2 > 4a$ ، پس  $a < 5$ . اکنون اگر مختصات نقطه  $A(-1, 2)$  را در

عبارت سمت چپ معادله دایره قرار دهیم، باید حاصل، عددی مثبت شود:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + a > 0 \xrightarrow{x=-1, y=2} 1 + 4 - 4 - 4 + a > 0 \Rightarrow a > 3$$

بنابراین  $3 < a < 5$ .



۱-۱۲۰۶ گزینۀ ۱ ابتدا توجه کنید که

نقطه  $A$  بیرون دایره قرار دارد. مطابق

شکل، کمترین فاصله نقطه  $A$  از دایره

مربوط به پاره‌خط  $AB$  است. بنابراین

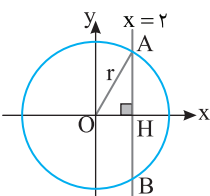
$$OA = \sqrt{(3-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}, \quad OB = r = 2 \rightarrow AB = 2\sqrt{10} - 2$$

۱-۱۲۰۷ گزینۀ ۳ با نمادگذاری شکل زیر  $AB = 4\sqrt{3}$ ، پس

$AH = 2\sqrt{3}$  و در نتیجه  $r = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

طرف دیگر شعاع دایره برابر  $\sqrt{3k+1}$  است. پس

$$r = \sqrt{3k+1} = 4 \Rightarrow k = 5$$



۱-۱۱۹۷ گزینۀ ۲ شعاع دایره برابر فاصله نقطه  $O(1, -2)$  از نقطه

$A(3, -2)$  است. در نتیجه  $r = OA = \sqrt{(3-1)^2 + (-2+2)^2} = 2$  پس

معادله دایره به صورت  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$  است. مختصات نقاط برخورد

این دایره با محورهای مختصات به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x=0 \Rightarrow 1 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 3 \Rightarrow y = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$y=0 \Rightarrow (x-1)^2 + 4 = 4 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

سه نقطه برخورد عبارت‌اند از:

$$(0, -2 + \sqrt{3}), (0, -2 - \sqrt{3}), (1, 0)$$

۱-۱۱۹۸ گزینۀ ۱ راه‌حل اول مرکز دایره مورد نظر نقطه  $O(-\frac{4}{2}, -\frac{2}{2})$

یعنی  $O(-2, -1)$  است. اگر دایره بر خطی مماس باشد، شعاعش برابر با

فاصله مرکز دایره از این خط است. فاصله نقطه  $(-2, -1)$  از خط  $y-1=0$

برابر  $\frac{|-1-1|}{1} = 2$  است. شعاع دایره مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2 - 4k} = \frac{1}{2} \sqrt{20 - 4k}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{20 - 4k} = 2 \Rightarrow \sqrt{20 - 4k} = 4 \Rightarrow k = 1$$

راه‌حل دوم چون خط  $y=1$  بر دایره مماس است، اگر در معادله دایره قرار دهیم

$y=1$ ، باید معادله ریشه مضاعف داشته باشد، پس

$$3 + k = 4 \Rightarrow k = 1$$

۱-۱۱۹۹ گزینۀ ۴ مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(1, 2)$  است. بنابراین شیب

خطی که از مرکز و نقطه  $(3, 5)$  می‌گذرد (یعنی خطی که شعاع نظیر نقطه

$(3, 5)$  روی آن قرار دارد) برابر است با  $\frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$ . چون خط مماس بر دایره،

در نقطه تماس بر شعاع عمود است، پس اگر شیب خط مماس  $m$  باشد،

$$m \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

بنابراین خط مماس خطی است که شیب آن  $-\frac{2}{3}$  است، از نقطه  $(3, 5)$

می‌گذرد و معادله آن به صورت زیر است:

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow 2x + 3y = 21$$

۱-۱۲۰۰ گزینۀ ۱ ابتدا توجه کنید که در دایره  $x^2 + y^2 + 4y = 5$  مرکز

نقطه  $O(0, -\frac{4}{2})$ ، یعنی  $O(0, -2)$  و شعاع برابر است با

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4^2 - 4(-5)} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 20} = 3$$

همچنین در دایره  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$  مرکز نقطه  $O'(2, -1)$  و شعاع برابر

$r' = 3$  است. بنابراین  $OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

پس  $r - r' = 0$  و  $r + r' = 3 + 3 = 6$

دایره متقاطع‌اند.

۱۲۱۴- گزینه ۴ مرکز دایره وسط پاره خط بین دو سر قطر است. مرکز

دایره مورد نظر نقطه  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ، یعنی  $(4, 2)$  است. اگر سر دیگر قطر

مورد نظر نقطه  $(x, y)$  باشد، وسط این قطر نقطه  $(\frac{x-3}{2}, \frac{y+2}{2})$  است. بنابراین

$$(\frac{x-3}{2}, \frac{y+2}{2}) = (4, 2) \Rightarrow \frac{x-3}{2} = 4, \quad \frac{y+2}{2} = 2$$

بنابراین  $x=11$  و  $y=2$ . پس نقطه مورد نظر  $(11, 2)$  است.

۱۲۱۵- گزینه ۴ فرض می‌کنیم معادله دایره مورد نظر به صورت

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  باشد. چون مختصات نقطه‌های داده شده در این

معادله صدق می‌کنند، پس  $9 + 3b + c = 0$ ،  $4 + 9 + 7b + c = 0$  و  $1 - a + c = 0$ .

از معادله‌های اول و دوم  $b = -10$  و  $c = 21$  به دست می‌آید. بنابراین از

معادله سوم  $a = 22$  به دست می‌آید. اکنون توجه کنید که مرکز دایره

مورد نظر نقطه  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  یعنی نقطه  $(-11, 5)$  است.

۱۲۱۶- گزینه ۳ اگر مختصات نقطه  $A$  را در عبارت سمت چپ معادله

دایره قرار دهیم، باید حاصل مقداری منفی شود:

$$x^2 + y^2 + ax + y - 1 < 0 \xrightarrow{x=2, y=-1} 4 + 1 + 2a - 1 - 1 < 0$$

$$2a < -3 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$$

۱۲۱۷- گزینه ۱ توجه کنید که نقطه  $(1, -1)$  مرکز دایره است و شعاع

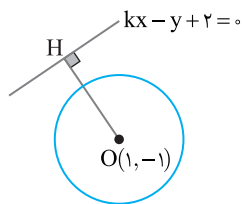
دایره برابر ۳ است. چون دایره و خط متقاطع نیستند، پس یا خط بر دایره مماس

است یا خارج آن قرار دارد. بنابراین فاصله مرکز دایره از خط کمتر از شعاع دایره

نیست. مطابق شکل زیر  $\frac{|k+1+2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}} \geq 3$  بنابراین

$$(k+3)^2 \geq 9(k^2+1) \Rightarrow k^2 + 6k + 9 - 9k^2 - 9 \geq 0$$

$$-8k^2 + 6k \geq 0 \Rightarrow k(4k-3) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{3}{4}$$



۱۲۱۸- گزینه ۳ فرض می‌کنیم مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(5, b)$  باشد.

در این صورت از روی شکل زیر معلوم است که شعاع این دایره برابر  $b$  است.

از طرف دیگر، فاصله مرکز دایره از خط مماس  $4x - 3y + 12 = 0$  برابر شعاع

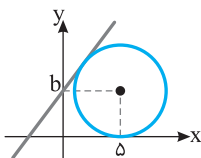
دایره است. پس

$$\frac{|4 \times 5 - 3b + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = b \Rightarrow |32 - 3b| = 5b$$

$$32 - 3b = 5b \Rightarrow b = 4, \quad 32 - 3b = -5b \Rightarrow b = -16 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(5, 4)$  و شعاع آن هم ۴ است. پس

$$\text{معادله اش } (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16 \text{ است.}$$



۱۲۰۸- گزینه ۱ راه حل اول مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(-\frac{4}{2}, -\frac{2}{2})$ ،

یعنی  $(-2, -1)$  است. اگر دایره بر خطی مماس باشد، شعاعش برابر با فاصله

مرکز دایره از این خط است. فاصله نقطه  $(-2, -1)$  از خط  $x = -4$  برابر ۲

است و شعاع دایره مورد نظر برابر است با  $\frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2 - 4k} = \frac{1}{2}\sqrt{20 - 4k}$ .

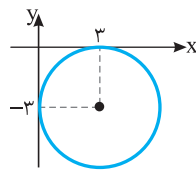
در نتیجه

$$\frac{1}{2}\sqrt{20 - 4k} = 2 \Rightarrow \sqrt{20 - 4k} = 4 \Rightarrow k = 1$$

راه حل دوم اگر در معادله دایره قرار دهیم  $x = -4$ ، معادله باید ریشه

مضاعف داشته باشد. پس معادله  $y^2 + 2y + k = 0$  ریشه مضاعف دارد. در

نتیجه  $k = 1$ .



۱۲۰۹- گزینه ۱ از روی شکل روبه‌رو

معلوم است که مرکز دایره مورد نظر نقطه

$(3, -3)$  است.

۱۲۱۰- گزینه ۳ اگر دو دایره مماس بیرونی باشند، طول خط‌المركزین آن‌ها

برابر مجموع شعاع‌های آن‌هاست. مرکز دایره‌ها نقطه‌های  $(3, -5)$  و  $(-2, 7)$

و شعاع آن‌ها  $r$  و  $R$  است. بنابراین  $r + R = \sqrt{(3+2)^2 + (-5-7)^2} = 13$ .

پس  $r = 6$ .

۱۲۱۱- گزینه ۱ مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(-\frac{2}{2}, -\frac{6}{2})$ ، یعنی نقطه

$(-1, -3)$  است. قطر مورد نظر از مبدأ می‌گذرد، پس معادله‌اش به صورت

$y = mx$  است و چون مرکز دایره، یعنی نقطه  $(-1, -3)$  روی این قطر است،

پس  $-1 = m(-3)$ ، یعنی  $m = \frac{1}{3}$ . بنابراین معادله این قطر به صورت

$$y = \frac{1}{3}x \text{، یعنی } 3y - x = 0 \text{ است.}$$

۱۲۱۲- گزینه ۴ شعاع دایره مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2 - 4(-9)} = \frac{1}{2}\sqrt{5a^2 + 36}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2}\sqrt{5a^2 + 36} = \frac{9}{2} \Rightarrow \sqrt{5a^2 + 36} = 9 \Rightarrow 5a^2 + 36 = 81 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین معادله دایره به صورت  $x^2 + y^2 + 3x + 6y - 9 = 0$  است که مرکز آن

نقطه  $(-\frac{3}{2}, -\frac{6}{2})$ ، یعنی نقطه  $(-\frac{3}{2}, -3)$  است.

۱۲۱۳- گزینه ۳ در معادله گسترده دایره باید ضرایب  $x^2$  و  $y^2$  برابر

باشند. پس

$$a = 2a + 1 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$-x^2 - y^2 - x + y = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 + x - y - 1 = 0$$

پس شعاع دایره برابر است با

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 - 4(-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۱۲۲۵- گزینه ۱ راه حل اول اگر خط بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز

دایره، یعنی نقطه (۳، ۴) از خط  $mx - y = 0$  برابر شعاع دایره، یعنی  $\sqrt{5}$

است. بنابراین

$$\frac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow (3m-4)^2 = 5(m^2+1)$$

$$9m^2 - 24m + 16 = 5m^2 + 5$$

$$4m^2 - 24m + 11 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}, m = \frac{11}{4}$$

راه حل دوم برای اینکه خط  $y = mx$  بر دایره  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$

مماس باشد، باید معادله زیر ریشه مضاعف داشته باشد:

$$(x-3)^2 + (mx-4)^2 = 5 \Rightarrow (1+m^2)x^2 - 2(3+4m)x + 20 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4(3+4m)^2 - 80(1+m^2) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 24m + 11 = 0$$

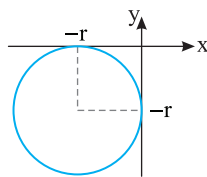
$$m = \frac{1}{4}, m = \frac{11}{4}$$

۱۲۲۶- گزینه ۴ اگر شعاع دایره مورد نظر برابر  $r$  باشد، از روی شکل

زیر معلوم است که مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(-r, -r)$  است. چون  $r = 3$ .

پس مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(-3, -3)$  و معادله اش به صورت زیر است:

$$(x-(-3))^2 + (y-(-3))^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$$

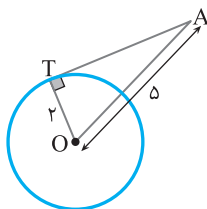


۱۲۲۷- گزینه ۱ مرکز دایره داده شده نقطه  $O(1, -2)$  و شعاعش برابر

$r = 2$  است. از طرف دیگر  $OA = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = 5$  اکنون توجه

کنید که بنا بر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه  $OTA$ :

$$AT = \sqrt{OA^2 - r^2} \Rightarrow AT = \sqrt{25 - 4} \Rightarrow AT = \sqrt{21}$$



۱۲۲۸- گزینه ۱ در معادله دایره  $y$  را مساوی صفر قرار می دهیم

$$x^2 + 0 + 3x + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -4, x = 1$$

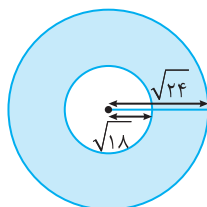
بنابراین  $AB = 1 - (-4) = 5$ .

۱۲۲۹- گزینه ۳ ناحیه  $x^2 + y^2 < 24$  ناحیه درون دایره  $x^2 + y^2 = 24$

و ناحیه  $x^2 + y^2 > 18$  ناحیه بیرون دایره  $x^2 + y^2 = 18$  است. این دایره ها

هم مرکز اند و شعاع آن ها  $\sqrt{18}$  و  $\sqrt{24}$  است. بنابراین مساحت ناحیه مورد نظر

برابر است با مساحت ناحیه رنگی در شکل زیر  $\pi(\sqrt{24})^2 - \pi(\sqrt{18})^2 = 6\pi$



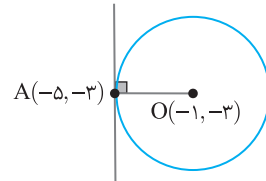
۱۲۱۹- گزینه ۱ نقطه  $O(-\frac{2}{3}, -\frac{6}{3})$ ، یعنی  $O(-1, -3)$  مرکز دایره

است. مطابق شکل زیر شیب  $OA$  برابر است با  $\frac{-3+3}{-5+1} = 0$ . بنابراین شیب

خط مماس بر دایره که عمود بر خط  $OA$  است، تعریف نمی شود و این خط

موازی محور  $y$  است و معادله آن به صورت  $x = -5$  است. پس  $a = 1$  و

$b = 0$  و در نتیجه  $a + b = 1$ .



۱۲۲۰- گزینه ۱ اگر دو دایره مماس درونی باشند، طول خط المکزین

آن ها برابر قدرمطلق تفاضل شعاع های آن ها است. مراکز دایره ها نقطه های

$(1, 2)$  و  $(-2, 6)$  و شعاع های آن ها ۶ و ۲ است. بنابراین

$$|6-2| = \sqrt{(1+2)^2 + (2-6)^2} = 5$$

$$\begin{cases} 6-r = -5 \Rightarrow r = 11 \\ 6-r = 5 \Rightarrow r = 1 \end{cases}$$

۱۲۲۱- گزینه ۳ مرکز دایره داده شده نقطه  $(-\frac{2}{3}, -\frac{6}{3})$ ، یعنی  $(-1, 3)$

است. شعاع این دایره هم برابر است با  $4 = 4 - (-6) = 4 + 6 = 10$

بنابراین مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(-1, 3)$  و شعاعش برابر ۲ است. در نتیجه

معادله اش به صورت  $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$  است.

۱۲۲۲- گزینه ۱ مرکز دایره داده شده، یعنی نقطه  $(-1, 3)$  باید روی

خط  $2x + by - 7 = 0$  باشد. در نتیجه

$$-2 + 3b - 7 = 0 \Rightarrow b = 3$$

۱۲۲۳- گزینه ۴ محل برخورد دو خط داده شده، مرکز دایره است. بنابراین

مختصات مرکز دایره جواب های دستگاه معادلات زیر هستند:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow x=8, y=-2$$

بنابراین شعاع دایره برابر با فاصله مرکز دایره، یعنی نقطه  $(8, -2)$  از نقطه

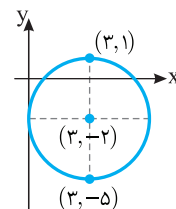
$(6, 2)$  است. پس  $\sqrt{(8-6)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20}$  شعاع دایره.

۱۲۲۴- گزینه ۳ نقطه  $(-\frac{6}{3}, -\frac{4}{3})$ ، یعنی  $(-2, -\frac{4}{3})$  مرکز دایره است و

اندازه شعاع دایره برابر  $3 = 4 - (-4) = 8$  است. مطابق شکل زیر،

بیشترین و کمترین مقدار عرض نقاط روی دایره مربوط به نقاط  $(3, 1)$  و

$(3, -5)$  است. پس حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار  $y$  برابر  $-5$  است.



بنابراین معادله دایره مورد نظر به صورت  $x^2 + y^2 + by + c = 0$  در می‌آید. چون نقطه‌های  $(0, -1)$  و  $(3, 0)$  روی این دایره‌اند، پس مختصات آن‌ها در معادله این دایره صدق می‌کنند:

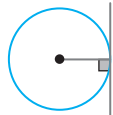
$$\begin{cases} (3, 0): 9 + c = 0 \\ (0, -1): 1 - b + c = 0 \end{cases}$$

پس  $c = -9$  و  $b = -8$ . بنابراین معادله دایره مورد نظر به صورت  $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$  است و شعاعش برابر است با

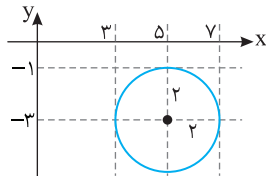
$$\frac{1}{2} \sqrt{0^2 + (-8)^2 - 4(-9)} = 5$$

**گزینه ۴ - ۱۲۳۴** اگر خط بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است. مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(7, 2)$  و شعاع آن برابر  $r$  است. از طرف دیگر، فاصله نقطه  $(7, 2)$  تا خط  $4x - 3y + 8 = 0$  برابر است

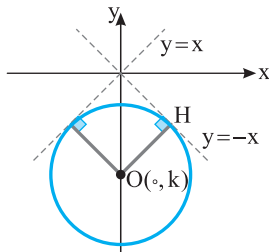
$$\text{با } \frac{|4 \times 7 - 3 \times 2 + 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{30}{5} = 6 = r \text{ بنابراین } r = 6.$$



**گزینه ۲ - ۱۲۳۵** شعاع دایره مورد نظر نصف فاصله خط‌های  $x = 3$  و  $x = 7$  است. چون این فاصله برابر ۴ است، پس شعاع دایره مورد نظر ۲ است. به این ترتیب، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که طول مرکز دایره برابر ۵ و عرض آن برابر ۳- است، یعنی مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(5, -3)$  است. بنابراین معادله دایره به صورت  $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 4$  است.



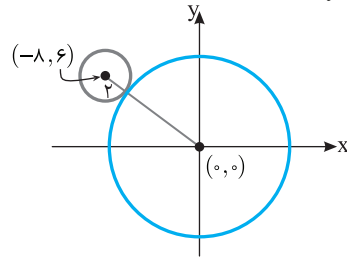
**گزینه ۲ - ۱۲۳۶** با توجه به شکل زیر مرکز دایره باید روی محور  $y$  باشد. اگر  $O(0, k)$  مرکز دایره باشد، آن‌گاه  $\frac{|0+k|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 2$  پس  $r = OH = \frac{|0+k|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 2$  و چون  $k$  منفی است،  $k = -2\sqrt{2}$ .



**گزینه ۲ - ۱۲۳۷** شعاع دایره مورد نظر برابر فاصله نقطه  $(3, 4)$  از خط  $x + 2y + 4 = 0$  است. بنابراین  $r = \frac{|3+8+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 3\sqrt{5}$ . بنابراین معادله دایره مورد نظر به صورت زیر است:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 45 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y - 20 = 0$$

**گزینه ۱ - ۱۲۳۰** مرکز دایره  $(x+8)^2 + (y-6)^2 = 4$  نقطه  $(-8, 6)$  و شعاعش برابر ۲ است. اگر دایره‌ای با این دایره مماس بیرونی باشد، طول خط‌المركزین این دایره‌ها برابر با مجموع شعاع‌های آن‌هاست. توجه کنید که  $\sqrt{(0-(-8))^2 + (0-6)^2} = 10$  طول خط‌المركزین در نتیجه، اگر شعاع دایره مورد نظر برابر  $r$  باشد، باید  $10 = 2 + r$ ، یعنی  $r = 8$ . معادله دایره‌ای که مرکزش نقطه  $(0, 0)$  و شعاعش برابر ۸ است به صورت  $x^2 + y^2 = 64$  است.



**گزینه ۲ - ۱۲۳۱** در معادله دایره، ضریب جمله‌های شامل  $x^2$  و  $y^2$  برابر ۱ است. بنابراین ابتدا دو طرف معادله داده شده را بر  $3k-2$  تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که  $3k-2 \neq 0$ ):

$$x^2 + \frac{k+2}{3k-2} y^2 + \frac{4k}{3k-2} x - \frac{8k}{3k-2} y - \frac{16}{3k-2} = 0$$

بنابراین  $\frac{k+2}{3k-2} = 1$ ، پس  $k = 2$  و معادله دایره می‌شود

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

و شعاعش برابر است با

$$\frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-4)^2 - 4(-4)} = 3$$

**گزینه ۲ - ۱۲۳۲** چون مرکز دایره روی خط  $y = 2x$  و در ناحیه اول است، پس به صورت  $(k, 2k)$  است ( $k > 0$ ). چون دایره مورد نظر از مبدأ مختصات می‌گذرد و شعاعش  $2\sqrt{5}$  است، پس فاصله مرکزش از مبدأ مختصات برابر  $2\sqrt{5}$  است. بنابراین

$$\sqrt{(k-0)^2 + (2k-0)^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{k^2 + 4k^2} = 2\sqrt{5}$$

$$|k| = 2 \Rightarrow k = 2$$

بنابراین مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(2, 4)$  و شعاعش  $2\sqrt{5}$  است. در نتیجه معادله‌اش به صورت  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$  است.

**گزینه ۳ - ۱۲۳۳** راه‌حل اول چون مرکز دایره روی محور  $y$  است، پس مختصات آن به صورت  $O(0, \alpha)$  است. فرض کنید شعاع دایره  $r$  باشد. نقطه‌های  $A(0, -1)$  و  $B(3, 0)$  روی دایره قرار دارند، پس  $r = OA = OB$ .

$$\text{از طرف دیگر } OA = \sqrt{(\alpha+1)^2} \text{ و } OB = \sqrt{9 + \alpha^2}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 9 + \alpha^2 \Rightarrow \alpha = 4$$

بنابراین

$$r = OA = \sqrt{5^2} = 5$$

**راه‌حل دوم** اگر معادله گسترده دایره مورد نظر به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  باشد، مرکزش نقطه  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  است که چون

روی محور  $y$  است، پس  $-\frac{a}{2} = 0$ ، یعنی  $a = 0$ .

۱۲۴۲- گزینه ۲ فرض کنید فاصله نقطه  $A(a, a-1)$  که روی خط

$y=x-1$  قرار دارد از خط  $2x-3y-5=0$  برابر  $\sqrt{13}$  باشد. در این صورت

$$\frac{|2a-3(a-1)-5|}{\sqrt{4+9}} = \sqrt{13} \Rightarrow |-a-2|=13 \Rightarrow \begin{cases} a+2=13 \\ a+2=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=11 \\ a=-15 \end{cases}$$

تجربی - ۸۹

۱۲۴۳- گزینه ۲ فرض کنید معادله دایره به صورت

$$C(-2, 4) \text{ و } B(2, 1), A(0, 0) \text{ باشد. نقاط } x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

روی دایره قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در معادله دایره صدق می‌کنند:

$$A: 0+0+0+0+c=0 \Rightarrow c=0$$

$$B: 4+1+2a+b+c=0 \Rightarrow 2a+b=-5$$

$$C: 4+16-2a+4b+c=0 \Rightarrow -2a+4b=-20$$

پس  $a=0$  و  $b=-5$ . در نتیجه شعاع دایره برابر است با

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{0 + 25 - 0} = \frac{5}{2} = 2.5$$

تجربی - ۹۱

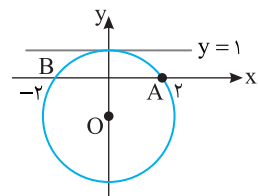
۱۲۴۴- گزینه ۳ با توجه به تقارن شکل، مرکز دایره روی محور  $y$  است.

پس  $O(0, \beta)$  را مرکز دایره فرض می‌کنیم. توجه کنید که

فاصله  $O$  تا خط مماس = فاصله  $OA$

از طرف دیگر فاصله نقطه مرکز تا خط مماس  $|1-\beta|$  است و فاصله نقطه مرکز

تا نقطه  $A$  برابر  $\sqrt{(0-2)^2 + \beta^2}$  است، پس



$$\sqrt{(0-2)^2 + \beta^2} = |1-\beta|$$

$$4 + \beta^2 = 1 - 2\beta + \beta^2 \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2}$$

$$\text{بنابراین } R = |1-\beta| = |1 - (-\frac{3}{2})| = \frac{5}{2}$$

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۱۲۴۵- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا توجه کنید که مرکز دایره

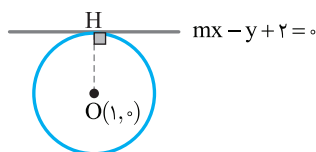
$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$  نقطه  $O(1, 0)$  و شعاع آن برابر

$r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 0 - 4(-3)} = 2$  است. اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصله

مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است:

$$OH = \frac{|m \times 1 - 0 + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow \frac{(m+2)^2}{m^2 + 1} = 4$$

$$m^2 + 4m + 4 = 4m^2 + 4 \Rightarrow 3m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = \frac{4}{3}$$



راه حل دوم ابتدا در معادله دایره به جای  $y$  قرار می‌دهیم  $mx+2$ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 3 \\ y = mx + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (mx+2)^2 - 2x = 3$$

$$x^2 + m^2x^2 + 4mx + 4 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (m^2+1)x^2 + (4m-2)x + 1 = 0$$

۱۲۳۸- گزینه ۱ از روی شکل معلوم است که شعاع دایره مورد نظر برابر

با نصف فاصله خط‌های  $y=7$  و  $y=-3$  است. فاصله این خط‌ها برابر است

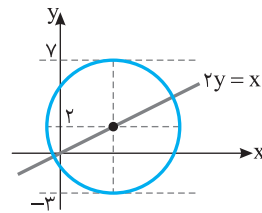
با  $10 = 7 - (-3)$ ، پس شعاع دایره برابر ۵ است. عرض مرکز دایره روی خطی

موازی با خطوط  $y=7$  و  $y=-3$  است و از این دو خط به یک فاصله است،

یعنی روی خط  $y = \frac{7-3}{2} = 2$  قرار دارد، در نتیجه طول مرکز دایره برابر است

با  $x=2y=4$ ، یعنی مرکز دایره مورد نظر نقطه  $(4, 2)$  و شعاع آن برابر ۵

است. در نتیجه معادله آن به صورت  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$  است.



۱۲۳۹- گزینه ۳ چون دایره‌ها متقاطع‌اند، طول خط‌المركزين آن‌ها از

مجموع شعاع‌های دایره‌ها کمتر و از قدرمطلق تفاضل شعاع‌ها بیشتر است:

$$|r-2| < \sqrt{(1-(-3))^2 + (0-r)^2} < r+2$$

$$|r-2| < \sqrt{16+r^2} < r+2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} r^2 - 4r + 4 < 16 + r^2 < r^2 + 4r + 4 \Rightarrow -4r < 12 < 4r$$

نابرابری سمت چپ همواره درست است و نبرابری سمت راست یعنی اینکه  $r > 3$ .

۱۲۴۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که مختصات نقاط  $A$  و  $B$  در معادله هر دو

دایره صدق می‌کنند. پس مختصات این نقاط از حل دستگاه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 3y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

اگر معادله (۲) را از معادله (۱) کم کنیم، به معادله  $3x-3y=0$  می‌رسیم.

بنابراین نقاط  $A$  و  $B$  روی خط  $y=x$  قرار دارند و باید نقاط تقاطع این خط

و یکی از دایره‌ها را به دست آوریم:

$$\begin{cases} y=x \\ x^2 + y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2}$$

بنابراین باید فاصله نقاط  $A(-1, -1)$  و  $B(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  را به دست بیاوریم:

$$AB = \sqrt{(-1 + \frac{1}{2})^2 + (-1 + \frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۲۴۱- گزینه ۳ معادله خط دوم را به شکل  $2x-2y+2=0$  می‌نویسیم.

طول ضلع مربع برابر فاصله دو خط موازی  $2x-2y+2=0$  و  $2x-2y-3=0$

است. در نتیجه

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|-3-2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با  $(\frac{5}{\sqrt{8}})^2 = \frac{25}{8}$ .

تجربی - ۹۲

معادله به دست آمده باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = (4m-2)^2 - 4(m^2+1)(1) = 16m^2 - 16m + 4 - 4m^2 - 4 = 12m^2 - 16m = 0 \Rightarrow 3m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = \frac{4}{3}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱-۲۴۶ گزینۀ ۱ فاصله خط‌های  $y=x$  و  $y=x+4$  برابر است با

$$\frac{|4-0|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$$

شعاع دایره مورد نظر نصف این فاصله است، یعنی برابر  $\sqrt{2}$  است. اگر مرکز دایره نقطه  $(-1, y)$  باشد، فاصله‌اش از خط  $y=x$  برابر  $\sqrt{2}$  است. پس

$$\frac{|y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |y+1| = 2 \Rightarrow y=1, y=-3$$

اگر  $y=-3$ ، آن‌گاه نقطه  $(-1, -3)$  بین دو خط  $y=x+4$  و  $y=x$  نیست. پس  $y=-3$  قابل قبول نیست. بنابراین مرکز دایره نقطه  $(-1, 1)$  و شعاع آن  $\sqrt{2}$  است. پس معادله آن به صورت زیر است:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

ریاضی - ۸۹

۱-۲۴۷ گزینۀ ۲ ابتدا توجه کنید که مرکز دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

نقطه  $O(1, -2)$  است و شعاع آن برابر است با  $r = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4} = 2$ . فرض کنید شعاع دایره دیگر  $r'$  و مرکز آن  $O'(-2, 2)$  باشد. چون دو دایره بر هم مماس بیرونی هستند، پس  $OO' = r + r'$ . از طرف دیگر،

$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$r + r' = 5 \Rightarrow 2 + r' = 5 \Rightarrow r' = 3$$

بنابراین

خارج از کشور تجربی - ۹۳

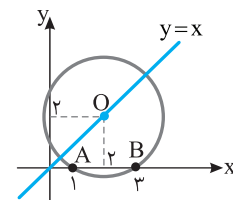
۱-۲۴۸ گزینۀ ۳ راه حل اول مرکز دایره روی نیمساز ربع اول است، پس

مختصات آن به صورت  $O(\alpha, \alpha)$  است. فاصله مرکز دایره از دو نقطه  $A(1, 0)$  و  $B(3, 0)$  برابر هم و برابر شعاع دایره است، پس  $OA = OB$ . در نتیجه

$$\sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha-0)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (\alpha-0)^2}$$

$$2\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$r = OA = \sqrt{(2-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$



راه حل دوم مرکز دایره روی عمودمنصف وترهای دایره است، پس طول مرکز دایره برابر  $\frac{1+3}{2} = 2$  و در نتیجه عرض آن نیز برابر ۲ است و شعاع دایره برابر  $OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$  است.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱-۲۴۹ گزینۀ ۳ چون خط‌های  $y=2x$  و  $y=2x+10$  موازی‌اند، پس

فاصله آن‌ها برابر است با  $\frac{|0-10|}{\sqrt{1+(-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ . بنابراین شعاع دایره مورد نظر برابر است با  $\sqrt{5}$ . مرکز دایره روی خطی موازی دو خط داده شده است که فاصله‌اش از این خط‌ها برابر است. معادله این خط  $y=2x+\frac{10}{2}=2x+5$  است.

فرض کنید مرکز دایره  $O(\alpha, 2\alpha+5)$  باشد. چون دایره از مبدأ می‌گذرد، پس فاصله مرکز دایره تا مبدأ برابر شعاع دایره است:

$$\sqrt{\alpha^2 + (2\alpha+5)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \alpha^2 + (2\alpha+5)^2 = 5 \Rightarrow 5\alpha^2 + 20\alpha + 25 = 5 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

بنابراین مرکز دایره نقطه  $(-2, 1)$  است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱-۲۵۰ گزینۀ ۱ شعاع دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$  برابر است با

$$r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4+36+32} = 3\sqrt{2}$$

و مرکز این دایره نقطه  $O_1(1, -3)$  است.

شعاع دایره  $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$  برابر است با

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{64+16-48} = 2\sqrt{2}$$

و مرکز این دایره نقطه  $O_2(-4, 2)$  است.

پس

$$O_1O_2 = \sqrt{(1+4)^2 + (-3-2)^2} = 5\sqrt{2}, \quad r_1 + r_2 = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

بنابراین دو دایره مماس برون هستند.

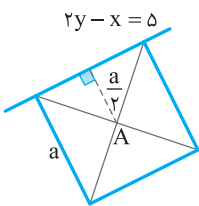
تجربی - ۸۷

۱-۲۵۱ گزینۀ ۴ فاصله نقطه  $A$  تا خط  $2y - x - 5 = 0$  برابر نصف طول ضلع مربع است:

$$\frac{a}{2} = \frac{|2(-1) - 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با

$$S = a^2 = 80$$



خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱-۲۵۲ گزینۀ ۲ راه حل اول برای محاسبه مساحت مثلث داده شده طول ضلع  $AB$  را به دست آورده سپس فاصله نقطه  $C$  تا خط  $AB$  را محاسبه می‌کنیم. پس

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{26}, \quad m_{AB} = \frac{0-5}{3-2} = -5$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$$

$$y - 5 = -5(x - 2) \Rightarrow 5x + y - 15 = 0$$

$$AB \text{ تا } C \text{ فاصله نقطه } C \text{ تا خط } AB = \frac{|5 \times 0 + 2 - 15|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}}$$

$$\frac{\sqrt{26} \times \frac{13}{\sqrt{26}}}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ با } 6/5$$

راه حل دوم ابتدا طول ضلع‌های مثلث  $ABC$  را به دست می‌آوریم

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{26}, \quad AC = \sqrt{(0-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}$$

واضح است که تساوی

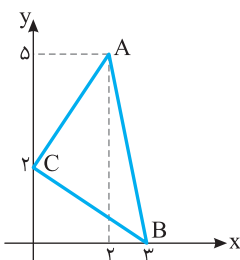
$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است.

پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن

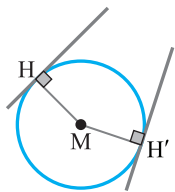
برابر است با

$$S = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{13}{2} = 6.5$$



خارج از کشور تجربی - ۹۲





اگر نقطه  $M(2\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$  مرکز دایره باشد، شعاع آن برابر می‌شود با

$$r = MH = \frac{|2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 6$$

بنابراین شعاع دایره کوچک‌تر برابر ۲ است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۲۵۷- گزینه ۱ فاصله مرکز دایره از خط مماس، برابر شعاع دایره است. فاصله

نقطه  $(2, -1)$  از خط  $x - y - 1 = 0$  برابر است با  $r = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$$

در معادله بالا قرار می‌دهیم  $y=0$  تا محل تقاطع این دایره را با محور  $x$  به دست می‌آوریم:

$$(x-2)^2 + (0+1)^2 = 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x-2 = \pm 1 \Rightarrow x = 3, x = 1$$

تجربی - ۹۵

۱۲۵۸- گزینه ۳ چون نقطه  $(2, -9)$  در ربع چهارم قرار دارد و دایره

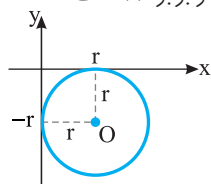
مورد نظر بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن در ناحیه چهارم است. فرض کنید شعاع این دایره  $r$  باشد. با توجه به شکل زیر معلوم است که مرکز آن نقطه  $O(r, -r)$  است. بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$$

دایره از نقطه  $(2, -9)$  می‌گذرد، پس مختصات آن در معادله بالا صدق می‌کنند:

$$(2-r)^2 + (-9+r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 22r + 85 = 0 \Rightarrow r = 5 \text{ یا } r = 17$$

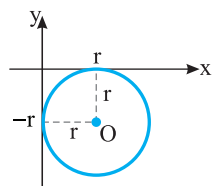
بنابراین شعاع دایره بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.



ریاضی - ۹۵

۱۲۵۹- گزینه ۲ چون نقطه  $(1, -2)$  در ناحیه چهارم است و دایره مورد نظر

بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن در ناحیه چهارم است. اگر شعاع این دایره برابر  $r$  باشد، از روی شکل روبه‌رو معلوم است که مرکز آن نقطه  $O(r, -r)$  است.



بنابراین معادله دایره مورد نظر به صورت  $(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$  است. چون نقطه

$(1, -2)$  روی این دایره است، پس

$$(1-r)^2 + (-2+r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r-1)(r-5) = 0 \Rightarrow r = 1, r = 5$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱۲۶۰- گزینه ۱ مطابق شکل اگر دو دایره مماس خارج باشند، باید

$$OO' = R + R' \quad (1)$$

بنابراین

$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow O(-2, 0), R = 2$$

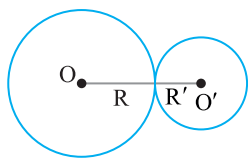
$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0 \Rightarrow O'(1, -4), R' = \sqrt{17-a}$$

اکنون با استفاده از رابطه (۱) به دست می‌آید

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 2 + \sqrt{17-a}$$

$$5 = 2 + \sqrt{17-a} \Rightarrow 3 = \sqrt{17-a} \Rightarrow a = 8$$

ریاضی - ۹۰



۱۲۵۳- گزینه ۱ فرض کنید معادله دایره به صورت

$$C(x^2 + y^2 + ax + by + c = 0) \text{ باشد. نقاط } A(0, 0), B(2, 1) \text{ و } C(1, -2)$$

روی دایره قرار دارند، پس مختصات آنها در معادله دایره صدق می‌کنند:

$$A: 0+0+0+0+c=0 \Rightarrow c=0$$

$$B: 4+1+2a+b+c=0 \Rightarrow 2a+b=-5$$

$$C: 1+4+a-2b+c=0 \Rightarrow a-2b=-5$$

از حل دستگاه معادلات فوق نتیجه می‌شود  $a=-3, b=1, c=0$ . بنابراین

شعاع دایره برابر است با

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{9+1-0} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

تجربی - ۹۳

۱۲۵۴- گزینه ۳ فرض می‌کنیم مرکز دایره  $O(\alpha, \beta)$  باشد. مختصات

نقطه  $O$  در خط  $x - y = 2$  صدق می‌کنند، پس مرکز دایره نقطه  $O(\alpha, \alpha - 2)$  است. همچنین،  $O$  از نقاط  $A(0, 1)$  و  $B(3, 0)$  به یک

فاصله است:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 3)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2}$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 + 9 - 6\alpha = \alpha^2 + 9 - 6\alpha + \alpha^2 + 4 - 4\alpha$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow O(1, -1) \Rightarrow R = OA = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۰

۱۲۵۵- گزینه ۱ معادله نیمساز ناحیه اول  $y = x$  است. پس مرکز دایره

به صورت  $(\alpha, \alpha)$  است. فاصله مرکز دایره از نقطه  $A(6, 3)$  و خط

$2x - y = 0$  یکسان است:

$$\sqrt{(\alpha - 6)^2 + (\alpha - 3)^2} = \frac{|\alpha - \alpha|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\alpha^2 + 36 - 12\alpha + \alpha^2 + 9 - 6\alpha = \frac{\alpha^2}{5}$$

$$2\alpha^2 - 18\alpha + 45 = \frac{\alpha^2}{5} \Rightarrow 9\alpha^2 - 18 \times 5\alpha + 45 \times 5 = 0$$

$$\alpha^2 - 10\alpha + 25 = 0 \Rightarrow (\alpha - 5)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 5$$

بنابراین مرکز دایره نقطه  $O(5, 5)$  است و شعاع دایره برابر است با

$$r = OA = \sqrt{(5-6)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

ریاضی - ۹۲

۱۲۵۶- گزینه ۳ فاصله نقطه  $M(2\sqrt{5}, b)$  از دو خط مماس برابر است.

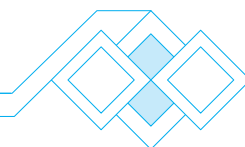
فرض کنید نقاط تماس  $H$  و  $H'$  باشند. در این صورت

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|2\sqrt{5} - 2b|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|b - 4\sqrt{5}|}{\sqrt{1+4}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 2\sqrt{5} - 2b &= b - 4\sqrt{5} \Rightarrow b = 2\sqrt{5} \Rightarrow M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) \\ 2\sqrt{5} - 2b &= -b + 4\sqrt{5} \Rightarrow b = -2\sqrt{5} \Rightarrow M(2\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) \end{aligned} \right.$$

اگر نقطه  $M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$  مرکز دایره باشد، شعاع آن برابر می‌شود با

$$r = MH = \frac{|2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 2$$



پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید  $2^{11} + 2^{24} = 32 + 2^{24} = 2^{25}$  است.

**گزینه ۲ - ۱۲۷۱** برای رفتن از شهر A به شهر C تعداد مسیرها  $4 \times 3 = 12$  تا است. برای برگشتن از شهر C به شهر A نیز ۱۲ مسیر وجود دارد که یکی از آن‌ها همان مسیر رفت است. پس ۱۱ مسیر برگشت باقی می‌ماند. پس برای رفت و برگشت  $12 \times 11 = 132$  مسیر مختلف وجود دارد.

**گزینه ۳ - ۱۲۷۲** تعداد راه‌های رفتن از شهر A به شهر D برابر است با  $3^5 \times 2 = 3^5 \times 2 = 3^5 \times 2 = 240$ . بنابراین تعداد راه‌های برگشت از شهر D به شهر A برابر است با  $1 \times 4 \times 2 = 8$ . بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با  $3^5 \times 8 = 240$ .

**گزینه ۲ - ۱۲۷۳** جایگاه هر یک از ارقام را با یک دایره نشان می‌دهیم و سپس تعیین می‌کنیم که در هر یک از این جایگاه‌ها چند رقم می‌تواند قرار بگیرد. در نهایت طبق اصل ضرب، تعداد حالات ممکن برای قرار دادن ارقام در دایره‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

فقط ۲ یا ۵، ۲ یا ۵، ۲ یا ۵، ۲ یا ۵، ۲ یا ۵

**گزینه ۲ - ۱۲۷۴** بنابراین اصل متمم، تعداد عددهای مورد نظر برابر است با تعداد کل عددهای سه رقمی که می‌توان با این رقم‌ها نوشت، منهای تعداد عددهای سه رقمی با این ارقام که رقم تکراری ندارند.

یکان دهگان صدگان

۳	۴	۴	۳	۳	۲
---	---	---	---	---	---

بنابراین  $3^3 - 18 = 27 - 18 = 9$  عددهای مورد نظر.

**گزینه ۳ - ۱۲۷۵** راه‌حل اول دقت کنید که رقم‌ها می‌توانند تکراری باشند. حالا باید تعداد همه عددهای یک رقمی، دو رقمی و سه رقمی با ویژگی مورد نظر را پیدا کنیم.

یکان دهگان صدگان

تعداد عددهای سه رقمی: 

۱	۴	۶
---	---	---

 $\Rightarrow 1 \times 4 \times 6 = 24$   
۳، ۱، ۲، ۳

یکان دهگان صدگان

تعداد عددهای دو رقمی: 

۱	۶	۶
---	---	---

 $\Rightarrow 1 \times 6 \times 6 = 36$   
۲

یکان دهگان صدگان

تعداد عددهای دو رقمی: 

۱	۶	۶
---	---	---

 $\Rightarrow 1 \times 6 \times 6 = 36$   
۱

یکان دهگان صدگان

تعداد عددهای دو رقمی: 

۵	۶
---	---

 $\Rightarrow 5 \times 6 = 30$

یکان دهگان صدگان

تعداد عددهای یک رقمی: 

۶
---

 $\Rightarrow 6$

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با  $24 + 36 + 36 + 30 + 6 = 132$ .

**گزینه ۴ - ۱۲۶۱** برای اینکه عمل ضرب پرانتزهای داده شده را انجام دهیم، از هر پرانتز یک جمله انتخاب و جمله‌های انتخابی را در هم ضرب می‌کنیم. برای انتخاب یک جمله از پرانتز اول، دو حالت، از پرانتز دوم، سه حالت و از پرانتز سوم، پنج حالت وجود دارد. یعنی در نهایت  $2 \times 3 \times 5 = 30$  جمله تولید می‌شود.

**گزینه ۲ - ۱۲۶۲** ۵ رقم زوج داریم که از صفر نمی‌توان به عنوان اولین رقم از سمت چپ استفاده کرد. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با  $4 \times 5 \times 1 = 20$ .

**گزینه ۴ - ۱۲۶۳** برای رقم هزارگان می‌توانیم هر یک از ارقام به جز صفر را انتخاب کنیم. بنابراین سه حالت برای نوشتن هزارگان وجود دارد. هر یک از رقم‌های صدگان، دهگان و یکان را می‌توان به چهار حالت انتخاب کرد. بنابراین  $3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$  عدد چهار رقمی با شرایط سؤال وجود دارد.

**گزینه ۳ - ۱۲۶۴** یکان عدد می‌تواند ۱، ۳ یا ۵ باشد، پس سه حالت برای انتخاب یکان وجود دارد. صدگان عدد می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد، پس پنج حالت برای انتخاب صدگان وجود دارد. دهگان عدد هم می‌تواند هر یک از ارقام عضو مجموعه باشد یعنی شش حالت برای انتخاب دهگان وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب  $5 \times 6 \times 3 = 90$  عدد با شرایط مسئله وجود دارد.

**گزینه ۱ - ۱۲۶۵** عدد ۲ را در زیرمجموعه قرار می‌دهیم. عددهای ۸ و ۹ را در زیرمجموعه قرار نمی‌دهیم. بنابراین باید تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$  را حساب کنیم که برابر است با  $2^6 = 64$ .

**گزینه ۳ - ۱۲۶۶** هر تابع با ویژگی مورد نظر به صورت  $f = \{(1, X), (2, Y), (3, Z)\}$  است که  $X, Y$  و  $Z$  می‌توانند هر یک از

پنج رقم ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ باشند، یعنی  $X, Y$  و  $Z$  هر کدام پنج مقدار مختلف می‌توانند داشته باشند. پس  $5 \times 5 \times 5 = 125$  تابع با این شرایط وجود دارد.

**گزینه ۱ - ۱۲۶۷** هر مسافر می‌تواند در یکی از ۲۰ طبقه پیاده شود. پس تعداد انتخاب‌های مسافر اول ۲۰ تا، مسافر دوم ۲۰ تا، ... و مسافر دهم ۲۰ تا است. بنابراین  $20 \times 20 \times 20 \times \dots \times 20 = 20^{10}$  حالت برای پیاده شدن مسافران وجود دارد.

**گزینه ۳ - ۱۲۶۸** هر سؤال چهار گزینه دارد که دانش‌آموز می‌تواند یکی از آن‌ها را انتخاب نماید. همچنین دانش‌آموز می‌تواند به سؤال پاسخ ندهد. پس برای پاسخ گویی به هر سؤال ۵ حالت وجود دارد. بنابراین تعداد حالت‌های پاسخ گویی به ۲۰ سؤال برابر  $5 \times 5 \times \dots \times 5 = 5^{20}$  است.

**گزینه ۲ - ۱۲۶۹** می‌توان مهره را در هر یک از خانه‌ها به جز خانه‌های ابتدا و انتها قرار داد یا قرار نداد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با  $3^5 = 243$ .



**گزینه ۲ - ۱۲۷۰** فرض می‌کنیم تعداد اعضای مجموعه  $n$  باشد. در این صورت این مجموعه  $2^n$  زیرمجموعه دارد. اگر سه عضو به مجموعه اضافه کنیم، تعداد اعضای آن  $n+3$  و تعداد زیرمجموعه‌های آن  $2^{n+3}$  می‌شود. بنابراین تساوی  $2^{n+3} = 2^n + 2^{24}$  درست است. در نتیجه

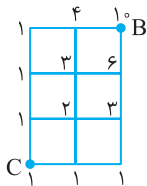
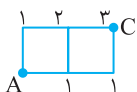
$$2^n \times 2^3 - 2^n = 2^{24} \Rightarrow 7 \times 2^n = 2^{24} \Rightarrow 2^n = 32$$

۱۲۸۱- گزینه ۱ از دو طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت:

$$ABCD \text{ مسیر: } 2 \times 3 \times 3 = 18, \quad ABD \text{ مسیر: } 2 \times 2 = 4$$

بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با  $18 + 4 = 22$ .

۱۲۸۲- گزینه ۳ از ۲ راه می‌توان مستقیماً از شهر A به شهر C رفت و می‌توان با  $3 \times 2$  راه از شهر B عبور کرد و به شهر C رفت. بنابراین  $2 + 6 = 8$  راه برای رفت وجود دارد. از یک راه می‌توان مستقیماً از شهر C به شهر A برگشت و از  $2 \times 2$  راه می‌توان از شهر B عبور کرد و به شهر A برگشت. پس  $1 + 4 = 5$  راه برای برگشت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب  $8 \times 5 = 40$  راه رفت و برگشت موجود است.



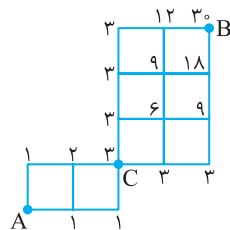
۱۲۸۳- گزینه ۳ راه‌حل اول به کمک اصل

جمع تعداد راه‌های رسیدن به نقطه C از نقطه A مطابق شکل به دست می‌آید که برابر ۳ است.

تعداد راه‌های رسیدن به نقطه B از نقطه C نیز به همین ترتیب به دست می‌آید. که مطابق شکل به کمک اصل جمع تعداد راه‌ها ۱۰ است.

توجه کنید که ابتدا باید با ۳ راه از نقطه A به نقطه C برویم. سپس با ۱۰ راه از نقطه C به نقطه B برویم. بنابراین  $3 \times 10 = 30$  راه با شرایط مسئله وجود دارد.

راه‌حل دوم چون ابتدا به C برویم، راه‌هایی را که از آن‌ها نمی‌توان به نقطه C رسید حذف می‌کنیم. پس باید روی راه‌های شکل زیر حرکت کنیم، که به کمک اصل جمع تعداد راه‌ها ۳۰ به دست می‌آید.



۱۲۸۴- گزینه ۴ رقم صدگان باید ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد. دو حالت در نظر

می‌گیریم.

حالت اول رقم صدگان ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد.

یکان دهگان صدگان

۴	۶	۵
---	---	---

$$4 \times 6 \times 5 = 120$$

۳، ۴، ۵، ۶

حالت دوم رقم صدگان ۲ باشد. در این صورت رقم دهگان باید ۴، ۵ یا ۶ باشد.

یکان دهگان صدگان

۱	۳	۵
---	---	---

$$1 \times 3 \times 5 = 15$$

۲ ۴، ۵، ۶

توجه کنید که در حالت دوم یکی از عددها ۲۴ است که باید این عدد را از مجموع تعداد عددهای حاصل کم کنیم. در نتیجه تعداد عددهای مورد نظر برابر است با  $120 + 15 - 1 = 134$ .

۱۲۸۵- گزینه ۲ عددهای ۲ و ۳ را به یک حالت در زیرمجموعه قرار

می‌دهیم. عددهای ۴، ۵ و ۶ را به یک حالت کنار می‌گذاریم و در زیرمجموعه قرار نمی‌دهیم، پنج عدد دیگر را می‌توانیم در زیرمجموعه قرار دهیم یا قرار ندهیم، یعنی هر کدام از آن‌ها دو حالت دارد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط سؤال برابر است با  $2^5 = 32$ .

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که اعداد دو رقمی مانند ۲۳ را می‌توان به صورت ۰۲۳ نوشت و اعداد یک رقمی مانند ۷ را می‌توان به صورت ۰۰۷ نوشت. اکنون برای نوشتن اعداد کوچک تر از ۰۳۴، دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 6 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 3 \times 6 \times 6 = 108$$

۰، ۱، ۲، ۶ تا ۰، ۶ تا ۰

حالت ۲:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 1 \times 4 \times 6 = 24$$

۰، ۱، ۲، ۳، ۶ تا ۰

پس در کل تعداد اعداد ایجاد شده برابرند با  $108 + 24 = 132$ .

۱۲۷۶- گزینه ۲ فرض می‌کنیم مجموعه اصلی n عضو داشته است. در این صورت، این مجموعه  $2^n$  زیرمجموعه دارد. اگر چهار عضو از این مجموعه کم کنیم، تعداد اعضای آن  $n-4$  و تعداد زیرمجموعه‌های آن  $2^{n-4}$  می‌شود. بنابراین تساوی  $2^{n-4} = 2^n - 480$  برقرار است. در نتیجه

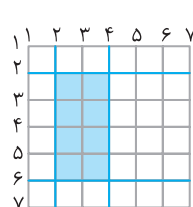
$$2^n - 2^{n-4} = 480 \Rightarrow 2^n - \frac{2^n}{16} = 480 \Rightarrow \frac{15}{16} \times 2^n = 480 \Rightarrow 2^n = 512$$

پس

$$2^{n-4} = 2^n - 480 \xrightarrow{2^n = 512} 2^{n-4} = 512 - 480 = 32$$

۱۲۷۷- گزینه ۴ هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از

هفت خط افقی و هفت خط عمودی شکل زیر به وجود می‌آید. برای اینکه مستطیل‌ها  $2 \times 4$  باشند، باید فاصله دو خط موازی دو واحد و فاصله دو خط موازی دیگر ۴ واحد باشد. در مستطیل‌های افقی، اگر یکی از هفت خط عمودی را انتخاب کنیم خط بعدی باید به فاصله ۴ واحد از آن باشد. پس خطوط ۱ تا ۳ را می‌توان انتخاب کرد و دو خط عمودی را رسم کرد. همچنین اگر یکی از



هفت خط افقی را انتخاب کنیم خط بعدی باید به فاصله ۲ واحد از آن باشد. پس خطوط ۱ تا ۵ را می‌توان انتخاب کرد. پس  $3 \times 5 = 15$  مستطیل افقی  $2 \times 4$  داریم. به همین ترتیب ۱۵ مستطیل عمودی  $4 \times 2$  داریم و جمعاً ۳۰ مستطیل با ابعاد ۲ و ۴ وجود دارد.

۱۲۷۸- گزینه ۲ عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۹ یا ۷ است از

عدد ۵۹۷۳۱ بزرگ‌ترند. تعداد این عددها برابر است با

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$$

۷، ۹

بعد از این‌ها بزرگ‌ترین عدد ۵۹۷۳۱ است. بنابراین عدد ۵۹۷۳۱، ۴۹ آمین عددی است که نوشته‌ایم.

۱۲۷۹- گزینه ۳ اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو به ترتیب ۶ و ۱۰

باشند، عضوهای دیگر زیرمجموعه می‌توانند اعداد ۷، ۸ و ۹ باشند که می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس تعداد این زیرمجموعه‌ها  $2^3$  است. به همین ترتیب اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ۷ و ۹ باشند، عدد ۸ می‌تواند در زیرمجموعه باشد یا نباشد. یعنی ۲ زیرمجموعه به این شکل وجود دارد. پس تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب سؤال ۱۰ تا است.

۱۲۸۰- گزینه ۳ تعداد اعداد دو رقمی کمتر از ۵۰ برابر ۴۰ است. از این

اعداد، ۱۱، ۲۲، ۳۳ و ۴۴ ارقام مشابه دارند، پس ۳۶ عدد ارقام متمایز دارند. بنابراین مجموعه A، ۳۶ عضو و  $2^{36}$  زیرمجموعه دارد. بنابراین

$$2^{36} = 16^a \Rightarrow 2^{36} = (2^4)^a \Rightarrow 2^{36} = 2^{4a} \Rightarrow 36 = 4a \Rightarrow a = 9$$

**۱۲۹۳- گزینه ۲** راه‌حل اول کافی است بنا بر اصل متمم، تعداد حالت‌هایی را که ارغوان و اردوان کنار هم ایستاده‌اند از تعداد کل حالت‌های ایستادن این شش نفر کم کنیم. اگر ارغوان و اردوان کنار هم ایستاده باشند، می‌توان آن‌ها را یک نفر در نظر گرفت، که البته به ۲! طریق می‌توانند کنار هم بایستند. بنابراین تعداد صف‌ها در این حالت برابر است با  $2! \times 5! = 240$ . تعداد صف‌هایی که بدون محدودیت می‌توان تشکیل داد برابر است با  $6! = 720$ . بنابراین تعداد صف‌های مورد نظر برابر است با  $720 - 240 = 480$ .

**راه‌حل دوم** ارغوان و اردوان را کنار هم می‌گذاریم. ابتدا تعداد حالت‌هایی که ۴ نفر در یک صف قرار می‌گیرند، محاسبه می‌کنیم که برابر با  $4!$  خواهد بود. در ابتدا و انتها صف و در بین این ۴ نفر، ۵ مکان وجود دارد که از این ۵ مکان ۲ تا را انتخاب می‌کنیم که ارغوان و اردوان در آن‌ها بایستند. پس تعداد کل صف‌ها برابر است با  $P(5, 2) \times 4! = 20 \times 24 = 480$ .

**۱۲۹۴- گزینه ۳** اگر  $f$  تابعی با ویژگی مورد نظر باشد، معلوم است که  $f(1), f(2), f(3), f(4)$  جایگشتی از عددهای ۵، ۶، ۷ و ۸ هستند. بنابراین تعداد تابع‌هایی مانند  $f$  برابر است با  $4! = 24$ .

**۱۲۹۵- گزینه ۲** کتاب‌های ریاضی را به ۴! طریق می‌توان در یک ردیف چید. اکنون کتاب‌های فیزیک را می‌توان فقط در جاهای مشخص شده در سطر زیر گذاشت. ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی

این کار به ۳! طریق ممکن است. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با  $4! \times 3! = 144$

**۱۲۹۶- گزینه ۴** تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$${}_{r+2}P(n, r) = P(n+2, r+2) \Rightarrow {}_{r+2}P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{(n+2)!}{(n+2-r-2)!}$$

$$\frac{{}_{r+2}P(n, r)}{(n-r)!} = \frac{n!(n+1)(n+2)}{(n-r)!} \Rightarrow (n+1)(n+2) = 72 = 8 \times 9 \Rightarrow n = 7$$

$$\text{بنابراین } P(n-1, n-2) = P(6, 5) = \frac{6!}{(6-5)!} = 720$$

**۱۲۹۷- گزینه ۴** کتاب‌های ریاضی را می‌توان به ۴! طریق کنار هم چید. بین این کتاب‌ها ۳ جای خالی وجود دارد که باید کتاب‌های فیزیک را در آن‌ها بگذاریم. این کار هم به ۳! حالت ممکن است.

ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی

کل این مجموعه و ۲ کتاب شیمی را می‌توان ۳ کتاب در نظر گرفت و آن‌ها را به ۳! حالت مرتب کرد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با  $4! \times 3! = 288$ .

**۱۲۹۸- گزینه ۲** توجه کنید که ۴ کتاب فیزیک به ۴! طریق و ۳ کتاب ادبیات به ۳! طریق کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. حال کتاب‌های فیزیک را در یک بسته و کتاب‌های ادبیات را در بسته دیگری در نظر می‌گیریم. این دو بسته به ۲! طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند. بنابراین تعداد حالات مورد نظر برابر است با  $4! \times 3! \times 2! = 24 \times 6 \times 2 = 288$ .

**۱۲۹۹- گزینه ۴** ابتدا حرف  $a$  را قرار می‌دهیم که برای آن ۳ انتخاب داریم: حرف اول، دوم یا سوم. سپس ۲ حرف از ۴ حرف باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد کلمات مورد نظر برابر است با  $3P(4, 2)$ .

**۱۳۰۰- گزینه ۱** ۳ گلابی را باید بین ۳ پسر از ۵ پسر توزیع کنیم که این کار به  $P(5, 3)$  حالت امکان‌پذیر است. سپس باید ۲ سیب را بین ۲ نفر از ۸ نفر باقی‌مانده توزیع کنیم که این کار به  $P(8, 2)$  حالت امکان‌پذیر است. پس

$$\text{جواب مسئله برابر است با } P(5, 3)P(8, 2) = \frac{5! \times 8!}{2! \times 6!} = \frac{5! \times 8!}{2 \times 6 \times 5!} = \frac{8!}{2 \times 6} = 12$$

**۱۲۸۶- گزینه ۲** هر مقسوم‌علیه طبیعی عدد  $a$  به صورت  $5^z \times 3^y \times 2^x$  است که  $x, y, z$  اعدادی حسابی هستند. چون می‌خواهیم مقسوم‌علیه، زوج باشد پس باید حداقل یک عامل ۲ داشته باشد و چون می‌خواهیم بر  $10$  بخش‌پذیر نباشد، پس نباید عامل ۵ داشته باشد. بنابراین باید  $1 \leq x \leq 3$ ،  $0 \leq y \leq 4$  و  $z = 0$ ، یعنی برای  $x$  سه حالت، برای  $y$  پنج حالت و برای  $z$  یک حالت وجود دارد. پس تعداد این مقسوم‌علیه‌ها برابر است با  $3 \times 5 \times 1 = 15$ .

**۱۲۸۷- گزینه ۳** هر عضو مجموعه  $A$  را می‌توانیم به یکی از اعضای مجموعه  $B$  با یک پیکان وصل کنیم. همچنین می‌توانیم این عضو  $A$  را به هیچ عضوی از  $B$  وصل نکنیم، یعنی برای خارج کردن یک پیکان از هر عضو  $A$ ، پنج حالت وجود دارد. پس  $5 \times 5 \times 5 = 125$  تابع می‌توان نوشت که دامنه آن زیرمجموعه  $A$  و برد آن زیرمجموعه  $B$  است. یکی از این توابع تهی است که در آن دامنه تابع تهی است. بنابراین ۱۲۴ تابع غیرتهی وجود دارد.

**۱۲۸۸- گزینه ۲** هر تابع به صورت  $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$  مطلوب مسئله است که در آن  $a, b, c, d$  می‌توانند ۱ تا ۴ باشند (چهار انتخاب دارند) ولی  $a$  می‌تواند ۲ تا ۴ باشد (سه انتخاب دارد). بنابراین تعداد توابعی مانند  $f$  برابر است با  $4 \times 4 \times 4 \times 3 = 192$ .

**۱۲۸۹- گزینه ۴** تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۹ است، برابر است با

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۸ است، برابر است با

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۶ است، برابر است با

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

تعداد این عددها برابر است با  $24 + 24 + 24 = 72$ ، پس هفتاد و دومین عددی که نوشته‌ایم کوچک‌ترین عددی است که با ارقام داده شده می‌توان نوشت به شرط آنکه اولین رقم سمت چپ آن برابر ۶ باشد. این عدد ۶۲۴۸۹ است.

**۱۲۹۰- گزینه ۲** به شکل زیر توجه کنید.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

↓
↓
↓

پشت یا رو      رو      یکی رو و دوتا پشت

پرتاب چهارم باید رو بیاید، پس ۱ حالت دارد. یکی از سه پرتاب اول باید رو بیاید که این کار به ۳ حالت امکان‌پذیر است. دو پرتاب دیگر باید پشت بیایند که ۱ حالت دارد. پرتاب‌های پنجم تا دهم می‌توانند رو یا پشت بیایند که هر کدام دو حالت دارند و کلاً ۲<sup>۴</sup> حالت دارند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب سؤال  $3 \times 2^6 = 192$  است.

**۱۲۹۱- گزینه ۲** می‌توان نوشت

$$\frac{(n+1)! + (n-1)!}{n^3 - 1} = 120 \Rightarrow \frac{(n-1)!(n(n+1)+1)}{(n-1)(n^2+n+1)} = 120$$

$$\frac{(n-1)(n-2)!(n^2+n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)} = 120 \Rightarrow (n-2)! = 120 = 5! \Rightarrow n = 7$$

**۱۲۹۲- گزینه ۲** حروف صدادار  $a, o, i$  هستند که به ۳! حالت می‌توانند کنار یکدیگر قرار بگیرند. این بسته حروف صدادار به همراه شش حرف بی‌صدای دیگر هفت شیء متمایز هستند که به ۷! حالت می‌توانند در کنار هم قرار بگیرند. بنابراین تعداد جایگشت‌های مورد نظر سؤال برابر  $3! \times 7! = 6 \times 7!$  است.

بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها  $t$  وجود دارد برابر است با

$${}^4P(7, 3) = 4 \times \frac{7!}{4!} = 4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$$

ابتدا مقدار  $n$  را از تساوی داده شده به دست می‌آوریم:

$$\frac{n!}{(n-3)!} - \frac{3n!}{(n-2)!} = 3 \Rightarrow n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) = 3$$

$$n^3 - 6n^2 + 5n - 3 = 0 \Rightarrow n^2(n-6) + 5(n-6) = 0$$

$$(n-6)(n^2+5) = 0 \Rightarrow n = 6$$

بنابراین  $P(n, 4) = P(6, 4) = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

۱۳۰۹ - گزینه ۲ عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع رقم‌هایش بر ۳

بخش پذیر باشد. اکنون توجه کنید که از شش رقم داده شده، اگر فقط ۵ یا ۳ را

حذف کنیم، مجموع پنج رقم دیگر بر ۳ بخش پذیر است. از طرف دیگر،

عددهای پنج رقمی بدون رقم صفر

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 5! = 120$$

عددهای پنج رقمی بدون رقم ۳

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$$

۱, ۲, ۴, ۵

بنابراین، پاسخ سؤال برابر است با  $120 + 96 = 216$ .

۱۳۱۰ - گزینه ۱ تعداد کل جایگشت‌های ۸ حرفی این کلمه ۸! است.

ابتدا تعداد حالت‌هایی را که هیچ دو حرف صداداری کنار یکدیگر قرار ندارند حساب می‌کنیم، سپس آن را از ۸! کم می‌کنیم تا تعداد حالت‌هایی که حداقل دو حرف صدادار کنار یکدیگر قرار دارند، به دست آید. برای پیدا کردن تعداد جایگشت‌هایی که هیچ دو حرف صداداری کنار هم قرار ندارند، ابتدا پنج حرف بی‌صدار را کنار هم قرار می‌دهیم که این کار به ۵! حالت انجام پذیر است. سپس در شش جای خالی مطابق شکل زیر ۳ حرف صدادار را قرار می‌دهیم که این کار به  $P(6, 3)$  حالت امکان پذیر است.



پس تعداد حالت‌های مطلوب مسئله  $5! \cdot P(6, 3) = 8! = 40320$  است که برابر است با

$$8! - 5! \times \frac{6!}{3!} = 8! - 20 \times 6! = 6! (56 - 20) = 36 \times 6!$$

۱۳۱۱ - گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{(n+1)n!}{k(k-1)!} \cdot \frac{(k-1)!}{n!} = \frac{n+1}{k}$$

۱۳۱۲ - گزینه ۳ تعداد راه‌های انتخاب دو توپ از جعبه A برابر  $\binom{3}{2}$  و

از جعبه B برابر  $\binom{9}{2}$  است. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{3}{2} \binom{9}{2} = 3 \times \frac{9 \times 8}{2} = 108$$

۱۳۰۱ - گزینه ۲ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{90} \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{90}$$

$$n(n+1) = 90 \Rightarrow n^2 + n - 90 = 0 \Rightarrow (n+10)(n-9) = 0$$

$$n = -10 \text{ (غ.ق.ق.)}, \Rightarrow n = 9$$

بنابراین  $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} = 72$

۱۳۰۲ - گزینه ۱ باید تعداد حالت‌هایی را که در آن‌ها عبارت  $\log$  دیده

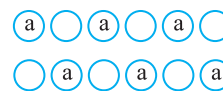
می‌شود، از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم. عبارت  $\log$  و شش حرف  $i, r, a, h, t, m$  هفت شیء متمایز هستند که به ۷! حالت می‌توانند در کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد کل جایگشت‌ها نیز برابر ۹! است. بنابراین تعداد حالت‌های مورد نظر برابر است با  $9! - 7! = 7!(9 \times 8 - 1) = 7! \times 71$ .

۱۳۰۳ - گزینه ۳ تعداد کل حالت‌های ایستادن ۵ نفر در یک صف ۵!

است. در نیمی از این حالات احمد در مکان جلوتری نسبت به محمد ایستاده است و در نیم دیگر حالات محمد در مکان جلوتری نسبت به احمد ایستاده است. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب سؤال برابر است با  $\frac{5!}{2} = 60$ .

۱۳۰۴ - گزینه ۲ به دو روش می‌توان حروف را چید طوری که حروف a

یکی در میان باشند:



در هر دو روش، سه حرف  $p, n, m$  را به ۳! حالت می‌توان در جاهای خالی قرار داد. پس تعداد حالت‌های مورد نظر  $2 \times 3! = 12$  است.

۱۳۰۵ - گزینه ۲ تعداد همه عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیر تکراری که

می‌توان با شش رقم ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ نوشت برابر است با  $P(6, 4) = 360$ . از طرف دیگر، تعداد عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیر تکراری که در آن‌ها هیچ یک از رقم‌های ۱ و ۵ نیامده است، برابر است با تعداد عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیر تکراری که می‌توان با رقم‌های ۲, ۳, ۴, ۶ نوشت. تعداد این عددها برابر است با  $4! = 24$ . بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با  $360 - 24 = 336$ .

۱۳۰۶ - گزینه ۴ تعداد کل جایگشت‌های شش حرفی کلمه نه حرفی

logarithm برابر  $P(9, 6)$  است. تعداد جایگشت‌های شش حرفی که هیچ کدام از حروف  $m$  و  $t$  را ندارند برابر  $P(7, 6)$  است. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با

$$P(9, 6) - P(7, 6) = \frac{9!}{3!} - \frac{7!}{1!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{6} - 7! = 12 \times 7! - 7! = 11 \times 7!$$

۱۳۰۷ - گزینه ۲ راه حل اول تعداد کل جایگشت‌های چهار حرفی هشت

حرف این کلمه برابر  $P(8, 4)$  است. تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها حرف  $t$  وجود ندارد برابر است با  $P(7, 4)$ . بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حرف  $t$  دارند می‌شود  $P(8, 4) - P(7, 4)$  که برابر است با

$$P(8, 4) - P(7, 4) = \frac{8!}{4!} - \frac{7!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 - 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 7 \times 6 \times 5 (8 - 4) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

راه حل دوم ابتدا حرف  $t$  را به ۴ حالت در یکی از چهارخانه خالی در نظر گرفته شده برای جایگشت قرار می‌دهیم. سپس سه خانه خالی وجود دارد که باید با ۷ حرف باقی‌مانده پر شوند که تعداد حالت‌های پر شدن آن‌ها  $P(7, 3)$  است.

۱۳۱۹- گزینه ۴ **راه‌حل اول** بنا بر اصل متمم، باید از تعداد کل زیرمجموعه‌ها، تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی، یک عضوی و دو عضوی را کم کنیم. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$2^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} - \binom{8}{2} = 256 - 1 - 8 - 28 = 219$$

**راه‌حل دوم** تعداد زیرمجموعه‌های دست کم سه عضوی برابر با مجموع تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی، چهار عضوی، ... و هشت عضوی مجموعه است. پس

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 219$$

۱۳۲۰- گزینه ۳ بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی و دو عضوی

$$\text{یک مجموعه } n \text{ عضوی به ترتیب } \binom{n}{1} \text{ و } \binom{n}{2} \text{ است. بنابراین}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 45 \Rightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 45$$

$$n^2 + n - 90 = 0 \Rightarrow n = 9, n = -10 \text{ (غ.ق. ن)}$$

بنابراین مجموعه مورد نظر ۹ عضو دارد و تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی آن

$$\binom{9}{3} = 84 \text{ برابر است با}$$

۱۳۲۱- گزینه ۱ از رابطه داده شده به دست می‌آید

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!(n+1-(n-1))!} = 6 \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = 6$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)! \times 2} = 6 \Rightarrow n(n+1) = 12 \Rightarrow n = 3$$

بنابراین باید  $\binom{5}{3}$  را محاسبه کنیم که برابر است با  $\frac{5!}{3!2!} = 10$

۱۳۲۲- گزینه ۱ دو نفر دیگر را می‌توان از میان هفت نفر دیگر به  $\binom{7}{2}$

طریق انتخاب کرد. پنج نفر را هم می‌توان به ۵! طریق در یک صف مرتب

$$\text{کرد. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با } 5! \times \binom{7}{2} = 21 \times 120 = 2520$$

۱۳۲۳- گزینه ۱ اگر سه نفر از هشت نفر را انتخاب کنیم و آن‌ها را به

همراه A و B در یک تیم پنج نفره قرار دهیم، پنج نفر باقی‌مانده تیم دیگر را

تشکیل خواهند داد. بنابراین جواب مسئله  $\binom{8}{3}$  است.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 5!} = 8 \times 7 = 56$$

۱۳۲۴- گزینه ۴ **راه‌حل اول** به شکل زیر توجه کنید.

به سه روش می‌توان مثلث را رسم کرد. در روش اول دو رأس مثلث را از نقاط  $A_1$  تا  $A_5$  انتخاب می‌کنیم و یک رأس دیگر را از بین نقاط  $A_6$  تا  $A_8$  انتخاب

می‌کنیم. تعداد این مثلث‌ها  $\binom{5}{2} \binom{3}{1} = 40$  است. در روش دوم، یک رأس مثلث

را از نقاط  $A_1$  تا  $A_5$  و دو رأس دیگر را از نقاط  $A_6$  تا  $A_8$  انتخاب می‌کنیم.

۱۳۱۳- گزینه ۳ فرض کنید فرد A یکی از این دوازده نفر باشد. اگر پنج نفر

از یازده نفر دیگر را انتخاب کنیم و با A یک تیم شش نفره درست کنیم، شش نفر

باقی‌مانده هم یک تیم شش نفره دیگر تشکیل خواهند داد. بنابراین جواب  $\binom{11}{5}$  است.

۱۳۱۴- گزینه ۲ اگر هر سه نقطه از این پنج نقطه را به هم وصل کنیم، یک

مثلث تشکیل خواهند داد. پس تعداد مثلث‌ها برابر  $\binom{5}{3}$  یعنی ۱۰ تا است.

۱۳۱۵- گزینه ۳ در یک صفحه شطرنجی  $4 \times 7$  تعداد خط‌های افقی ۵ تا و

تعداد خط‌های عمودی ۸ تا است. از تقاطع هر دو خط عمودی و دو خط افقی

یک مستطیل رسم می‌شود. پس باید دو خط از پنج خط افقی و دو خط از هشت خط

عمودی را انتخاب کنیم، یعنی تعداد مستطیل‌ها برابر است با  $\binom{5}{2} \binom{8}{2} = 280$ .

۱۳۱۶- گزینه ۱ **راه‌حل اول** این کار را به چند روش می‌توانیم انجام دهیم:

الف) صفر مرد و سه زن را به  $\binom{7}{0} \binom{5}{3} = 1 \times 10 = 10$  طریق انتخاب می‌کنیم.

ب) یک مرد و دو زن را به  $\binom{7}{1} \binom{5}{2} = 7 \times 10 = 70$  طریق انتخاب می‌کنیم.

پ) دو مرد و یک زن را به  $\binom{7}{2} \binom{5}{1} = 21 \times 5 = 105$  طریق انتخاب می‌کنیم.

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با

$$\binom{7}{0} \binom{5}{3} + \binom{7}{1} \binom{5}{2} + \binom{7}{2} \binom{5}{1} = 10 + 70 + 105 = 185$$

**راه‌حل دوم** تعداد حالت‌های انتخاب سه نفر از بین ۱۲ نفر برابر است با  $\binom{12}{3}$ .

همچنین تعداد حالت‌هایی که در آن سه مرد انتخاب شوند برابر است.

پس بنا بر اصل متمم، تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با

$$\binom{12}{3} - \binom{7}{3} = 220 - 35 = 185$$

۱۳۱۷- گزینه ۳ هر حالت پرتاب هفت سکه، یک رشته هفت حرفی مانند

«ر پ ر پ پ» درست می‌کند. اگر جای ۳ تا «رو» را در این رشته انتخاب کنیم،

جای ۴ تا «پشت» خودبه‌خود معلوم می‌شود. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر

$$\text{برابر است با } \binom{7}{3} = 35$$

۱۳۱۸- گزینه ۲ ابتدا ۷ حرف دیگر را به ۷! طریق در یک ردیف قرار

می‌دهیم. سپس در دو مکان از ۸ مکان به وجود آمده، دو حرف e را قرار

می‌دهیم که این کار به  $\binom{8}{2}$  حالت امکان‌پذیر است. پس تعداد کل حالت‌ها

$$7! \times \binom{8}{2} = 28 \times 7!$$

بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با

$$\binom{6}{1}\binom{5}{2} + \binom{6}{2}\binom{5}{1} + \binom{6}{3}\binom{5}{0} = 155$$

**راه‌حل دوم** تعداد راه‌های انتخاب سه نفر از یازده نفر بازیکن هر دو تیم برابر

$$\binom{11}{3} = 165 \text{ است و تعداد راه‌هایی که در آن‌ها هیچ بازیکنی از تیم A انتخاب}$$

نشود برابر با  $\binom{5}{3} = 10$  است. پس بنا بر اصل متمم، تعداد راه‌های مورد نظر

برابر است با

$$\binom{11}{3} - \binom{5}{3} = 155$$

**۱۳۲۷- گزینه ۴** شش جای خالی در نظر بگیرید که می‌خواهیم در آن‌ها

ارقام ۱ تا ۵ را بنویسیم. ابتدا ۴ جای خالی را از این ۶ جا انتخاب می‌کنیم و در آن‌ها یکی از ارقام ۱، ۳، ۵ را می‌نویسیم. سپس در ۲ جای باقی‌مانده یکی از ارقام ۲ یا ۴ را می‌نویسیم:

$$\binom{6}{4} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{نوشتن ارقام فرد در ۴ جای انتخاب شده}} \times \underbrace{2 \times 2}_{\text{نوشتن ارقام ۲ یا ۴ در ۲ جای باقی مانده}} = 486$$

**۱۳۲۸- گزینه ۲** اعداد ۱ و ۲ را باید در زیرمجموعه قرار دهیم. اعداد ۳، ۴ و ۵

را کنار می‌گذاریم تا عضو زیرمجموعه نباشند. دو عضو دیگر زیرمجموعه را از بین

اعداد ۶ تا ۲۰ به  $\binom{15}{2} = 105$  حالت انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد

زیرمجموعه‌ها با شرایط مسئله برابر است با

$$\binom{15}{2} = 105$$

**۱۳۲۹- گزینه ۱** توجه کنید که  $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ . اکنون اگر دو تا از

عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷ را انتخاب کنیم، حاصل ضرب آن‌ها دو عدد دیگر،

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ ویژگی مورد نظر را دارند. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با}$$

**۱۳۳۰- گزینه ۳** ابتدا یک جفت کفش را از ۶ جفت کفش به  $\binom{6}{1}$  حالت

انتخاب می‌کنیم. اکنون باید ۳ لنگه کفش را از بین ۵ جفت کفش باقی‌مانده

انتخاب کنیم طوری که هیچ دو لنگه‌ای متعلق به یک جفت نباشند. به این منظور ابتدا ۳ جفت کفش را از بین ۵ جفت کفش به  $\binom{5}{3}$  حالت انتخاب

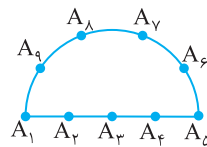
می‌کنیم، سپس از هر جفت کفش انتخاب شده یک لنگه را انتخاب می‌کنیم که

این کار به  $2 \times 2 \times 2$  حالت امکان‌پذیر است. پس تعداد حالت‌های مورد نظر مسئله  $6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$  است.

تعداد این مثلث‌ها  $\binom{5}{1}\binom{4}{2} = 30$  است و در روش سوم، هر سه رأس مثلث

را از نقاط  $A_6$  تا  $A_9$  انتخاب می‌کنیم که تعداد این مثلث‌ها  $\binom{4}{3} = 4$  است.

پس در مجموع  $40 + 30 + 4 = 74$  مثلث وجود دارد.



**راه‌حل دوم** تعداد انتخاب‌های ۳ نقطه از ۹ نقطه برابر  $\binom{9}{3}$  است که اگر هر

سه نقطه روی یک خط نباشند، می‌توانند رأس‌های یک مثلث باشند. پس تعداد

حالت‌هایی را که سه نقطه روی یک خط هستند، یعنی  $\binom{5}{3}$  را از تعداد کل

$$\binom{9}{3} - \binom{5}{3} = 74 \text{ حالت‌ها کم می‌کنیم:}$$

**۱۳۲۵- گزینه ۳** هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از

۹ خط افقی و ۹ خط عمودی شکل زیر به وجود می‌آید. برای اینکه مستطیل‌ها  $5 \times 3$  یا  $3 \times 5$  باشند، باید فاصله دو خط موازی ۳ واحد و فاصله دو خط موازی دیگر ۵ واحد باشد. برای رسم مستطیل‌های  $3 \times 5$  یکی از خطوط ۱ تا ۶

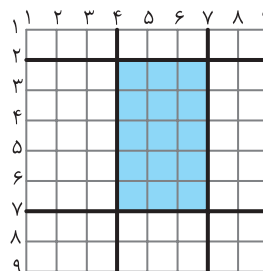
افقی را می‌توانیم به  $\binom{6}{1}$  روش انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به

فاصله ۳ واحد رسم می‌شود. همچنین یکی از خطوط عمودی ۱ تا ۴ را می‌توانیم

به  $\binom{4}{1}$  روش انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصله ۵ واحد رسم

می‌شود. بنابراین  $6 \times 4 = 24$  مستطیل  $3 \times 5$  وجود دارد. به همین ترتیب ۲۴

مستطیل  $5 \times 3$  وجود دارد. پس جمعاً ۴۸ مستطیل با ابعاد ۳ و ۵ وجود دارد.



**۱۳۲۶- گزینه ۴** **راه‌حل اول** به چند روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

(الف) یک بازیکن از تیم A و دو بازیکن از تیم B را به  $\binom{6}{1}\binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60$  طریق انتخاب کنیم.

(ب) دو بازیکن از تیم A و یک بازیکن از تیم B را به  $\binom{6}{2}\binom{5}{1} = 15 \times 5 = 75$  طریق انتخاب کنیم.

(پ) سه بازیکن از تیم A و صفر بازیکن از تیم B را به  $\binom{6}{3}\binom{5}{0} = 20 \times 1 = 20$  طریق انتخاب کنیم.

۱۳۳۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n-r+1}{r} \binom{n}{r-1}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{r+1}{n-r} \binom{n}{r+1}$$

بنابراین

$$\begin{cases} \frac{n-r+1}{r} = \frac{84}{36} = \frac{7}{3} \\ \frac{r+1}{n-r} = \frac{84}{126} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n-10r+3=0 \\ 2n-5r-3=0 \end{cases} \Rightarrow n=9, r=3$$

پس  $n+r=12$ .

۱۳۳۲- گزینه ۲ چون ۲ معلم خاص باید حتماً در تیم باشند، پس باید

تیمی ۳ نفره انتخاب کنیم که ۲ دانش‌آموز خاص در آن نباشند. این ۲ دانش‌آموز را حذف می‌کنیم. بنابراین باید تیمی ۳ نفره از میان ۹ نفر باقی‌مانده

$$\text{انتخاب کنیم. تعداد راه‌های این کار برابر است با } \binom{9}{3} = 84.$$

۱۳۳۳- گزینه ۲ هر نقطه برخورد مربوط به دو قطر و در نتیجه مربوط به

۴ رأس است. بنابراین تعداد نقطه‌های مورد نظر برابر است با



$$\binom{7}{4} = 35$$

۱۳۳۴- گزینه ۲ راه‌حل اول به دو روش می‌توان مثلث را رسم کرد:

روش اول دو رأس مثلث را از بین نقاط  $A_1$  تا  $A_4$  انتخاب کنیم و یک رأسمثلث را از بین نقاط  $B_1$  تا  $B_3$  انتخاب کنیم. تعداد این مثلث‌ها برابر است با

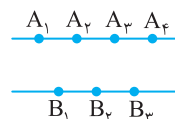
$$\binom{4}{2} \binom{3}{1} = 6 \times 3 = 18$$

روش دوم دو رأس مثلث را از بین نقاط  $B_1$  تا  $B_3$  انتخاب کنیم و یک رأسمثلث را از بین نقاط  $A_1$  تا  $A_4$  انتخاب کنیم. تعداد این مثلث‌ها برابر است با

$$\binom{3}{2} \binom{4}{1} = 3 \times 4 = 12$$

بنابراین تعداد کل مثلث‌ها برابر است با

$$\binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \binom{4}{1} = 18 + 12 = 30$$



راه‌حل دوم ابتدا تعداد مثلث‌های قابل رسم با ۷ نقطه را محاسبه می‌کنیم.

سپس تعداد مثلث‌هایی را که با ۴ نقطه  $A_1, A_2, A_3, A_4$  و ۳ نقطه $B_1, B_2, B_3$  قابل رسم هستند از آن کم می‌کنیم. پس

$$\binom{7}{3} - \binom{4}{3} - \binom{3}{3} = 35 - 4 - 1 = 30.$$

۱۳۳۵- گزینه ۳ اگر سه سؤال از پنج سؤال اول را انتخاب کنیم، باید سه

سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها جواب بدهیم. تعداد این

حالت‌ها برابر  $\binom{5}{3} \binom{5}{3} = 10 \times 10 = 100$  است. اگر چهار سؤال از پنج سؤال اول

را انتخاب کنیم، باید دو سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها

جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر  $\binom{5}{4} \binom{5}{2} = 5 \times 10 = 50$  است. اگر

پنج سؤال از پنج سؤال اول را انتخاب کنیم باید یک سؤال از پنج سؤال دوم را هم

انتخاب کنیم و به آن‌ها جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر

$$\binom{5}{5} \binom{5}{1} = 1 \times 5 = 5 \text{ است. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با}$$

$$\binom{5}{3} \binom{5}{3} + \binom{5}{4} \binom{5}{2} + \binom{5}{5} \binom{5}{1} = 100 + 50 + 5 = 155$$

۱۳۳۶- گزینه ۴ اگر هیچ مردی را انتخاب نکنیم، تعداد راه‌های انتخاب

اعضای تیم برابر است با  $\binom{6}{4} = 15$  و اگر یک مرد و سه زن انتخاب کنیم،تعداد راه‌ها برابر است با  $\binom{4}{1} \binom{6}{3} = 4 \times 20 = 80$ . بنابراین تعداد راه‌های

انتخاب تیمی چهار نفره که حداکثر یک مرد عضو آن باشد (بدون انتخاب مدیر)

برابر است با  $\binom{6}{4} + \binom{4}{1} \binom{6}{3} = 15 + 80 = 95$ . تعداد راه‌های انتخاب مدیرهم برابر است با  $\binom{4}{1}$ . بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{4}{1} \left( \binom{6}{4} + \binom{4}{1} \binom{6}{3} \right) = 4 \times 95 = 380.$$

۱۳۳۷- گزینه ۴ راه‌حل اول تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که در آن‌ها

حرف t وجود دارد ولی حرف a وجود ندارد برابر است با  $5! = 120$ .

به همین ترتیب، تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که در آن‌ها حرف a وجود دارد

ولی حرف t وجود ندارد برابر است با  $5! = 120$ . حال تعداد جایگشت‌های پنجحرفی که در آن‌ها هر دو حرف a و t وجود دارند برابر است با  $5! = 120$ .

در نتیجه تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی مورد نظر برابر است با

$$120 + 120 + 120 = 360.$$



**۱۳۴۱- گزینه ۳ راه حل اول** توجه کنید که

$$n(S) = 2^3 = 8, \quad n(A) = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 3 + 1 = 7$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

بنابراین

**راه حل دوم** احتمال اینکه سکه هر سه بار پشت بیاید، برابر  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

است. بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر A باشد،

**۱۳۴۲- گزینه ۱** تعداد اعداد دو رقمی برابر  $n(S) = 90$  است. اعداد

دو رقمی مربع کامل عبارتند از  $4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$  و  $9^2$  که تعداد آنها برابر  $n(A) = 6$  است. بنابراین احتمال مربع کامل بودن عدد انتخاب شده برابر است با

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

**۱۳۴۳- گزینه ۱** فضای نمونه‌ای این آزمایش  $6 \times 6 = 36$  عضو دارد و

پیشامد مطلوب به شکل زیر است

$$A = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

بنابراین

**۱۳۴۴- گزینه ۳** مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۴ عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ که تعداد آنها  $n(S) = 8$  است. تعداد مقسوم‌علیه‌های

طبیعی و زوج ۲۴ برابر  $n(A) = 6$  است. بنابراین احتمال زوج بودن مقسوم‌علیه انتخاب شده  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  است.

**۱۳۴۵- گزینه ۴** تعداد کل حالت‌های ممکن برای چیدن ۸ کتاب در یک قفسه برابر ۸! است. اگر بخواهیم کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم باشند، ابتدا کتاب‌های ادبیات را به ۵! حالت کنار هم می‌چینیم. سپس کتاب‌های ریاضی را به ۳! حالت کنار هم می‌چینیم و در آخر به ۲! حالت این دو دسته کتاب را در قفسه قرار می‌دهیم. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آنگاه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \cdot 3! \cdot 2!}{8!} = \frac{1}{28}$$

پس  $n(A) = 5! \cdot 3! \cdot 2!$

**۱۳۴۶- گزینه ۲** تعداد کل مسیری که از شهر A به شهر C می‌روند، برابر است با  $4 \times 3 + 2 = 14$ . دو مسیر مستقیم از شهر A به شهر C است که از شهر B عبور نمی‌کنند، ۱۲ مسیر دیگر از شهر B عبور می‌کنند. بنابراین

$$\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

برابر  $\frac{6}{7}$  احتمال اینکه در مسیرمان از شهر B عبور کنیم، برابر

**۱۳۴۷- گزینه ۲** تعداد راه‌های انتخاب سه مهره از ده مهره برابر است با

$$\binom{10}{3}$$

و تعداد راه‌های انتخاب سه مهره سفید از پنج مهره سفید برابر است با

$$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

**راه حل دوم** تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی کلمه هشت حرفی triangle برابر

$P(8, 5)$  است. تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که هیچ کدام از حروف t و a را ندارند، برابر  $P(6, 5)$  است. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از

این دو حرف را دارند برابر است با

$$P(8, 5) - P(6, 5) = \frac{8!}{3!} - \frac{6!}{1!} = \frac{8!}{6} - 6! = 6! \left( \frac{8 \times 7}{6} - 1 \right) = 5! \times 5$$

**۱۳۳۸- گزینه ۳** عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰ را بر حسب زوج یا فرد بودنشان

به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

عددهای دسته اول: ۱، ۳، ۵، ۷، ۹

عددهای دسته دوم: ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰

برای اینکه مجموع چهار عدد مورد نظر زوج باشد، یا باید هر چهار عدد را از دسته اول انتخاب کنیم، یا باید دوتا از دسته اول و دوتا از دسته دوم انتخاب کنیم، یا باید هر چهار تا را از دسته دوم انتخاب کنیم. بنابراین تعداد راه‌های

$$\binom{5}{4} + \binom{5}{2} \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 5 + 10 \times 10 + 5 = 110$$

مورد نظر برابر است با

**۱۳۳۹- گزینه ۱** **راه حل اول** ابتدا یک زوج را از شش زوج به  $\binom{6}{1}$

حالت انتخاب می‌کنیم. حالا باید دو نفر را از بین پنج زوج باقی‌مانده انتخاب

کنیم به طوری که هیچ دو نفری زن و شوهر نباشند. به این منظور ابتدا دو زوج

را از بین پنج زوج به  $\binom{5}{2}$  حالت انتخاب می‌کنیم، سپس از هر زوج انتخاب

شده یک نفر را انتخاب می‌کنیم که این کار به  $2 \times 2$  طریق امکان‌پذیر است.

پس تعداد راه‌های مورد نظر مسئله برابر است با

$$\binom{6}{1} \binom{5}{2} \times 2^2 = 6 \times 10 \times 4 = 240$$

**راه حل دوم** ابتدا یک زوج را از میان شش زوج به  $\binom{6}{1}$  طریق انتخاب می‌کنیم

و برای انتخاب دو نفر دیگر، دو نفر را از ده نفر باقی‌مانده به  $\binom{10}{2}$  طریق

انتخاب می‌کنیم و پنج حالتی را که ممکن است این دو نفر زن و شوهر باشند، از

انتخاب‌هایمان کم می‌کنیم. بنابراین تعداد انتخاب‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{6}{1} \times \left( \binom{10}{2} - 5 \right) = 6 \times (45 - 5) = 240$$

**۱۳۴۰- گزینه ۲** به شکل زیر توجه کنید:

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6}_{\text{دوتا رو و دوتا پشت}} \quad \underbrace{7 \quad 8 \quad 9 \quad 10}_{\text{پشت یا رو}}$$

پرتاب پنجم باید رو بیاید پس یک حالت دارد. دو تا از چهار پرتاب اول باید رو

بیایند که این کار به  $\binom{4}{2}$  حالت امکان‌پذیر است. دو پرتاب دیگر باید پشت

بیایند که یک حالت دارد. پرتاب‌های ششم تا دهم می‌توانند رو یا پشت بیایند

که هر کدام دو حالت و کلاً  $2^5$  حالت دارند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب

$$\binom{4}{2} \times 2^5 = 6 \times 32 = 192$$

مسئله برابر است با

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{1}{35}$$

۱۳۵۶- گزینه ۲ تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  برابر  $2^6 - 1$  است و تعداد زیرمجموعه‌های

دو عضوی آن برابر  $\binom{6}{2}$  است. بنابراین احتمال دو عضوی بودن زیرمجموعه

انتخاب شده برابر است با

$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6 - 1} = \frac{15}{63} = \frac{5}{21}$$

۱۳۵۷- گزینه ۳ انتخاب سه مهره از ۹ مهره به  $\binom{9}{3}$  حالت امکان‌پذیر

است و تعداد راه‌هایی که دو تا از آن‌ها سفید باشند برابر است با

$$\binom{3}{2} \binom{2}{1} + \binom{3}{1} \binom{4}{2} = 18$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{18}{\binom{9}{3}} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$$

۱۳۵۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

بنابراین

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

۱۳۵۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$P(A') + P(B') = 1 - P(A) + 1 - P(B) = 2 - (P(A) + P(B)) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

۱۳۶۰- گزینه ۴ توجه کنید که  $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

از طرف دیگر،

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = P(A) + \frac{1}{10} - P(A \cap B)$$

$$P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

۱۳۶۱- گزینه ۴ فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو است که در ۶ عضو آن

به صورت  $(1, 1), (1, 2), (2, 2), \dots, (6, 6)$  عددهای روی دو تاس برابر هستند و در

بقیه برابر نیستند. پس در ۳۰ حالت عدد روی تاس‌ها فرق دارند. بنابراین

احتمال پیشامد مطلوب  $\frac{30}{36}$  یا همان  $\frac{5}{6}$  است.

۱۳۴۸- گزینه ۳ چون  $A$  و  $B$  ناسازگارند،  $P(A \cap B) = 0$ . در نتیجه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{9} + \frac{5}{6} = \frac{17}{18}$$

۱۳۴۹- گزینه ۴ چون  $A$  و  $B$  ناسازگارند، پس  $P(A \cap B) = 0$ . از طرف

دیگر  $P(B) = 1 - P(B') = \frac{1}{4}$ . در نتیجه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

۱۳۵۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0/6 = P(A) + P(B) - 0/2 \Rightarrow P(A) + P(B) = 0/8$$

بنابراین

$$P(A') + P(B') = (1 - P(A)) + (1 - P(B))$$

$$= 2 - (P(A) + P(B)) = 2 - 0/8 = 1/2$$

۱۳۵۱- گزینه ۱ فضای نمونه‌ای آزمایش  $6 \times 6$  عضو دارد و پیشامد

مطلوب برابر است با  $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ .

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

۱۳۵۲- گزینه ۳ تعداد کل عددهای سه رقمی با رقم‌های متمایز که

رقم‌های آن عضو مجموعه  $\{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$  باشند برابر است با  $5 \times 4 \times 4$ .

یعنی  $n(S) = 100$ . توجه کنید که اگر رقم صفر را انتخاب کنیم نمی‌توان عدد

سه رقمی با شرایط گفته شده نوشت. پس از ۵ رقم دیگر سه رقم را انتخاب

می‌کنیم. با این سه رقم انتخاب شده فقط به یک طریق می‌توانیم یک عدد با

شرایط خواسته شده بنویسیم بنابراین اگر  $A$  پیشامد این باشد که رقم‌ها

صعودی باشند، آن‌گاه  $n(A) = \binom{5}{3} = 10$ . بنابراین احتمال مورد نظر برابر

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

۱۳۵۳- گزینه ۲ تعداد کل اعداد سه رقمی برابر  $9 \times 10 \times 10$  است. اگر

بخواهیم رقم تکراری نداشته باشیم، تعداد اعداد برابر  $9 \times 9 \times 8$  خواهد بود.

بنابراین احتمال اینکه عدد نوشته شده دارای رقم‌های تکراری نباشد یعنی

$$\frac{9 \times 9 \times 8}{9 \times 10 \times 10} = 0/72$$

۱۳۵۴- گزینه ۱ تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ society

برابر با ۷! است. سه حرف صدادر کلمهٔ society را یک حرف در نظر

می‌گیریم. در این صورت پنج حرف داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر

۵! است و چون تعداد جایگشت‌های حروف صدادر هم ۳! است، پس تعداد

جایگشت‌هایی که حروف صدادر کنار هم هستند برابر  $5! \times 3!$  است. بنابراین

$$\frac{5! \times 3!}{7!} = \frac{1}{7}$$

۱۳۵۵- گزینه ۴ فضای نمونه‌ای این آزمایش ۷! عضو دارد، یعنی

$n(S) = 7!$ . اگر  $A$  پیشامد مطلوب مسئله باشد، تعداد اعضای  $A$  برابر است با

$n(A) = 4! \times 3!$ . (ابتدا کتاب‌های ریاضی را به ۴! حالت در  $\bigcirc$ ‌ها می‌چینیم،

سپس در مکان‌های بین آن‌ها کتاب‌های فیزیک را به ۳! حالت در  $\square$ ‌ها می‌چینیم.)



در نتیجه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{7}{1} \binom{7}{2}}{\binom{14}{3}} = \frac{21}{52}$$

۱۳۶۸- گزینه ۳ با توجه به رابطه  $P(A) = 1 - P(A')$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad P(B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{17}{24} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{5}{24}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{6}$$

در نتیجه

۱۳۶۹- گزینه ۱ راه حل اول فرض کنید  $n(S) = s$ . در این صورت

$$P(A \cap B) = \frac{5}{24} \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{5}{24} s, \quad P(A') = \frac{5}{8} \Rightarrow n(A') = \frac{5}{8} s$$

از روی نمودار ون زیر و تساوی‌های بالا معلوم می‌شود که

$$y = \frac{5}{24} s, \quad z + t = \frac{5}{8} s$$

اکنون توجه کنید که

$$x + y + z + t = s \Rightarrow x + \frac{5}{24} s + \frac{5}{8} s = s \Rightarrow x = s - \frac{5}{24} s - \frac{5}{8} s = \frac{1}{6} s$$

به این ترتیب

$$P(A \cap B') = \frac{n(A \cap B')}{n(S)} = \frac{x}{s} = \frac{1}{6}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= (1 - \frac{5}{24}) - \frac{5}{24} = \frac{3}{24} - \frac{5}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

۱۳۷۰- گزینه ۳ راه حل اول می‌دانیم  $0 \leq P(A) \leq 1$ . پس

$$0 \leq \frac{k}{3} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq k \leq 3 \quad (1)$$

چون A و B ناسازگارند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{k}{3} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \frac{k}{3}$$

از طرفی  $0 \leq P(B) \leq 1$ ، در نتیجه

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{k}{3} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{k}{3} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \quad (2)$$

با توجه به نابرابری‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید  $0 \leq k \leq \frac{3}{2}$ .

راه حل دوم چون  $A \subseteq A \cup B$  پس  $0 \leq P(A) \leq P(A \cup B)$ .

بنابراین  $0 \leq k \leq \frac{3}{2}$ ، پس  $0 \leq \frac{k}{3} \leq \frac{1}{2}$ .

۱۳۶۲- گزینه ۲ تعداد کل عددهای سه رقمی با رقم‌های متمایز برابر

است با  $9 \times 9 \times 8$ . پس  $n(S) = 9 \times 9 \times 8$ . اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

آن‌گاه  $n(A) = 8 \times 8 \times 5$ . بنابراین

$$P(A) = \frac{8 \times 8 \times 5}{9 \times 9 \times 8} = \frac{40}{81}$$

۱۳۶۳- گزینه ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش به شکل زیر است:

$$S = \{(1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

پیشامد اینکه حاصل جمع دو عدد ۵ باشد به شکل  $A = \{(2, 3), (3, 2)\}$

$$\text{است. بنابراین } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۳۶۴- گزینه ۱ راه حل اول فضای نمونه‌ای  $2^5$  عضو دارد، پس

$n(S) = 2^5 = 32$ . اگر تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد،

باید تعداد فرزندان دختر ۴ یا ۵ باشد. پس تعداد اعضای این پیشامد برابر

$$\text{است با } n(A) = \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} = 16$$

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم چون تعداد کل فرزندان خانواده فرد است، پس در نیمی از حالات تعداد

دختران بیشتر از تعداد پسران و در نیمی دیگر از حالات برعکس است. همچنین،

هرگز تعداد دختران و پسران این خانواده برابر نمی‌شود. بنابراین  $P(A) = \frac{1}{2}$ .

۱۳۶۵- گزینه ۲ تعداد راه‌های انتخاب دو عدد از میان ده عدد داده شده

برابر است با  $n(S) = \binom{10}{2} = 45$ . از طرف دیگر، اگر A پیشامد مورد نظر

باشد  $A = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \dots, \{8, 10\}\}$ . پس  $n(A) = 8$  و در نتیجه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{45}$$

۱۳۶۶- گزینه ۴ تعداد راه‌های انتخاب زیرمجموعه‌ای سه عضوی از

مجموعه هفت عضوی داده شده برابر است با  $n(S) = \binom{7}{3} = 35$ . برای اینکه

حاصل ضرب عضوهای زیرمجموعه انتخاب شده منفی باشد، باید یک عضو

منفی باشد و دو عضو دیگرش مثبت باشند یا هر سه عضو منفی باشند.

بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 10$$

$$\text{بنابراین } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

۱۳۶۷- گزینه ۴ تعداد کل مهره‌های کیسه برابر ۱۴ است و تعداد راه‌های

انتخاب سه مهره از این ۱۴ مهره برابر است با  $n(S) = \binom{14}{3}$ . اگر A پیشامد

این باشد که دقیقاً یک مهره سبز انتخاب شود، دو مهره دیگر را باید از هفت

$$\text{مهره آبی یا قرمز انتخاب کنیم. بنابراین } n(A) = \binom{7}{1} \binom{7}{2}$$

۱۳۷۷- گزینه ۱ تعداد کل مهره‌ها برابر است با  $۳+۴+۵=۱۲$  و تعداد

راه‌های انتخاب سه مهره از این ۱۲ مهره برابر است با

$$n(S) = \binom{12}{3} = 220$$

اگر A پیشامد این باشد که مهره‌ها به سه رنگ مختلف باشند، آن‌گاه

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{5}{1} = 60$$

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

۱۳۷۸- گزینه ۳ فضای نمونه‌ای آزمایش  $\binom{n}{2}$  عضو دارد. اگر A

پیشامد سفید بودن هر دو مهره باشد، تعداد اعضای A برابر  $\binom{4}{2}$  است.

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{6}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{12}{n(n-1)} = \frac{2}{15}$$

پس

$$n(n-1) = 90 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=10 \\ n=-9 \text{ (غ.ق.)} \end{cases}$$

۱۳۷۹- گزینه ۱ از تساوی  $P(B') = 3P(A')$  نتیجه می‌شود

$$1 - P(B) = 3(1 - P(A)) \Rightarrow 1 - P(B) = 3 - 3P(A) \Rightarrow P(B) = 3P(A) - 2$$

با توجه به اینکه  $P(A) = 2P(B)$ ، در تساوی فوق به جای  $P(A)$  قرار

می‌دهیم  $2P(B)$  و نتیجه می‌شود

$$P(B) = 6P(B) - 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \frac{4}{5} \text{ و در نتیجه } P(A) + P(B) = \frac{6}{5}$$

۱۳۸۰- گزینه ۴ با توجه به رابطه  $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3} \frac{1}{2} \leq k \leq 2$$

۱۳۸۱- گزینه ۴ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش  $6^4$  است.

یعنی  $n(S) = 6^4$ . اگر A پیشامد این باشد که دقیقاً در دو پرتاب عدد ۶ ظاهر

شود، آن‌گاه  $n(A) = \binom{4}{2} \times 1 \times 1 \times 5^2$  (توجه کنید که کافی است دو پرتاب از

چهار پرتاب را انتخاب کنیم که در آن‌ها به یک حالت عدد ۶ ظاهر می‌شود و در

دو پرتاب باقی‌مانده به پنج حالت عدد دیگری ظاهر شوند). بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2} \times 5^2}{6^4} = \frac{25}{216}$$

۱۳۷۱- گزینه ۲ فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس ۳۶ عضو دارد. اگر A

پیشامد این باشد که مجموع عددهای رو شده در تاس‌ها بیشتر از ۸ باشد، آن‌گاه

$$A = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

۱۳۷۲- گزینه ۳ در اینجا  $n(S) = 4 \times 3 \times 2 = 24$ . اگر A پیشامد

مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$A = \{(1, -1, 0), \{2, -2, 0\}, \{3, 0, -3\}, \{4, -1, -3\}\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

۱۳۷۳- گزینه ۴ چون می‌دانیم عدد رو شده روی دو تاس، اول است، پس

هریک از تاس‌ها می‌توانند ۲ یا ۳ یا ۵ بیایند. بنابراین فضای نمونه‌ای این آزمایش

دارای  $3 \times 3$  حالت است یعنی  $n(S) = 9$ . فقط در یک حالت که عدد روی هر دو

تاس ۲ بیاید، عدد روی هر دو تاس زوج خواهد بود. پس  $n(A) = 1$  و در نتیجه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{9}$$

۱۳۷۴- گزینه ۱ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر  $8!$  و تعداد

حالت‌هایی که دو برادر در ابتدا و انتهای صف می‌ایستند برابر  $2 \times 6!$  است.

$$\text{بنابراین احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با } \frac{2 \times 6!}{8!} = \frac{1}{28}$$

۱۳۷۵- گزینه ۲ تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی کلمه  $نه$  حرفی

logarithm برابر  $P(9, 5)$  است. تعداد جایگشت‌هایی که هیچ کدام از

حروف t و g را ندارند برابر  $P(7, 5)$  است، پس تعداد جایگشت‌هایی که

حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با  $P(9, 5) - P(7, 5)$ . بنابراین

احتمال اینکه در جایگشت انتخاب شده حداقل یکی از حروف t و g وجود داشته

باشد، برابر است با

$$\frac{P(9, 5) - P(7, 5)}{P(9, 5)} = 1 - \frac{P(7, 5)}{P(9, 5)} = 1 - \frac{7!}{9!} = 1 - \frac{7! \times 2!}{9! \times 2!} = 1 - \frac{4 \times 3}{8 \times 9} = \frac{5}{6}$$

۱۳۷۶- گزینه ۳ در کل تعداد افراد برابر است با  $2 \times 5 = 10$ . در نتیجه

تعداد راه‌های انتخاب سه نفر از این ده نفر برابر است با  $n(S) = \binom{10}{3}$  برای

اینکه از این سه نفر هیچ دو نفری زن و شوهر نباشند، باید از هر زوج حداکثر

یک نفر را انتخاب کنیم، یعنی باید ابتدا سه زوج را انتخاب کنیم و سپس از هر

زوج، یک نفر را انتخاب کنیم. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

$$n(A) = \binom{5}{3} \times 2 \times 2 \times 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{3} 2^3}{\binom{10}{3}} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$$

**۱۳۸۶- گزینه ۲** در مجموعه  $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$  تعداد اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند، ۳۳ تا  $(3, 6, 9, \dots, 96, 99)$  و تعداد اعدادی که بر ۷ بخش پذیرند، ۱۴ تا  $(7, 14, 21, \dots, 91, 98)$  است. پس اگر  $A$  را پیشامد بخش پذیر بودن عدد بر ۳ و  $B$  را پیشامد بخش پذیر بودن عدد بر ۷ بنامیم، آن گاه

$$P(A) = \frac{33}{100}, \quad P(B) = \frac{14}{100} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{14}{100} = \frac{86}{100}$$

تعداد اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۷ بخش پذیر هستند، ۴ تا  $(21, 42, 63, 84)$  است. پس تعداد اعدادی که بر ۳ بخش پذیر هستند ولی بر ۷ بخش پذیر نیستند، برابر  $33 - 4$  تا است. پس

$$n(A \cap B') = 29 \Rightarrow P(A \cap B') = \frac{29}{100}$$

می‌خواهیم  $P(A \cup B')$  را محاسبه کنیم:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = \frac{33}{100} + \frac{86}{100} - \frac{29}{100} = \frac{90}{100}$$

**۱۳۸۷- گزینه ۲** کل حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۱۲ نفر برابر  $\binom{12}{4}$

است. یعنی  $n(S) = \binom{12}{4}$  تعداد حالت‌هایی که کمیته شامل هیچ زنی

نیست برابر است با  $\binom{9}{4}$ . بنابراین اگر  $A$  پیشامد این باشد که کمیته شامل هیچ

زنی نباشد آن گاه  $n(A) = \binom{9}{4}$ . بنابراین  $n(S) = \binom{12}{4} = \frac{n(A)}{P(A)} = \frac{\binom{9}{4}}{\frac{14}{55}}$

پیشامد اینکه کمیته حداقل شامل یک زن باشد، متمم  $A$  است. پس

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}$$

**۱۳۸۸- گزینه ۴** چون باید چهار نفر را از میان دوازده نفر انتخاب کنیم،

پس  $n(S) = \binom{12}{4} = 495$  توجه کنید که باید یک زوج انتخاب شوند.

سپس باید دو زوج از پنج زوج دیگر انتخاب شوند و از هر کدام یک نفر انتخاب شوند. چون از هر یک از این زوج‌ها می‌توانیم زن یا شوهر را انتخاب کنیم، تعداد

راه‌های انجام این کار برابر است با  $2^2 = 2 \times 2 = 4$  یا  $2^2 = 4$ .

به این ترتیب، احتمال مورد نظر برابر است با  $\frac{16}{33}$ .

**۱۳۸۹- گزینه ۳** از تساوی‌های داده شده نتیجه می‌گیریم  $P(A) = \frac{1}{8}$

$P(B) = \frac{1}{12}$  و  $P(C) = \frac{1}{20}$ . چون  $A, B$  و  $C$  پیشامدهای دوه‌دو ناسازگار

هستند، پس

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{31}{120}$$

**۱۳۸۲- گزینه ۱** تعداد راه‌های انتخاب ۲ عدد از میان ۲۰ عدد داده شده برابر

است با  $n(S) = \binom{20}{2} = 190$ . از طرف دیگر، اگر  $A$  پیشامد مورد نظر باشد،

$$A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \dots, \{19, 20\}\}$$

پس  $n(A) = 19$  و در نتیجه  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{19}{190} = \frac{1}{10}$ .

**۱۳۸۳- گزینه ۳** در اینجا  $n(S) = \binom{25}{2} = 300$ . فرض کنید  $A$  پیشامد

مورد نظر باشد. در این صورت  $A'$  پیشامد این است که هر دو خانه در یک

سطر یا یک ستون باشند. همچنین، تعداد راه‌های انتخاب دو خانه از یک سطر

یا دو خانه از یک ستون هر کدام برابر است با  $\binom{5}{2}$  و چون ۵ سطر و ۵ ستون

داریم، پس

$$n(A') = 5 \times \binom{5}{2} + 5 \times \binom{5}{2} = 5 \times 10 + 5 \times 10 = 100$$

بنابراین  $P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$ ، پس

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

**۱۳۸۴- گزینه ۲** تعداد مهره‌ها  $2n - 2$  است، پس  $n(S) = \binom{2n-2}{2}$

اگر  $A$  پیشامد غیرهم‌رنگ بودن مهره باشد،  $n(A) = \binom{n}{1} \binom{n-2}{1}$  زیرا

باید یک مهره آبی و یک مهره قرمز انتخاب کنیم. بنابراین

$$P(A) = \frac{\binom{n}{1} \binom{n-2}{1}}{\binom{2n-2}{2}} = \frac{n(n-2)}{(2n-2)(2n-3)} = \frac{n(n-2)}{(n-1)(2n-3)} = \frac{8}{15}$$

پس

$$15n(n-2) = 8(n-1)(2n-3) \Rightarrow 15n^2 - 30n = 16n^2 - 40n + 24$$

$$n^2 - 10n + 24 = 0 \Rightarrow (n-6)(n-4) = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ یا } n = 4$$

تعداد کل مهره‌ها  $2n - 2$  است، پس تعداد مهره‌ها در کیسه ۶ یا ۱۰ تا است.

**۱۳۸۵- گزینه ۱** اگر  $A$  را پیشامد مضرب ۳ بودن عدد و  $B$  را پیشامد

مضرب ۸ بودن آن در نظر بگیریم، آن گاه

$$n(A) = \frac{69-3}{3} + 1 = 23 \Rightarrow P(A) = \frac{23}{70}$$

$$n(B) = \frac{64-8}{8} + 1 = 8 \Rightarrow P(B) = \frac{8}{70}$$

اعدادی که مضرب ۳ و ۸ باشند، مضرب ۲۴ هستند.

$$A \cap B = \{24, 48\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{70}$$

بنابراین

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{23}{70} + \frac{8}{70} - \frac{2}{70} = \frac{29}{70}$$

۱۳۹۵- گزینه ۱ راه‌حل اول پیشامد «به هدف زدن شخص اول» را  $A$  و

پیشامد «به هدف زدن شخص دوم» را  $B$  می‌نامیم. پس

$$P(A) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

پیشامد «حداقل یکی از آن‌ها به هدف نزنند» برابر  $A' \cup B'$  است که چون

$A'$  و  $B'$  مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A')P(B') = \frac{5}{6} + \frac{2}{5} - \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$$

راه‌حل دوم فرض کنید  $A$  پیشامد آن باشد که هر دو فرد تیر را به هدف بزنند. در این صورت مطلوب مسئله  $P(A')$  است. چون زدن تیر دو شخص

به هدف پیشامدهایی مستقل هستند، پس  $P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$ . بنابراین

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

۱۳۹۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \{2\}, \quad A \cap D = \{1\}, \quad A \cap E = \{1, 2\}$$

بنابراین  $A$  و  $B$  مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A \cap B) = 0, \quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$A$  و  $C$  مستقل از هم هستند، زیرا

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4}, \quad P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$A$  و  $D$  مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A \cap D) = \frac{1}{4}, \quad P(A) \times P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$A$  و  $E$  مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A \cap E) = \frac{1}{2}, \quad P(A) \times P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

۱۳۹۷- گزینه ۴ با توجه به فرض مسئله،

$$P(A) = 1 - P(A') = 0/6, \quad P(B) = 1 - P(B') = 0/8$$

در نتیجه  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0/6 \times 0/8 = 0/48$ ، بنابراین

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/6 + 0/8 - 0/48 = 0/92$$

۱۳۹۸- گزینه ۱ اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل از هم باشند، آن‌گاه  $A'$

و  $B$  نیز مستقل از هم هستند. بنابراین  $P(B|A) = P(B) = \frac{1}{3}$  و

$$P(A'|B) = P(A') = \frac{3}{5} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{5}$$

و در نتیجه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$

۱۳۹۹- گزینه ۴ فرض کنید  $A$  و  $B$  به ترتیب پیشامد این باشند که آقای

فیضی و آقای تقوی در روز پنجشنبه سرکار بیایند. در این صورت  $P(A \cup B)$

را می‌خواهیم. توجه کنید که پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

۱۳۹۰- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر  $A-B$ ،  $A \cap B$  و  $B-A$

اشتراک ندارند و اجتماع آن‌ها برابر  $A \cup B$  است. پس

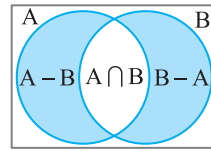
$$P(A \cup B) = P(A-B) + P(B-A) + P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + P(A \cap B) = \frac{1}{2} + P(A \cap B)$$

چون  $P(A \cup B) \leq 1$ ، پس

$$\frac{1}{2} + P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$$

یعنی بیشترین مقدار  $P(A \cap B)$  برابر  $\frac{1}{2}$  است.



۱۳۹۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0/3 + 0/2 - 0/5 = 0$$

$$\text{بنابراین } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$$

۱۳۹۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(A|B) = 4P(B|A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A \cap B) \neq 0$$

$$4P(B) = P(A) \Rightarrow \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

۱۳۹۳- گزینه ۱ راه‌حل اول فرض کنید  $A$  پیشامد این باشد که نفر اول

عضو تیم باشد و  $B$  پیشامد این باشد که نفر دوم نیز عضو تیم باشد. توجه کنید

که  $P(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ ،  $P(B|A) = \frac{1}{23}$  از طرف دیگر، پس احتمال مورد نظر

برابر است با

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{23} = \frac{1}{276}$$

راه‌حل دوم فضای نمونه‌ای این آزمایش انتخاب دو دانش‌آموز از ۲۴ دانش‌آموز

این کلاس است که تعداد عضوهای آن برابر است با

$$n(S) = \binom{24}{2} = 276$$

اگر  $A$  پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه  $n(A) = \binom{2}{2} = 1$ ، بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{276}$$

۱۳۹۴- گزینه ۳ فرض کنید  $A$  پیشامد این باشد که اختلاف عددی

که آمده‌اند ۳ باشد و  $B$  پیشامد این باشد که دست کم یک بار ۲ آمده باشد. در

این صورت

$$A = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$

$$B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2),$$

$$(2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$$

به این ترتیب،  $A \cap B = \{(2, 5), (5, 2)\}$  و در نتیجه

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

پیشامدهای  $A$  و  $D$  مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A \cap D = \{2, 3\} \Rightarrow P(A \cap D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) \times P(D) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

پیشامدهای  $A$  و  $E$  مستقل از هم هستند، زیرا

$$A \cap E = \{2, 3\} \Rightarrow P(A \cap E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) \times P(E) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

**۱۴۰۷- گزینه ۴** راه حل اول فرض کنید  $A$  پیشامد این باشد که نفر اول

به هدف بزند و  $B$  پیشامد این باشد که نفر دوم به هدف بزند. توجه کنید که  $P(B) = 0/8$  و  $P(A) = 0/75$  پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل اند و در نتیجه

احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0/75 + 0/8 - 0/75 \times 0/8 = 0/95$$

**راه حل دوم** فرض کنید  $A$  پیشامد آن باشد که هیچ یک از این دو نفر به هدف نزنند. در این صورت مطلوب مسئله  $P(A')$  است. چون به هدف زدن دو نفر

پیشامدهای مستقل هستند، بنابراین به هدف نزدن آن‌ها نیز دو پیشامد مستقل هستند، پس  $P(A) = 0/25 \times 0/2 = 0/05$ ، بنابراین

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0/05 = 0/95$$

**۱۴۰۸- گزینه ۳** چون  $A$  و  $B$  مستقل از هم هستند، پس

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \left( \frac{1}{4} - P(A) \right) = \frac{1}{4} P(A) - P^2(A)$$

اگر فرض کنیم  $P(A) = x$  آن گاه  $x - x^2 = \frac{1}{4}$  حد اکثر مقدار

عبارت  $x - x^2 + \frac{1}{4}$  به ازای  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$  به دست می‌آید و برابر

است با  $\frac{1}{4}$  پس حد اکثر مقدار  $P(A \cap B)$  برابر  $\frac{1}{64}$  است.

**۱۴۰۹- گزینه ۳** فرض کنید  $A$  پیشامد این باشد که مهره بیرون آمده از

کیسه اول سفید باشد و  $B$  پیشامد این باشد که مهره بیرون آمده از کیسه دوم سفید باشد. در این صورت  $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$  و  $P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$  توجه کنید

که پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل اند. پس احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

**۱۴۱۰- گزینه ۳** فرض کنید  $A$  پیشامد این باشد که در روز مورد نظر،

دانشجوی اول در کلاس حاضر باشد و  $B$  پیشامد این باشد که در روز مورد نظر، دانشجوی دوم در کلاس حاضر باشد. در این صورت  $P(A) = 0/8$  و

$P(B) = 0/6$ . توجه کنید که پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل اند، بنابراین احتمال

مورد نظر برابر است با

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= 0/8 + 0/6 - (0/8)(0/6) = 0/92$$

**۱۴۱۱- گزینه ۳** ابتدا مقدار  $P(A \cap B)$  را به دست می‌آوریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0/3 = \frac{P(A \cap B)}{0/4} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/12$$

اکنون مقدار  $P(B)$  را به دست می‌آوریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0/8 = \frac{0/12}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{0/12}{0/8} = 0/15$$

**۱۴۰۰- گزینه ۱** باید احتمال متمم این پیشامد را که عمل برای هر دو

ناموفق باشد، بیابیم.

$$0/2 \times 0/3 = 0/06 \text{ احتمال عدم موفقیت برای هر دو نفر}$$

در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با  $1 - 0/06 = 0/94$ .

**۱۴۰۱- گزینه ۴** توجه کنید که

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B) + P(A') - P(B \cup A')}{P(A')} \\ = \frac{1 - P(B') + 1 - P(A) - P(B \cup A')}{1 - P(A)} = \frac{0/2 + 0/3 - 0/4}{0/3} = \frac{0/1}{0/3} = \frac{1}{3}$$

**۱۴۰۲- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') \\ = (1 - 0/3) + (1 - 0/4) - 0/5 = 0/8$$

از طرف دیگر،

$$P(B|A \cup B') = \frac{P(B \cap (A \cup B'))}{P(A \cup B')} \\ = \frac{P(B) + P(A \cup B') - P(B \cup (A \cup B'))}{0/8} = \frac{0/4 + 0/8 - 1}{0/8} = \frac{0/2}{0/8} = \frac{1}{4}$$

**۱۴۰۳- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که

$$P(A|B) = 1/6 P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/6 P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1/6 (P(B))^2 \\ P(B|A) = 4 P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 4 P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = 4 (P(A))^2$$

بنابراین

$$1/6 (P(B))^2 = 4 (P(A))^2 \Rightarrow \frac{(P(A))^2}{(P(B))^2} = 4 \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = 2$$

**۱۴۰۴- گزینه ۲** اگر  $A$  را پیشامد مبتلا شدن فرد به بیماری و  $B$  را

پیشامد بهبود یافتن فرد مبتلا شده در نظر بگیریم، آن گاه

$$P(A) = 0/07, \quad P(B|A) = 0/6$$

بنابراین

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0/6 = \frac{P(A \cap B)}{0/07} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/042$$

پس احتمال اینکه فردی از این جامعه به بیماری مبتلا شود، سپس بهبود یابد برابر  $0/042$  است.

**۱۴۰۵- گزینه ۱** اگر  $A$  را پیشامد «مضرب ۵ بودن عدد» و  $B$  را پیشامد

«زوج بودن عدد» در نظر بگیریم، آن گاه

$$n(A) = \frac{10}{5} = 20, \quad n(A \cap B) = \frac{10}{10} = 10$$

زیرا عددی که زوج و مضرب ۵ باشد، مضرب ۱۰ است. بنابراین

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

**۱۴۰۶- گزینه ۴** پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A \cap B = \{2, 5\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

پیشامدهای  $A$  و  $C$  مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A \cap C = \{2\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) \times P(C) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5}, \quad P(A) \times P(B) = \frac{2}{5} \neq P(A \cap B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{5}, \quad P(A) \times P(C) = \frac{6}{25} \neq P(A \cap C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{2}{5}, \quad P(B) \times P(C) = \frac{9}{25} \neq P(B \cap C)$$

بنابراین هیچ دوتایی از پیشامدهای A، B و C مستقل نیستند.

چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

اگر فرض کنیم  $P(A) = x$ ، آن‌گاه

$$\frac{2}{3} = x + \frac{3}{2}x - x \left(\frac{3}{2}x\right) \Rightarrow 9x^2 - 15x + 4 = 0$$

$$(3x-1)(3x-4) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = \frac{4}{3}$$

چون  $0 \leq P(A) \leq 1$ ، پس  $x = \frac{4}{3}$  غیر قابل قبول است، بنابراین  $P(A) = \frac{1}{3}$ .

چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

فرض می‌کنیم  $P(A) = x$  و در نتیجه

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} - x \left(\frac{1}{8} - x\right) = x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$$

حداقل مقدار عبارت  $x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$  به‌ازای  $x = -\frac{\frac{1}{8}}{2 \times 1} = \frac{1}{16}$  به‌دستمی‌آید که برابر است با  $\frac{31}{256}$ .بنابراین حداقل مقدار  $P(A \cup B)$  برابر  $\frac{31}{256}$  است.ابتدا توجه کنید که  $A = (A-B) \cup (A \cap B)$  وبنابراین  $A \cap B$  و  $A-B$  ناسازگارند.

$$P(A) = P((A-B) \cup (A \cap B)) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

بنابراین  $P(A) - P(A-B) = P(A \cap B)$  و چون A و B مستقل از همهستند، پس  $P(A) - P(A-B) = P(A) \times P(B)$ .

پیشامد A را تنها به مسافرت رفتن علی و پیشامد B را

تنها به مسافرت رفتن محسن تعریف می‌کنیم. در نتیجه

$$P(A) = 0/2, \quad P(B) = 0/25$$

اکنون باید  $P(A \cap B')$  را حساب کنیم. می‌دانیم این دو پیشامد مستقل

هستند. در نتیجه

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = P(A)(1 - P(B))$$

$$= \frac{2}{10} \times (1 - 0/25) = \frac{2}{10} \times \frac{25}{100} = 0/15 = 15\%$$

احتمال قبولی مهدی در ریاضی را با  $P(A)$  و احتمال قبولیدر فیزیک را با  $P(B)$  نشان می‌دهیم. با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت

$$P(B \cap A') = 0/18$$

می‌دانیم این دو پیشامد (قبولی در فیزیک و ریاضی) مستقل از یکدیگرند. در نتیجه

$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A') = P(B)(1 - P(A)) = P(B)(1 - 0/6) = 0/18$$

بنابراین  $P(B) = 0/45$ . در نتیجه  $P(B') = 1 - P(B) = 0/55$ .

۱-۱۴۱۲ گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A \cap B \subset A \cup B \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B$$

بنابراین

$$P(A \cup B | A \cap B) = \frac{P((A \cup B) \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$$

توجه کنید که ۱-۱۴۱۳ گزینه ۱

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5} P(A \cap B)$$

بنابراین باید حداکثر و حداقل مقدار  $P(A \cap B)$  را حساب کنیم. توجه کنید که

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - P(A \cup B) = \frac{49}{30} - P(A \cup B)$$

چون  $P(A \cup B) \leq 1$ ، پس  $P(A \cap B) \geq \frac{49}{30} - 1 = \frac{19}{30}$ ، همچنین $P(A \cap B) \leq P(A)$ ، در نتیجه حداکثر مقدار  $P(A \cap B)$  برابر است با  $\frac{4}{5}$ است. بنابراین  $\frac{19}{30} \leq P(A \cap B) \leq \frac{4}{5}$ . در نتیجه

$$\frac{6}{5} \times \frac{19}{30} \leq P(A|B) \leq \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{19}{25} \leq P(A|B) \leq \frac{24}{25}$$

بنابراین اختلاف بیشترین مقدار ممکن  $P(A|B)$  و کمترین مقدار ممکن آن

$$\frac{24}{25} - \frac{19}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

فرض کنید A پیشامد این باشد که دست کم یک دستیار

انتخاب شده باشد و B پیشامد این باشد که دقیقاً دو پزشک انتخاب شوند.

توجه کنید که  $A'$  پیشامد این است که هیچ دستکاری انتخاب نشود، یعنی هر

چهار نفر از میان هفت نفر پزشک انتخاب شده‌اند. بنابراین

$$P(A') = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = \frac{5}{6}$$

از طرف دیگر،  $A \cap B$  پیشامد این است که دو نفر پزشک و دو نفر دستیار

انتخاب شده باشند. بنابراین

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{7}{2} \binom{3}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{3}{10}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{25}$$

ابتدا توجه کنید که ۱-۱۴۱۵ گزینه ۴

$$A \cap B = \{2\}, \quad A \cap C = \{2\}, \quad B \cap C = \{2, 5\}$$

از طرف دیگر

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{3}{5}, \quad P(C) = \frac{3}{5}$$



طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

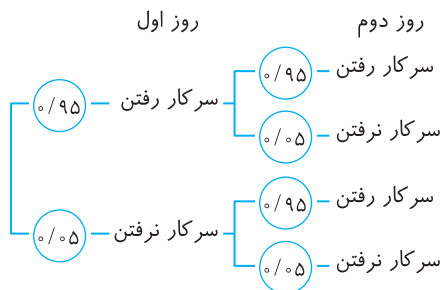
**گزینه ۱ - ۱۴۲۷** فرض کنید B پیشامد «رو» آمدن سکه و A پیشامد سفید بودن همه مهره‌های خارج شده از ظرف باشد. باید  $P(A)$  را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

انتخاب سه سکه «پشت»      انتخاب دو سکه «رو»  
مهره سفید بیاید      مهره سفید بیاید

$$P(A) = P(B) P(A|B) + P(B') P(A|B')$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{21} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{35} = \frac{1}{7} + \frac{2}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

**گزینه ۴ - ۱۴۲۸** راه‌حل اول نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



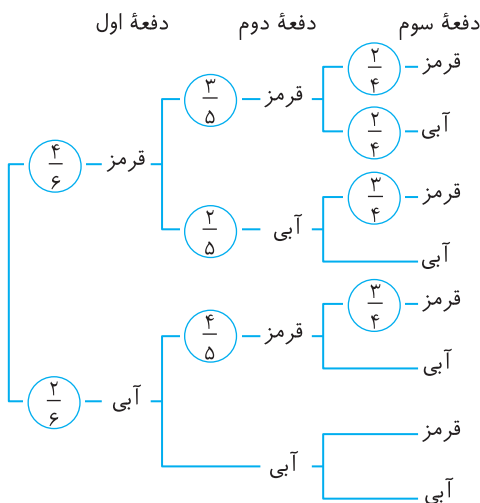
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با  $0.95 \times 0.95 + 0.95 \times 0.05 + 0.05 \times 0.95 = 0.9975$

**راه‌حل دوم** اگر A را پیشامد سرکار نرفتن حاج داود در آن دو روز متوالی در نظر بگیریم:  $P(A) = (1 - \frac{95}{100}) \times (1 - \frac{95}{100}) = 0.0025$ . پس احتمال آنکه حاج

داود حداقل یک روز از آن دو روز را سرکار برود برابر است با

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.0025 = 0.9975$$

**گزینه ۲ - ۱۴۲۹** نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{4}{6}$$

**گزینه ۳ - ۱۴۲۱** توجه کنید که در اینجا فضای نمونه‌ای  $S = \{ق ق, آ آ, ق ق, ق آ, آ ق, ق ق\}$  است. فرض کنید  $B_p$  پیشامد این باشد که توپ دوم آبی و  $R_1$  و  $B_1$  به ترتیب پیشامدهای این باشند که توپ اول قرمز و توپ اول آبی باشد. در این صورت، چون  $R_1$  و  $B_1$  فضای نمونه‌ای S را افراز می‌کنند، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B_p) = P(R_1)P(B_p|R_1) + P(B_1)P(B_p|B_1)$$

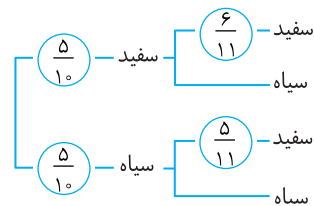
$$= \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$$

**گزینه ۴ - ۱۴۲۲** فرض کنید A پیشامد این باشد که تویی که در کیسه ۲ گذاشته‌ایم، سفید باشد و B پیشامد این باشد که تویی که از کیسه ۲ بیرون آورده‌ایم، سفید باشد. روشن است که  $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ . بنابر قانون احتمال کل،

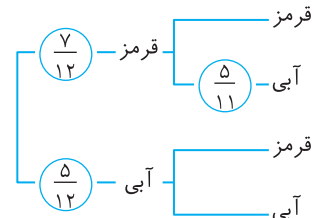
$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A') = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

**گزینه ۳ - ۱۴۲۳** پیشامد اگر سفید بودن مهره آخر را با A نشان دهیم، با توجه به نمودار درختی زیر می‌توان نوشت:

$$P(A) = \frac{5}{10} \times \frac{6}{11} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{11} = 0.5$$



**گزینه ۴ - ۱۴۲۴** نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{7}{12} \times \frac{5}{11} + \frac{5}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{35}{132}$$

**گزینه ۴ - ۱۴۲۵** فرض کنید  $B_i$  پیشامد انتخاب جعبه  $i$  ام،  $i=1, 2, 3$  و A پیشامد سالم بودن لامپ انتخاب شده باشد. باید  $P(A)$  را حساب کنیم. چون  $B_1, B_2, B_3$  فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

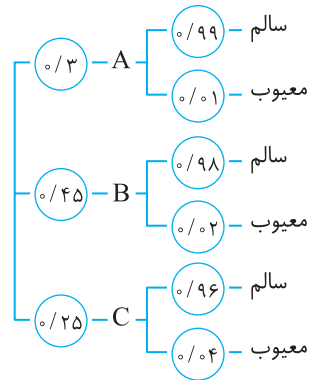
$$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{8} = \frac{5}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{10}{36} + \frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{25}{36}$$

**گزینه ۲ - ۱۴۲۶** فرض کنید B پیشامد انتخاب جعبه اول برای افزودن ۳ مهره سیاه باشد. در این صورت  $B'$  پیشامد انتخاب جعبه دوم برای افزودن ۳ مهره سیاه است. همچنین فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهره انتخاب شده باشد. باید  $P(A)$  را حساب کنیم.

توجه کنید که اگر سه مهره سیاه به جعبه اول اضافه شود، این جعبه شامل ۵ مهره سفید و ۵ مهره سیاه می‌شود، پس احتمال سفید بودن مهره انتخابی از این جعبه

برابر  $\frac{5}{10}$  می‌شود، یعنی  $P(A|B) = \frac{5}{10}$ . به طور مشابه  $P(A|B') = \frac{2}{8}$

۱۴۳۰- گزینه ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید.



راه حل اول

$$P(\text{انتخاب شده سالم}) = \frac{1}{3} \times \frac{99}{100} + \frac{1}{45} \times \frac{98}{100} + \frac{1}{25} \times \frac{96}{100} = \frac{9978}{90000}$$

راه حل دوم اگر A را پیشامد معیوب بودن محصول را در نظر بگیریم:

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{100} + \frac{1}{45} \times \frac{2}{100} + \frac{1}{25} \times \frac{4}{100} = \frac{22}{9000}$$

بنابراین احتمال سالم بودن این محصول برابر است با

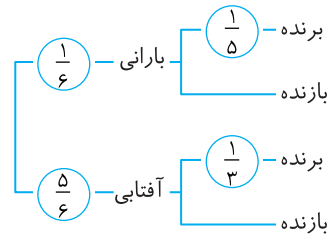
$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{22}{9000} = \frac{8978}{9000}$$

۱۴۳۱- گزینه ۱ توجه کنید که

(مهره انتخابی سفید)

$$\begin{aligned} & P(\text{انتخاب جعبه اول | مهره انتخابی سفید}) P(\text{انتخاب جعبه اول}) \\ & + P(\text{انتخاب جعبه دوم | مهره انتخابی سفید}) P(\text{انتخاب جعبه دوم}) \\ & = \frac{1}{2} \times \frac{7}{7+5} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{15+21} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{36} = \frac{7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

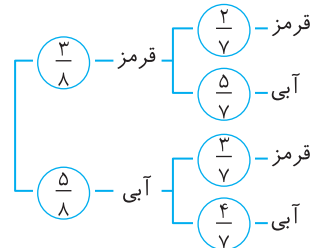
۱۴۳۲- گزینه ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$$

۱۴۳۳- گزینه ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



راه حل اول از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$P(\text{دست کم یکی آبی باشد}) = 1 - P(\text{هر دو قرمز باشند}) = 1 - \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28}$$

۱۴۳۴- گزینه ۳ فرض کنید B این پیشامد باشد که فردا باران بیارد و A

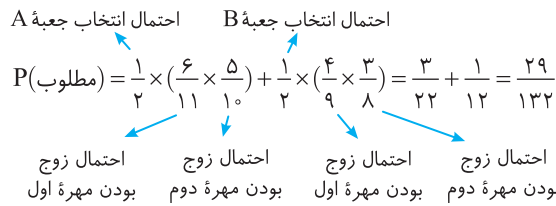
این پیشامد باشد که فردا برق قطع شود. باید  $P(A')$  را حساب کنیم. ابتدا  $P(A)$  را به کمک قانون احتمال کل به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{5} + (1 - \frac{1}{8}) \times \frac{1}{5} = \frac{1}{12} + \frac{1}{5} = \frac{13}{60} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{13}{60} = \frac{47}{60}$$

۱۴۳۵- گزینه ۴ توجه کنید که



۱۴۳۶- گزینه ۳ فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهره انتخابی باشد و

B پیشامد آن باشد که مهره انتخابی جزء مهره‌های اولیه داخل ظرف باشد. در این صورت  $B'$  پیشامد آن است که مهره انتخابی جزء ۵ مهره سفید اضافه شده باشد. باید  $P(A)$  را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

چون مهره انتخابی از بین ۱۰ تا از مهره‌های اولیه و ۵ مهره اضافه شده انتخاب شده است، پس  $P(B) = \frac{10}{15}$  و  $P(B') = \frac{5}{15}$ . همچنین اگر مهره انتخابی از

مهره‌های اولیه باشد، احتمال سفید بودن آن برابر  $\frac{5}{14}$  است و اگر از مهره‌های

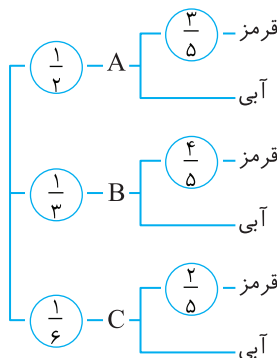
اضافه شده باشد، احتمال سفید بودن آن برابر ۱ است. بنابراین

$$P(A|B) = \frac{5}{14}, \quad P(A|B') = 1$$

در نتیجه

$$P(A) = \frac{10}{15} \times \frac{5}{14} + \frac{5}{15} \times 1 = \frac{5}{21} + \frac{1}{3} = \frac{5+7}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

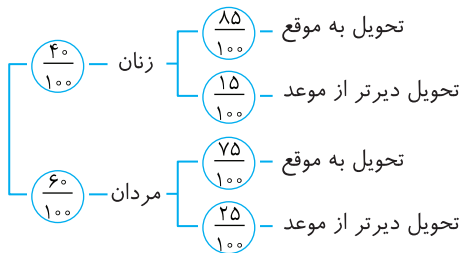
۱۴۳۷- گزینه ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{19}{30}$$

۱۴۴۲- گزینه ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{40}{100} \times \frac{15}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{21}{100}$$

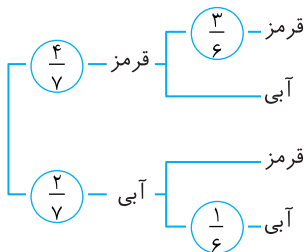
۱۴۴۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(\text{دو مهره هم‌رنگ باشند}) = 1 - P(\text{دو مهره هم‌رنگ نباشند})$$

بنابراین کافی است احتمال این را که دو مهره هم‌رنگ باشند، حساب کنیم. توجه کنید که چون فقط یک مهره سبز در جعبه وجود دارد، امکان ندارد دو مهره سبز رنگ باشند. اکنون نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید. از روی این نمودار معلوم است که

$$P(\text{دو مهره هم‌رنگ باشند}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .



۱۴۴۴- گزینه ۳ فرض کنید B پیشامد سفید بودن مهره اول و A پیشامد سفید بودن مهره دوم باشد. باید  $P(A)$  را حساب کنیم. چون B و B' فضای نمونه‌ای را افزای می‌کنند (توجه کنید B' پیشامد سیاه بودن مهره اول است)، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{2}{7} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{30}{49}$$

توجه کنید که اگر مهره اول سفید باشد، مهره دوم از بین ۵ مهره سفید و ۲ مهره سیاه انتخاب می‌شود، پس  $P(A|B) = \frac{5}{7}$  و اگر مهره اول سیاه باشد، مهره دوم

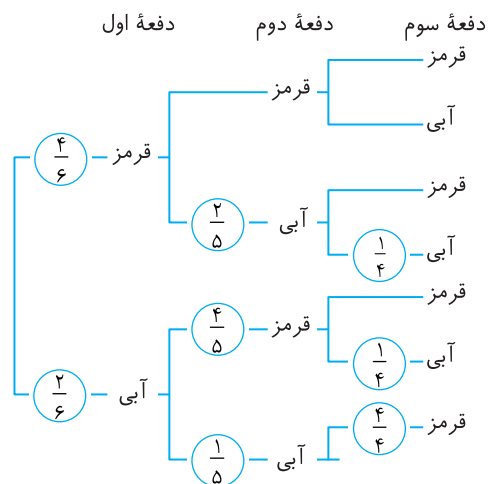
از بین ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه انتخاب می‌شود، پس  $P(A|B') = \frac{4}{7}$ .

۱۴۴۵- گزینه ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که عددهای برابر نیابند (که از این‌ها (۱, ۳) و (۳, ۱) و (مطلوب‌اند)، B پیشامد این باشد که عددهای تاس برابر بیابند (که از اینها (۱, ۱) و سپس بار دیگر (۱, ۱) مطلوب‌اند) و C پیشامد این باشد که مجموع نهایی برابر ۴ باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$$

$$= \frac{30}{49} \times \frac{2}{36} + \frac{6}{49} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{18} + \frac{1}{362} = \frac{72+1}{362} = \frac{73}{362}$$

۱۴۳۸- گزینه ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

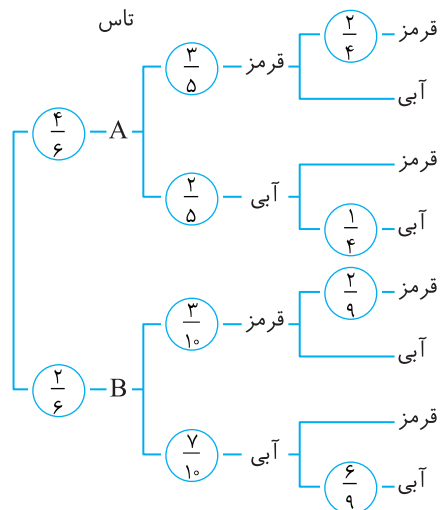
۱۴۳۹- گزینه ۴ از احتمال متمم استفاده می‌کنیم، یعنی ابتدا احتمال این را که رنگ مهره‌ها یکسان باشد، پیدا می‌کنیم و از ۱ کم می‌کنیم. حالا اگر بخواهیم رنگ مهره‌ها یکسان باشد یعنی اینکه یا هر دو مهره سبز باشد یا هر دو سفید:

$$P(\text{هر دو سبز}) + P(\text{هر دو سفید}) = P(\text{رنگ‌ها یکسان باشد})$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{8} = \frac{26}{40}$$

$$P(\text{رنگ‌ها متفاوت باشد}) = 1 - \frac{26}{40} = \frac{14}{40}$$

۱۴۴۰- گزینه ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



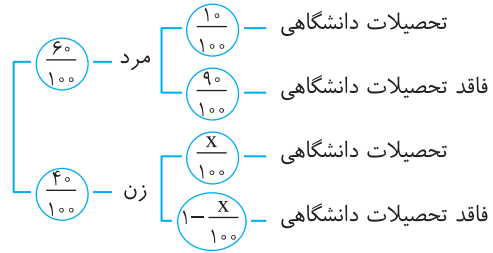
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{6} \times \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$$

۱۴۴۱- گزینه ۲ فرض کنید R پیشامد قرمز بودن مهره و B پیشامد آبی بودن مهره باشد. در این صورت، اگر A پیشامد این باشد که یکی از مهره‌ها قرمز و دیگری آبی باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(R)P(A|R) + P(B)P(A|B) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

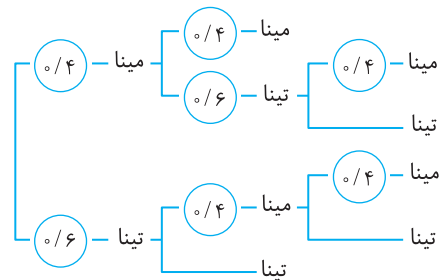
۱۴۴۶- گزینه ۲ فرض کنید  $X$  درصد زنانی باشند که تحصیلات دانشگاهی دارند، نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



با توجه به فرض مسئله،

$$\left(\frac{60}{100} \times \frac{10}{100}\right) + \left(\frac{40}{100} \times \frac{X}{100}\right) = \frac{92}{1000} \Rightarrow 0.06 + 0.004X = 0.092 \Rightarrow X = 8$$

۱۴۴۷- گزینه ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

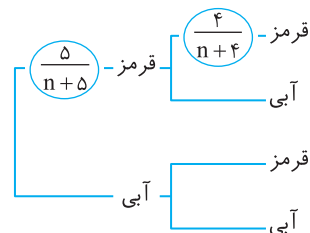
$$\frac{0.4 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 + 0.6 \times 0.6}{1000} = \frac{352}{1000} = \frac{44}{125}$$

۱۴۴۸- گزینه ۱ فرض کنید  $A_1, A_2, A_3$  به ترتیب پیشامد این

باشند که دانش‌آموز انتخاب شده در پایه دهم، یازدهم یا دوازدهم باشد و  $A$  پیشامد این باشد که این دانش‌آموز به کارهای هنری علاقه‌مند است. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) \\ = \frac{0.4 \times 0.3 + 0.3 \times 0.4 + 0.3 \times 0.2}{0.3}$$

۱۴۴۹- گزینه ۲ فرض کنید تعداد مهره‌های آبی برابر  $n$  باشد. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{5}{n+5} \times \frac{4}{n+4} = \frac{2}{11} \Rightarrow (n+5)(n+4) = 11 \times 10 \Rightarrow n^2 + 9n - 90 = 0 \\ (\text{غ.ق.ق.}) \quad (n-6)(n+15) = 0 \Rightarrow n = 6, n = -15$$

۱۴۵۰- گزینه ۲ فرض کنید  $A, B, C$  به ترتیب پیشامد تیراندازی با این کمان‌ها باشند و  $D$  پیشامد اصابت تیر به هدف باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ = \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{85}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{8}{10} = \frac{255}{300} = \frac{17}{20}$$

۱۴۵۱- گزینه ۱

۱۴۵۲- گزینه ۲

۱۴۵۳- گزینه ۴

۱۴۵۴- گزینه ۱

۱۴۵۵- گزینه ۲ فرض کنید  $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ . در این صورت

$$\frac{3X_1 - 2 + \dots + 3X_n - 2}{n} = 3\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) - 2 = 3\bar{X} - 2 = 13$$

بنابراین  $\bar{X} = 5$ . اکنون توجه کنید که

$$\frac{5X_1 + 2 + \dots + 5X_n + 2}{n} = 5\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) + 2 = 5\bar{X} + 2 = 27$$

۱۴۵۶- گزینه ۴ برای تعیین میانه، ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم. سپس اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده وسط و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده وسط را به عنوان میانه برمی‌گزینیم. پس

$$3, 8, 10, 12, 14, 20 \Rightarrow m = \frac{10+12}{2} = 11$$

۱۴۵۷- گزینه ۴ ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم

$$5, 10, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 20$$

در نتیجه میانه داده‌ها برابر است با ۱۵. برای داده‌های قبل و بعد از میانه، میانه‌ها برابر هستند با  $13/5$  و  $17/5$ :

$$5, 10, 12, \underbrace{13, 14, 14, 15, 15}_{13/5}, 15, 16, 17, \underbrace{17, 18, 18, 19, 20}_{17/5}$$

۱۴۵۸- گزینه ۲ واریانس داده‌ها تنها زمانی صفر است که همگی برابر

باشند. فرض کنید  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = a$ . در نتیجه با افزودن سه عدد

جدید،  $\bar{X} = 6 = \frac{5a + 5 + 8 + 10}{8} = \frac{5a + 23}{8}$ . در نتیجه  $a = 5$ . بنابراین

واریانس داده‌ها برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{6 \times (5-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{8} = \frac{6 + 4 + 16}{8} = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}$$

۱۴۵۹- گزینه ۳ فرض می‌کنیم  $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ . در نتیجه میانگین

عدهای  $2 - \frac{X_1}{4}, \dots, 2 - \frac{X_n}{4}$  برابر با  $2 - \frac{\bar{X}}{4}$  است. بنابراین

$$\sigma_1^2 = \frac{\left(2 - \frac{X_1}{4} - 2 + \frac{\bar{X}}{4}\right)^2 + \dots + \left(2 - \frac{X_n}{4} - 2 + \frac{\bar{X}}{4}\right)^2}{n}$$

در نتیجه

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} \times \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n} \\ \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n} = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

همچنین با استدلال مشابه می‌توان دید

$$\sigma_2^2 = \frac{(X_1 - 2 - \bar{X} + 2)^2 + \dots + (X_n - 2 - \bar{X} + 2)^2}{n} \\ = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n} = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

بنابراین  $\sigma_2 = 4 \times 1/2 = 2$

واریانس همه این داده‌ها برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{15} - \bar{x})^2}{25} + \frac{(y_1 - \bar{x})^2 + (y_2 - \bar{x})^2 + \dots + (y_{10} - \bar{x})^2}{25}$$

$$= \frac{14 \times 15 + 7 \times 9 \times 10}{25} = \frac{210 + 63}{25} = \frac{273}{25} \Rightarrow \sigma = \frac{17}{5} = 3.4$$

۱-۱۴۷۱ گزینۀ ۱ ابتدا توجه کنید که  $n(S) = 6 \times 6 = 36$ . از طرف دیگر،

اگر پیشامد مورد نظر  $A$  باشد، آن‌گاه

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)\}$$

بنابراین  $n(A) = 9$ ، در نتیجه  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

تجربی - ۹۷

۱-۱۴۷۲ گزینۀ ۲ توجه کنید که  $n(S) = \binom{12}{3}$ . باید از هر رنگ

یک مهره انتخاب کنیم. در نتیجه اگر پیشامد مورد نظر  $A$  باشد، آن‌گاه

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{11}$$

تجربی - ۹۶

۱-۱۴۷۳ گزینۀ ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که  $n(S) = \binom{10}{2}$  برای

اینکه دو مهره هم‌رنگ نباشند باید یکی سفید یکی سیاه، یکی سفید یکی قرمز، یا یکی سیاه و یکی قرمز باشد. بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر  $A$  باشد، آن‌گاه

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{3}{1} \binom{5}{1} + \binom{2}{1} \binom{5}{1} = 31$$

$$P(A) = \frac{31}{45}$$

راه‌حل دوم اگر پیشامد مورد نظر  $A$  باشد،  $A'$  پیشامد این است که هر دو مهره هم‌رنگ باشند. بنابراین

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = 1 - \frac{3 + 1 + 10}{45} = \frac{31}{45}$$

تجربی - ۹۴

۱-۱۴۷۴ گزینۀ ۱ ابتدا توجه کنید که  $n(S) = 5! = 120$ . فرض کنید ابتدا

عددی زوج خارج شود. در این صورت امکان ندارد که دو عدد فرد کنار هم نباشند. ف ز ف ز

اگر ابتدا عددی فرد خارج شود، عددهای فرد را به ۳! طریق می‌توان خارج کرد و عددهای زوج را هم به ۲! طریق.

ف ز ف ز

بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر  $A$  باشد، آن‌گاه  $n(A) = 3! \times 2! = 12$ ، پس

$$P(A) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

تجربی - ۹۲

۱-۱۴۶۰ گزینۀ ۱ اگر به هر داده،  $\bar{x}$  را اضافه کنیم، میانگین نیز به اندازه

$\bar{x}$  اضافه می‌شود اما انحراف معیار تغییر نمی‌کند. بنابراین

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \bar{x} + \bar{x} = 2\bar{x}, \quad CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{2\bar{x}} = \frac{1}{2} CV_{\text{قدیم}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۱-۱۴۶۱ گزینۀ ۱

۱-۱۴۶۲ گزینۀ ۲

۱-۱۴۶۳ گزینۀ ۳

۱-۱۴۶۴ گزینۀ ۳ توجه کنید که

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع نمرات ۸ درس}}{8} = 12/5$$

$$\text{مجموع نمرات ۸ درس} = 12/5 \times 8 = 100$$

$$\bar{x}' = \frac{100 + 14 + 16}{10} = \frac{130}{10} = 13$$

۱-۱۴۶۵ گزینۀ ۳ توجه کنید که  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  بنابراین

$$\bar{x}' = \frac{(x_1 + \bar{x}) + (x_2 + 2\bar{x}) + \dots + (x_n + n\bar{x})}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \bar{x} \frac{(1 + 2 + \dots + n)}{n}$$

$$= \bar{x} + \bar{x} \frac{n(n+1)}{2n} = \bar{x} + \frac{(n+1)}{2} \bar{x} = \bar{x} \frac{(n+3)}{2}$$

۱-۱۴۶۶ گزینۀ ۴ توجه کنید که

$$\bar{x} = \frac{5+2+8}{3} = \frac{15}{3} = 5, \quad \sigma^2 = \frac{(5-5)^2 + (2-5)^2 + (8-5)^2}{3} = 6$$

۱-۱۴۶۷ گزینۀ ۱ ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{10 + 3 \times 12 + 2 \times 13}{6} = 12, \quad \sigma = \sqrt{\frac{(10-12)^2 + 3 \times 0 + 2 \times 1}{6}} = 1$$

۱-۱۴۶۸ گزینۀ ۱ توجه کنید که

$$\bar{x} = \frac{8+6+5+4+2}{5} \Rightarrow \bar{x} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(8-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (2-5)^2}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2, \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = \frac{2}{5}$$

۱-۱۴۶۹ گزینۀ ۳ اگر انحراف معیار داده‌ها برابر با صفر باشد، آن‌گاه داده‌ها

با هم برابرند، پس

$$x_1 = x_2 = x_3 = 10$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + 20}{4} = \frac{10 + 10 + 10 + 20}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$$

۱-۱۴۷۰ گزینۀ ۳ می‌دانیم واریانس پانزده داده اول برابر ۱۴ و واریانس ده داده

دوم برابر ۷/۹ است. از طرف دیگر میانگین هر دو گروه یکسان است، بنابراین

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{15} - \bar{x})^2}{15} = 14$$

$$\frac{(y_1 - \bar{x})^2 + (y_2 - \bar{x})^2 + \dots + (y_{10} - \bar{x})^2}{10} = 7/9$$

۱۴۸۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $n(S) = \binom{10}{3} = 120$  باید دو مهره

از یک رنگ و یک مهره از رنگ دیگر انتخاب کنیم. بنابراین اگر پیشامد مورد نظر  $A$  باشد، آن‌گاه

$$n(A) = \binom{5}{2} \binom{5}{1} + \binom{3}{2} \binom{7}{1} + \binom{2}{2} \binom{8}{1} = 79$$

$$P(A) = \frac{79}{120}$$

در نتیجه

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱۴۸۲- گزینه ۴ توجه کنید که  $P(A) = 0/9$  و  $P(B) = 0/8$ . چون پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل اند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= 0/9 + 0/8 - 0/9 \times 0/8 = 1/7 - 0/72 = 0/98$$

تجربی - ۹۵

۱۴۸۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $n(S) = \binom{14}{4}$  اگر پیشامد مورد نظر

$$n(A) = \binom{2}{1} \binom{7}{2} \binom{5}{1} + \binom{2}{1} \binom{7}{3} = 280$$

آن‌گاه

بنابراین

$$P(A) = \frac{280}{\binom{14}{4}} = \frac{40}{143}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۴۸۴- گزینه ۱ توجه کنید که  $n(S) = \binom{9}{3} = 84$  باید سه مهره از ۴

مهره سفید یا سه مهره از ۵ مهره سیاه انتخاب کنیم. بنابراین اگر پیشامد مورد نظر

$$n(A) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$$

آن‌گاه

$$P(A) = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۱۴۸۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $n(S) = \binom{11}{3}$  فرض کنید پیشامد

مورد نظر  $A$  باشد. در این صورت  $A'$  پیشامد این است که هیچ کدام از موش‌ها سفید نباشد، یعنی هر سه موش سیاه هستند. بنابراین

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} = 1 - \frac{4}{33} = \frac{29}{33}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۴۷۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $n(S) = 2^2 \times 6 = 24$  اگر  $A$  پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$A = \{(3, r, r), (3, r, p), (3, p, r), (6, r, r), (6, r, p), (6, p, r)\}$$

پس  $n(A) = 6$  و  $P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۴۷۶- گزینه ۴

۱۴۷۷- گزینه ۱ فرض می‌کنیم  $y_i = 2x_i - 7$ ، بنابراین

$$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2s_x}{2\bar{x} - 7} = \frac{2s_x}{\bar{x}} \times \frac{3}{2}$$

$$4\bar{x} = 6\bar{x} - 21 \Rightarrow \bar{x} = \frac{21}{2}$$

اکنون از اینکه  $\bar{x} = \frac{21}{2}$  به دست می‌آید

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{20}}{20} = \frac{21}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 210$$

ریاضی - ۸۶

۱۴۷۸- گزینه ۲ داده‌ها را بدون در نظر گرفتن  $x$  مرتب می‌کنیم:

$$50, 63, 64, 65, 66, 70, 77$$

در حال حاضر میانه ۶۵ است. اگر عدد  $x$  را خود ۶۵ در نظر بگیریم،

$$\bar{x} = \frac{50 + 63 + 64 + 65 + 65 + 66 + 70 + 77}{8}$$

$$= 65 + \frac{-15 - 2 - 1 + 0 + 0 + 1 + 5 + 12}{8}$$

$$= 65 + \frac{-18 + 18}{8} \Rightarrow \bar{x} = 65$$

خارجی از کشور ریاضی - ۹۳

پس  $x = 65$  قابل قبول است.

۱۴۷۹- گزینه ۱ ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌های  $x_i$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3, \quad \overline{x^2} = \frac{1+4+9+16+25}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\sigma_x^2 = 11 - (3)^2 = 2 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{2}$$

اکنون برای داده‌های  $u_i$  به دست می‌آید

$$\bar{u} = 12\bar{x} + 6 = 12 \times 3 + 6 = 42, \quad \sigma_u = 12\sigma_x = 12\sqrt{2}$$

$$(CV)_u = \frac{\sigma_u}{\bar{u}} = \frac{12\sqrt{2}}{42} = \frac{2\sqrt{2}}{7} = \frac{2 \times 1/4}{7} = 0/4$$

ریاضی - ۹۵

۱۴۸۰- گزینه ۲ می‌دانیم واریانس ۱۵ داده اول برابر ۱۲ و واریانس ۱۰

داده دوم برابر ۷/۶ است، بنابراین

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{15} = 12$$

$$\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2}{10} = 7/6$$

بنابراین از آنجا که  $\bar{x} = \bar{y}$ ، واریانس همه این داده‌ها برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2) + ((y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2)}{25}$$

$$= \frac{76 + 180}{25} = \frac{256}{25} \Rightarrow \sigma = \frac{16}{5} = 3/2$$

ریاضی - ۸۹

بنابراین واریانس این ۱۴ داده برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{(22-22)^2 + (22-22)^2 + \dots + (22-22)^2}{14} + \frac{(16-22)^2 + (24-22)^2 + (26-22)^2}{14} = \frac{36+4+16}{14} = 4$$

بنابراین انحراف معیار برابر  $\sigma=2$  است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۴۹۰- گزینه ۱ برای مقایسه دقت عمل این دو دستگاه کافی است که

ضریب تغییرات آن‌ها را مقایسه کنیم

$$\left\{ \begin{array}{l} CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{3/6}{150} = 0.02 \\ CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{3/14}{160} = 0.02 \end{array} \right. \Rightarrow CV_A = CV_B$$

با توجه به برابری ضریب تغییرات دو دستگاه A و B، دقت عمل هر دو پیرامون میانگین یکسان است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۴۸۶- گزینه ۲ ابتدا میانگین داده‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{80+81+85+92+94+96+97+100+100+103+104+108}{12} = 95$$

اگر داده‌ها را سه برابر کنیم و سپس با  $-40$  جمع کنیم، میانگین هم سه برابر شده و با  $-40$  جمع می‌شود. در نتیجه  $3 \times 95 - 40 = 245 = \bar{x}_{\text{جدید}}$ .

ریاضی - ۹۲

۱۴۸۷- گزینه ۴ با توجه به  $n=25$ ،  $\bar{x}=30$  و  $\sigma=8$ ،

$$\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها} = 64 = \frac{25}{25}$$

$$\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها} = 25 \times 64 = 1600$$

از طرفی داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ نیز دارای میانگین ۳۰ هستند. در نتیجه

$x_i$	۱۰	۱۵	۴۵	۵۰
$x_i - 30$	-۲۰	-۱۵	۱۵	۲۰

مجموع مربعات اختلاف از میانگین داده‌های دور افتاده برابر است با

$$400 + 225 + 225 + 400 = 1250$$

اکنون واریانس ۲۱ داده باقی‌مانده به صورت زیر به دست می‌آید

$$\sigma^2 = \frac{64 \times 25 - 1250}{25 - 4} = \frac{1600 - 1250}{21} = \frac{350}{21} = \frac{50}{3} = 16.66$$

تجربی - ۹۳

۱۴۸۸- گزینه ۳ راه‌حل اول ابتدا میانگین داده‌های جدید را به دست می‌آوریم:

$$\bar{y} = \frac{18 \times 25 + 20 + 27 + 28}{18 + 3} \Rightarrow \bar{y} = 25$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{21} - \bar{x})^2}{21} = \frac{18 \times 9 + (20 - 25)^2 + (27 - 25)^2 + (28 - 25)^2}{21} = \frac{200}{21} = 9.52$$

دقت کنید که برای ۱۸ داده اولیه مجموع مربع اختلاف مقادیر داده‌ها از میانگین برابر  $18 \times 9$  است.

راه‌حل دوم ابتدا میانگین داده‌های جدید را به دست می‌آوریم

$$\bar{y} = \frac{18 \times 25 + 20 + 27 + 28}{18 + 3} \Rightarrow \bar{y} = 25$$

برای محاسبه واریانس از فرمول زیر کمک می‌گیریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 9 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{18} - 625$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 18 \times 634 = 11412$$

بنابراین مجموع مربعات داده‌های قبلی برای ۱۱۴۱۲ است. مجموع مربعات داده‌های

جدید برابر است با  $A = 11412 + 20^2 + 27^2 + 28^2 = 13325$ . در نتیجه

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{A}{21} - (25)^2 = \frac{13325}{21} - 625 = 9.52$$

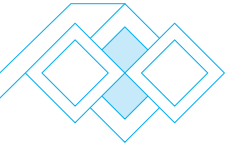
خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۴۸۹- گزینه ۴ میانگین ۳ داده ۱۶، ۲۴ و ۲۶ برابر است با

$$\frac{16+24+26}{3} = 22$$

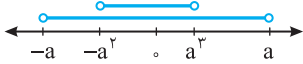
بنابراین میانگین ۱۱ داده دیگر نیز ۲۲ است و چون واریانس آن‌ها صفر است پس تمام آن‌ها با هم برابرند و ۲۲ هستند.

## فصل هشتم



۱۴۹۷- گزینه ۳ چون  $0 < a < 1$ ، پس  $a^3 < a$  و  $-a < -a^2$ ، بنابراین

$$(-a, a) \cap (-a^2, a^3) = (-a^2, a^3)$$



۱۴۹۸- گزینه ۲ مجموعه‌های  $A_1, A_2, \dots, A_n$  به شکل زیر هستند:

$$A_1 = \left[\frac{1}{1}, \frac{3}{1}\right], A_2 = \left[\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right], \dots, A_n = \left[\frac{n}{n}, \frac{2n}{n}\right]$$

واضح است که مجموعه  $A_n$  شامل همه مجموعه‌های دیگر است. یعنی همه مجموعه‌های دیگر زیرمجموعه مجموعه  $A_n$  هستند. پس اجتماع همه این مجموعه‌ها همان  $A_n$  است.

۱۴۹۹- گزینه ۴ از تساوی  $(-1, 1] \cap [a, b) = [0, 1]$  معلوم می‌شود  $a = 0$

و  $b \geq 1$ . از تساوی  $(-1, 1] \cup [a, b) = (-1, 4)$  معلوم می‌شود  $b = 4$ . بنابراین

$$a + b = 4$$

۱۵۰۰- گزینه ۴ اشتراک این دو بازه فقط زمانی تک‌عضوی است که ابتدای

بازه  $(-\infty, a+4)$  بر انتهای بازه  $(-2a+1, +\infty)$  منطبق باشد. در نتیجه

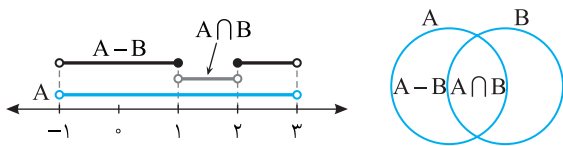
$$-2a+1 = a+4 \Rightarrow a = -1$$

۱۵۰۱- گزینه ۳ می‌دانیم عضوهای  $A$  کوچک‌تر از  $a$  مساوی با  $2$  هستند

و مجموعه مورد نظر شامل اعضای  $A$  نیست. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) رد می‌شوند. اکنون دقت کنید که  $B - A = (0, 4) - [-2, 2] = (2, 4)$ .

۱۵۰۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$A - B = A - (A \cap B) = (-1, 3) - (-1, 2) = (-1, 1] \cup [2, 3)$$



۱۵۰۳- گزینه ۲ چون  $a$  عضو بازه است، پس  $a < 3 - 3a$  و  $2a - 1 < a$ .

بنابراین  $2a - 1 < a$  نتیجه می‌شود  $a < 1$  و از نابرابری  $a < 3 - 3a$  نتیجه می‌شود

$$a < \frac{3}{4} \text{ و } a < \frac{3}{4} \text{ بنابراین باید } a < \frac{3}{4} \text{ . اکنون توجه کنید که شرط اینکه } (2a-1, 3-3a)$$

بازه باشد این است که  $2a - 1 < 3 - 3a$ ، یعنی  $a < \frac{4}{5}$ ، که اگر  $a < \frac{3}{4}$ ، این شرط

هم برقرار است. بنابراین مجموعه مقادیر ممکن  $a$  بازه  $(-\infty, \frac{3}{4})$  است.

۱۵۰۴- گزینه ۱ توجه کنید که طول بازه  $(a-5, 2a+1)$  برابر است با

$$(2a+1) - (a-5) = a+6$$

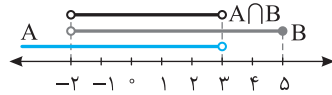
از طرف دیگر طول بازه  $(a-6, 3a-1)$  برابر است با

$$(3a-1) - (a-6) = 2a+5$$

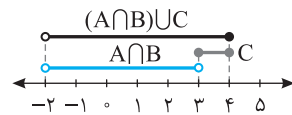
چون  $a \leq -2$ ، پس  $2a \leq -4$  و در نتیجه  $2a+5 \leq 1$ . پس حداکثر طول بازه

مورد نظر برابر ۱ است.

۱۴۹۱- گزینه ۴ مجموعه  $A \cap B$  به کمک شکل زیر پیدا می‌شود:



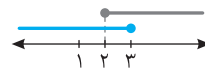
پس  $A \cap B = (-2, 3)$ . اجتماع دو مجموعه  $A \cap B$  و  $C$  به شکل زیر است:



یعنی  $(A \cap B) \cup C = (-2, 4)$ .

۱۴۹۲- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر  $(-\infty, 3) \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}$ ، بنابراین

می‌خواهیم  $\mathbb{R} - (1, 4]$  را پیدا کنیم که حاصل آن  $(-\infty, 1] \cup (4, +\infty)$  است.



۱۴۹۳- گزینه ۲ عدد  $\frac{1}{4}$  باید از  $\frac{1}{n+3}$  بزرگ‌تر باشد، یعنی

$$\frac{1}{n+3} < \frac{1}{4} \Rightarrow n+3 > 4 \Rightarrow n > 1$$

عدد  $\frac{1}{4}$  نباید از  $\frac{1}{n+1}$  بیشتر باشد، یعنی

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow n+1 \leq 4 \Rightarrow n \leq 3$$

بنابراین عدد طبیعی  $n$  می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۱۴۹۴- گزینه ۳ نقطه وسط پاره‌خط، متناظر با میانگین ابتدا و انتهای بازه

است، یعنی

$$\frac{2a^2+1+(-a^2)}{2} = \frac{a^2+1}{2} = 5 \Rightarrow a^2 = 9$$

بنابراین بازه مورد نظر  $[-9, 19]$  است و طول این بازه برابر است با

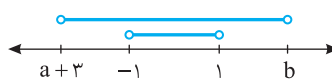
$$19 - (-9) = 28$$

۱۴۹۵- گزینه ۳ از روی شکل زیر معلوم است که باید

$$\begin{cases} a+3 \leq -1 \\ b \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -4 \\ b \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \geq 4 \\ b \geq 1 \end{cases}$$

بنابراین  $b - a \geq 1 + 4 = 5$ . در ضمن اگر  $a = -4$  و  $b = 1$ ، شرط داده شده در

مسئله برقرار است.



۱۴۹۶- گزینه ۱ طول بازه  $(a, b+2)$  برابر است با  $b+2-a = b-a+2$

و طول بازه  $(2a-1, 2b+3)$  برابر است با

$$2b+3 - (2a-1) = 2(b-a+2)$$

بنابراین طول بازه  $(a, b+2)$  نصف طول بازه  $(2a-1, 2b+3)$  است.



	حالت (۱)	حالت (۲)	حالت (۳)
$A \cap B$	$(0, a+2]$	$(2a-1, a+2]$	$\emptyset$

حالت (۱) قابل قبول نیست، زیرا در این حالت  $A \cap B \not\subseteq (1, 3]$ . در حالت (۲) باید  $2a-1 \leq 3$  و  $a+2 \leq 3$  از نابرابری اول به دست می‌آید  $a \geq 1$  و از نابرابری دوم به دست می‌آید  $a \leq 1$  پس  $a=1$ . در حالت (۳) باید  $2a-1 \geq a+2$  و در نتیجه  $a \geq 3$ . در این حالت اشتراک  $A$  و  $B$  برابر تهی است که زیرمجموعه  $(1, 3]$  است. پس  $a \in [3, +\infty) \cup \{1\}$ .

**۱۵۱۱- گزینه ۴** چون  $A$  نامتناهی است و  $A \subseteq B$  پس  $B$  هم نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعه دیگری نامتناهی است. یعنی  $A \cup B$  نامتناهی است.

**۱۵۱۲- گزینه ۱**  $B$  نامتناهی است، پس  $B'$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، ولی چون  $A$  متناهی است، پس  $A \cap B'$  متناهی است. همچنین چون  $B$  نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است. یعنی  $A \cup B$  و  $A \cup B$  نامتناهی هستند. توجه کنید که چون  $B$  نامتناهی است، پس مجموعه مرجع هم نامتناهی است. در نتیجه  $A'$  نامتناهی است. پس متناهی یا نامتناهی بودن  $A \cap B$  مشخص نیست.

**۱۵۱۳- گزینه ۲** توجه کنید که  $B = \{3, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$ ,  $C = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, \dots\}$

بنابراین  $B \cap C = \{3, 4, 6, 8, 9, \dots\}$  و در نتیجه  $A - (B \cap C) = \{1, 5\}$ .

**۱۵۱۴- گزینه ۱** راه حل اول توجه کنید که

$$|x-5| > 3 \Rightarrow \begin{cases} x-5 > 3 \\ x-5 < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x < 2 \end{cases}$$

بنابراین  $A = \{\dots, 0, 1, 9, 10, \dots\}$ . در نتیجه  $A' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . یعنی  $n(A') = 7$ .

**راه حل دوم** چون  $A = \{x \mid |x-5| > 3\}$  پس  $A' = \{x \mid |x-5| \leq 3\}$  از نابرابری  $|x-5| \leq 3$  نتیجه می‌شود  $-3 \leq x-5 \leq 3 \Rightarrow 2 \leq x \leq 8$

مجموعه مرجع  $\mathbb{Z}$  است، پس  $A' = \{2, 3, \dots, 8\}$ ، بنابراین  $n(A') = 7$ .

**۱۵۱۵- گزینه ۴** توجه کنید که

$$\begin{cases} n(A) + n(B') = 17 \\ n(A) + n(A') + n(B) + n(B') = 30 \\ n(B) + n(A') = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(A) + n(A') + n(B) + n(B') = 30 \\ n(A) + n(A') + n(B) + n(B') = 30 \\ n(A) + n(A') + n(B) + n(B') = 30 \end{cases}$$

بنابراین  $n(C) + n(C') = n(U) = 15$ .

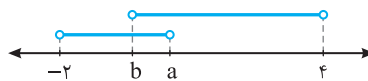
**۱۵۱۶- گزینه ۳** توجه کنید که  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

بنابراین  $n(A \cup B) + n(A \cap B) = 2n(B) + n(B) \Rightarrow 24 = 3n(B) \Rightarrow n(B) = 8$

**۱۵۱۷- گزینه ۱** توجه کنید که  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$   
 $16 = 24 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 8$

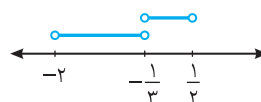
از طرف دیگر،  $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$   
 $16 = n(A - B) + 8 + 3 \Rightarrow n(A - B) = 16 - 11 = 5$

**۱۵۰۵- گزینه ۴** با توجه به فرض مسئله و شکل زیر، نتیجه می‌شود  $(b, 4) \cap [-2, a) = (b, a)$



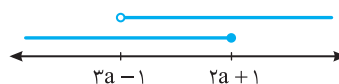
بنابراین  $a = \frac{1}{3}$  و  $b = -\frac{1}{3}$ . اکنون می‌توان نوشت

$$(b, a) \cup (-2a-1, b) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \cup (-2, -\frac{1}{3}) = (-2, \frac{1}{3}) - \{-\frac{1}{3}\}$$

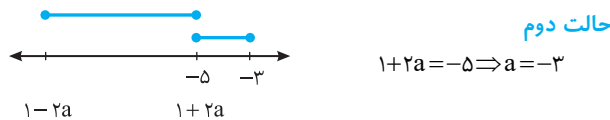
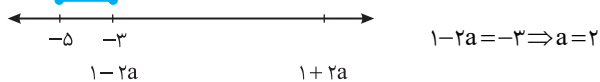


**۱۵۰۶- گزینه ۱** چون اشتراک دو بازه از عدد  $-2$  شروع می‌شود و  $a < a+2$  پس  $a+2 = -2$ ، یعنی  $a = -4$ . بنابراین تساوی داده شده به صورت  $[-2, 1] \cap [-4, 2] = [-2, 1]$  است. چون اشتراک در سمت چپ به عدد  $1$  ختم شده است و  $1 < 2$ ، پس  $b = 1$ . در نتیجه  $a - b = -5$ .

**۱۵۰۷- گزینه ۳** از روی شکل زیر معلوم می‌شود که  $(-\infty, 2a+1] \cup (3a-1, +\infty) = \mathbb{R}$  وقتی برقرار است که  $3a-1 \leq 2a+1$ ، یعنی  $a \leq 2$ .



**۱۵۰۸- گزینه ۳** در دو حالت زیر، اشتراک دو بازه مجموعه‌ای تک‌عضوی می‌شود.



اکنون توجه کنید شرط اینکه  $[1-2a, 1+2a]$  بازه باشد این است که  $1-2a < 1+2a$ ، یعنی  $a > 0$ . بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای  $a$  برابر  $2$  است.

**۱۵۰۹- گزینه ۱** فرض می‌کنیم  $I = (\frac{1}{n}, \frac{n+2}{2})$ ، بنابراین به ازای  $n=1$

شامل هیچ عدد طبیعی‌ای نیست.  $I = (1, \frac{3}{2}) \Rightarrow$  به‌ازای  $n=2$

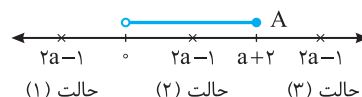
$I = (\frac{1}{2}, 2) \Rightarrow 1 \in I$

به‌ازای  $n=3$

$I = (\frac{1}{3}, \frac{5}{2}) \Rightarrow 1, 2 \in I$

به این ترتیب به‌ازای  $n \geq 3$ ، بازه  $I$  حداقل شامل اعداد طبیعی  $1$  و  $2$  است. پس فقط به‌ازای  $n=2$ ، بازه داده شده فقط شامل یک عدد طبیعی است.

**۱۵۱۰- گزینه ۳** اگر به بازه  $A$  دقت کنید معلوم می‌شود که  $a+2 > 0$ ، پس  $a > -2$ . از روی محور زیر، برحسب اینکه  $2a-1$  در کدام ناحیه باشد، حاصل  $A \cap B$  را به دست آورده‌ایم و در جدول زیر آن نوشته‌ایم.



**۱۵۲۶- گزینه ۱** توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

پس

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) = 24$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} n(A) + n(B) = 24 \\ n(A) - n(B) = 4 \end{cases} \Rightarrow n(B) = 10$$

**۱۵۲۷- گزینه ۱** توجه کنید که

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow n(A \cup B) = n(B)$$

طبق فرض  $n(A \cup B) = 9$ ، پس  $n(B) = 9$  از طرف دیگر،

$$n(A) + n(A') = n(B) + n(B') \Rightarrow n(A) + 14 = 9 + 10 \Rightarrow n(A) = 5$$

**۱۵۲۸- گزینه ۲** فرض کنید  $A$  مجموعه علاقه‌مندان به ریاضی و

$B$  مجموعه علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند  $x$  باشد، آن‌گاه

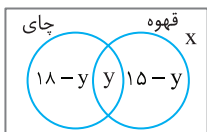
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$100 - x = 85 + 70 - n(A \cap B)$$

پس  $n(A \cap B) = 55 + x$  برای اینکه  $n(A \cap B)$  حداقل باشد، باید  $x = 0$ ،

بنابراین حداقل مقدار ممکن  $n(A \cap B)$  برابر با ۵۵ است.

**۱۵۲۹- گزینه ۲** راه‌حل اول فرض کنید



$x$  نفر نه چای دوست دارند، نه قهوه، بنابراین  $x - 30$  نفر یا چای دوست دارند یا قهوه و  $y$  نفر هم چای و هم قهوه دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو را دوست دارند در نمودار ون مقابل مشخص کرده‌ایم.

$$x + 18 - y + y + 15 - y = 30 \Rightarrow x = y - 3$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x \geq 0, y \geq 0, 15 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 15 \Rightarrow 0 \leq y \leq 15$$

پس

$$0 \leq y - 3 \leq 12 \Rightarrow 0 \leq x \leq 12$$

پس حداکثر ۱۲ نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

**راه‌حل دوم** فرض کنید  $A$  مجموعه دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و  $B$  مجموعه دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 12 + 15 - n(A \cup B) = 27 - n(A \cup B)$$

از طرف دیگر،  $n(A \cup B) \geq n(B) = 15$ ، بنابراین

$$n(A \cap B) = 27 - n(A \cup B) \leq 27 - 15 = 12$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که اگر  $A \subseteq B$ ، این وضعیت پیش می‌آید).

**۱۵۳۰- گزینه ۳** چون  $A \subseteq B$ ، پس  $A \cup B = B$ . از طرف دیگر،

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B)$$

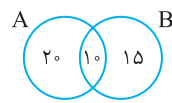
اکنون توجه کنید که  $14 = n(A) + 2n(B) \leq n(B) + 2n(B) = 3n(B)$

و چون  $n(B)$  عددی طبیعی است، پس  $n(B) \geq 5$ ، بنابراین

$$n(A \cup B) = n(B) \geq 5$$

**۱۵۱۸- گزینه ۲** تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند برابر است با

$20 - 30 = -10$ ، یعنی ۱۰ محصول. تعداد محصولاتی که عیب  $B$  را دارند برابر  $25 - 20 = 5$  است، که ۱۰ تا از آن‌ها عیب  $A$  را نیز دارند. پس ۱۵ محصول



فقط عیب  $B$  را دارند و ۲۰ تا از آن‌ها فقط عیب  $A$  را دارند. پس ۳۵ تا از محصولات فقط یک عیب دارند.

**۱۵۱۹- گزینه ۱** مجموعه بینندگان شبکه ۱ را با  $A$  و مجموعه بینندگان

شبکه ۲ را با  $B$  نشان می‌دهیم:

$$n(A) = 65, n(B) = 45, n(A \cap B) = 20$$

در نتیجه  $n(A \cup B) = 65 + 45 - 20 = 90$ ، یعنی ۹۰ نفر حداقل یکی از شبکه‌ها را تماشا می‌کنند. پس ۱۰ نفر هیچ‌یک از این دو شبکه را تماشا نمی‌کنند.

**۱۵۲۰- گزینه ۳** توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3k - 1 + 3 - (k - 2) = 2k + 4$$

از طرف دیگر،

$$n(A \cap B) \leq n(B) \Rightarrow k - 2 \leq 3 \Rightarrow k \leq 5$$

$$\text{بنابراین } n(A \cup B) = 2k + 4 \leq 2 \times 5 + 4 = 14$$

**۱۵۲۱- گزینه ۳** گزینه (۳) ممکن است نادرست باشد. برای مثال،

$A = \{0, 1\}$  و  $B = \{1, 2\}$  نامتناهی هستند، اما  $A \cap B = \{1\}$  متناهی است.

**۱۵۲۲- گزینه ۲** توجه کنید که  $A \cap B = \{3, 5\}$ ، پس

$$(A \cap B)' = \{1, 2, 4, 6\}, C \cap (A \cap B)' = \{1, 2\}$$

**۱۵۲۳- گزینه ۴** ابتدا مجموعه‌های  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  را پیدا می‌کنیم:

$$A' = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty), B' = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), C' = [0, +\infty)$$

$$\text{بنابراین } A' - B' = (-1, 1] \text{ و در نتیجه } (A' - B') - C' = (-1, 0)$$

**۱۵۲۴- گزینه ۴** راه‌حل اول مجموعه مرجع  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$  است،

پس  $B' = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$  و  $C = \{2, 3, 7, 8, 9\}$ . در نتیجه

$$A \cap B' = \{1, 6\} \Rightarrow (A \cap B') \cup C = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

$n((A \cap B') \cup C) = 7$ ، بنابراین مجموعه  $(A \cap B') \cup C$ ، هفت عضو دارد.

**راه‌حل دوم** توجه کنید که

$$A \cap B' = A - B = \{1, 6\}, C = \{2, 3, 7, 8, 9\}$$

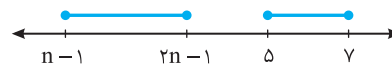
$$\text{بنابراین } (A \cap B') \cup C = \{1, 6\} \cup \{2, 3, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

پس مجموعه  $(A \cap B') \cup C$ ، هفت عضو دارد.

**۱۵۲۵- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید برای اینکه  $[n-1, 2n-1]$  بازه باشد،

باید  $n > 0$ . اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

**حالت اول**



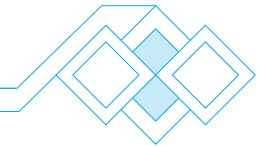
$$2n - 1 < 5 \Rightarrow n < 3$$

**حالت دوم**



$$n - 1 > 7 \Rightarrow n > 8$$

بنابراین  $n$  اعداد طبیعی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ نمی‌تواند باشد.



**۱۵۴۰ - گزینه ۱** عدد آخر دسته اول ۵، عدد آخر دسته دوم  $3 \times 5$ ، عدد آخر دسته سوم  $5 \times 5 \dots$  و عدد آخر دسته  $n$ م برابر  $(2n-1) \times 5$  است. پس عدد آخر دسته چهل و نهم  $485 = 5 \times (1 \times 49 - 1)$  است. پس عدد اول دسته پنجاهم، برابر ۴۸۷ خواهد بود.

**۱۵۴۱ - گزینه ۳** شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل  $n$ م،  $4 + 9(n-1) = 9n - 5$  چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

**۱۵۴۲ - گزینه ۳** راه حل اول تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	$1+3+1$	$2+4+2$	$3+5+3$	...	$n+(n+2)+n$

بنابراین در شکل  $n$ م،  $3n+2$  نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم. **راه حل دوم** اگر ۴ نقطه به چهار گوشه شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل  $n$ م برابر  $3(n+2)$  خواهد بود. پس در شکل  $n$ م،  $3(n+2) - 4$  نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

**۱۵۴۳ - گزینه ۳** تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل  $n$ م برابر است با  $1+2+3+\dots+n$

تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل  $n$ م برابر است با  $0+1+2+\dots+(n-1)$ . بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل  $n$ م،  $n$  تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ نشده آن است. پس در شکل سی‌ام، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰ است.

**۱۵۴۴ - گزینه ۲** تعداد کل گوی‌ها در شکل  $n$ م برابر است با  $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل  $n$ م برابر است با

$$1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل  $n$ م برابر

$$\frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n-1}{n}$$

است با  $\frac{2}{n^2} = \frac{n-1}{2n}$ . به این ترتیب  $\frac{n-1}{2n} = \frac{1}{17}$  پس  $n=17$ .

**۱۵۴۵ - گزینه ۲** با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شماره آن‌ها زوج است،

نصف تعداد گوی‌ها یعنی  $\frac{n^2}{2}$  رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شماره آن‌ها فرد

است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها  $n^2 - 1$  خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی

را نیز رنگ می‌کنیم. پس  $1 + \frac{n^2 - 1}{2}$  گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر

$n$  عددی زوج باشد،  $\frac{n^2}{2}$  نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شماره

زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است و در شکل‌هایی با شماره فرد، تعداد گوی‌های رنگ شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل  $n$ م وجود دارد،

پس  $n$  باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^2 - 1}{2} + 1 = 113 \Rightarrow n^2 - 1 = 224 \Rightarrow n^2 = 225 \Rightarrow n = 15$$

**۱۵۳۱ - گزینه ۳** شکل اول دارای ۴ چوب کبریت است و هر شکل ۳ چوب کبریت بیشتر از قبلی دارد. پس شکل  $n$ م دارای  $4 + 3(n-1)$  چوب کبریت است. یعنی  $3n+1$  چوب کبریت دارد. پس شکل بیستم ۶۱ چوب کبریت دارد.

**۱۵۳۲ - گزینه ۳** شکل اول دارای ۵ چوب کبریت است و در هر مرحله ۴ چوب کبریت به شکل مرحله قبل اضافه می‌شود. پس در شکل  $n$ م  $5 + 4(n-1) = 4n+1$  چوب کبریت وجود دارد. یعنی  $4n+1$  چوب کبریت در شکل  $n$ م وجود دارد. پس در شکل پانزدهم، ۶۱ چوب کبریت وجود دارد.

**۱۵۳۳ - گزینه ۲** تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله  $n$ م به تعداد  $4(n-1)$  نقطه به ۵ نقطه شکل (۱) اضافه شده است:  $4n+1 = 5 + 4(n-1)$ . یعنی شکل  $n$ م،  $4n+1$  نقطه دارد. پس شکل دهم ۴۱ نقطه دارد.

**۱۵۳۴ - گزینه ۱** در شکل  $n$ م تعداد مثلث‌های رنگ شده برابر است با 
$$0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

برای اینکه بدانیم در کدام شکل ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد، معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+8) = 0$$

چون  $n$  عددی طبیعی است، پس  $n=9$ . یعنی در شکل نهم ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد.

**۱۵۳۵ - گزینه ۴** در شکل  $n$ م،  $(n+1)^2$  دایره وجود دارد که  $(n+1)$  تای آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی  $(n+1)^2 - (n+1)$  است که برابر است با  $n^2 + n$ .

**۱۵۳۶ - گزینه ۴** توجه کنید که

$$a_n = 3n^2 - n + 2a_{n-1} \xrightarrow{n=1} a_1 = 3 - 1 + 2a_0 \Rightarrow a_1 = -2$$

بنابراین  $a_4 = 3 \times 16 - 4 + 2(-2) = 40$ .

**۱۵۳۷ - گزینه ۳** با حل معادله  $a_n = \frac{1}{8^n}$  مقدار  $n$  را که شماره جمله مورد نظر است، می‌یابیم:

$$\frac{n^2 + 1}{81n^2 - 1} = \frac{1}{8^0} \Rightarrow 8^n n^2 + 8^0 = 81n^2 - 1 \Rightarrow n^2 = 81 \Rightarrow n = 9$$

بنابراین  $a_9$  برابر  $\frac{1}{8^0}$  است.

**۱۵۳۸ - گزینه ۲** باید ببینیم نامعادله  $a_n < \frac{3}{9}$  برای کدام مقادیر  $n$  درست است:

$$\frac{4n-1}{n+6} < \frac{3}{9} \Rightarrow 4n-1 < 3n+6 \Rightarrow n < 7$$

بنابراین  $n \leq 243$ ، یعنی جمله اول دنباله کمتر از  $\frac{3}{9}$  هستند.

**۱۵۳۹ - گزینه ۱** توجه کنید که

$$72 < a_n < 160 \Rightarrow 72 < n^2 + 2n - 8 < 160$$

بنابراین

$$n^2 + 2n - 8 < 160 \Rightarrow (n-12)(n+14) < 0 \Rightarrow 12 < n < 14 \Rightarrow 13 \leq n \leq 11$$

$$n^2 + 2n - 8 > 72 \Rightarrow (n-8)(n+10) > 0 \Rightarrow n > 8 \Rightarrow n \geq 9$$

در نتیجه  $n$  می‌تواند عددهای ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد.

**۱۵۵۵- گزینه ۲** چون  $a_1 = 2$  و  $d = 4$ ، پس جمله عمومی دنباله به صورت  $a_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$  است. برای اینکه جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند، باید  $a_n < 500$  باشد. یعنی

$$4n - 2 < 500 \Rightarrow n < \frac{502}{4} \Rightarrow n \leq 125$$

پس ۱۲۵ جمله اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

**۱۵۵۶- گزینه ۲** اندازه زاویه‌های مثلث را به صورت  $a-d, a, a+d$

در نظر می‌گیریم. مجموع اندازه زاویه‌های مثلث برابر  $180^\circ$  است. پس

$$a - d + a + a + d = 180^\circ \Rightarrow a = 60^\circ$$

میانگین اندازه بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه مثلث همان  $a$  است که برابر  $60^\circ$  است.

**۱۵۵۷- گزینه ۴** زاویه‌های پنج‌ضلعی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازه زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر  $540^\circ$  است، پس

$$a - 2d + a - d + a + a + d + a + 2d = 540^\circ$$

بنابراین  $5a = 540^\circ$  و در نتیجه  $a = 108^\circ$ . اندازه کوچک‌ترین زاویه  $86^\circ$

است، پس  $a - 2d = 86^\circ$  و در نتیجه  $d = 11^\circ$ . پس اندازه بزرگ‌ترین زاویه

یعنی  $a + 2d$  برابر است با  $108^\circ + 2 \times 11^\circ = 130^\circ$ .

**۱۵۵۸- گزینه ۲ راه حل اول** چون  $a_1 = \sqrt{3} - 5$  و  $a_6 = \sqrt{3} + 5$ ، پس

$$a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow \sqrt{3} + 5 = \sqrt{3} - 5 + 5d \Rightarrow d = 2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد  $\sqrt{3} - 5 + 2$  یا همان  $\sqrt{3} - 3$  است.

**راه حل دوم** قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر است با

$$d = \frac{(\sqrt{3} + 5) - (\sqrt{3} - 5)}{4 + 1} = \frac{10}{5} = 2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با

$$(\sqrt{3} - 5) + 2 = \sqrt{3} - 3$$

**۱۵۵۹- گزینه ۴** سه جمله متوالی دنباله را به صورت  $a-d, a, a+d$

در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a - d + a + a + d = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

از طرف دیگر،

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 45 \Rightarrow a(a^2 - d^2) = 45$$

چون  $a = 5$ ، پس

$$5(25 - d^2) = 45 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = \pm 4$$

**۱۵۶۰- گزینه ۲** فرض کنید قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر  $d$

باشد. در این صورت

$$a_1 = d, \quad a_n = a_1 + (n-1)d = d + (n-1)d = nd$$

به این ترتیب

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = 10^8 \times 10^9 \Rightarrow d(2d)(3d) \dots (9d) = 10^8 \times 10^9!$$

$$d^9 \times 9! = 10^9 \times 9! \Rightarrow d = 10$$

بنابراین  $a_{10} = 10d = 100$ .

**۱۵۴۶- گزینه ۳** چون همه جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{2-k}{8} = \frac{4-k}{13} \Rightarrow 26 - 13k = 32 - 8k \Rightarrow 5k = -6 \Rightarrow k = -\frac{6}{5}$$

توجه کنید که اگر  $k = -\frac{6}{5}$ ، آن‌گاه  $a_n = \frac{2}{5}$ .

**۱۵۴۷- گزینه ۲** چند جمله اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

$$\text{گزینه (۱)} \quad 2, 3, 4, 5, \dots \quad \text{گزینه (۲)} \quad 2, 3, 10, 15, \dots$$

$$\text{گزینه (۳)} \quad 2, 3, 10, 23, \dots \quad \text{گزینه (۴)} \quad 2, 3, 8, 17, \dots$$

بنابراین فقط  $(-1)^n - n^2$  می‌تواند جمله عمومی دنباله باشد.

**۱۵۴۸- گزینه ۲** به چند جمله اول دنباله توجه کنید:

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{4} a_3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت  $a_n = \frac{1}{n}$ ، پس  $a_{100} = \frac{1}{100}$ .

**۱۵۴۹- گزینه ۴** بیشترین مقدار تابع درجه دوم  $y = -3x^2 + 12x + c$

به‌ازای  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-6} = 2$  به‌دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جمله

دنباله مورد نظر برابر  $a_2$  است. در نتیجه

$$a_2 = 8 \Rightarrow -3 \times 4 + 12 \times 2 + c = 8 \Rightarrow c = -4$$

**۱۵۵۰- گزینه ۳** توجه کنید که

$$a_1 = \log_2 \frac{1}{2}, \quad a_2 = \log_2 \frac{2}{3}, \quad a_3 = \log_2 \frac{3}{4}, \quad \dots$$

بنابراین مجموع  $n$  جمله اول دنباله به صورت زیر است:

$$S_n = \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \dots + \log_2 \frac{n-1}{n} + \log_2 \frac{n}{n+1} \\ = \log_2 \left( \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \right) = \log_2 \frac{1}{n+1} = -\log_2 (n+1)$$

بنابراین

$$-\log_2 (n+1) = -3 \Rightarrow n+1 = 2^3 = 8 \Rightarrow n = 7$$

**۱۵۵۱- گزینه ۳** چون  $a_{n+1} - a_n = -2$ ، پس دنباله مورد نظر دنباله‌ای

حسابی است که قدرنسبت آن  $-2$  است. چون جمله اول برابر  $3$  است، پس

$$a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9(-2) = -15, \quad a_5 = a_1 + 4d = 3 + 4(-2) = -5$$

$$\text{بنابراین } \frac{a_{10}}{a_5} = \frac{-15}{-5} = 3$$

**۱۵۵۲- گزینه ۲** از رابطه داده شده به‌دست می‌آید

$$2(a_1 + 3d) + 4(a_1 + 4d) - 7(a_1 + 8d) = 124$$

پس  $124 = 31d$  و در نتیجه  $d = -4$ .

**۱۵۵۳- گزینه ۴** قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$3x - 4 - (3x - 1) = -3$$

بنابراین

$$4x - 2 = (3x - 4) - 3 \Rightarrow x = -5$$

بنابراین جمله سوم دنباله برابر است با  $4(-5) - 2 = -22$  و جمله چهارم برابر است با  $-22 - 3 = -25$ .

**۱۵۵۴- گزینه ۲** چون  $a_1 = -1$  و  $d = 2 - (-1) = 3$ ، پس

$a_n = -1 + 3(n-1)$ ، بنابراین  $a_n = 3n - 4$ ، پس

$k = 74$ .

۱۵۶۷- گزینۀ ۲ چون  $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$ ، پس

جواب‌های معادله مورد نظر  $a$ ، ۲ و ۶ هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$6, 2, a \Rightarrow \frac{6+a}{2} = 2 \Rightarrow a = -2, \quad 2, 6, a \Rightarrow \frac{2+a}{2} = 6 \Rightarrow a = 10$$

$$6, a, 2 \Rightarrow \frac{6+2}{2} = a \Rightarrow a = 4, \quad 2, a, 6 \Rightarrow \frac{2+6}{2} = a \Rightarrow a = 4$$

$$a, 6, 2 \Rightarrow \frac{a+2}{2} = 6 \Rightarrow a = 10, \quad a, 2, 6 \Rightarrow \frac{a+6}{2} = 2 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین  $a$  ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

۱۵۶۸- گزینۀ ۳ اضلاع مثلث را  $a-d, a, a+d$  در نظر می‌گیریم.

طبق قضیه فیثاغورس،

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad + a^2 = a^2 + d^2 + 2ad$$

$$a^2 = 4ad \Rightarrow a = 4d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویه قائمه  $a$  و  $a-d$  است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a}{a-d} = \frac{4d}{4d-d} = \frac{4d}{3d} = \frac{4}{3}$$

۱۵۶۹- گزینۀ ۳ چهار جمله متوالی دنباله را به صورت

$$a+3d, a+d, a-d, a-3d \text{ در نظر می‌گیریم. بنابراین}$$

$$a-3d+a-d+a+d+a+3d=0 \Rightarrow 4a=0 \Rightarrow a=0$$

پس دنباله به صورت  $3d, -d, d, -3d$  است و

$$9d^2 + d^2 + d^2 + 9d^2 = 80 \Rightarrow d^2 = 4$$

بنابراین، حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(3d)(-3d) = -9d^2 = -36$$

۱۵۷۰- گزینۀ ۳ ابتدا توجه کنید که  $m$  باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱

باشد. پس  $m^2 + 4 < m^2 + 3m + 4$ .

اگر  $m-1$  عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنباله حاصل، برابر است با

$$d = \frac{m^2 + 3m + 4 - m^2 - 4}{(m-1) + 1} = \frac{3m}{m}$$

۱۵۷۱- گزینۀ ۱ دنباله  $a_n$  دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت  $\frac{3}{2}$  است.

در نتیجه

$$a_3 = a_1 r^2 \Rightarrow a_3 = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3}$$

$$\text{بنابراین } a_{26} = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{25} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{25} = \frac{3^{24}}{2^{26}}$$

۱۵۷۲- گزینۀ ۲ ابتدا توجه کنید که  $\sqrt[3]{2}$  واسطه هندسی  $\sqrt{a}$  و  $\sqrt[3]{2}$

است، پس

$$(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt{a} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{a} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با  $r = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$ ، در نتیجه

$$a_{13} = a_1 r^{12} = \sqrt{a} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{12} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{2^4}{2^3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \times 2 = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} (2) = 2\sqrt[6]{2}$$

۱۵۶۱- گزینۀ ۴ راه‌حل اول با قرار دادن  $n=1$  در جمله عمومی به دست

می‌آید  $a_1 = 1$ . با قرار دادن  $n=2$  در جمله عمومی به دست می‌آید  $a_2 = \frac{1}{3}$ .

$$\text{بنابراین } d = a_2 - a_1 = -\frac{2}{3} \text{ پس } a_1 - d = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

راه‌حل دوم جمله عمومی دنباله حسابی با قدرنسبت  $d$  و جمله اول  $a_1$  به صورت

$$a_n = dn + (a_1 - d) = -\frac{2}{3}n + \frac{5}{3} \text{ بنابراین } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_1 - d = \frac{5}{3}$$

۱۵۶۲- گزینۀ ۲ از  $a_1 + a_3 = 16$  نتیجه می‌شود

$$a_1 + a_1 + 2d = 16 \Rightarrow a_1 + d = 8$$

چون  $a_2 + a_5 + a_8 = 51$  پس

$$a_1 + d + a_1 + 4d + a_1 + 7d = 51 \Rightarrow 3a_1 + 12d = 51$$

$$\text{از حل دستگاه } \begin{cases} a_1 + d = 8 \\ 3a_1 + 12d = 51 \end{cases} \text{ به دست می‌آید } d = 3$$

۱۵۶۳- گزینۀ ۱ چون دنباله حسابی است، پس

$$2a - 1 = \frac{a + 1 - 3a}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین  $d = (2a - 1) - a = a - 1 = -\frac{1}{2}$  پس جمله عمومی دنباله به شکل

زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n-1) = 1 - \frac{n}{2}$$

۱۵۶۴- گزینۀ ۴ راه‌حل اول چون  $a+b, a+c, b+c$  دنباله‌ای حسابی

است، پس

$$a+c - (a+b) = (b+c) - (a+c) \Rightarrow c - b = b - a$$

در نتیجه  $a, b, c$  دنباله‌ای حسابی است.

راه‌حل دوم چون  $a+b, a+c, b+c$  دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c = \frac{a+b+b+c}{2} \Rightarrow 2(a+c) = a+2b+c \Rightarrow a+c = 2b$$

در نتیجه  $a, b, c$  دنباله‌ای حسابی است.

۱۵۶۵- گزینۀ ۳ جمله عمومی دنباله به صورت زیر است

$$a_n = 196 - 4(n-1) = 200 - 4n$$

بنابراین  $a_{50} = 0$ ، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر  $-4$  است، پس

$$a_{47} = 12, \quad a_{48} = 8, \quad a_{49} = 4, \quad a_{50} = 0$$

۱۵۶۶- گزینۀ ۲ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d = \frac{a_{10} - a_2}{10 - 2} = -\frac{32}{8} = -4$$

بنابراین  $a_1 = 27$  و در نتیجه  $a_4 = a_1 + 3d = a_1 - 12 = 15$

عمومی دنباله می‌شود  $a_n = 27 - 4(n-1) = 31 - 4n$ . اکنون توجه کنید که

$$a_n > 0 \Rightarrow 31 - 4n > 0 \Rightarrow n \leq 7$$

بنابراین هفت جمله نخست دنباله مثبت هستند.

در نتیجه جمله هشتادونهم این دنباله برابر است با  
 $a_{80} = -12 + \frac{1}{8} \times (80-1) = -1$  اگر قدرنسبت دنباله هندسی را با  $r$  نشان  
 دهیم، آن‌گاه  $(3r)^5 = 243r^5 = (3r)^5$  جمله ششم دنباله هندسی. بنابراین

$$(3r)^5 = -1 \Rightarrow 3r = -1 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

**۱۵۷۹- گزینه ۱** چون  $8$  واسطه حسابی عددهای  $a$  و  $b$  است، پس

$$a+b=16 \Rightarrow b=16-a$$

اگر  $4$  واحد به  $b$  اضافه کنیم،  $8$  واسطه هندسی عددهای  $a$  و  $b+4$  می‌شود.  
 بنابراین  $a^2 = 20 \cdot a - a^2 = a(16-a+4) = a \cdot 20$ .

پس  $a^2 - 20a + 64 = 0$  و مجموع مقادیر ممکن  $a$  برابر مجموع جواب‌های این  
 معادله، یعنی برابر  $20$  است (توجه کنید در این معادله  $\Delta > 0$ ).

**۱۵۸۰- گزینه ۴** جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله حسابی را به ترتیب  
 به صورت  $a+d$ ،  $a+5d$  و  $a+9d$  در نظر می‌گیریم. چون این اعداد  
 دنباله هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+5d)^2 = (a+d)(a+9d) \Rightarrow 12d^2 = 4ad \Rightarrow a=3d$$

بنابراین قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با  $r = \frac{a+d}{a} = \frac{3d+d}{3d+d} = \frac{4d}{4d} = 1$

**۱۵۸۱- گزینه ۲** چون  $\frac{a_8}{a_6} = \sqrt{2}$ ، پس  $\frac{a_1 r^7}{a_1 r^5} = \sqrt{2}$ . در نتیجه

$$\frac{a_7}{a_6} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^5} = r = \sqrt{2} \Rightarrow r^2 = 2$$

**۱۵۸۲- گزینه ۳** چون  $4^{3x}$  واسطه هندسی  $2^{x-4}$  و  $8^{2-3x}$  است، پس  
 $(4^{3x})^2 = 2^{x-4} \times 8^{2-3x} \Rightarrow 2^{6x} = 2^{x-4} \times 2^{6-9x} \Rightarrow 2^{12x} = 2^{2-8x}$

بنابراین  $12x = 2 - 8x$ ، یعنی  $x = \frac{1}{10}$ .

**۱۵۸۳- گزینه ۲** قدرنسبت دنباله هندسی مورد نظر برابر است با

$$r = \frac{\log a}{\log_{16} a} = \frac{\log_{16} a}{\log a} = \frac{\log 4}{\log_{16} 4} = \frac{\log 4}{2 \log 4} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$a_7 = a_1 r^6 \Rightarrow \frac{1}{32} = \log_f a \times \frac{1}{64} \Rightarrow \log_f a = 2 \Rightarrow a = f^2 = 16$$

**۱۵۸۴- گزینه ۴** توجه کنید که

$$a_8 - a_1 = 130 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 = 130 \Rightarrow a_1 (r^7 - 1) = 130$$

$$a_6 - a_7 = 25 \Rightarrow a_1 r^5 - a_1 r^6 = 25 \Rightarrow a_1 r (r^5 - r^6) = 25$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{r^7 - 1}{r(r^5 - r^6)} = \frac{130}{25} \Rightarrow \frac{(r^7 - 1)(r^2 + 1)}{r(r^2 - 1)} = \frac{26}{5} \Rightarrow \frac{r^2 + 1}{r} = \frac{26}{5}$$

$$5(r^2 + 1) = 26r \Rightarrow 5r^2 - 26r + 5 = 0 \Rightarrow r = 5, r = \frac{1}{5}$$

به این ترتیب،

$$a_1 r (r^2 - 1) = 25 \Rightarrow a_1 \times 5 \times 24 = 25 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{24}$$

در نتیجه  $a_7 = a_1 r^6 = \frac{25}{24}$

**۱۵۷۳- گزینه ۱** فرض می‌کنیم جواب‌های معادله  $x_1$  و  $x_2$  باشند. در  
 این صورت

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4/5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 9, \quad \sqrt{x_1 x_2} = 1/5 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{9}{4}$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل  $x^2 - 9x + \frac{9}{4} = 0$  است که اگر طرفین آن را

در  $4$  ضرب کنیم، می‌شود  $4x^2 - 36x + 9 = 0$ .

**۱۵۷۴- گزینه ۳** از تساوی  $a_1 a_6 = 27$  نتیجه می‌شود

$$a_1 \times a_1 r^5 = 27 \Rightarrow a_1^2 r^5 = 27$$

از تساوی  $a_4 a_6 = 9$  به دست می‌آید

$$a_1 r^3 \times a_1 r^5 = 9 \Rightarrow a_1^2 r^8 = 9$$

از تقسیم طرفین دو تساوی به دست آمده نتیجه می‌شود

$$\frac{a_1^2 r^5}{a_1^2 r^8} = \frac{27}{9} \Rightarrow r = 3$$

با جای‌گذاری  $r = 3$  در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود  $a_1 = \pm \frac{1}{3}$ . چون جملات

دنباله مثبت هستند، پس  $a_1 = \frac{1}{3}$  و در نتیجه  $a_6 = a_1 r^5 = \frac{1}{3} \times 3^5 = 27$ .

**۱۵۷۵- گزینه ۲** مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_5 + a_8 = a_1 r^4 + a_1 r^7 = a_1 r^4 (1 + r^3)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با

$$a_7 + a_8 = a_1 r^6 + a_1 r^7 = a_1 r^6 (1 + r)$$

بنابراین  $\frac{a_5 + a_8}{a_7 + a_8} = \frac{a_1 r^4 (1 + r^3)}{a_1 r^6 (1 + r)} = \frac{1 + r^3}{r^2 (1 + r)} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r} (1 + r)} = 7$

**۱۵۷۶- گزینه ۳** این جملات را به صورت  $a, ar, ar^2, \dots$  در نظر

می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 = 1024 \Rightarrow a^5 = 2^10 = 4^5$$

در نتیجه جمله وسط برابر  $4$  است.

**۱۵۷۷- گزینه ۱** راه‌حل اول این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{2}, \circ, \circ, \circ, \circ, \circ, \circ, \circ, \circ, 16\sqrt{2}$$

پس  $a_1 = \sqrt{2}$  و  $a_9 = 16\sqrt{2}$ . بنابراین

$$a_1 r^8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} r^8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow r^8 = 16 \Rightarrow (r^2)^4 = 2^4 \Rightarrow r^2 = 2$$

در نتیجه  $a_7 = a_1 r^6 = 2\sqrt{2}$ .

**راه‌حل دوم** ابتدا قدرنسبت دنباله هندسی حاصل را به دست می‌آوریم:

$$r^{7+1} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow r^8 = 16 = 2^4 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}$$

$$a_7 = a_1 r^6 = \sqrt{2} \times (\pm\sqrt{2})^6 = 2\sqrt{2}$$

**۱۵۷۸- گزینه ۲** قدرنسبت دنباله حسابی برابر است با

$$-\frac{95}{8} - (-12) = \frac{1}{8}$$

بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی به صورت  $a_n = -12 + \frac{1}{8}(n-1)$  است.

۱۵۹۱- گزینه ۴ با استفاده از رابطه  $a_n = 2a_{n-1} + 1$  و جمله اول  $a_1 = 1$ ، جمله هشتم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3, \quad a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7, \quad a_4 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

$$a_5 = 2 \times 15 + 1 = 31, \quad a_6 = 2 \times 31 + 1 = 63$$

$$a_7 = 2 \times 63 + 1 = 127, \quad a_8 = 2 \times 127 + 1 = 255$$

تجربی - ۹۵

۱۵۹۲- گزینه ۴ در این دنباله، هر جمله از دو برابر جمله قبل، دو واحد کمتر است. پس هشت جمله اول برابر است با

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2 \times 3 - 2 = 4, \quad a_3 = 2 \times 4 - 2 = 6$$

$$a_4 = 2 \times 6 - 2 = 10, \quad a_5 = 2 \times 10 - 2 = 18, \quad a_6 = 2 \times 18 - 2 = 34$$

$$a_7 = 2 \times 34 - 2 = 66, \quad a_8 = 2 \times 66 - 2 = 130$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

بنابراین  $a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$ .

۱۵۹۳- گزینه ۱ عدد  $4\sqrt{2}$  واسطه هندسی  $2^a$  و  $2^b$  است. پس

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b=5$$

واسطه حسابی دو عدد  $a$  و  $b$  برابر  $\frac{a+b}{2}$  است.  $\frac{5}{2} = \frac{a+b}{2}$  ریاضی - ۸۷

۱۵۹۴- گزینه ۴ جملات را به صورت  $a, a+3d, a+10d$  در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$(a+3d)^2 = a(a+10d) \Rightarrow a^2 + 9d^2 + 6ad = a^2 + 10ad$$

$$9d^2 = 4ad \Rightarrow d = \frac{4}{9}a$$

بنابراین جملات دنباله هندسی  $a, \frac{4}{9}a, \frac{49}{9}a$  هستند و قدرنسبت این دنباله

$$\frac{\frac{49}{9}a}{\frac{4}{9}a} = \frac{49}{4}$$

برابر است با  $\frac{49}{4}$   $r = \frac{7}{2}$

تجربی - ۹۲

۱۵۹۵- گزینه ۱ جملات  $a_4, a_5, a_6$  و  $a_7$  از دنباله حسابی، دنباله هندسی تشکیل می‌دهند. پس جمله ششم واسطه هندسی جملات چهارم و دوازدهم است:

$$a_6^2 = a_4 \times a_{12} \Rightarrow (a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 11d)$$

$$a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 14a_1d + 33d^2$$

$$4a_1d = 8d^2 \Rightarrow a_1 = 2d$$

ریاضی - ۸۱

$$r = \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 3d} = \frac{2d + 5d}{2d + 3d} = 3$$

۱۵۹۶- گزینه ۴ شرط اینکه سه عدد  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند این است که  $2b = a+c$ . بنابراین

$$2(3p+4) = (2p+3) + (5p-1) \Rightarrow p=6$$

$$d = 3p + 4 - 2p - 3 = p + 1 \xrightarrow{p=6} d = 7$$

ریاضی - ۸۴

۱۵۹۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$a_5^2 = a_1 a_{11} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 10d)$$

$$a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1d \Rightarrow 16d^2 = 2a_1d \Rightarrow a_1 = 8d$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 12d, a_{11} = a_1 + 10d = 18d \Rightarrow r = \frac{a_{11}}{a_5} = \frac{18d}{12d} = \frac{3}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۵۸۵- گزینه ۳ در حالتی که پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم،  $r^6 = \frac{b}{a}$

در حالتی که چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم،  $r^5 = \frac{b}{a}$  بنابراین

$$r^6 = (2r)^5 \Rightarrow r^6 = 32r^5 \Rightarrow r = 32$$

۱۵۸۶- گزینه ۳ این سه عدد را به صورت  $\frac{a}{r}, a, ar$  در نظر می‌گیریم.

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$$

پس

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r} + a + ar = 14 \Rightarrow a(\frac{1}{r} + 1 + r) = 14$$

$$4(\frac{1}{r} + 1 + r) = 14 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}, r = 2$$

بنابراین سه جمله مورد نظر به ازای  $r = \frac{1}{2}$  به صورت  $8, 4, 2$  و به ازای  $r = 2$  به صورت  $2, 4, 8$  هستند. در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد برابر ۶ است.

۱۵۸۷- گزینه ۲ طول اضلاع مثلث را  $a, ar, ar^2$  در نظر می‌گیریم.

طبق قضیه فیثاغورس،  $a^2 + (ar)^2 = (ar^2)^2$  بنابراین

$$a^2(1+r^2) = a^2r^4 \Rightarrow r^4 - r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۱۵۸۸- گزینه ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنباله ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases} 2y+x = 2x+y \Rightarrow y=x \\ 2y+x = x+4 \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

پس  $x=y=2$ ، بنابراین  $x+2y=6$

۱۵۸۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$a_3 = a-3, \quad a_5 = a-5, \quad a_6 = a-6$$

بنابر فرض،  $(a-5)^2 = (a-3)(a-6)$ ، بنابراین

$$a^2 - 10a + 25 = a^2 - 9a + 18 \Rightarrow a = 7$$

در نتیجه  $a_6 = 7 - 6 = 1$

۱۵۹۰- گزینه ۳ جملات سوم، پنجم و هشتم دنباله حسابی را به ترتیب  $a+2d, a+4d, a+7d$  و در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+4d)^2 = (a+2d)(a+7d) \Rightarrow 2d^2 = ad \Rightarrow a = 2d$$

بنابراین دنباله هندسی به صورت  $3d, 5d, 7d, \dots$  است که جمله چهارم آن

$\frac{27}{2}d$  است زیرا  $r = \frac{3}{2}$  و  $9d \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}d$ . همچنین جمله عمومی دنباله

حسابی به صورت زیر است:

$$a_n = a + (n-1)d = 2d + (n-1)d = (n+1)d$$

به این ترتیب  $a_{11} = 13d$  و نسبت مورد نظر برابر است با  $\frac{\frac{27}{2}d}{13d} = \frac{27}{26}$

۱۵۹۸- گزینه ۲ فرض کنید  $t_p$ ،  $t_v$  و  $t_q$  جملات دنباله حسابی و

$a_1$ ،  $a_p$  و  $a_q$  جملات متوالی دنباله هندسی باشند. در این صورت

$$a_p^2 = a_1 a_q \Rightarrow t_p^2 = t_v t_q \Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 8d)$$

$$t_1^2 + 12t_1 d + 36d^2 = t_1^2 + 8dt_1 + 22t_1 d + 16d^2$$

$$2t_1 d + 20d^2 = 0 \Rightarrow 2d(t_1 + 10d) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} t_1 + 10d = 0$$

بنابراین جمله یازدهم دنباله حسابی برابر صفر است.

تجربی - ۸۸

۱۵۹۹- گزینه ۳ طبق فرض،

$$\begin{cases} a_{12} - a_{10} = 5 \\ a_{12} + a_{10} = 25 \end{cases} \Rightarrow a_{12} = 15, a_{10} = 10 \Rightarrow d = \frac{a_{12} - a_{10}}{12 - 10} = \frac{5}{2}$$

از طرف دیگر،

$$d = \frac{a_{21} - a_{10}}{21 - 10} \Rightarrow a_{21} = a_{10} + 11d = 10 + 11\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۴

۱۶۰۰- گزینه ۲ سه جمله را به صورت  $\frac{a}{r}$ ،  $a$ ،  $ar$  فرض می‌کنیم، در

این صورت

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

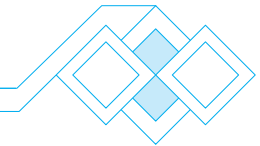
$$\frac{a}{r} + a + ar = 19 \Rightarrow \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19 \Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$(3r-2)(2r-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{سه جمله متوالی: } 9, 6, 4 \\ r = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{سه جمله متوالی: } 4, 6, 9 \end{cases}$$

در هر دو صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله برابر ۵ است.

تجربی - ۹۰





۱۶۰۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$x^{\frac{5}{2}} = 32 \Rightarrow (x^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}} = (2^5)^{\frac{2}{5}} \Rightarrow x = 2^2$$

بنابراین

$$x^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

۱۶۰۹- گزینه ۳ ابتدا  $x, y$  و  $z$  را ساده تر می کنیم:

$$x = a^{\frac{2}{3}}, \quad y = a^{\frac{4}{3}}, \quad z = a^{1\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$$

از طرف دیگر،  $\frac{4}{3} > \frac{5}{6} > \frac{2}{3}$  و چون  $0 < a < 1$ ، پس

$$a^{\frac{2}{3}} < a^{\frac{5}{6}} < a^{\frac{4}{3}} \Rightarrow y < z < x$$

۱۶۱۰- گزینه ۴ راه حل اول اولاً واضح است که  $\sqrt[4]{0} = 0$  و ریشه چهارم

عدد صفر در بازه مورد نظر قرار دارد. اکنون فرض می کنیم  $a$  عددی مثبت باشد که ریشه چهارم مثبت آن در بازه  $(0, 4)$  قرار دارد. یعنی

$$0 < \sqrt[4]{a} < 4 \Rightarrow 0 < (\sqrt[4]{a})^4 < 4^4 \Rightarrow 0 < a < 256$$

همچنین فرض می کنیم  $b$  عددی مثبت باشد که ریشه چهارم منفی آن در بازه  $(-3, 0)$  قرار دارد. یعنی

$$-3 < -\sqrt[4]{b} < 0 \Rightarrow 0 < \sqrt[4]{b} < 3 \Rightarrow 0 < (\sqrt[4]{b})^4 < 3^4 \Rightarrow 0 < b < 81$$

بنابراین  $a$  می تواند اعداد صحیح ۱ تا ۲۵۵ و  $b$  می تواند اعداد صحیح ۱ تا ۸۰ باشد. اگر عدد صفر را هم در نظر بگیریم، می توان گفت اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ...، ۲۵۵ حداقل یک ریشه چهارم در بازه  $(-3, 4)$  دارند. تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶ است.

راه حل دوم توجه کنید که

$$-3 < \sqrt[4]{x} < 4 \Rightarrow -\sqrt[4]{81} < \sqrt[4]{x} < \sqrt[4]{256} \Rightarrow 0 \leq x < 256$$

پس تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶ است.

۱۶۱۱- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که  $x < 0$ .

$$\sqrt[4]{-x^5} = \sqrt[4]{(-x)x^4} = \sqrt[4]{-x} \times \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{-x} \times |x| = -x \sqrt[4]{-x}$$

راه حل دوم چون  $x < 0$ ، حاصل عبارت مورد نظر را به ازای  $x = -1$  می یابیم:

$$\sqrt[4]{-x^5} = \sqrt[4]{1} = 1$$

فقط مقدار گزینه (۳) به ازای  $x = -1$  برابر ۱ است.

۱۶۱۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{81}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^4}} = \sqrt[4]{3^{\frac{4}{5}}} = \sqrt[20]{3^4} = \sqrt[5]{3}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{96}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{2^5 \times 3}} = \sqrt[5]{2^5 \times 3^{\frac{1}{4}}} = 2 \sqrt[20]{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt[5]{81}} = \frac{3}{\sqrt[5]{3^4}} \times \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3}} = \frac{3 \times \sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{3 \sqrt[5]{3}}{3} = \sqrt[5]{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با  $\sqrt[5]{3} - 2 \sqrt[20]{3} - \sqrt[5]{3} = -2 \sqrt[20]{3}$

۱۶۰۱- گزینه ۲ توجه کنید که اگر  $0 < a < b$ ، آن گاه  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ .

بنابراین

$$5 < 9 \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{5} < 3 \Rightarrow \sqrt{5} - 3 < 0$$

در نتیجه  $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-3| = -(\sqrt{5}-3) = 3-\sqrt{5}$  از طرف

دیگر،  $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} = \sqrt{3}-2$  همین طور

$$4 < 5 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}-2 > 0$$

بنابراین  $\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$  به این ترتیب عبارت مورد نظر

$$\text{برابر است با } 3 - \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{3} - 1$$

۱۶۰۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{8 \sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{2^3 \sqrt[4]{2^2}} = \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2}} = 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3+1}{4}} = 2^1 = 2$$

۱۶۰۳- گزینه ۴ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت ساده می شود:

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} - \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9 \times 3}} - \frac{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{9 \times 27}} = \frac{\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{3^5}}{\sqrt[3]{27 \times 3}} = \frac{3-3}{\sqrt[3]{27 \times 3}} = 0$$

۱۶۰۴- گزینه ۳ صورت و مخرج کسر را به شکل اعداد توان دار با نمای

گویا می نویسیم:

$$3\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}} = 3^1 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 3 \times 2$$

$$2\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}} = 2^1 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 2 \times 3$$

$$\text{بنابراین } A = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

۱۶۰۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{x^3} \times \sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[4]{x^5} \times \sqrt[5]{x^7} = x^{\frac{3}{2}} \times x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{5}{4}} \times x^{\frac{7}{5}} = x^{\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{4} + \frac{7}{5}} = x^{\frac{15+8+15+21}{6}} = x^{\frac{59}{6}}$$

$$= x^{\frac{3^0+1^0+2^0+5^0+7^0}{6}} = x^{\frac{18}{6}} = x^3 = x \sqrt[6]{x^{18}}$$

۱۶۰۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{9} \times \sqrt[2]{\sqrt[3]{3}} = 9^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = 3^{\frac{4+1}{6}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{243}$$

پس

$$\frac{5}{2n} = 1 \Rightarrow n = \frac{5}{2}$$

در نتیجه  $\sqrt[3]{37-n} = \sqrt[3]{37-\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{\frac{74-5}{2}} = \sqrt[3]{\frac{69}{2}}$

۱۶۰۷- گزینه ۴ چون  $x$  عددی مثبت است، تساوی داده شده را به شکل

زیر می نویسیم:

$$\sqrt{x} \sqrt{x} = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 \times x} = 3 \Rightarrow \sqrt{x^3} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3$$

بنابراین  $x = 9$  و در نتیجه

$$\sqrt{x^3} \sqrt{x} = \sqrt{9^3} \sqrt{9} = \sqrt{9^4} = 9^2 = 81$$

۱۶۱۹- گزینه ۱ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{b}\sqrt{a} = b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sqrt{a}\sqrt{b} \times \sqrt{b}\sqrt{a} &= a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{6}})^6 \times (b^{\frac{1}{6}})^6 \\ &= (a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}})^6 = (27)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

راه‌حل دوم فرض کنید  $a=1$  و  $b=3$ . در این صورت

$$\sqrt{a}\sqrt{b} \times \sqrt{b}\sqrt{a} = \sqrt{1} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{1} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{2}} = \sqrt{3}$$

۱۶۲۰- گزینه ۳ راه‌حل اول چون  $\sqrt{a} > \sqrt{a}$  پس  $0 < a < 1$  و در نتیجه واضح است که  $\sqrt{a} > \sqrt{a}$  و  $\sqrt{a} > a$ . همچنین از فرض  $0 < a < 1$  نتیجه می‌شود  $a^8 > a^9$  و در نتیجه  $\sqrt[3]{a^8} > \sqrt[3]{a^9}$ ، یعنی  $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt[3]{a^3}$  ولی  $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt[3]{a^3}$  درست نیست، زیرا

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^9 < a^8 \Rightarrow \sqrt[3]{a^9} < \sqrt[3]{a^8} \Rightarrow \sqrt[3]{a^3} < \sqrt[3]{a^2}$$

راه‌حل دوم چون  $\sqrt{a} > \sqrt{a}$  پس  $a^{\frac{1}{3}} > a^{\frac{1}{2}}$  و چون  $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$  پس  $0 < a < 1$ . بررسی گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینه (۱)  $\frac{1}{4} < 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{4}} > a \Rightarrow \sqrt[4]{a} > a$

گزینه (۲)  $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} > a \Rightarrow \sqrt{a} > a$

گزینه (۳)  $\frac{3}{2} > \frac{2}{3} \Rightarrow a^{\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \sqrt{a^3} < \sqrt[3]{a^2}$

گزینه (۴)  $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} > \sqrt[4]{a^3}$

بنابراین گزینه (۳) نادرست است.

۱۶۲۱- گزینه ۴ طرفین رابطه  $x+y=4$  را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 16$$

چون  $xy=2$ ، پس

$$x^2 + y^2 + 4 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 12$$

حال، طرفین رابطه اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 144 \Rightarrow x^4 + y^4 + 2(xy)^2 = 144$$

$$x^4 + y^4 + 2 \times 4 = 144 \Rightarrow x^4 + y^4 = 136$$

۱۶۲۲- گزینه ۳ اعداد  $14 + 6\sqrt{5}$  و  $14 - 6\sqrt{5}$  مربع کامل هستند.

زیرا  $14 + 6\sqrt{5} = 9 + 5 + 2 \times 3\sqrt{5} = 3^2 + \sqrt{5}^2 + 2(3\sqrt{5}) = (3 + \sqrt{5})^2$

به همین ترتیب  $14 - 6\sqrt{5} = (3 - \sqrt{5})^2$ . بنابراین

$$\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 3 + \sqrt{5} - (3 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$$

۱۶۲۳- گزینه ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج،

$$(\sqrt{x+11} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x+11} + \sqrt{x+3}) = (x+11) - (x+3) = 8$$

بنابراین

$$\sqrt{2}(\sqrt{x+11} + \sqrt{x+3}) = 8 \Rightarrow \sqrt{x+11} + \sqrt{x+3} = 4\sqrt{2}$$

۱۶۱۳- گزینه ۲ راه‌حل اول فرض کنید  $\sqrt[6]{2} = a$ ، در این صورت

$$\sqrt[6]{2} = a \Rightarrow 2^{\frac{1}{6}} = a \Rightarrow (2^{\frac{1}{6}})^3 = a^3 \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = a^3 \Rightarrow \sqrt{2} = a^3$$

$$\sqrt[6]{2} = a \Rightarrow 2^{\frac{1}{6}} = a \Rightarrow (2^{\frac{1}{6}})^2 = a^2 \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}} = a^2 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = a^2$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[6]{2}} = \frac{a^3 + a^2}{1 + a} = \frac{a^2(a+1)}{1+a} = a^2 = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt[6]{2} + 1)}{1 + \sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{2} = \sqrt[3]{2}$$

۱۶۱۴- گزینه ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$x \left( \sqrt{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^9}} \right) = \sqrt{x^9 \left( \frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^9} \right)} = \sqrt{\frac{x^9}{x^8} - \frac{x^9}{x^9}} = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

در نتیجه  $\sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{2}$  پس

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

راه‌حل دوم از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$x \sqrt{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^9}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x \left( \frac{1}{x} \right) \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x} - 1 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

۱۶۱۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $x$  مثبت است. می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\sqrt{9} \times \sqrt{3}} = \sqrt[3]{9 \times 3} \Rightarrow (\sqrt[3]{3})^{12} = (\sqrt[3]{9 \times 3})^{12}$$

$$3^3 = (9x)^2 \Rightarrow 3\sqrt{3} = 9x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۶۱۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $x > 0$ . می‌توان نوشت

$$\sqrt[3]{x^3 \sqrt{x} \sqrt{x}} = \sqrt[3]{x^3 \times x^2 \times x^2}$$

$$\frac{1}{x^4} \times \frac{1}{x^{12}} \times \frac{1}{x^{24}} = \frac{1}{x^4} \times \frac{1}{x^{36}} \times (x^2)^{24} \Rightarrow \frac{1}{x^{40}} = \frac{1}{x^4} \times \frac{1}{x^{36}} \times x^{48} = \frac{1}{x^4} \times x^{12} = x^8$$

$$\frac{9}{x^{24}} = 3^{12} \Rightarrow x^{24} = 3^{12} \Rightarrow (x^2)^{12} = 3^{12} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = 9$$

۱۶۱۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[6]{9^3 x - 6} = \sqrt[6]{(3^2)^3 (x-2)} = \sqrt[6]{3^6 (x-2)} = 3 \sqrt[6]{x-2} = 3x-2$$

$$\sqrt[3]{27^4 x - 2} = \sqrt[3]{3^{12} (4x-2)} = 3 \sqrt[3]{4x-2} = 3^4 x - 2$$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$\frac{3x-2}{3^4 x-2} = 27 \Rightarrow 3^{x-2} - (4x-2) = 3^3 \Rightarrow 3^{x-2} = 3^3 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$$

۱۶۱۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که  $a > 0$ . در تساوی داده شده اعداد را

با نمای گویا می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a^2} \times a^3 \times a^6 = 3 \Rightarrow a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 3 \Rightarrow a^1 = 3 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow (a^{\frac{1}{2}})^2 = 3^2$$

بنابراین  $a=9$ .

۱۶۳۰- گزینه ۳ به کمک اتحاد جمله مشترک عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = x(x-1)(x+1)(x-2)+1 = (x^2-x)(x^2-x-2)+1$$

$$= (x^2-x)((x^2-x)-2)+1 = (x^2-x)^2 - 2(x^2-x) + 1$$

اکنون به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = (x^2-x-1)^2$$

۱۶۳۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$x^2 + \frac{4}{9x^2} = (x + \frac{2}{3x})^2 - 2(x)(\frac{2}{3x})$$

$$= (x + \frac{2}{3x})^2 - \frac{4}{3} = 3^2 - \frac{4}{3} = \frac{23}{3}$$

$$3x^2 + \frac{4}{3x^2} = 3(x^2 + \frac{4}{9x^2}) = 3 \times \frac{23}{3} = 23$$

بنابراین

۱۶۳۲- گزینه ۳ توجه کنید که  $\frac{1}{a} = 2 + |a| > 0$ ، در نتیجه  $a > 0$ .

بنابراین، فرض مسئله به شکل  $\frac{1}{a} - a = 2$  درمی‌آید. اکنون توجه کنید که

$$\frac{1}{a} + |a| = \frac{1}{a} + a > 0$$

از طرف دیگر،  $(a + \frac{1}{a})^2 - (a - \frac{1}{a})^2 = 4$ . بنابراین

$$(a + \frac{1}{a})^2 = 4 + 4 = 8 \xrightarrow{\frac{a+1}{a} > 0} a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{2}$$

۱۶۳۳- گزینه ۱ توجه کنید که  $(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ . بنابراین

$$(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1)^3$$

و در نتیجه

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{2}-1$$

۱۶۳۴- گزینه ۲ فرض کنید  $A = (\frac{1}{3^8} + 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1)$ .

دو طرف این تساوی را در  $3^8 - 1$ ، که همان  $a$  است، ضرب می‌کنیم:

$$(\frac{1}{3^8} - 1)A = (\frac{1}{3^8} - 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1)$$

$$= ((\frac{1}{3^8})^2 - 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1) = (\frac{1}{3^4} - 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1)$$

$$= (\frac{1}{3^2} - 1)(\frac{1}{3^2} + 1) = 3 - 1 = 2$$

$$A = \frac{2}{\frac{1}{3^8} - 1} = \frac{2}{3^8 - 1}$$

بنابراین

۱۶۳۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$$

بنابراین

$$10^2 = 66 - 2(ab+bc-ca) \Rightarrow 34 = -2(ab+bc-ca)$$

$$ab+bc-ca = -17$$

۱۶۳۶- گزینه ۴ بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله،

$$(a-b)^3 - a^3 + b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3$$

$$= -3ab(a-b) = -3ab(\frac{3}{ab}) = -9$$

۱۶۲۴- گزینه ۱ ابتدا عبارت را به صورت  $\frac{\sqrt{\sqrt{24}-4} - \sqrt{\sqrt{24}+4}}{\sqrt{\sqrt{24}+4} \sqrt{\sqrt{24}-4}}$  می‌نویسیم.

اکنون با مخرج مشترک‌گیری و استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود که عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(\sqrt{24}-4) - (\sqrt{24}+4)}{\sqrt{\sqrt{24}+4} \sqrt{\sqrt{24}-4}} = \frac{-8}{\sqrt{(\sqrt{24})^2 - 4^2}} = \frac{-8}{\sqrt{8}} = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

۱۶۲۵- گزینه ۴ به کمک اتحاد مربع مجموع سه جمله عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

بنابراین

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc - 3a^2 - 3b^2 - 3c^2$$

$$+ 6ab - 6ac + 6bc + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

$$= 8ab - 8ac + 4bc = 4(2ab - 2ac + bc)$$

۱۶۲۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(x^2 - 2x)^3 - 2x^4 = x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3 - 2x^4$$

$$= x^6 - 6x^5 + 10x^4 - 8x^3$$

بنابراین ضریب  $x^4$  برابر ۱۰ است.

۱۶۲۷- گزینه ۲ اگر دو طرف تساوی  $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{4}$  را به توان سه

برسانیم، از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله نتیجه می‌شود

$$a - b - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = 4 \Rightarrow a - b - 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{4}) = 4$$

$$a - b - 3\sqrt[3]{4ab} = 4 \Rightarrow a - b - 3(2) = 4 \Rightarrow a - b = 10$$

۱۶۲۸- گزینه ۴ راه حل اول بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}) = 4(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}) \quad (1)$$

از طرف دیگر،  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^2 + \frac{2}{ab} = 4^2 + \frac{2}{3}$ . بنابراین از تساوی (۱)

نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = 4(16 + \frac{2}{3}) = 68$$

راه حل دوم توجه کنید که اگر طرفین رابطه  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4$  را به توان سه برسانیم.

$$(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^3 = 4^3 \Rightarrow \frac{1}{a^3} - \frac{3}{a^2b} + \frac{3}{ab^2} - \frac{1}{b^3} = 64$$

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} - \frac{3}{ab}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = 64$$

$$ab = 3, \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = 64 + \frac{3}{3} \times 4 = 68$$

۱۶۲۹- گزینه ۴ اگر از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم، عبارت مورد نظر

برابر است با

$$\frac{5}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3}^2 - \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2)} = \frac{5}{\sqrt{3}^3 + \sqrt{2}^3} = \frac{5}{3+2} = 1$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$$

$$b = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\text{پس } (a-b)^6 = (\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)^6 = (-2)^6 = 64$$

۱۶۴۴- گزینه ۳ طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم

$$(\sqrt{x-a}+\sqrt{x})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x})=a+1$$

$$x-a-x=a+1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۱۶۴۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc-ab-ac)$$

$$\text{پس } a-b-c = \pm 6 \text{ بنابراین } (a-b-c)^2 = 28 + 2(4) = 36$$

۱۶۴۶- گزینه ۴ توجه کنید که  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

دو طرف تساوی داده شده را به توان سه می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{\sqrt{3}-2})^3 + (\sqrt[3]{\sqrt{3}+2})^3 \\ &+ 3\sqrt[3]{\sqrt{3}-2} \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} (\sqrt[3]{\sqrt{3}-2} + \sqrt[3]{\sqrt{3}+2}) \\ &= \sqrt{3}-2 + \sqrt{3}+2 + 3\sqrt[3]{3-4}(x) = 2\sqrt{3}-3x \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین } x^3 + 3x = 2\sqrt{3}$$

۱۶۴۷- گزینه ۲ اگر تساوی دوم را یک بار با تساوی اول جمع و بار دیگر

از آن کم کنیم، به دست می‌آید

$$a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3a^2b = 125 \Rightarrow (a+b)^3 = 125 \Rightarrow a+b=5$$

$$a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b = 27 \Rightarrow (a-b)^3 = 27 \Rightarrow a-b=3$$

$$\text{بنابراین } \frac{a+b}{a-b} = \frac{5}{3}$$

۱۶۴۸- گزینه ۳ بنابر فرض،

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$a + \frac{1}{a} - 2 = 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 4$$

و اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به دست می‌آید

$$a^3 + \frac{1}{a^3} + 3a + \frac{3}{a} = 64$$

$$\text{به این ترتیب } a^3 + \frac{1}{a^3} = 64 - 3(4) = 52$$

۱۶۴۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$a = \sqrt[3]{2 \times 9} + \sqrt[3]{2 \times 15} + \sqrt[3]{2 \times 25} = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{25})$$

$$= \sqrt[3]{2}((\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3 \times 5} + (\sqrt[3]{5})^2)$$

در نتیجه، از اتحاد چاق و لاغر نتیجه می‌شود:

$$ab = (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5})((\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3 \times 5} + (\sqrt[3]{5})^2)(\sqrt[3]{2})$$

$$= ((\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{5})^3)(\sqrt[3]{2}) = (3-5)\sqrt[3]{2} = -2\sqrt[3]{2}$$

۱۶۳۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$a^3 + b^3 = (a+b)((a+b)^2 - 3ab)$$

از طرف دیگر،

$$a+b = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{3}}{3-2} = 2\sqrt{3}$$

$$ab = \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$\text{بنابراین } a^3 + b^3 = 2\sqrt{3}(4 \times 3 - 3) = 18\sqrt{3}$$

۱۶۳۸- گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow 25 = 17 - 2ab \Rightarrow ab = -4$$

بنابراین، طبق اتحاد چاق و لاغر،

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) = 5(17-4) = 65$$

راه‌حل دوم توجه کنید که  $a=4$  و  $b=-1$  در تساوی‌های داده شده صدق

$$\text{می‌کنند، در این صورت } a^3 - b^3 = 65$$

۱۶۳۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 7 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = 7 \xrightarrow{ab=1} a^2 + b^2 = 7$$

از طرف دیگر،

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 7 + 2 = 9$$

چون  $a$  و  $b$  عددهایی منفی‌اند، پس  $a+b$  نیز منفی است، در نتیجه

$$a+b = -3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (-3)(7-1) = -18$$

۱۶۴۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a^{10} + a^5 + 1) = (a^5 - 1)(a^{10} + a^5 + 1)$$

$$= (a^5 - 1)((a^5)^2 + a^5 \times 1 + 1) = (a^5)^3 - 1 = a^{15} - 1$$

$$= (\sqrt[5]{3})^{15} - 1 = 3^3 - 1 = 26$$

۱۶۴۱- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 + 2 \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 8^2 + 2 = 66$$

۱۶۴۲- گزینه ۳ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را با ۱ جمع می‌کنیم:

$$a + \frac{1}{a+1} = 4 \Rightarrow a + 1 + \frac{1}{a+1} = 5$$

اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(a + 1 + \frac{1}{a+1})^2 = 5^2 \Rightarrow (a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2} + 2(a+1) \times \frac{1}{a+1} = 25$$

$$(a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2} + 2 = 25 \Rightarrow (a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2} = 25 - 2 = 23$$

۱۶۴۳- گزینه ۳ راه‌حل اول ابتدا مقدار  $(a-b)^2$  را حساب می‌کنیم:

$$(a-b)^2 = (\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}})^2$$

$$= 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 6 - 2 = 4$$

بنابراین

$$(a-b)^6 = ((a-b)^2)^3 = 4^3 = 64$$

۱۶۵۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$A = (x-2y)(x^f + 2x^r y + 4x^r y^2 + 8xy^3 + 16y^4) \\ = (x-2y)(x^f + x^r(2y) + x^r(2y)^2 + x(2y)^3 + (2y)^4) \\ = x^5 - (2y)^5 = x^5 - 32y^5$$

بنابراین به ازای  $x = 2\sqrt[5]{2}$  و  $y = \sqrt[5]{4}$  مقدار A برابر است با

$$A = (2\sqrt[5]{2})^5 - 32(\sqrt[5]{4})^5 = 32 \times 2 - 32 \times 4 = -64$$

۱۶۵۱- گزینه ۲ مقدار عبارت  $\frac{a+b}{a-b}$  مثبت است، بنابراین این عبارت را

می توان به صورت  $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$  نوشت. به این ترتیب

$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}} = \sqrt{\frac{\lambda ab+2ab}{\lambda ab-2ab}} = \sqrt{\frac{1+ab}{ab}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

۱۶۵۲- گزینه ۱ راه حل اول با توجه به اینکه  $x \neq 0$ ، دو طرف تساوی

داده شده را معکوس می کنیم و مقدار  $x + \frac{1}{x}$  را به دست می آوریم:

$$\frac{x^2+1}{x} = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4$$

برای محاسبه مقدار  $\frac{x^2}{x^2+1}$ ، ابتدا مقدار معکوس آن را حساب می کنیم:

$$\frac{x^f+1}{x^2} = \frac{x^f}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{14}$$

راه حل دوم از تساوی  $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$  نتیجه می شود

$$x^2+1 = 4x \Rightarrow x^2 = 4x-1$$

دو طرف این تساوی را به توان دو می رسانیم:  $x^4 = 16x^2 - 8x + 1$ . به جای  $x^2$  قرار می دهیم

$$x^4 = 16(4x-1) - 8x + 1 = 64x - 8x - 15 = 56x - 15$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{4x-1}{56x-14} = \frac{4x-1}{14(4x-1)} = \frac{1}{14}$$

۱۶۵۳- گزینه ۴ می توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{5+2} \times \sqrt{\sqrt{5-2} \times \sqrt{\sqrt{5-2}}}} \\ = \sqrt{(\sqrt{5+2})^3 \times \sqrt{(\sqrt{5-2})^2 \times \sqrt{\sqrt{5-2}}}} \\ = \sqrt{(\sqrt{5+2})^3 (\sqrt{5-2})^2 (\sqrt{5-2})} = \sqrt{(\sqrt{5+2})^3 (\sqrt{5-2})^3} \\ = \sqrt{(\sqrt{5+2})(\sqrt{5-2})} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2} = \sqrt{5-4} = 1$$

۱۶۵۴- گزینه ۳ راه حل اول فرض کنید

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{3-\sqrt{8}} = a$$

طرفین این تساوی را به توان دو می رسانیم:

$$a^2 = 3 + \sqrt{8} + 3 - \sqrt{8} + 2\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})} = 6 + 2\sqrt{9-8} = 8$$

بنابراین  $a = \sqrt{8}$ . از طرف دیگر، می دانیم

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

پس مقدار عبارت داده شده برابر  $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$  یا همان ۴ است.

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

$$\text{پس } (\sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}) \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1) \sqrt{2} = 4$$

۱۶۵۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$$

از طرف دیگر،

$$a+b+c = 6abc \Rightarrow \frac{a+b+c}{abc} = 6 \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 6$$

$$\text{بنابراین } 2(6) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 13 \text{ در نتیجه } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$$

۱۶۵۶- گزینه ۴ ابتدا دو طرف تساوی را به توان سه می رسانیم و از

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله استفاده می کنیم:

$$1 = (\sqrt[3]{a+5} - \sqrt[3]{a-5})^3 = a+5 - (a-5) - 3\sqrt[3]{a^2-25}(\sqrt[3]{a+5} - \sqrt[3]{a-5})$$

$$\text{در نتیجه } \sqrt[3]{a^2-25} = 3 \text{ بنابراین } 1 = 10 - 3\sqrt[3]{a^2-25} \\ a^2 - 25 = 27$$

۱۶۵۷- گزینه ۲ ابتدا به کمک اتحاد  $(a - \frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$  مقدار

$a - \frac{1}{a}$  را حساب می کنیم:

$$(a - \frac{1}{a})^2 = 18 - 2 = 16 \Rightarrow a - \frac{1}{a} = \pm 4$$

از  $a < 1$  نتیجه می شود  $a < \frac{1}{a}$ . بنابراین  $a - \frac{1}{a} = -4$  درست است. اکنون

با استفاده از اتحاد  $(a - \frac{1}{a})^3 = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3(a - \frac{1}{a})$  مقدار  $a^3 - \frac{1}{a^3}$  را

حساب می کنیم:

$$(-4)^3 = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3(-4) \Rightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} = -76$$

۱۶۵۸- گزینه ۳ طبق اتحاد چاق و لاغر می توان نوشت

$$(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}) \underbrace{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{3})^2}_{a} = (\sqrt[3]{5})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = 5 + 3 = 8$$

$$\text{بنابراین } \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3} = \frac{8}{a}$$

۱۶۵۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)^2 = (a-b)^2(a^2 + ab + b^2)^2$$

$$= ((a-b)(a^2 + ab + b^2))^2 = (a^3 - b^3)^2$$

اگر تساوی های داده شده را با هم جمع کنیم، به دست می آید

$$5a^3 - 5b^3 = 15 \Rightarrow a^3 - b^3 = 3$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۹ است.

۱۶۶۶- گزینه ۱ صورت و مخرج کسر دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 2x^2 + 5x - 2x - 5 = x(2x+5) - (2x+5) = (2x+5)(x-1)$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x(2x+5)} \times \frac{(2x+5)(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با  $\frac{1}{x}$

۱۶۶۷- گزینه ۱ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{x}{x(x^2+1)} + \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x}$$

۱۶۶۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{a^6 - a^4 + a^2 - 1}{-a^2 + a^4} = \frac{a^5(a - \frac{1}{a}) + a(a - \frac{1}{a})}{a^2(a - \frac{1}{a})} = \frac{a^5 + a}{a^2} = a^3 + \frac{1}{a^2} = (a - \frac{1}{a})^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$$

۱۶۶۹- گزینه ۲ ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$a^6 - a^4 - a^2 + 1 = a^4(a^2 - 1) - (a^2 - 1) = (a^2 - 1)(a^4 - 1)$$

$$a^3 - a^2 - a + 1 = a^2(a - 1) - (a - 1) = (a - 1)(a^2 - 1)$$

$$\frac{(a^2 - 1)(a^2 - 1)}{(a - 1)(a^2 - 1)} = \frac{a^2 - 1}{a - 1}$$

چون  $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$  پس عبارت مورد نظر برابر است با  $a + 1$

$$a^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$$

$$\frac{4-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 3\sqrt{2}+3$$

۱۶۷۰- گزینه ۲ فرض می‌کنیم  $A = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ . در این صورت، بنابر

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله،

$$A^3 = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^3 = a - b - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = 76 - 3\sqrt[3]{ab}(A) = 76 - 3A$$

بنابراین

$$A^3 + 3A - 76 = 0 \Rightarrow A^3 - 64 - 12 + 3A = 0 \Rightarrow A^3 - 4^3 + 3(A - 4) = 0$$

$$(A - 4)(A^2 + 4A + 16) + 3(A - 4) = 0 \Rightarrow (A - 4)(A^2 + 4A + 19) = 0$$

چون  $A^2 + 4A + 19 = (A + 2)^2 + 15 \neq 0$  پس  $A - 4 = 0$ . در نتیجه  $A = 4$ .

۱۶۷۱- گزینه ۳ عبارت را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$2a^2 - 3ab - 2b^2 = (2a^2 - 4ab) + (ab - 2b^2) = 2a(a - 2b) + b(a - 2b) = (a - 2b)(2a + b)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل  $a - 2b$  وجود دارد.

۱۶۷۲- گزینه ۲ راه‌حل اول فرض کنید  $x^2 - x = A$ . در این صورت

$$(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = A^2 - 14A + 24 = (A - 2)(A - 12)$$

اکنون توجه کنید که

$$A - 2 = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

$$A - 12 = x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

۱۶۶۰- گزینه ۲ با توجه به اینکه  $x \neq \pm 1$ ، دو طرف معادله داده شده را

در  $x - 1$  ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود

$$(x^2 - 1)(1 + x + \dots + x^5) = x^6 + x^5 - x^2 + 1$$

$$(x + 1)(x - 1)(1 + x + \dots + x^5) = x^6 + x^5 - x^2 + 1$$

$$(x + 1)(x^6 - 1) = x^6 + x^5 - x^2 + 1$$

$$x^7 + x^6 - x - 1 = x^6 + x^5 - x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

پس معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۶۶۱- گزینه ۲ راه‌حل اول عبارت مورد نظر را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 - 2x + 9x - 3 = 2x(3x - 1) + 3(3x - 1) = (3x - 1)(2x + 3)$$

پس عامل  $3x - 1$  در تجزیه عبارت وجود دارد.

راه‌حل دوم عبارت مورد نظر را  $A$  می‌نامیم و آن را به کمک اتحاد جمله مشترک به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$A = 6x^2 + 7x - 3 \Rightarrow 6A = 36x^2 + 42x - 18 = (6x - 2)(6x + 9) = 2 \times 3(3x - 1)(2x + 3)$$

بنابراین  $A = (3x - 1)(2x + 3)$  و عامل  $3x - 1$  در تجزیه وجود دارد.

۱۶۶۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$x^2 - 2x + 4y - y^2 - 3 = x^2 - 2x + 1 - (y^2 - 4y + 4) = (x - 1)^2 - (y - 2)^2 = (x - 1 - (y - 2))(x - 1 + (y - 2)) = (x - y + 1)(x + y - 3)$$

بنابراین  $x - y + 1$  عاملی از عبارت است.

۱۶۶۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$x^4 + 16x^2 + 100 = (x^2 + 20x^2 + 100) - 4x^2 = (x^2 + 10)^2 - 4x^2 = (x^2 + 10 - 2x)(x^2 + 10 + 2x)$$

بنابراین  $x^2 - 2x + 10$  عامل  $x^4 + 16x^2 + 100$  است.

۱۶۶۴- گزینه ۳ راه‌حل اول توجه کنید که

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + 1) + 2x^2 + 2x$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x) = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

بنابراین  $x^2 + x + 1$  عامل  $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + x^2) + (x^2 + 2x + 1)$$

$$= x^2(x + 1) + (x + 1)^2 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

بنابراین  $x^2 + x + 1$  عامل  $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  است.

۱۶۶۵- گزینه ۳ ابتدا به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله، عبارت را

به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = x^4 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$A = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل  $x^2 + y^2 - xy$  وجود دارد.

۱۶۷۸- گزینه ۱ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت را ساده می کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2(\sqrt{x}+2) - 2(\sqrt{x}-2) - 2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{8-2x}{x-4} = -\frac{2(x-4)}{x-4} = -2$$

۱۶۷۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 b^2}, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 b^2} \div \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab} = \frac{a^3 - b^3}{(a^2 + b^2 + ab)ab} = \frac{(a-b)(a^2 + b^2 + ab)}{(a^2 + b^2 + ab)ab}$$

$$= \frac{a-b}{ab} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = -2\sqrt{2}$$

۱۶۸۰- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$a^6 + a^2 + 1 = a^6 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2$$

$$= (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(a-1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} = a^3 - 1 = 5 - 1 = 4$$

راه حل دوم اگر صورت و مخرج عبارت داده شده را در  $(a+1)$  ضرب کنیم می توان نوشت

$$\frac{(a+1)(a-1)(a^6 + a^2 + 1)}{(a+1)(a^2 - a + 1)} = \frac{(a^2 - 1)(a^6 + a^2 + 1)}{a^2 + 1}$$

$$= \frac{a^6 - 1}{a^2 + 1} = \frac{(a^3 - 1)(a^3 + 1)}{(a^2 + 1)} = a^3 - 1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر به ازای  $a = \sqrt[3]{5}$  برابر است با  $4 = (\sqrt[3]{5})^3 - 1$ .

۱۶۸۱- گزینه ۲ می توان نوشت

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2}$$

۱۶۸۲- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا مخرج کسرها را گویا می کنیم، سپس

عبارت را ساده می کنیم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} + \frac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} + \frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2} = -1-\sqrt{2}+3+\sqrt{2} = 2$$

راه حل دوم ابتدا مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}+7-\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{10-2\sqrt{2}}{5-4\sqrt{2}} = \frac{2(5-\sqrt{2})}{(5-4\sqrt{2})} = 2$$

بنابراین  $x+1$ ،  $x-2$ ،  $x-4$  و  $x+3$  عامل های عبارت مورد نظر هستند. اکنون توجه کنید که

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3), \quad x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3), \quad x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

بنابراین  $x^2 - 2x - 3$  عامل عبارت مورد نظر نیست.

راه حل دوم با توجه به عامل های عبارت های ذکر شده در گزینه ها، که در راه حل اول نوشته ایم، کافی است بررسی کنیم که کدام یک از عبارت های  $x+1$ ،  $x+3$ ،  $x-3$ ،  $x-2$  و  $x-4$  عامل عبارت داده شده در صورت سؤال نیست.

فرض کنید  $P(x) = (x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24$ . در این صورت

$$P(-1) = 4 - 28 + 24 = 0, \quad P(-3) = 144 - 168 + 24 = 0$$

$$P(3) = 36 - 84 + 24 = -24 \neq 0$$

پس  $x-3$  عامل عبارت مورد نظر نیست. در نتیجه گزینه ۲ عامل عبارت مورد نظر نیست.

۱۶۷۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$4x^4 + 3x^2 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - x^2 = (2x^2 + 1)^2 - x^2$$

$$= (2x^2 + 1 - x)(2x^2 + 1 + x)$$

بنابراین عامل های  $4x^4 + 3x^2 + 1$  عبارت های  $2x^2 - x + 1$  و  $2x^2 + x + 1$  هستند، یعنی مقادیر ممکن  $a$  عددهای  $-1$  و  $1$  هستند که حاصل ضرب آن ها برابر  $-1$  است.

۱۶۷۴- گزینه ۴ توجه کنید که با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می توان نوشت

$$4x^4 - 16x^2y^2 + 9y^4 = 4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4 - 4x^2y^2$$

$$= (2x^2 - 3y^2)^2 - 4x^2y^2$$

طبق اتحاد مزدوج این عبارت به صورت زیر تجزیه می شود:

$$(2x^2 - 2xy - 3y^2)(2x^2 + 2xy - 3y^2)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل  $2x^2 - 2xy - 3y^2$  وجود دارد.

۱۶۷۵- گزینه ۱ عبارت را ابتدا به کمک فاکتورگیری و سپس به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می کنیم:

$$3a^2 - 3ab^2 - 2a^2b + 2b^2 = 3a(a^2 - b^2) - 2b(a^2 - b^2)$$

$$= (a^2 - b^2)(3a - 2b) = (a-b)(a+b)(3a - 2b)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل  $3a - 2b$  وجود دارد.

۱۶۷۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1), \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x+1)(x^2 - x + 1)(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x+3)(x-1)}{x^2 - x + 1} = x + 3$$

۱۶۷۷- گزینه ۳ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت را ساده می کنیم:

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2-(x-1)-(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{2-2x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{2}{x+1}$$

۱۶۸۳- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt[4]{2}+1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با  $\sqrt[4]{2}+1 - \sqrt[4]{2} = 1$ .

راه حل دوم با مخرج مشترک گیری می‌توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1} - \sqrt[4]{2} = \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{2}-1)}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1} = 1$$

۱۶۸۴- گزینه ۲ صورت و مخرج کسر  $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}$  را در  $\sqrt[4]{2}-1$  ضرب

می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1} \times \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}+1} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

۱۶۸۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{8\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}+1} = 8 \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = 8 \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{8(\sqrt{5}-1)^2}{4} = 2(\sqrt{5}-1)^2$$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{(\sqrt{5}-2)^2}{5-4} = (\sqrt{5}-2)^2$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$2(\sqrt{5}-1)^2 - (\sqrt{5}-2)^2 = 2(6-2\sqrt{5}) - (9-4\sqrt{5}) = 3$$

۱۶۸۶- گزینه ۲ ابتدا مخرج کسر  $\frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$  را گویا می‌کنیم. برای

این کار صورت و مخرج را در  $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$  ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

بنابراین  $x=1+\sqrt{2}$  و در نتیجه  $(x-1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ .

۱۶۸۷- گزینه ۲ برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج آن را در

مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 - (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{4-3}}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

۱۶۸۸- گزینه ۳ چون در مخرج کسر  $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$  ریشه سوم وجود دارد،

برای گویا کردن مخرج این کسر از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

به این ترتیب، صورت و مخرج این کسر را در

$$\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2}$$

به این ترتیب، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4} - (\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}) = 2\sqrt[3]{4}$$

۱۶۸۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$2-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$$

بنابراین

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} - \frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$$

اکنون با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)} - \frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1} - \frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{2-1} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1-\sqrt[3]{2}-1}{2-1} = \sqrt[3]{4}$$

۱۶۹۰- گزینه ۳ چون  $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1 = \sqrt[3]{3^2}+1+\sqrt[3]{3}+1^2$  برای اینکه

مخرج کسر اول را گویا کنیم (با استفاده از اتحاد چاق و لاغر)، صورت و مخرج

آن را در  $\sqrt[3]{3}-1$  ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} = \frac{2}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1^2} \times \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{\sqrt[3]{3^3}-1^3} = \frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{3-1} = \sqrt[3]{3}-1$$

به همین ترتیب،

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1} \times \frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{2^3}-\sqrt[3]{2}+1} = \frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{2+1} = \sqrt[3]{2}+1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با  $\sqrt[3]{3}-1 + \sqrt[3]{2}+1 = \sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ .

۱۶۹۱- گزینه ۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x-2$  برابر

$$\text{است با } P(2) = 2^5 - 3(2)^3 + 3(2)^2 - 2 + 2 = 20.$$

۱۶۹۲- گزینه ۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x-1$  برابر

$$\text{است با } P(1) = 3 - 4a - 1 = -4a + 2$$

بخش پذیر است. پس این باقی‌مانده صفر است. در نتیجه

$$-4a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$



۱۷۰۰- گزینه ۳ بنابر فرض مسئله،

$$x^f - 3x^3 + 4x^2 + 1 = (x-1)Q(x) + 3 \quad (۱)$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $Q(x)$  بر  $x-3$  برابر با  $Q(3)$  است. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی (۱) قرار دهیم  $x=3$ ، به دست می‌آید  $Q(3) + 3 = (3-1)Q(3) + 3 + 4(3)^2 + 1 = (3-1)Q(3) + 3$  در نتیجه  $Q(3) = 17$ .

۱۷۰۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $P(x) = (x-1)^3 + 7$  در نتیجه،

$$\text{باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای } P(x) \text{ بر } x - \sqrt[3]{3} - 1 \text{ برابر است با}$$

$$P(\sqrt[3]{3}+1) = (\sqrt[3]{3}+1-1)^3 + 7 = 3 + 7 = 10$$

۱۷۰۲- گزینه ۴ چون چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $(x+2)^2$  بخش‌پذیر

است، پس بر  $x+2$  نیز بخش‌پذیر است، بنابراین

$$P(-2) = 0 \Rightarrow -32 + 4a + 8 + 2a + 16 = 0 \Rightarrow a = -16$$

۱۷۰۳- گزینه ۱ چون ۱، ۲ و ۳ ریشه‌های  $P(x)$  هستند، پس  $x-1$ ،

$x-2$  و  $x+2$  عامل‌های  $P(x)$  هستند. از طرف دیگر، چون  $P(x)$  درجه سوم است، پس عامل دیگری ندارد. بنابراین می‌توان نوشت

$$P(x) = a(x-1)(x-2)(x+2)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم  $x=-1$ ، چون  $P(-1) = 24$ ، به دست می‌آید

$$24 = a(-2)(-3)(1) \Rightarrow a = 4$$

به این ترتیب،  $P(x) = 4(x-1)(x-2)(x+2)$  و باقی‌مانده تقسیم

چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x+3$  برابر است با

$$P(-3) = 4(-3-1)(-3-2)(-3+2) = -80$$

۱۷۰۴- گزینه ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x-3)$  بر  $x-5$

برابر است با  $P(2) = P(5-3) = P(2)$ . بنابراین  $P(2) = -3$ . اگر در تساوی

$$P(x+3) = x^3 - mx^2 + mx + 2$$

$$P(2) = (-1)^3 - m(-1)^2 + m(-1) + 2 = -3 \Rightarrow m = 2$$

۱۷۰۵- گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x+4$  برابر

است با  $P(-4)$ . اکنون اگر در تساوی  $P^2(x) - 8xP(x) = -16x^2$  قرار دهیم  $x=-4$ ، به دست می‌آید

$$P^2(-4) + 32P(-4) + 16^2 = 0 \Rightarrow (P(-4) + 16)^2 = 0 \Rightarrow P(-4) = -16$$

۱۷۰۶- گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x+1)$  بر  $x-1$  برابر

$P(2) = P(1+1) = P(2)$  است. اگر در تساوی  $P(x-2) = x^3 - x^2 + 4m$  قرار دهیم

$x=4$ ، مقدار  $P(2)$  به دست می‌آید:  $P(2) = 64 - 16 + 4m = 48 + 4m$ .

$$48 + 4m = 4 \Rightarrow m = -11$$

۱۷۰۷- گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $Q(x)$  بر  $x-3$  برابر

$Q(3)$  است، پس  $Q(3) = 2$ . اگر در تساوی  $P(Q(x-1)) = x^2 - 3x + 2$

قرار دهیم  $x=4$ ، نتیجه می‌شود

$$P(Q(3)) = 16 - 12 + 2 \Rightarrow P(2) = 6$$

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(x) = P(x+1)$  بر  $x-1$  برابر  $f(1)$  یا همان  $P(2)$  است که برابر ۶ است.

۱۷۰۸- گزینه ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $Q(x)$  بر  $x-1$  برابر

$Q(1)$  است. پس  $Q(1) = 5$ . اگر در تساوی  $P(x-3) = (x^2 - 3)Q(x+2)$

قرار دهیم  $x=-1$ ، نتیجه می‌شود  $P(-4) = -2Q(1) = -2 \times 5 = -10$ .

بنابراین باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x+4$  برابر  $-10$  است.

۱۶۹۳- گزینه ۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x-4$  برابر با

$P(4)$  است، و چون بنابر فرض این باقی‌مانده ۱۶ است، پس  $P(4) = 16$ . در نتیجه

$$P(x) = ax^{13} + bx^{97} - 5 \Rightarrow P(4) = a(4)^{13} + b(4)^{97} - 5$$

$$16 = 4^{13}a + 4^{97}b - 5 \Rightarrow 4^{13}a + 4^{97}b = 21$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x+4$  برابر با  $P(-4)$  است. اکنون توجه کنید که

$$P(-4) = -4^{13}a - 4^{97}b - 5 \xrightarrow{4^{13}a + 4^{97}b = 21} -21 - 5 = -26$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر  $-26$  است.

۱۶۹۴- گزینه ۳ چون چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x+3$  بخش‌پذیر است،

پس  $P(-3) = 0$ . در نتیجه  $P(-3) = (-3)^8 + 3(-3)^7 + a(-3)^2 - 9 = 0$ .

بنابراین  $a=1$  و  $P(x) = x^8 + 3x^7 + x^2 - 9$ . از طرف دیگر، باقی‌مانده

تقسیم چندجمله‌ای  $P(x-1)$  بر  $x-2$  برابر است با  $P(1) = P(2-1)$ . اکنون

توجه کنید که  $P(1) = 1 + 3 + 1 - 9 = -4$ .

۱۶۹۵- گزینه ۴ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x-2$

برابر با ۴ است، پس  $P(2) = 4$ . در نتیجه، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای

$$P(2x-4) = P(2) = 4 \text{ بر } x-3 \text{ برابر است با } P(2) = 4$$

۱۶۹۶- گزینه ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x+1)$  بر  $x-3$

برابر است با  $P(3) = P(4)$ . از طرف دیگر،

$$P(x-2) = x^2 - 3x + 2 \xrightarrow{x=6} P(4) = (6)^2 - 3(6) + 2 = 20$$

۱۶۹۷- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x-1)$  بر  $x-2$

برابر ۱۲ است، پس  $P(2-1) = P(1) = 12$ . در نتیجه

$$P(1) = 1 + a + 6 + b + 10 = 12 \Rightarrow a + b = -5$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x+2)$  بر  $x+3$  برابر است

با  $P(-1) = P(-3+2) = P(-1)$ . اکنون توجه کنید که

$$P(-1) = 1 - a + 6 - b + 10 = 17 - (a+b) = 17 - (-5) = 22$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر ۲۲ است.

۱۶۹۸- گزینه ۱ چون  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ ، پس چندجمله‌ای  $P(x)$

بر چندجمله‌ای‌های  $x-1$  و  $x+1$  بخش‌پذیر است. بنابراین

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + 1 - 2 = 0 \\ a + b - 1 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

در نتیجه،  $P(x) = 2x^6 - x^5 + x - 2$ . به این ترتیب، باقی‌مانده تقسیم

چندجمله‌ای  $P(x)$  بر چندجمله‌ای  $x-2$  برابر است با

$$P(2) = 2 \times 2^6 - 2^5 + 2 - 2 = 96$$

۱۶۹۹- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های  $P(x+1)$  و

$Q(x+1)$  بر  $x-2$  به ترتیب برابر ۳ و ۵ است، پس

$$P(2+1) = 3 \Rightarrow P(3) = 3, \quad Q(2+1) = 5 \Rightarrow Q(3) = 5$$

بنابراین، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x-1)Q(x-1)$  بر  $x-4$  برابر

$$\text{است با } P(4-1)Q(4-1) = P(3)Q(3) = 3 \times 5 = 15$$

۱۷۰۹- گزینه ۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $Q(x)$  بر  $x+3$  برابر  $Q(-3)$  است. پس  $Q(-3)=-4$ . اکنون توجه کنید که

$$P(x) = x^3 + 3xQ(2x+1) + 3x - 2$$

$$P(-2) = -8 - 6Q(-3) - 6 - 2 = -16 - 6Q(-3) = -16 - 6 \times (-4) = 8$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x+2$  برابر ۸ است.

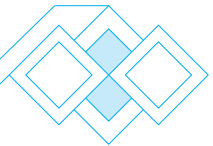
۱۷۱۰- گزینه ۲ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های  $P(x)+x$  و  $Q(x)-x$  بر  $x+2$  به ترتیب برابر ۱ و  $-2$  است، پس

$$P(-2) - 2 = 1 \Rightarrow P(-2) = 3$$

$$Q(-2) - (-2) = -2 \Rightarrow Q(-2) = -4$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $kP^2(x) + xQ(x) + 1$  بر  $x+2$  برابر است با  $kP^2(-2) + (-2)Q(-2) + 1 = 9k + 8 + 1 = 9k + 9$ . چون چندجمله‌ای داده شده بر  $x+2$  بخش پذیر است پس این باقی‌مانده برابر صفر است، بنابراین

$$9k + 9 = 0 \Rightarrow k = -1$$



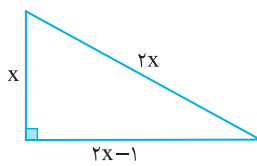
۱۷۱۹- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر و بنابر قضیه فیثاغورس، معادله

$$(2x)^2 = x^2 + (2x-1)^2$$

بنابراین  
 $4x^2 = x^2 + 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{3}, x = 2 + \sqrt{3}$   
 چون  $2x-1$  اندازه یکی از ضلع‌های مثلث است، پس  $2x-1 > 0$ ، یعنی  $x > \frac{1}{2}$ . بنابراین  $x = 2 - \sqrt{3}$  قابل قبول نیست و در نتیجه  $x = 2 + \sqrt{3}$  از

طرف دیگر محیط مثلث برابر است با

$$P = x + 2x + 2x - 1 = 5x - 1 = 5(2 + \sqrt{3}) - 1 = 9 + 5\sqrt{3}$$



۱۷۲۰- گزینه ۲ این دو عدد را  $x$  و  $x+2$  در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$x^3 - (x+2)^3 = 488 \Rightarrow x^3 - x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 488$$

$$-6x^2 - 12x - 8 = 488 \Rightarrow 6x^2 + 12x + 496 = 0$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+10) = 0 \Rightarrow x = 8, x = -10$$

چون عددها طبیعی و زوج هستند، پس  $x = -10$  قابل قبول نیست. بنابراین  $x = 8$  و دو عدد مورد نظر ۸ و ۱۰ هستند و تفاضل مربعات آن‌ها برابر  $10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$ ، یعنی ۳۶ است.

۱۷۲۱- گزینه ۲ دلتای معادله باید برابر با صفر باشد:

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4m(m+1) = 4(m+1)(m+1-m) = 4(m+1) = 0$$

$$m = -1 \text{ بنابراین}$$

۱۷۲۲- گزینه ۲ اگر معادله حداکثر یک جواب حقیقی داشته باشد، باید  $\Delta \leq 0$ ، پس

$$\Delta = 36 - 4 \times 4(k-2) \leq 0 \Rightarrow 68 - 16k \leq 0 \Rightarrow k \geq \frac{17}{4}$$

پس حداقل مقدار  $k$  برابر  $\frac{17}{4}$  است.

۱۷۲۳- گزینه ۲ چون معادله  $x^2 + 2x + b = 0$  دو جواب حقیقی دارد، پس

$$\Delta = 4 - 4b > 0 \Rightarrow b < 1$$

$$\Delta = 36 - 4(b+8) = 4 - 4b > 0 \Rightarrow b < 1$$

۱۷۲۴- گزینه ۲ راه‌حل اول

$$x^2 + (m-1)x + m - 2m^2 = 0$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 4(m-2m^2) = m^2 - 2m + 1 - 4m + 8m^2 = 9m^2 - 6m + 1 = (3m-1)^2$$

$$= 9m^2 - 6m + 1 = (3m-1)^2$$

$$x = \frac{(1-m) \pm \sqrt{(3m-1)^2}}{2} = \frac{(1-m) \pm (3m-1)}{2} \Rightarrow x_1 = 1-2m, x_2 = m$$

حالت اول

$$x_1 = 1-2m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}, x_2 = m < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 2$$

۱۷۱۱- گزینه ۳ چون معادله ریشه مضاعف دارد، پس  $\Delta = 0$ . در نتیجه

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 2^2 - 4 \times 2 \times (k-2) = 0 \Rightarrow 4 - 8(k-2) = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

۱۷۱۲- گزینه ۴ دلتای معادله باید مثبت باشد:

$$\Delta = 4k^2 - k = k(4k-1) > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{4} \text{ یا } k < 0$$

بنابراین  $k$  متعلق به مجموعه  $\mathbb{R} - [0, \frac{1}{4}]$  است.

۱۷۱۳- گزینه ۳ چون معادله  $x^2 - 4x + k - 1 = 0$  جواب حقیقی ندارد، پس

$$\Delta = 16 - 4(k-1) < 0 \Rightarrow k-1 > 4 \Rightarrow k > 5$$

در معادله  $x^2 + 2x - k + 6 = 0$  مقدار  $\Delta$  را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = 4 - 4(-k+6) = 4k - 20 = 4(k-5)$$

چون  $k > 5$ ، پس  $4(k-5) > 0$  و در نتیجه این معادله دو جواب حقیقی دارد.

۱۷۱۴- گزینه ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{5}) = 0 \xrightarrow{x_1 < x_2} x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{5}$$

$$x_1^2 + x_2^4 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^4 = 2 + 25 = 27$$

۱۷۱۵- گزینه ۱ چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از

جواب‌های معادله برابر ۱ است و دیگری  $-\frac{\sqrt{12}}{3}$ . چون  $x_1 < x_2$ ، بنابراین

$$x_1 = -\frac{\sqrt{12}}{3}, x_2 = 1 \Rightarrow 3x_1 + x_2 = 1 - \sqrt{12}$$

۱۷۱۶- گزینه ۳ چون  $a$  جواب معادله  $x^2 - x - 5 = 0$  است، پس در این

معادله صدق می‌کند، یعنی

$$a^2 - a - 5 = 0 \Rightarrow a^2 - a = 5$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود  $b^2 - b = 5$ . بنابراین

$$(a^2 - a - 2)(b^2 - b + 2) = (5 - 2)(5 + 2) = 21$$

۱۷۱۷- گزینه ۱ اگر اندازه طول مستطیل را  $y$  و اندازه عرض آن را  $x$

فرض کنیم، اندازه قطر آن می‌شود  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . پس  $y = 4 + x$  و  $x^2 + y^2 = 30$  در نتیجه

$$x^2 + (4+x)^2 = 30 \Rightarrow x^2 + 16 + 8x + x^2 = 30$$

$$x^2 + 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = -2 + \sqrt{11}, x = -2 - \sqrt{11}$$

اگر  $x = -2 - \sqrt{11}$ ،  $x$  عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. پس

$x = -2 + \sqrt{11}$  و در نتیجه  $y = 4 + (-2 + \sqrt{11}) = 2 + \sqrt{11}$ . بنابراین

مساحت مستطیل برابر است با

$$S = xy = (-2 + \sqrt{11})(2 + \sqrt{11}) = 11 - 4 = 7$$

۱۷۱۸- گزینه ۱ دو عدد را  $x$  و  $y$  می‌نامیم. پس  $\frac{y}{x} = 4$  و

بنابراین  $xy = x + y + 6$

$$x(4x) = x + 4x + 6 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 + 96 = 121 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 11}{8} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\frac{3}{4}$$

بنابراین  $y = 8$  و در نتیجه  $y - x = 6$ .

## حالت دوم

$$x_1 = 1 - 2m < 2 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}, x_2 = m < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$

پس می‌توان گفت  $m \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$ .

**راه‌حل دوم** اگر معادله را به صورت  $x^2 + (m-1)x - m(2m-1) = 0$  بنویسیم، به کمک تجزیه می‌توانیم آن را حل کنیم. در واقع به دنبال دو عدد هستیم که حاصل ضربشان  $-m(2m-1)$  و حاصل جمعشان  $m-1$  باشد. پس یکی از این دو عدد  $2m-1$  و دیگر  $-m$  است. بنابراین  $(x-m)(x+2m-1) = 0$ . پس جواب‌های معادله  $x_1 = 1-2m$  و  $x_2 = m$  هستند. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

$$\text{حالت اول} \quad x_1 = 1-2m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}, \quad x_2 = m < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 2$$

$$\text{حالت دوم} \quad x_1 = 1-2m < 2 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}, \quad x_2 = m < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$

بنابراین  $m \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$ .

**۱۷۲۵- گزینه ۱** مجموع ضرایب معادله برابر است با  $2-m+m-2=0$ . پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است.

**۱۷۲۶- گزینه ۲** در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $a-b+c=0$ ، آن‌گاه

جواب‌های معادله  $x = -\frac{c}{a}$  و  $x = -1$  هستند.

در معادله  $(\sin^2 \alpha)x^2 + x + \cos^2 \alpha = 0$ ،

$$a = \sin^2 \alpha, b = 1, c = \cos^2 \alpha \Rightarrow a - b + c = \cos^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha = 0$$

بنابراین  $x_1 = -1$  و  $x_2 = -\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\cot^2 \alpha$  توجه کنید که چون

$0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ، پس  $\cot \alpha > 1$  و در نتیجه  $-\cot^2 \alpha < -1$ ، بنابراین

$$x_2^2 - x_1 = (-1)^2 - (-\cot^2 \alpha) = 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

**۱۷۲۷- گزینه ۲** با توجه به شکل واضح است که ابعاد قاب  $12+2x$  و  $6+4x$  است. بنابراین مساحت قاب برابر است با  $(6+4x)(12+2x)$ . پس

$$(6+4x)(12+2x) = 104 \Rightarrow 2x^2 + 15x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = -8$$

$x = -8$  قابل قبول نیست. پس  $x = \frac{1}{2}$  و

محیط قاب برابر است با

$$P = 2(6+4x+12+2x)$$

$$= 2(6x+18) = 42 \text{ cm}$$

**۱۷۲۸- گزینه ۱** سن کنونی مریم را  $x$  و سن کنونی برادرش را  $y$  در نظر

می‌گیریم. در این صورت  $x-2=7(y-2)$  و  $x=y^2$ . اگر در معادله اول به

جای  $x$  قرار دهیم  $y^2$ ، به دست می‌آید:

$$y^2 - 2 = 7(y-2) \Rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0 \Rightarrow (y-3)(y-4) = 0 \Rightarrow y = 3, 4$$

اگر  $y = 3$ ، آن‌گاه  $x = 9$  یعنی مریم و برادرش در مجموع ۱۲ سال دارند که در گزینه‌ها نیست. اگر  $y = 4$ ، آن‌گاه  $x = 16$  یعنی مریم و برادرش در

مجموع ۲۰ سال دارند که در گزینه (۱) آمده است.

**۱۷۲۹- گزینه ۳** اگر طول ضلع مربع  $x$  باشد، اندازه مساحت آن  $x^2$  و طول

قطر آن  $\sqrt{2}x$  است. بنابراین طول ضلع مربع را از معادله زیر به دست می‌آوریم:

$$x^2 + \sqrt{2}x = \frac{y}{2} \Rightarrow x^2 + \sqrt{2}x - \frac{y}{2} = 0$$

$$x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

محیط مربع  $4x$  است که می‌شود  $8 - 2\sqrt{2}$ .

**۱۷۳۰- گزینه ۳** طول یک تکه را  $x$  بگیرد. در این صورت طول تکه دیگر

$20-x$  است. بنابراین طول هر ضلع مربع نظیر تکه اول  $\frac{x}{4}$  و طول هر ضلع

مربع نظیر تکه دوم  $\frac{20-x}{4}$  است. در نتیجه، مساحت این مربع‌ها  $(\frac{x}{4})^2$  و

$(\frac{20-x}{4})^2$  است. به این ترتیب،

$$(\frac{x}{4})^2 + (\frac{20-x}{4})^2 = 13 \Rightarrow x^2 - 20x + 96 = 0 \Rightarrow x = 12, x = 8$$

چون  $12+8=20$ ، پس، طول یکی از تکه‌ها ۱۲ سانتی‌متر و طول تکه دیگر ۸ سانتی‌متر و اختلاف اندازه‌های آن‌ها برابر ۴ سانتی‌متر است.

**۱۷۳۱- گزینه ۲** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$\alpha + \beta = m + 1 = 5 \Rightarrow m = 4$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر است با  $\alpha\beta = -2m - 1 = -9$ .

**۱۷۳۲- گزینه ۳** توجه کنید که  $x_1 x_2 = -5$  و  $x_1 + x_2 = 3$ . در نتیجه

$$x_1(x_2 - 2) + x_2(x_1 - 2) = 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 2(-5) - 2(3) = -16$$

**۱۷۳۳- گزینه ۴** جواب‌های معادله  $x^2 - 2x - 5 = 0$  را با  $\alpha$  و  $\beta$  نشان

می‌دهیم. در نتیجه باید حاصل  $(\alpha-2)(\beta-2) = (2-\alpha)(2-\beta)$  را بیابیم.

برای این کار می‌توانیم یکی از روش‌های زیر را به کار ببریم.

**راه‌حل اول** دقت کنید که  $(\alpha-2)(\beta-2) = \alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 4$ . از طرف

دیگر،  $\alpha + \beta = 2$  و  $\alpha\beta = -5$ . بنابراین  $(\alpha-2)(\beta-2) = -5 - 4 + 4 = -5$ ،

پس حاصل ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

**راه‌حل دوم** می‌دانیم  $x^2 - 2x - 5 = (x-\alpha)(x-\beta)$ . اگر در این تساوی به

جای  $x$  قرار دهیم ۲، به دست می‌آید  $-5 = (2-\alpha)(2-\beta)$ . چون  $\alpha\beta = -5$ ،

پس حاصل ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

**۱۷۳۴- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = -(k+1) = -1-k, \quad x_1 x_2 = 8$$

بنابراین

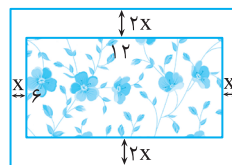
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{-1-k}{8} = -\frac{3}{4}$$

بنابراین  $k = 5$ .

**۱۷۳۵- گزینه ۳** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه  $\alpha = \frac{2}{\beta}$  و

در نتیجه  $\alpha\beta = 2$ . بنابراین

$$\frac{m-1}{2} = 2 \Rightarrow m-1 = 4 \Rightarrow m = 5$$



۱۷۴۱- گزینه ۳ مجموع جواب‌های معادله برابر  $\frac{m^2}{m}$  و حاصل ضرب

آن‌ها برابر  $\frac{1}{m}$  است. بنابراین

$$\frac{m^2}{m} = \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

اگر  $m=1$ ، آن‌گاه معادله به صورت  $x^2 - x + 1 = 0$  است که جواب ندارد چون  $\Delta = -3 < 0$ . اگر  $m=-1$ ، آن‌گاه معادله به صورت  $-x^2 - x + 1 = 0$  است که دو جواب دارد.

۱۷۴۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر  $\frac{3}{2}$

و حاصل ضرب آن‌ها برابر  $-\frac{5}{2}$  است. بنابراین

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{15}{4}$$

۱۷۴۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$  و  $\alpha\beta = -\frac{5}{2}$ . بنابراین

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{1}{4} - 2(-\frac{5}{2})}{-\frac{5}{2}} = -\frac{21}{10}$$

۱۷۴۴- گزینه ۳ توجه کنید که  $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ . بنابراین

$$3 = \frac{\sqrt{5^2 - 4(k+1)(-2)}}{|-2|} \Rightarrow 6 = \sqrt{8k + 33}$$

$$6^2 = 8k + 33 \Rightarrow 8k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{8}$$

۱۷۴۵- گزینه ۳ توجه کنید که  $x_1 + x_2 = 1$  و

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{1 - 4(2k - 3)} = \sqrt{13 - 8k}$$

از طرف دیگر،

$$x_1^2 - x_2^2 = 6 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 6 \Rightarrow x_1 - x_2 = 6$$

پس  $x_1 - x_2 > 0$ ، در نتیجه

$$\sqrt{13 - 8k} = 6 \Rightarrow 13 - 8k = 36 \Rightarrow k = -\frac{23}{8}$$

۱۷۴۶- گزینه ۳ توجه کنید که  $x_1 + x_2 = 15$  و  $x_1 x_2 = 9$ . بنابراین

$x_1, x_2 > 0$

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5$$

۱۷۴۷- گزینه ۴ توجه کنید که  $x_1 + x_2 = -(\frac{-6}{3}) = 2$  و  $x_1 x_2 = -\frac{4}{3}$ .

از طرف دیگر،

$$S = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 = 4$$

$$P = (x_1^2 + x_1 x_2)(x_2^2 + x_1 x_2) = (x_1(x_1 + x_2))(x_2(x_1 + x_2))$$

$$= x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 = -\frac{4}{3} \times 4 = -\frac{16}{3}$$

بنابراین معادله مورد نظر  $x^2 - 4x - \frac{16}{3} = 0$  یا  $3x^2 - 12x - 16 = 0$  است.

۱۷۳۶- گزینه ۲ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه  $\alpha = \beta^2$ .

از طرف دیگر،

$$\alpha\beta = -\frac{27}{8} \Rightarrow \beta^3 = -\frac{27}{8} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2}$$

پس  $\alpha = \frac{9}{4}$ ، همچنین  $\alpha + \beta = -\frac{m}{8}$ . بنابراین

$$\frac{9}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{m}{8} \Rightarrow m = -6$$

۱۷۳۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) \quad (1)$$

از طرف دیگر،  $x_1 + x_2 = 2$  و  $x_1 x_2 = k$ . در نتیجه، از تساوی (۱) و اینکه

$$x_1^3 + x_2^3 = 6 \text{ به دست می‌آید } 8 = 6 + 6k \text{، بنابراین } k = \frac{1}{3}$$

۱۷۳۸- گزینه ۴ توجه کنید که  $x_1 + x_2 = 3k$  و  $x_1 x_2 = 9$ . از طرف

دیگر،

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 6 \Rightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 6^2$$

$$x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 36 \Rightarrow 3k - 2\sqrt{9} = 36 \Rightarrow k = 14$$

۱۷۳۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\alpha + \beta = 3 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 = 9, \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{13} \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = 13$$

پس معادله‌ای مورد نظر است که جواب‌های آن ۹ و ۱۳ باشند. چون مجموع این جواب‌ها برابر ۲۲ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱۱۷ است، پس معادله مورد نظر به صورت زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 22x + 117 = 0$$

۱۷۴۰- گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا جواب‌های معادله  $2x^2 + 3x - 9 = 0$

را می‌یابیم:

$$2x^2 + 3x - 9 = 0 \Rightarrow (2x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -3$$

بنابراین جواب‌های معادله  $9x^2 - ax + b = 0$  به صورت زیر هستند:

$$\alpha = \frac{1}{x_1^2} - 3 = \frac{4}{9} - 3 = -\frac{23}{9}, \quad \beta = \frac{1}{x_2^2} - 3 = \frac{1}{9} - 3 = -\frac{26}{9}$$

از طرف دیگر،  $\alpha + \beta = \frac{a}{9}$ . بنابراین

$$\frac{a}{9} = -\frac{49}{9} \Rightarrow a = -49$$

راه‌حل دوم جواب‌های معادله  $2x^2 + 3x - 9 = 0$  را با  $\alpha$  و  $\beta$  نشان

می‌دهیم. اگر جواب‌های معادله  $9x^2 - ax + b = 0$  را با  $t$  و  $z$  نشان دهیم،

$$\text{آن‌گاه } t = \frac{1}{\beta^2} - 3 \text{ و } z = \frac{1}{\alpha^2} - 3$$

توجه کنید که  $\alpha + \beta = -\frac{3}{2}$  چون  $z + t = \frac{a}{9} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - 6 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2}$

و  $\alpha\beta = -\frac{9}{2}$ ، پس  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$  بنابراین

$$\frac{45}{4} = \frac{a}{9} - 6 = \frac{5}{9} - 6 \Rightarrow a = -49$$

بنابراین  $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (4, +\infty)$ . همچنین مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها باید مثبت باشند:  $\frac{a+2}{a} > 0$  و  $\frac{9}{4a} > 0$ . پس  $a > 0$ . در نتیجه  $a \in (0, 1) \cup (4, +\infty)$  یعنی مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را نمی‌تواند داشته باشد.

**گزینه ۱ (۱۷۵۵)** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله باشند، باید شرط‌های  $\Delta > 0$ ،  $\alpha\beta > 0$  و  $\alpha + \beta < 0$  برقرار باشند تا معادله دو جواب منفی داشته باشد. در نتیجه

$$\Delta = m^2 - 8(m-2) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m + 16 > 0 \Rightarrow (m-4)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 4$$

$$\alpha + \beta < 0 \Rightarrow \frac{-m}{2} < 0 \Rightarrow m > 0, \quad \alpha\beta > 0 \Rightarrow \frac{m-2}{2} > 0 \Rightarrow m > 2$$

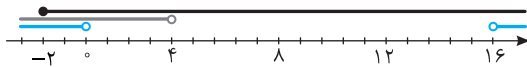
بنابراین  $m \in (2, +\infty) - \{4\}$ .

**گزینه ۲ (۱۷۵۶)** برای اینکه معادله دو جواب داشته باشد باید

$\Delta > 0 \Rightarrow (m-4)^2 - 4(2m+4) > 0 \Rightarrow m^2 - 16m > 0 \Rightarrow m < 0$  یا  $m > 16$   
برای اینکه دو جواب معادله نامنفی باشند، باید مجموع آن‌ها مثبت و حاصل ضربشان نامنفی باشد:

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow 2m+4 \geq 0 \Rightarrow m \geq -2, \quad -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 4-m > 0 \Rightarrow m < 4$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک جواب‌های به دست آمده برای  $m$  به صورت  $-2 \leq m < 0$  است و در نتیجه  $m$  می‌تواند مقادیر صحیح  $-2$  و  $-1$  را داشته باشد.



**گزینه ۳ (۱۷۵۷)** معادله مورد نظر همواره دو جواب دارد  $(\Delta = m^2 + 8 > 0)$ . اگر معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع آن‌ها منفی و حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد. بنابراین

$$m-2 < 0 \Rightarrow m < 2, \quad -(m+1) > 0 \Rightarrow m < -1$$

$$. \text{ پس } m < -1$$

**گزینه ۳ (۱۷۵۸)** توجه کنید که  $\Delta = (2m+1)^2$ . چون معادله دو جواب دارد، باید  $m \neq -\frac{1}{2}$ . چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت کوچک‌تر

است، پس مجموع جواب‌ها مثبت است و چون جواب‌ها مختلف‌العلامت هستند، پس حاصل ضرب آن‌ها منفی است. بنابراین

$$x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{m} > 0 \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{2}, \quad x_1 x_2 = -\frac{2}{m} < 0 \Rightarrow m > 0$$

$$\text{بنابراین } 0 < m < \frac{1}{2}$$

**گزینه ۲ (۱۷۵۹)** ابتدا توجه کنید که باید  $\Delta \geq 0$ . پس

$$4 - 4m + 8 \geq 0 \Rightarrow m \leq 3$$

از طرف دیگر، اگر معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، آن‌گاه

$$\frac{c}{a} \leq 0 \Rightarrow m-2 \leq 0 \Rightarrow m \leq 2$$

همچنین، ممکن است معادله دو جواب نامثبت داشته باشد، که در این صورت باید مجموع آن‌ها نامثبت باشد، یعنی  $-\frac{b}{a} \leq 0$ ، که ممکن نیست، زیرا  $-\frac{b}{a} = 2$ .

بنابراین حداکثر مقدار  $m$  برابر ۲ است.

**گزینه ۱ (۱۷۴۸)** اگر جواب‌های معادله  $x^2 - 3x - 5 = 0$  را  $\alpha$  و  $\beta$  بنامیم، آن‌گاه  $\alpha + \beta = 3$  و  $\alpha\beta = -5$ . جواب‌های معادله مورد نظر  $\alpha^3$  و  $\beta^3$  هستند. بنابراین

$$S = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 27 - 3 \times (-5) \times 3 = 72$$

$$P = \alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = (-5)^3 = -125$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 72x - 125 = 0$$

**گزینه ۱ (۱۷۴۹)** ابتدا توجه کنید که  $\alpha + \beta = -1$  و  $\alpha\beta = -3$ . بنابراین مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$S = \alpha^2 + \frac{1}{\beta} + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 1 + 6 + \frac{-1}{-3} = \frac{22}{3}$$

$$P = (\alpha^2 + \frac{1}{\beta})(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}) = (\alpha\beta)^2 + \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha\beta} = 9 - 1 - \frac{1}{-3} = \frac{23}{3}$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{23}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 22x + 23 = 0$$

**گزینه ۳ (۱۷۵۰)** اگر دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = -1 \\ (x_1 + x_2) - x_1 x_2 = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S + P = -1 \\ S - P = -11 \end{cases}$$

را حل کنیم، به دست می‌آید  $S = -6$  و  $P = 5$ . بنابراین  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله  $x^2 + 6x + 5 = 0$  هستند.

**گزینه ۲ (۱۷۵۱)** کافی است در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  نابرابری  $\frac{c}{a} < 0$  برقرار باشد تا معادله دو جواب داشته باشد که یکی مثبت و یکی منفی

است. پس  $\frac{m-4}{m+2} < 0$  در نتیجه  $-2 < m < 4$ . پس  $m$  می‌تواند مقادیر صحیح  $-1$ ،  $0$ ،  $1$ ،  $2$  و  $3$  باشد.

**گزینه ۲ (۱۷۵۲)** اگر  $a = 0$ ، آن‌گاه معادله فقط یک جواب دارد که قابل قبول نیست. اگر  $a \neq 0$ ، آن‌گاه حاصل ضرب جواب‌ها برابر است با  $\frac{1-a^2}{a^2}$  که

باید منفی باشد. پس

$$\frac{1-a^2}{a^2} < 0 \Rightarrow 1-a^2 < 0 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow |a| > 1$$

**گزینه ۱ (۱۷۵۳)** توجه کنید که

$$\Delta = 4m^2 + 4m + 4 = (2m+1)^2 + 3 > 0$$

پس معادله حتماً دو جواب دارد. برای اینکه جواب‌ها هم علامت باشند، کافی است حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد، پس

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -m-1 > 0 \Rightarrow m < -1$$

**گزینه ۴ (۱۷۵۴)** ابتدا توجه کنید که اگر  $a = 0$ ، آن‌گاه معادله به صورت  $-8x + 9 = 0$  درمی‌آید که فقط یک جواب دارد. با شرط  $a \neq 0$  باید دلتای معادله مثبت باشد:

$$\Delta = 16(a+2)^2 - 16a \times 9 = 16((a+2)^2 - 9a) = 16(a^2 - 5a + 4) = 16(a-1)(a-4) > 0$$

۱۷۶۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\Delta = 4m^2 + 4m + 8 = (2m+1)^2 + 7 > 0$$

بنابراین معادله حتماً دو جواب دارد. از طرف دیگر، برای اینکه معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع جواب‌ها منفی و حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد. یعنی باید

$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow 2m < 0 \Rightarrow m < 0, \quad \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -m - 2 > 0 \Rightarrow m < -2$$

پس اگر  $m < -2$ ، معادله دو جواب منفی دارد. اکنون توجه کنید که اگر  $m = -2$ ، معادله به صورت  $x^2 + 4x = 0$  درمی‌آید که یک جواب آن  $x = 0$  و جواب دیگر  $x = -4$  است. پس در این حالت نیز معادله جواب مثبت ندارد. بنابراین اگر  $m > -2$ ، معادله یا دو جواب مثبت، یا دو جواب مختلف‌العلامت دارد، که در هر صورت یکی از جواب‌ها مثبت است.

۱۷۶۱- گزینه ۳ چون  $x = -1$  و  $x = \frac{1}{3}$  جواب‌های معادله هستند، پس

$$\begin{cases} 6\left(\frac{1}{3}\right) - 5\left(\frac{1}{9}\right) + a\left(\frac{1}{3}\right) + b = 0 \\ 6(-1) - 5 \times 1 - a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ a - b = -11 \end{cases}$$

بنابراین  $a = -8$  و  $b = 3$ . پس معادله به شکل  $6x^3 - 5x^2 - 8x + 3 = 0$  درمی‌آید که چون  $\frac{1}{3}$  و  $-1$  جواب‌های آن هستند، پس  $3x - 1$  و  $x + 1$  عامل‌های عبارت سمت چپ معادله هستند و به کمک تقسیم می‌توان نوشت  $(x+1)(3x-1)(2x-3) = 0$ . بنابراین جواب دیگر معادله  $x = \frac{3}{2}$  است. در

$$\text{نتیجه } k = \frac{3}{2} \text{ و } \frac{ab}{k} = \frac{(-8) \times 3}{\frac{3}{2}} = -16$$

۱۷۶۲- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^3 + 8 + x^2 - 5x - 14 = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) + (x+2)(x-7) = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4 + x - 7) = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2 - x - 3) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2, \quad x^2-x-3=0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

پس حاصل ضرب جواب‌های منفی معادله برابر است با

$$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)(-2) = \sqrt{13} - 1$$

۱۷۶۳- گزینه ۴ واضح است که  $x = -1$  جواب معادله است. پس

$x+1$  عامل عبارت سمت چپ معادله است

$$x^3 + x^2 + x^2 - mx - m - 1 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) + (x+1)(x-m-1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 + x - (m+1)) = 0$$

برای اینکه معادله سه جواب داشته باشد، باید معادله  $x^2 + x - (m+1) = 0$  دو جواب داشته باشد و هیچ یک از این جواب‌ها برابر  $-1$  نباشند. بنابراین

$$\Delta = 1 + 4(m+1) > 0 \Rightarrow 5 + 4m > 0 \Rightarrow m > -\frac{5}{4}$$

$$(-1)^2 - 1 - (m+1) \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$$

پس  $m \in \left(-\frac{5}{4}, +\infty\right) - \{-1\}$

۱۷۶۴- گزینه ۲ راه‌حل اول اگر فرض کنیم  $t = x^2 \geq 0$ ، معادله

به صورت  $t^2 - 5t - 3 = 0$  درمی‌آید که جواب‌های آن  $t = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$  هستند.

جواب  $\frac{5 - \sqrt{37}}{2}$  قابل قبول نیست چون عددی منفی است. بنابراین

$$x^2 = \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{37}}{2}}$$

یعنی معادله دو جواب دارد.

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم  $t = x^2 \geq 0$ ، معادله به صورت  $t^2 - 5t - 3 = 0$  در

می‌آید، که در آن  $\frac{c}{a} < 0$  است. پس معادله دو جواب مختلف‌العلامت دارد.

که با توجه به فرض  $t \geq 0$ ، جواب منفی غیرقابل قبول و جواب مثبت قابل قبول خواهد بود و  $x = \pm \sqrt{t}$ . پس معادله داده شده دو جواب دارد.

۱۷۶۵- گزینه ۳ اگر فرض کنیم  $x^2 = t$ ، معادله مورد نظر می‌شود

$$t^2 - 4t - 12 = 0$$

$$t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t-6)(t+2) = 0$$

$$t = -2 \quad (\text{غ.ق.ق.}), \quad t = 6 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm \sqrt{6}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر  $-6$  است.

۱۷۶۶- گزینه ۱ فرض می‌کنیم  $x^2 = t$ . در این صورت معادله مورد

نظر می‌شود  $t^2 + (2m-1)t - 2m = 0$ . چون معادله اصلی چهار جواب دارد،

پس این معادله درجه دوم دو جواب مثبت دارد. بنابراین

$$\Delta > 0 \Rightarrow (2m-1)^2 + 8m > 0 \Rightarrow (2m+1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -2m > 0 \Rightarrow m < 0$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -(2m-1) > 0 \Rightarrow 2m-1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$$

بنابراین مجموعه مقادیر  $m$  به صورت  $\{-\frac{1}{2}\} - (-\infty, 0)$  است.

۱۷۶۷- گزینه ۳ اگر فرض کنیم  $x^2 = t$ ، به معادله  $t^2 - kt + \frac{3-2k}{4} = 0$

می‌رسیم. اگر این معادله فقط یک جواب مثبت مانند  $t_1$  داشته باشد، معادله

اصلی دو جواب به صورت  $x = \pm \sqrt{t_1}$  دارد:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ t_1 = -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 - (3-2k) = 0 \\ \frac{k}{2} > 0 \Rightarrow k > 0 \end{cases}$$

$$k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = -3 \quad (\text{غ.ق.ق.}), \quad k = 1$$

همچنین اگر معادله درجه دوم یک جواب منفی و یک جواب مثبت داشته باشد،

جواب منفی قابل قبول نیست، چون  $x^2$  نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین معادله

اصلی دو جواب به صورت  $x = \pm \sqrt{t}$  دارد، پس

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{3-2k}{4} < 0 \Rightarrow 3-2k < 0 \Rightarrow k > \frac{3}{2}$$

بنابراین  $k > \frac{3}{2}$  یا  $k = 1$  جواب مسئله است.

چون  $x=5$  جواب معادله است، پس

$$25 - 5(a+7) + 6a + 2 = 0 \Rightarrow a = 8$$

چون مجموع جواب‌های معادله (۱) برابر  $a+7$  است، پس

$$a+7=5+x_1 \Rightarrow 15=5+x_1 \Rightarrow x_1=10$$

یعنی جواب دیگر معادله ۱۰ است که مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نمی‌کند و قابل قبول است.

**۱۷۷۵- گزینه ۲** معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{2x-2a+x+3}{(x+3)(x-a)} = 4 \Rightarrow \frac{3x-2a+3}{(x+3)(x-a)} = 4$$

$$3x-2a+3=4x^2+(12-4a)x-12a \Rightarrow 4x^2+(9-4a)x-10a-3=0$$

حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر  $\frac{-10a-3}{4}$  است. پس

$$\frac{-10a-3}{4} = \frac{y}{4} \Rightarrow -10a=10 \Rightarrow a=-1$$

**۱۷۷۶- گزینه ۲** دو طرف معادله را در  $x^2-1$  ضرب می‌کنیم:

$$x-1-2=a(x^2-1) \Rightarrow ax^2-x+3-a=0 \quad (1)$$

اگر در معادله (۱) شرط  $\Delta < 0$  برقرار باشد، معادله جواب ندارد. بنابراین

$$\Delta = 1-4a(3-a) < 0 \Rightarrow 4a^2-12a+1 < 0 \Rightarrow \frac{3-2\sqrt{2}}{2} < a < \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

پس به ازای اعداد طبیعی  $a=1$  و  $a=2$  معادله جواب ندارد.

توجه کنید که در حالت‌های زیر هم معادله اصلی جواب ندارد ولی این حالت‌ها در این مسئله اتفاق نمی‌افتند.

(۱)  $x=1$  ریشه مضاعف معادله (۱) باشد.

(۲)  $x=-1$  ریشه مضاعف معادله (۲) باشد.

(۳)  $x=1$  و  $x=-1$  هر دو جواب‌های معادله (۱) باشند.

**۱۷۷۷- گزینه ۴** فرض می‌کنیم  $\frac{2x+1}{x}=t$ . در این صورت معادله مورد

نظر به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$t + \frac{-6}{t} = 5 \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0 \Rightarrow t = -1, t = 6$$

بنابراین

$$t = -1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$t = 6 \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

از آنجایی که هیچ کدام از این دو مقدار باعث صفر شدن مخرج‌ها در معادله اصلی نمی‌شوند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل ضرب جواب‌های

$$\text{معادله مورد نظر برابر است با } -\frac{1}{12}$$

**۱۷۷۸- گزینه ۱** اگر این عدد  $x$  باشد، آن‌گاه  $x + \frac{1}{x} = 4$ . بنابراین

$$x^2 + 1 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

بنابراین دو عدد  $2 + \sqrt{3}$  و  $2 - \sqrt{3}$  شرط مورد نظر را دارند که  $2 - \sqrt{3}$

کوچک‌ترین عددی است که این شرط را دارد.

**۱۷۶۸- گزینه ۳** اگر فرض کنیم  $x^2 = t$ . آن‌گاه  $x = \pm\sqrt{t}$ .  $x \geq 0$  و

معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0 \quad (*)$$

در این معادله  $\Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 4) = 16 > 0$ . بنابراین معادله (\*) به ازای

هر مقدار  $m$  دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادله اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت. بنابراین اگر  $t_1$  و  $t_2$

جواب‌های معادله (\*) باشند، باید

$$t_1 + t_2 < 0 \Rightarrow 2m < 0 \Rightarrow m < 0$$

$$t_1 t_2 > 0 \Rightarrow m^2 - 4 > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 2$$

بنابراین کافی است  $m < -2$  تا معادله اولیه جواب حقیقی نداشته باشد.

**۱۷۶۹- گزینه ۲** فرض می‌کنیم  $x^2 + x = t$ . در این صورت

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t-6)(t-12) = 0$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$$

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x-3)(x+4) = 0 \Rightarrow x_3 = 3, x_4 = -4$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

**۱۷۷۰- گزینه ۱** فرض می‌کنیم  $x^2 - 7x + 11 = t$ . در نتیجه  $t^2 = 3t + 4$ .

بنابراین  $t = -1, 4$ ، پس به معادله‌های زیر می‌رسیم

$$x^2 - 7x + 11 = -1 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3, 4$$

$$x^2 - 7x + 11 = 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}$$

پس معادله مورد نظر چهار جواب دارد.

**۱۷۷۱- گزینه ۱** معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x^2 + 1 = 2(x+1) \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

جواب‌های معادله بالا  $x = 1 + \sqrt{2}$  و  $x = 1 - \sqrt{2}$  هستند. پس جواب بزرگ‌تر معادله  $1 + \sqrt{2}$  است.

**۱۷۷۲- گزینه ۲** معادله را به شکل  $\frac{x}{x^4 - x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x^3 - 1}$

می‌نویسیم. بنابراین

$$x^4 - x = x^4 - x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1$$

**۱۷۷۳- گزینه ۳** طرفین معادله را در  $(x-1)(x+1)$  ضرب و آن را ساده

می‌کنیم:

$$x^2 + 1 + 2(x-1) = 2(x-1)(x+1) \Rightarrow 3x - 1 = 2x^2 - 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

معادله بالا دو جواب دارد که ۱ و -۱ از آن‌ها نیستند و مجموع آن‌ها برابر  $\frac{3}{2}$  است.

**۱۷۷۴- گزینه ۳** فرض کنید  $x_1$  جواب دیگر معادله باشد. ابتدا معادله

داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{5x-2-4a}{x^2 - (a+2)x + 2a} = 1 \Rightarrow x^2 - (a+7)x + 6a + 2 = 0 \quad (1)$$



اگر  $\sqrt[3]{2a+1}$  ریشهٔ مخرج کسر در معادلهٔ اصلی باشد، قابل قبول نیست. در غیر این صورت قابل قبول است و معادله یک جواب دارد. ریشهٔ مخرج کسر  $x=1$  است، پس

$$\sqrt[3]{2a+1}=1 \Rightarrow 2a+1=1 \Rightarrow a=0$$

توجه کنید که اگر  $a=0$ ، آن‌گاه معادله به صورت  $x^2+x+1=0$  درمی‌آید که جواب ندارد. همچنین اگر  $a=-1$ ، آن‌گاه سمت راست معادله تعریف نمی‌شود. بنابراین برای  $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$  معادله همواره یک جواب دارد.

**راه‌حل دوم** چون  $a+1$  در مخرج کسر است، پس  $a \neq -1$ . بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. برای یافتن گزینهٔ صحیح کافی است  $a=0$  را امتحان کنیم.

به ازای  $a=0$  معادله می‌شود  $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=0$  که جواب ندارد. پس  $a \neq 0$ .

**۱۷۸۵- گزینه ۲** معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{5}{(x-1)(x+4)} - \frac{3}{(x+1)(x+4)} = k$$

$$\frac{5(x+1) - 3(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+4)} = k \Rightarrow \frac{2(x+4)}{(x-1)(x+1)(x+4)} = k$$

$$k(x^2-1) = 2 \Rightarrow kx^2 - k - 2 = 0$$

حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر  $\frac{-k-2}{k}$  است. پس

$$\frac{-k-2}{k} = -4 \Rightarrow 4k = k+2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

**۱۷۸۶- گزینه ۲** اگر فرض کنیم  $(x+\frac{2}{x})^2 = t$ ، معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^2 - 9t - 10 = 0 \Rightarrow t = -1, t = 10$$

چون  $t > 0$ ، پس  $t = -1$  غیر قابل قبول است. اگر  $t = 10$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x + \frac{2}{x} = \sqrt{10} \Rightarrow x^2 - \sqrt{10}x + 2 = 0, \Delta = 2 \\ x + \frac{2}{x} = -\sqrt{10} \Rightarrow x^2 + \sqrt{10}x + 2 = 0, \Delta = 2 \end{cases}$$

هر کدام از معادله‌های بالا دو جواب غیرصفر دارند و جواب‌های معادلهٔ اول قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ دوم هستند. پس معادلهٔ اصلی چهار جواب دارد.

**۱۷۸۷- گزینه ۴** معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{21}{x^2+4x+10} - (x^2+4x+10) + 10 = 6$$

اگر فرض کنیم  $x^2+4x+10 = t$ ، این معادله می‌شود

$$\frac{21}{t} - t + 4 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب در } t} 21 - t^2 + 4t = 0$$

$$t^2 - 4t - 21 = 0 \Rightarrow (t-7)(t+3) = 0 \Rightarrow t = -3, t = 7$$

بنابراین

$$t = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 10 = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 13 = 0 \quad (\Delta < 0) \text{ جواب ندارد.}$$

$$t = 7 \Rightarrow x^2 + 4x + 10 = 7 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -3$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر  $-4$  است.

**۱۷۷۹- گزینه ۲** فرض کنید زمان رفت برابر  $t$  و سرعت رفت برابر  $v$

باشد. در این صورت زمان برگشت برابر  $t + \frac{4}{9}$  و سرعت برگشت برابر  $v - 5$

است. چون فاصلهٔ دو شهر برابر  $200$  کیلومتر است، پس تساوی‌های  $200 = vt$

$$\text{و } 200 = (v-5)\left(t + \frac{4}{9}\right) \text{ برقرارند. بنابراین}$$

$$v = \frac{200}{t} \Rightarrow 200 = \left(\frac{200}{t} - 5\right)\left(t + \frac{4}{9}\right) \Rightarrow 200 = 200 + \frac{800}{9t} - 5t - \frac{200}{9}$$

$$800 - 45t^2 - 200t = 0 \Rightarrow 9t^2 + 4t - 160 = 0$$

$$(9t+40)(t-4) = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ ساعت}$$

بنابراین زمان رفت  $4$  ساعت است.

**۱۷۸۰- گزینه ۱** نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی برابر  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

است. اگر طول این مستطیل برابر  $x$  و عرض آن برابر  $y$  باشد، آن‌گاه

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)y$$

از طرف دیگر نسبت محیط به مساحت مستطیل برابر  $3 - \sqrt{5}$  است. بنابراین

$$\frac{2(x+y)}{xy} = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow 2\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)y + y\right) = (3 - \sqrt{5})xy$$

$$2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1\right) = (3 - \sqrt{5})x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+3}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{3 - \sqrt{5}} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{(3 + \sqrt{5})^2}{9 - 5} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$$

**۱۷۸۱- گزینه ۴** معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$(x-1)\left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5}\right) = 0 \Rightarrow (x-1)\left(\frac{x-5+x-3}{(x-3)(x-5)}\right) = 0$$

$$(x-1)\left(\frac{2x-8}{(x-3)(x-5)}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x-4)}{(x-3)(x-5)} = 0$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ مورد نظر  $1$  و  $4$  هستند و مجموع آن‌ها  $5$  است.

**۱۷۸۲- گزینه ۱** معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{x-12}{x^2+3x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x+3} = \frac{2x+6+5x}{x^2+3x} = \frac{7x+6}{x^2+3x}$$

در نتیجه، با فرض  $x \neq 0, -3$

$$x-12 = 7x+6 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow x = -3$$

که قابل قبول نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

**۱۷۸۳- گزینه ۳** معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم

$$\frac{3x-2-2a}{x^2-(a+2)x+2a} = 1 \Rightarrow x^2 - (a+5)x + 4a + 2 = 0 \quad (1)$$

چون  $x=6$  جواب معادله است، پس

$$36 - 6(a+5) + 4a + 2 = 0 \Rightarrow -2a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

چون مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر  $a+5=9$  است، پس جواب دیگر معادلهٔ مورد نظر برابر  $3$  است.

**۱۷۸۴- گزینه ۴** **راه‌حل اول** دو طرف معادلهٔ داده شده را در

$$(x-1)(x^2-x+1) \text{ ضرب می‌کنیم:}$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = \frac{a}{a+1}(x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^3 - 1 = \frac{a}{a+1}(x^3+1) \Rightarrow (a+1)x^3 - a - 1 = ax^3 + a$$

$$x^3 = 2a+1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2a+1}$$

اگر  $m = -2$ ، عبارت به صورت  $y = -2nx - 2$  است. چون  $x = 4$  ریشه عبارت است، پس  $-2 = -2n \times 4 - 2$ . در نتیجه  $n = -\frac{1}{4}$ ، بنابراین  $mn = \frac{1}{4}$ .

**گزینه ۱ - ۱۷۹۳** با توجه به جدول،  $x = 1$  و  $x = 2$  ریشه‌های عبارت هستند:

$$x = 1 \Rightarrow m + 2 - (m + 2)^2 + n = 0 \quad (*)$$

$$x = 2 \Rightarrow 4(m + 2) - 2(m + 2)^2 + n = 0$$

دو طرف تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$(m + 2)^2 - 3(m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2 \\ m + 2 = 3 \Rightarrow m = 1 \end{cases}$$

به ازای  $m = -2$  نتیجه می‌شود  $y = n$  که در این صورت علامت  $y$  ثابت است و به ازای  $m = 1$  از معادله (\*) مقدار  $n$  به دست می‌آید

$$3 - 9 + n = 0 \Rightarrow n = 6$$

**گزینه ۱ - ۱۷۹۴** راه حل اول ابتدا نامعادله‌ها را به صورت‌های زیر

بازنویسی می‌کنیم:

$$x - x^3 > 0 \Rightarrow x(1-x)(1+x) > 0, \quad x - x^2 < 0 \Rightarrow x(1-x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

در نتیجه مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر، با فرض  $x > 1$  یا  $x < 0$  با مجموعه جواب‌های نامعادله  $1 + x < 0$  که بازه  $(-\infty, -1)$  است، برابر است. اشتراک مجموعه‌های  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$  و  $(-\infty, -1)$  برابر  $(-\infty, -1)$  است که مجموعه جواب نامعادله مورد نظر مسئله است.

**راه حل دوم** عدد  $-\frac{1}{2}$  در نامعادله صدق نمی‌کند ولی عدد  $-2$  در آن صدق

می‌کند پس گزینه (۱) جواب است.

**گزینه ۴ - ۱۷۹۵** توجه کنید که می‌خواهیم نامعادله زیر را حل کنیم:

$$x(x^2 - 4x - 5)^2(x^2 - 1) < 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1), \quad x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

در نتیجه طرف چپ نامعادله بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$y = x(x + 1)^3(x - 5)^2(x - 1)$$

با تشکیل جدول تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$5$	$+\infty$
y		-	+	-	+	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله برابر است با  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ . پس

$$a = -1, \quad b = 0 \quad \text{و در نتیجه} \quad a + b = -1$$

**گزینه ۳ - ۱۷۹۶** توجه کنید که  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$  دلتای

عبارت  $x^2 - x + 1$  منفی است ( $\Delta = -3$ ). در نتیجه همواره  $x^2 - x + 1 > 0$ .

بنابراین مسئله به یافتن مجموعه جواب‌های نامعادله  $y = \frac{x + 1}{(x - 2)(x - 4)} \leq 0$

تبدیل می‌شود. جدول تعیین علامت  $y$  به شکل زیر است:

x	$-\infty$	$-1$	$2$	$4$	$+\infty$
y		-	+	-	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر  $(-\infty, -1] \cup (2, 4)$  است.

$$a = -1, \quad b = 4 \quad \text{و در نتیجه} \quad a + b = 3$$

**گزینه ۲ - ۱۷۸۸** اگر طول ضلع‌های زاویه قائمه مثلث را  $a$  و  $b$  و طول وتر

آن را  $c$  فرض کنیم، آن‌گاه

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{4}{3}a$$

بنابراین طول وتر برابر است با

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{16}{9}a^2} = \sqrt{\frac{25}{9}a^2} = \frac{5}{3}a$$

بنابراین

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{47}{30} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{4}{3}a} + \frac{1}{\frac{5}{3}a} = \frac{47}{30} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{4a} + \frac{3}{5a} = \frac{47}{30}$$

دو طرف معادله را در  $60a$  ضرب می‌کنیم

$$60 + 45 + 36 = 94a \Rightarrow a = \frac{141}{94} = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{4}{3}a = 2$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با  $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$ .

**گزینه ۱ - ۱۷۸۹** فرض می‌کنیم تعداد افراد کلاس،  $n$  نفر باشند. در نتیجه

هزینه سرانه اولیه برابر  $\frac{700}{n}$  (برحسب هزار تومان) است. با افزودن پنج نفر از

دانش‌آموزان کلاس دیگر هزینه سرانه برابر با  $\frac{700}{n} - 7$  می‌شود. در نتیجه

$$\left(\frac{700}{n} - 7\right)(n + 5) = 700$$

$$\left(\frac{700 - 7n}{n}\right)(n + 5) = 700 \Rightarrow (700 - 7n)(n + 5) = 700n$$

$$n^2 + 5n - 500 = 0 \Rightarrow (n + 25)(n - 20) = 0 \Rightarrow n = -25, n = 20$$

فقط جواب  $n = 20$  قابل قبول است.

**گزینه ۱ - ۱۷۹۰**  $20$  کیلوگرم از محلول اولیه شکر و  $80$  کیلوگرم آن آب

است. اگر نیمی از آب را تبخیر کنیم،  $40$  کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر  $x$  کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، جرم شکر  $20 + x$  و جرم محلول  $60 + x$  می‌شود. پس

$$\frac{20 + x}{60 + x} = \frac{40}{100} \Rightarrow \frac{20 + x}{60 + x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 100 + 5x = 120 + 2x \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

**گزینه ۱ - ۱۷۹۱** ابتدا توجه کنید که

$$y = x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت  $y$  به صورت زیر است.

x	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
y		-	+	-	+

**گزینه ۱ - ۱۷۹۲** چون عبارت یک ریشه دارد و در دو طرف ریشه علامت آن

متفاوت است، پس باید عبارت از درجه اول باشد. یعنی ضریب  $x^2$  باید صفر باشد:

$$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$$

اگر  $m = 2$ ، عبارت به صورت  $y = 2nx + 2$  است. چون ریشه عبارت است، پس

$$0 = 2n \times 4 + 2 \Rightarrow n = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 2$$

در این صورت جدول تعیین علامت عبارت به صورت زیر است و این حالت قابل قبول نیست.

x	$-\infty$	$4$	$+\infty$
y		+	-

۱۸۰۴- گزینه ۲) باید نامعادله‌های  $x^3 - 3x^2 \geq -4$  و  $x^3 - 3x^2 \leq 0$

را حل کنیم و بین مجموعه جواب‌های آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$x^3 - 3x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2(x-3) \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

بنابراین  $-1 \leq x \leq 3$  مجموعه جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر است. پس

$a = -1$  و  $b = 3$  و در نتیجه  $a + b = 2$ . توجه کنید که

$$x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 + 1 - 3x^2 + 3 = (x^3 + 1) - 3(x^2 - 1)$$

$$= (x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x-1)(x+1) = (x+1)(x^2 - 4x + 4)$$

۱۸۰۴- گزینه ۲) نامعادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(x^2 - 2x - 4)^2 - 4(x^2 - 2)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 2x - 4 + 2x^2 - 4)(x^2 - 2x - 4 - 2x^2 + 4) \geq 0$$

$$(3x^2 - 2x - 8)(-x^2 - 2x) \geq 0 \Rightarrow -x(3x+4)(x-2)(x+2) \geq 0$$

$$y = x(3x+4)(x-2)(x+2) \leq 0$$

x	$-\infty$	$-2$	$-\frac{4}{3}$	$0$	$2$	$+\infty$
y		+	-	+	-	+

با توجه به جدول تعیین علامت بالا، مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت

$$[-2, -\frac{4}{3}] \cup [0, 2]$$

است که اعداد صحیح ۰، ۱، ۲ و -۲ را شامل می‌شود.

۱۸۰۵- گزینه ۳) عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}, \quad x \neq 2$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$	$-2$	$2$	$3$	$+\infty$
y		+	-	-	+

بنابراین y به ازای هر x که در مجموعه  $\{2\} - (-2, 3)$  باشد، منفی است. پس

$$\frac{a+b}{c} = \frac{1}{2} \text{ در نتیجه } c = 2 \text{ و } b = 3, a = -2$$

۱۸۰۶- گزینه ۳) مجموعه جواب‌های نامعادله  $ax - b > 0$  به یکی از دو

صورت  $(\frac{b}{a}, +\infty)$  یا  $(-\infty, \frac{b}{a})$  است. با توجه به فرض مسئله،

$$a > 0, \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow 2a = b$$

بنابراین  $\frac{ax+b}{x-2} = a(\frac{x+2}{x-2})$ . چون  $a > 0$ ، کافی است مجموعه جواب‌های

نامعادله  $\frac{x+2}{x-2} < 0$  را بیابیم که بازه  $(-2, 2)$  است.

۱۸۰۷- گزینه ۱) نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{9}{x+3} + 5 - x < 0 \Rightarrow \frac{9 + (5-x)(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 24}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x+4)}{x+3} > 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت

$$(6, +\infty) \cup (-4, -3)$$

است.

x	$-\infty$	$-4$	$-3$	$6$	$+\infty$
y		-	+	-	+

پس  $a = -4$  و  $b = 6$  و در نتیجه  $a + b = 2$ .

۱۷۹۷- گزینه ۲) نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^4 - x^2 - 2 < 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 2) < 0$$

چون مقدار عبارت  $x^2 + 1$  همواره مثبت است، پس

$$x^2 - 2 < 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

پس مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  است. در نتیجه

$$a = -\sqrt{2}, b = \sqrt{2} \Rightarrow ab = -2$$

۱۷۹۸- گزینه ۲) راه‌حل اول توجه کنید که اگر فرض کنیم

$P(x) = x^2 + (a-1)x + 2a - 6$  جدول تعیین علامت باید به صورت زیر باشد

x	$-\infty$	$x_1$	$-3$	$x_2$	$+\infty$
P(x)		+	-	+	

پس باید  $P(x)$  به ازای  $x = -3$  منفی باشد. بنابراین

$$P(-3) = (-3)^2 - 3(a-1) + 2a - 6 < 0 \Rightarrow a > 6$$

راه‌حل دوم ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 + (a-1)x + 2(a-3) = (x+a-3)(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+a-3=0 \Rightarrow x=3-a \end{cases}$$

$$x_1 < -3 < x_2 \Rightarrow x_1 = 3-a, x_2 = -2$$

$$x_1 = 3-a < -3 \Rightarrow a > 6$$

۱۷۹۹- گزینه ۳) توجه کنید که اگر  $m = 0$ ، آن‌گاه عبارت برابر  $-2x$

خواهد بود که همواره مثبت نیست. اگر  $m \neq 0$ ، آن‌گاه باید ضریب  $x^2$  مثبت

و  $\Delta$  منفی باشد. پس

$$m > 0, 4 - 4m^2 < 0 \Rightarrow m^2 > 1 \Rightarrow m > 1$$

۱۸۰۰- گزینه ۳) می‌خواهیم به ازای هر مقدار x نابرابری

$-6 - 2mx + mx^2 + 8 > 0$  برقرار باشد، یعنی  $mx^2 - 2mx + 8 > 0$ . بنابراین

اگر  $m \neq 0$ ، باید  $m > 0$  و  $\Delta < 0$ . پس

$$\Delta = (-2m)^2 - 32m < 0 \Rightarrow m(m-8) < 0$$

با توجه به جدول زیر، باید  $0 < m < 8$ .

m	$-\infty$	$0$	$8$	$+\infty$
m(m-8)		+	-	+

از طرف دیگر، اگر  $m = 0$ ، آن‌گاه عبارت به صورت  $y = 2$  است که از  $-6$  بزرگ‌تر

است. بنابراین  $0 \leq m < 8$ . پس m می‌تواند هشت مقدار صحیح داشته باشد.

۱۸۰۱- گزینه ۱) عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$y = x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$$

چون  $x^2 + 1$  همواره مثبت است، پس کافی است  $x^2 - 4$  را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
y		+	-	+

۱۸۰۲- گزینه ۱) ریشه عبارت را به دست می‌آوریم:

$$m^2 x + |m| = 0 \Rightarrow x = \frac{-|m|}{m^2} = \frac{-|m|}{|m|^2} = \frac{-1}{|m|}$$

ضریب x عددی مثبت است، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$	$\frac{-1}{ m }$	$+\infty$
y		-	+

۱۸۱۴- گزینه ۲ دو طرف معادله داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^4 + 2x - 5 = (1+x)^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

چون  $x^2 + 2 \neq 0$ ، پس  $x^2 - 3 = 0$  بنابراین  $x = \pm\sqrt{3}$ .

$x = \sqrt{3}$  در معادله صدق می‌کند، اما  $x = -\sqrt{3}$  در معادله صدق نمی‌کند، زیرا به ازای  $x = -\sqrt{3}$  سمت راست معادله منفی است و سمت چپ آن مثبت است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۸۱۵- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2x-1} = 2 - 2\sqrt{x} \quad (*)$$

سپس دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$2x - 1 = 4 + 4x - 8\sqrt{x} \Rightarrow 2x + 5 = 8\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4x^2 + 20x + 25 = 64x \Rightarrow 4x^2 - 44x + 25 = 0$$

$$x = \frac{11 - 4\sqrt{6}}{2}, x = \frac{11 + 4\sqrt{6}}{2}$$

در معادله (\*) طرف راست باید نامنفی باشد، پس

$$2 - 2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

بنابراین جواب  $\frac{11 + 4\sqrt{6}}{2}$  قابل قبول نیست و  $\frac{11 - 4\sqrt{6}}{2}$  جواب معادله است.

۱۸۱۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که  $x = 8$  در معادله صدق می‌کند:

$$\sqrt{8 - 4a} + \sqrt{8 + a} = \sqrt{24 + a} \quad (۱)$$

دو طرف معادله بالا را به توان دو می‌رسانیم:

$$8 - 4a + 8 + a + 2\sqrt{(8 - 4a)(8 + a)} = 24 + a$$

$$2\sqrt{64 - 24a - 4a^2} = 4a + 8 \Rightarrow \sqrt{64 - 24a - 4a^2} = 2a + 4$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$64 - 24a - 4a^2 = 4a^2 + 16 + 16a$$

$$8a^2 + 40a - 48 = 0 \Rightarrow a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -6$$

جواب  $a = -6$  قابل قبول نیست چون در معادله (۱) صدق نمی‌کند. پس  $a$  فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

۱۸۱۷- گزینه ۱ معادله را به صورت  $(\sqrt[3]{x})^4 - 5(\sqrt[3]{x})^2 + 4 = 0$

می‌نویسیم و فرض می‌کنیم  $a = (\sqrt[3]{x})^2$ . در این صورت

$$a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow (a - 4)(a - 1) = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \Rightarrow (\sqrt[3]{x})^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ a = 4 \Rightarrow (\sqrt[3]{x})^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8 \end{cases}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۶۴ است.

۱۸۱۸- گزینه ۳ اگر فرض کنیم  $t = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ ، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 + 1 = 2t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

تنها جواب معادله بالا  $t = 1$  است. بنابراین

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{x+1} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x} \quad (۱)$$

$$x^2 - 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

با توجه به معادله (۱) باید  $x > 1$  و در نتیجه  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  جواب معادله نیست.

پس فقط  $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  جواب معادله است.

۱۸۰۸- گزینه ۴ اولاً باید ضریب  $x^2$  منفی باشد. پس  $m < 0$ . ثانیاً باید

$\Delta < 0$ . پس

$$-1 - 4m^2 < 0 \Rightarrow m^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow |m| > \frac{1}{2} \Rightarrow m > \frac{1}{2} \text{ یا } m < -\frac{1}{2}$$

بنابراین نتیجه می‌شود  $m < -\frac{1}{2}$ .

۱۸۰۹- گزینه ۲ می‌خواهیم به‌ازای هر مقدار  $x$  نابرابری

$-2 < mx^2 - 2mx + 4 > 0$  برقرار باشد، یعنی  $mx^2 - 2mx + 4 > 0$ . بنابراین

اگر  $m \neq 0$ ، باید  $m > 0$  و  $\Delta < 0$ . پس

$$\Delta = (-2m)^2 - 16m < 0 \Rightarrow m(m - 4) < 0$$

با توجه به جدول زیر، باید  $0 < m < 4$ .

m	-∞	0	4	+∞
m(m-4)		+	-	+

از طرف دیگر، اگر  $m = 0$  آن‌گاه عبارت به صورت  $y = 2$  است که از  $-2$

بزرگ‌تر است. بنابراین  $0 < m < 4$ .

۱۸۱۰- گزینه ۳ نابرابری را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^2 + mx + m - 3}{x^2 - x + 1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + (m+3)x + m - 3}{x^2 - x + 1} \leq 0$$

چون به ازای هر  $x$  نابرابری  $x^2 - x + 1 > 0$  برقرار است، پس کافی است

نامعادله  $-2x^2 + (m+3)x + m - 3 \leq 0$  برای هر  $x$  برقرار باشد. بنابراین

$$\Delta = (m+3)^2 + 8(m-3) \leq 0 \Rightarrow m^2 + 14m - 15 \leq 0$$

$$(m-1)(m+15) \leq 0 \Rightarrow -15 \leq m \leq 1$$

پس حداقل مقدار  $m$  برابر  $-15$  است.

۱۸۱۱- گزینه ۱ دو طرف معادله را به توان چهار می‌رسانیم:

$$2x + 1 = (2x - 1)^2 \Rightarrow 2x + 1 = 4x^2 + 1 - 4x$$

$$4x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$$

واضح است که  $x = 0$  قابل قبول نیست، زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کند

ولی  $x = \frac{3}{2}$  در معادله اولیه صدق می‌کند. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۸۱۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که باید  $\frac{1}{2}x + 1 \geq 0$  و در نتیجه

$x \geq -2$ . همچنین باید  $4 - x^2 \geq 0$  و در نتیجه  $-2 \leq x \leq 2$ . اکنون دو طرف

معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4 - x^2 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 \Rightarrow 4 - x^2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$5x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x+2)(5x-6) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \frac{6}{5}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. پس مجموع جواب‌های معادله برابر  $-\frac{4}{5}$  است.

۱۸۱۳- گزینه ۲ اگر دو طرف معادله مورد نظر را به توان دو برسانیم،

نتیجه می‌شود

$$4 - 3x - x^2 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 + 11x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4, x = -\frac{3}{2}$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس حاصل ضرب جواب‌های

معادله برابر ۶ است.

$$3x - 2 = 4 + 4x - 8\sqrt{x} \Rightarrow x + 6 = 8\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x^2 + 36 + 12x = 64x \Rightarrow x^2 - 52x + 36 = 0$$

$$x = 26 - 8\sqrt{10}, x = 26 + 8\sqrt{10}$$

در معادله (\*) طرف چپ معادله نامنفی است، پس طرف راست آن نیز نامنفی است، بنابراین

$$3x - 2 \geq 0, 2 - 2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 1$$

بنابراین جواب  $26 + 8\sqrt{10}$  قابل قبول نیست و  $x = 26 - 8\sqrt{10}$  جواب معادله است.

**۱۸۲۷- گزینۀ ۲** یک جواب معادله  $x = 2$  است، پس  $x = 2$  باید در

معادله صدق کند

$$\sqrt{2-1} + \sqrt{a-2} = 3 \Rightarrow \sqrt{a-2} = 2 \Rightarrow a-2 = 4 \Rightarrow a = 6$$

بنابراین معادله به صورت  $\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} = 3$  است و در نتیجه

$$\sqrt{x-1} - 3 = -\sqrt{6-x} \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x-1+9-6\sqrt{x-1} = 6-x$$

$$x+1 = 3\sqrt{x-1} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 9x - 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 5$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

**۱۸۲۸- گزینۀ ۳** معادله را به صورت  $x^2 + 1 + 6 = 5\sqrt{x^2 + 1}$

می‌نویسیم. اگر فرض کنیم  $t = \sqrt{x^2 + 1}$ ، معادله به صورت  $t^2 + 6 = 5t$  درمی‌آید که اگر آن را به صورت  $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3) = 0$  بنویسیم،

جواب‌های آن  $t = 2$  و  $t = 3$  هستند. بنابراین

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 9 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۴ است.

**۱۸۲۹- گزینۀ ۱** اگر فرض کنیم  $t = x + \sqrt{x}$ ، معادله به صورت

$$t^2 + t - 2 = (t-1)(t+2) = 0$$

بنویسیم،  $t = 1$  و  $t = -2$  جواب‌های آن هستند. بنابراین

$$x + \sqrt{x} = -2 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x + \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - x \quad (1)$$

$$x = x^2 + 1 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

توجه کنید که معادله  $x + \sqrt{x} = -2$  جواب ندارد، زیرا عبارت  $x + \sqrt{x}$  همواره نامنفی است. همچنین  $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  جواب معادله نیست زیرا در

معادله (۱) باید  $0 \leq x \leq 1$ ، ولی  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  بزرگ‌تر از ۱ است.

**۱۸۳۰- گزینۀ ۳** طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^3 + k = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow 3x^2 - 3x + k + 1 = 0$$

برای اینکه معادله بالا دو جواب داشته باشد، باید

$$\Delta > 0 \Rightarrow 9 - 12(k+1) > 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{4}$$

**۱۸۱۹- گزینۀ ۳** اگر این عدد  $x$  باشد، آن‌گاه  $\sqrt{x} = \frac{4}{x}$ ، بنابراین

$$x = \frac{16}{x^2} \Rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16}$$

**۱۸۲۰- گزینۀ ۴** زمانی را که محسن روی خشکی مسیر  $AD$  را طی می‌کرده با  $t_1$  و زمان طی کردن مسیر  $DB$  روی آب را با  $t_2$  نشان می‌دهیم.

در نتیجه اگر  $CD = x$ ، آن‌گاه

$$t_1 = \frac{AD}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5}, t_2 = \frac{DB}{v_2} = \frac{8-x}{3}$$

در نتیجه  $t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5} + \frac{8-x}{3} = \frac{8}{3}$ ، بنابراین

$$\frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3\sqrt{x^2 + 16} = 5x \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}$$

$$9(x^2 + 16) = 25x^2 \Rightarrow 16x^2 = 9 \times 16 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

پس  $CD = 3 \text{ km}$

**۱۸۲۱- گزینۀ ۱** طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^2 + 7 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 7 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

با توجه به اینکه  $x = \frac{3}{4}$  در معادله اصلی صدق می‌کند، پس جواب معادله در

بازه  $(\frac{1}{4}, 1)$  قرار دارد.

**۱۸۲۲- گزینۀ ۱** برای حل معادله  $2x + 1 = \sqrt{11x - 2}$ ، دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(2x+1)^2 = (\sqrt{11x-2})^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 11x - 2$$

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}, x = 1$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند. پس قدرمطلق تفاضل دو جواب برابر  $\frac{1}{4}$  است.

**۱۸۲۳- گزینۀ ۲** طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$1 + 3x - x^2 = 1 - 6x - x^2 + x^3 \Rightarrow x^3 = 9x \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0$$

$$x = 0, x = 3, x = -3$$

جواب  $x = -3$  غیرقابل قبول است، زیرا در معادله اولیه صدق نمی‌کند. بنابراین معادله دو جواب دارد.

**۱۸۲۴- گزینۀ ۱** طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$x^3 + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$$

پس جواب کوچک‌تر معادله  $\frac{-3 - \sqrt{21}}{6}$  است.

**۱۸۲۵- گزینۀ ۱** معادله را به شکل  $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+1} - 1$  می‌نویسیم و دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x - 2 = x + 1 + 1 - 2\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

$x = 3$  در معادله اصلی صدق می‌کند. بنابراین معادله یک جواب دارد.

**۱۸۲۶- گزینۀ ۲** معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\sqrt{3x-2} = 2 - 2\sqrt{x} \quad (*)$$

و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم

۱۸۳۱- گزینه ۲ دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \\ x_1 = 3x_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3} \\ x_1 = 5 \end{cases} \xrightarrow{x_1 x_2 = \frac{m}{3}} \frac{1}{3} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = 1$$

ریاضی - ۸۷

۱۸۳۲- گزینه ۲ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha + \beta = 8, \quad \alpha = \frac{\beta}{2} + 5$$

از حل دستگاه معادله‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود  $\alpha = 6$  و  $\beta = 2$ . از طرف دیگر،

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۸۳۳- گزینه ۴ فرض می‌کنیم  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله مورد نظر

باشند. در این صورت  $x_1 + x_2 = \frac{m+1}{2}$  و  $x_1 x_2 = \frac{1}{16}$ . از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 4$$

$$\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow m = 6$$

ریاضی - ۹۶

۱۸۳۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$  و  $\alpha\beta = -2$ . بنابراین

مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{-2} + \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

ریاضی - ۹۲

۱۸۳۵- گزینه ۴ برای اینکه معادله دو جواب مثبت باشد، باید

$$\Delta > 0, \quad -\frac{b}{a} > 0, \quad \frac{c}{a} > 0$$

$$\Delta = 4(a-2)^2 - 4(14-a) = 4a^2 - 12a - 40 = 4(a-5)(a+2)$$

از شرط  $\Delta > 0$  نتیجه می‌شود  $a < -2$  یا  $a > 5$ . از طرف دیگر،

$$-\frac{b}{a} = 2(a-2) > 0 \Rightarrow a > 2, \quad \frac{c}{a} = 14-a > 0 \Rightarrow a < 14$$

اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده جواب مسئله است که به صورت  $5 < a < 14$  است.

ریاضی - ۹۶

۱۸۳۶- گزینه ۳ حاصل جمع و حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر با

$$\alpha + \beta = -\frac{12}{4} = -3 \quad \text{و} \quad \alpha\beta = \frac{1}{4} \quad \text{است. بنابراین}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} &= \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2}}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{3+1}}{\frac{1}{2}} = 4 \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۸۳۷- گزینه ۱ برای آنکه، معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته

باشد، باید  $\frac{c}{a} < 0$ ، پس

$$\frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow m < -2 \quad \text{یا} \quad m > 1$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۸۳۸- گزینه ۳ در مخلوط اول که ۱۱ کیلوگرم است،  $\frac{4}{100} \times 11 = 4/4$

کیلوگرم رنگ و در مخلوط دوم که ۴ کیلوگرم است،  $\frac{4}{100} \times 4 = 2/8$  کیلوگرم رنگ موجود است.

فرض می‌کنیم که با تبخیر،  $x$  کیلوگرم از مواد غیر از رنگ تبخیر شود. در این صورت

$$\frac{4/4 + 2/8}{11 + 4 - x} = \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15 - x} = \frac{1}{20} \Rightarrow 7/2 \times 2 = 15 - x \Rightarrow x = 0/6$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۸۳۹- گزینه ۲ اگر فرض کنیم  $x^2 + 4x + 5 = A$ ، آن‌گاه

$$A - 2 = \sqrt{A} \xrightarrow{A \geq 2} A^2 - 4A + 4 = A \Rightarrow A^2 - 5A + 4 = 0$$

$$\begin{cases} A = 1 \quad (\text{غ.ق.ق.}) \\ A = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 5 = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a} = 1} x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

ریاضی - ۹۴

۱۸۴۰- گزینه ۴ از  $f(x) > \frac{7}{4}$  نتیجه می‌شود:

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{4} \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow -1 < x < 5$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازه  $(a, b)$ ، همان بازه  $(-1, 5)$  است. پس بیشترین

تجربی - ۸۹

مقدار  $b - a$  برابر است با  $6 - (-1) = 5$ .

۱۸۴۱- گزینه ۲ اگر فرض کنیم  $t = x^2 + x$ ، آن‌گاه به‌دست می‌آید:

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t-6)(t-12) = 0$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -1$$

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_3 + x_4 = -1$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

تجربی - ۹۰

۱۸۴۲- گزینه ۳ راه‌حل اول ابتدا مجموع و حاصل ضرب جواب‌های

معادله اول را حساب می‌کنیم:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-3}{5}, \quad \alpha\beta = -\frac{2}{5}$$

اکنون مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{\frac{9}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4}$$

$$P = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{25}{4}$$

۱۸۴۷- گزینه ۴ برای اینکه معادله  $\sqrt{4x-3}=2-3x$  جواب داشته

باشد، باید

$$4x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}, \quad 2-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

با اشتراک دو محدوده به دست آمده، نتیجه می‌گیریم که معادله جوابی

نمی‌تواند داشته باشد. خارج از کشور تجربی - ۸۷

۱۸۴۸- گزینه ۴ ابتدا مقدار  $a$  را طوری می‌یابیم که  $x=4$  جواب معادله باشد:

$$4+a=\sqrt{20-16} \Rightarrow 4+a=2 \Rightarrow a=-2$$

به ازای  $a=-2$ ، معادله مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$x-2=\sqrt{5x-x^2} \Rightarrow x^2-4x+4=5x-x^2$$

$$2x^2-9x+4=0 \Rightarrow x=4, \frac{1}{2}$$

چون  $x=\frac{1}{2}$  در معادله  $x-2=\sqrt{5x-x^2}$  صدق نمی‌کند، این معادله

جواب دیگری ندارد. تجربی - ۸۷

۱۸۴۹- گزینه ۲ باید  $f(x) < 2$  بنابراین

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2 \Rightarrow 3x^2-2x < 2x^2+8 \Rightarrow x^2-2x-8 < 0 \Rightarrow -2 < x < 4$$

پس  $a=-2$  و  $b=4$  و در نتیجه  $b-a=6$ .

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۱۸۵۰- گزینه ۲ به‌ازای مقادیری از  $x$ ، نمودار تابع زیر محور  $x$  است که

داشته باشیم  $f(x) < 0$ ، پس

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 = x^2(x-4) - x + 4 = (x-4)(x^2-1)$$

$$= (x-4)(x-1)(x+1) \xrightarrow{f(x) < 0} (x-1)(x+1)(x-4) < 0$$

$x$	-1	1	4	$+\infty$
$f(x)$	+	-	+	+

بزرگ‌ترین بازه به‌صورت  $(a, b)$  که در آن  $f(x)$  منفی است، بازه  $(1, 4)$

ریاضی - ۸۸

است، پس  $b-a=4-1=3$ .

بنابراین معادله به‌صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 29x + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

راه‌حل دوم یکی از جواب‌های معادله اول برابر  $-1$  است:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

بنابراین یکی از جواب‌های معادله دوم  $1$  است:

$$\alpha = -1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow 4 \times 1^2 - k \times 1 + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

ریاضی - ۹۰

۱۸۴۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \alpha \text{ و } \beta \text{ جواب‌های معادله } 8x^2 - mx - 8 = 0 \text{ باشند.}$$

در این صورت

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_1 x_2 = -1$$

$$\alpha + \beta = \frac{m}{8}, \quad \alpha \beta = -1$$

$$\alpha = x_1^3, \quad \beta = x_2^3$$

دو طرف تساوی  $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$  را به توان سه می‌رسانیم:

$$x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \frac{1}{8}$$

$$\alpha + \beta - 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{m}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \Rightarrow m = 13$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۸۴۴- گزینه ۲  $x=2$  در معادله صدق می‌کند، پس

$$2(4a-2-5) = 2 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین معادله به‌صورت  $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$  است. با تقسیم عبارت

سمت چپ معادله بر  $x-2$  به‌دست می‌آید:

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = (x-2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$

بنابراین دو جواب دیگر از معادله  $2x^2 + 3x + 1 = 0$  به‌دست می‌آیند که

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

مجموع آن‌ها برابر  $-\frac{3}{2}$  است.

۱۸۴۵- گزینه ۳ اگر فرض کنیم  $t = \sqrt{x}$ ، آن‌گاه  $t^2 - 2t + m - 1 = 0$ .

برای آنکه دو جواب برای  $x$  به‌دست آید، باید این معادله دو جواب نامنفی

داشته باشد:

$$\left. \begin{aligned} \Delta > 0 &\Rightarrow 4 - 4(m-1) > 0 \Rightarrow m < 2 \\ \frac{c}{a} \geq 0 &\Rightarrow \frac{m-1}{1} \geq 0 \Rightarrow m-1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1 \\ -\frac{b}{a} > 0 &\Rightarrow -\frac{-2}{1} > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \cap \rightarrow 1 \leq m < 2$$

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۱۸۴۶- گزینه ۲ برای اینکه همهٔ مقادیر عبارت مورد نظر مثبت باشد، باید

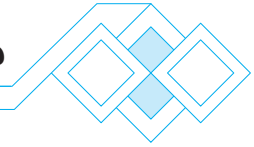
$$1-a > 0 \Rightarrow a < 1$$

$$\Delta = 24 + 4a(1-a) < 0 \Rightarrow -a^2 + a + 6 < 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

از اشتراک این ناحیه‌ها به‌دست می‌آید  $a < -2$ .

## فصل دوازدهم



۱۸۵۷- گزینه ۲ چون  $x < y$  و  $x < 0 < y$  پس  $2x - y < 0$  و  $2y - x > 0$  پس

عبارت مورد نظر برابر است با  $-(2x - y) - (2y - x) - x + 2y = -2x + y$

۱۸۵۸- گزینه ۴ توجه کنید که  $a - 1 < 0$ ،  $b + 2 > 0$  و  $a + b < 1 - 1 = 0$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با  $-1 - 1 = -2$

۱۸۵۹- گزینه ۱ چون  $a < 0$ ، پس  $|a| = -a$ ، در نتیجه

$$|a|b \leq a \xrightarrow{a \neq 0} b \leq \frac{a}{|a|} \xrightarrow{a < 0} b \leq -1$$

بنابراین هر یک از عددهای  $2b - 6$  و  $b - 2$  هم منفی هستند، پس

$$|2b - 6| - 2|b - 2| = -(2b - 6) - 2(-(b - 2)) = 2$$

۱۸۶۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$

اکنون به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 1$		+	+	0	-	+
$x^2 - 2$		+	0	-	-	+
y		2	0	0	-2	2

بنابراین y سه مقدار مختلف (0 و  $\pm 2$ ) دارد.

۱۸۶۱- گزینه ۴ معادله را به صورت  $x^2 - 5x = \pm 6$  می‌نویسیم. بنابراین

$$x^2 - 5x = 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 6$$

$$x^2 - 5x = -6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر  $-36$  است.

۱۸۶۲- گزینه ۲ توجه کنید که  $|3x - 18| = |3(x - 6)| = 3|x - 6|$  و

$$|24 - 4x| = |4x - 24| = |4(x - 6)| = 4|x - 6|$$

$$7|x - 6| = 28 \Rightarrow |x - 6| = 4 \Rightarrow x = 2, x = 10$$

پس مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر ۱۲ است.

۱۸۶۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر  $|a| = |b|$ ، آن‌گاه  $a = b$  یا

$$x^2 - 2x = x^2 + 2x - 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{یا } x^2 - 2x = -x^2 - 2x + 4 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 2x = x^2 + 2x - 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 2x = -x^2 - 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر  $-2$  است.

۱۸۶۴- گزینه ۳ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر  $x \geq 0$ ، آن‌گاه  $|x| = x$  و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

حالت دوم اگر  $x < 0$ ، آن‌گاه  $|x| = -x$  و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{7}, x = 2 - \sqrt{7}$$

بنابراین معادله مورد نظر سه جواب دارد.

۱۸۵۱- گزینه ۲ اگر  $a < -2$ ، آن‌گاه  $1 + a < -1 < 0$  پس  $|1 + a| = -1 - a$ .

در نتیجه  $|2 + a| = |1 + a| = |1 + 1 + a| = |2 + a|$  از طرف دیگر، چون  $a < -2$ ، پس

$$|2 + a| = -2 - a$$

۱۸۵۲- گزینه ۴ راه‌حل اول چون  $-1 < x < 2$ ، پس

$$\frac{|x-2|}{x-2} = \frac{2-x}{x-2} = -1, \quad \frac{x+1}{|x+1|} = \frac{x+1}{x+1} = 1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با  $-1 - 1 = -2$ .

راه‌حل دوم کافی است حاصل عبارت را به ازای  $x = 0$  حساب کنیم:

$$A = \frac{|x-2|}{x-2} - \frac{x+1}{|x+1|} \xrightarrow{x=0} A = -1 - 1 = -2$$

۱۸۵۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$-3 < x < -2 \Rightarrow -18 < 6x < -12 \Rightarrow 0 < 14 < 6x + 32 < 20$$

در نتیجه  $|6x + 32| = 6x + 32$  از طرف دیگر،

$$-3 < x < -2 \Rightarrow 3 > -x > 2 \Rightarrow 11 > 8 - x > 10 > 0$$

در نتیجه  $|8 - x| = 8 - x$  بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{6x + 32 - 4(8 - x)}{3x} = \frac{6x + 4x - 8}{3x} = \frac{10}{3}$$

۱۸۵۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$1 < x < 2 \Rightarrow 3 < 3x < 6 \Rightarrow 0 < 3x - 3 < 3 \Rightarrow |3x - 3| = 3x - 3$$

$$\sqrt{4x^2 - 16x + 16} = \sqrt{4(x-2)^2} = 2|x-2| = -2x + 4$$

منفی

$$\text{بنابراین } A = 3x - 3 - (-2x + 4) = 5x - 7$$

۱۸۵۵- گزینه ۴ راه‌حل اول چون x منفی است، عبارت  $x + \frac{4}{x}$  منفی

است، پس  $|x + \frac{4}{x}| = -x - \frac{4}{x}$  از طرف دیگر،

$$|x - \frac{4}{x}| = \frac{|x^2 - 4|}{|x|} = \frac{(x-2)(x+2)}{|x|}$$

چون  $-2 < x < 0$ ، پس  $x - 2 < 0$  و  $x + 2 > 0$  و چون x منفی است، پس

$$|x - \frac{4}{x}| = x - \frac{4}{x}$$

$$f(x) = -x - \frac{4}{x} + x - \frac{4}{x} = \frac{-8}{x}$$

راه‌حل دوم حاصل عبارت مورد نظر را به ازای  $x = -1$  حساب می‌کنیم:

$$f(x) = |x + \frac{4}{x}| + |x - \frac{4}{x}| \xrightarrow{x=-1} f(-1) = |-5| + |3| = 8$$

فقط مقدار گزینه (۴) به ازای  $x = -1$  برابر ۸ می‌شود.

۱۸۵۶- گزینه ۳ چون  $a - 6 < 0$ ، پس  $|a - 6| = -a + 6$  بنابراین

$$A = |6 - a - 3| + |a - 6| = |3 - a| + |-a + 6| = |6 - a| + |-a|$$

$$\xrightarrow{9-a > 0} A = |6 - a - (9 - a)| = |-3| = 3$$



بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت  $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$  است که شامل عددهای صحیح ۰، ۱، ۲ و ۳ نیست.

۱۸۷۰- گزینه ۳ راه‌حل اول می‌دانیم  $x^2 = |x|^2$  بنابراین نامعادله به

شکل  $|x|^2 - 5|x| + 4 \leq 0$  نوشته می‌شود. اگر فرض کنیم  $t = |x|$ ، نامعادله به صورت  $t^2 - 5t + 4 \leq 0$  درمی‌آید.

با توجه به جدول زیر، محدوده  $1 \leq t \leq 4$  جواب نامعادله است. یعنی

$$1 \leq |x| \leq 4$$

t	−∞	1	4	+∞
$t^2 - 5t + 4$		+	-	+

راه‌حل دوم عدد صفر در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه (۱) جواب نیست. عدد ۵ هم در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۴) هم جواب نیستند. پس گزینه (۳) جواب است.

۱۸۷۱- گزینه ۲ می‌دانیم اگر  $a \geq 0$ ، آن‌گاه جواب‌های معادله  $|x| = a$

برابرند با  $x = \pm a$ . بنابراین

$$||x-4|-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} |x-4|-1=3 \Rightarrow |x-4|=4 \\ |x-4|-1=-3 \Rightarrow |x-4|=-2 \end{cases}$$

معادله  $|x-4|=-2$  جواب ندارد. پس

$$|x-4|=4 \Rightarrow \begin{cases} x-4=4 \\ x-4=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=0 \end{cases}$$

بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

۱۸۷۲- گزینه ۳ توجه کنید که  $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ .

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$|x-1||x-3|-5|x-1|=0 \Rightarrow |x-1|(|x-3|-5)=0$$

$$\begin{cases} |x-1|=0 \Rightarrow x=1 \\ |x-3|=5 \Rightarrow x-3=\pm 5 \Rightarrow x=-2, x=8 \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با ۷.

۱۸۷۳- گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که چون سمت چپ معادله

نامنفی است، پس سمت راست آن هم نامنفی است، بنابراین  $x \geq 0$ . طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$|x^2 - 4| = 3x \Rightarrow (x^2 - 4)^2 = (3x)^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 9x^2$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 16) = 0$$

بنابراین

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$$

چون  $x \geq 0$ ، پس فقط جواب‌های  $x=1$  و  $x=4$  قابل قبول هستند که مجموعه آن‌ها برابر است با ۵.

راه‌حل دوم اگر  $x < 0$ ، آن‌گاه معادله جواب ندارد، زیرا سمت راست تساوی منفی و

سمت چپ آن نامنفی است. اگر  $x \geq 0$ ، آن‌گاه معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 3x \\ x^2 - 4 = -3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -4 \end{cases}$$

۱۸۶۵- گزینه ۲ راه‌حل اول معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - 2x + 1 - |x-1| - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - |x-1| - 2 = 0$$

$$|x-1|^2 - |x-1| - 2 = 0 \xrightarrow{|x-1|=t} t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow |x-1| = -1 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$t = 2 \Rightarrow |x-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \Rightarrow x=3 \\ x-1=-2 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر ۲ است.

راه‌حل دوم دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول اگر  $x \geq 1$ ، آن‌گاه  $|x-1| = x-1$  و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 2x - x + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{غ.ق.}), x = 3$$

حالت دوم اگر  $x < 1$ ، آن‌گاه  $|x-1| = 1-x$  و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 2x + x - 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2 \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با  $3 - 1 = 2$ .

۱۸۶۶- گزینه ۴ نامعادله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$3x - 2 \geq 7 \text{ یا } 3x - 2 \leq -7 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -\frac{5}{3}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت  $(-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [3, +\infty)$  یا

$$\mathbb{R} - (-\frac{5}{3}, 3) \text{ است. پس } a = -\frac{5}{3} \text{ و } b = 3 \text{ و در نتیجه } ab = -5$$

۱۸۶۷- گزینه ۱ راه‌حل اول نابرابری  $|x| \leq |y|$  با نابرابری

$$(x-y)(x+y) \leq 0 \text{ معادل است، زیرا}$$

$$|x| \leq |y| \Rightarrow x^2 \leq y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 \leq 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) \leq 0$$

در نتیجه نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(a+5-a+5)(a+5+a-5) \leq 0$$

نابرابری بالا به صورت  $10(2a) \leq 0$  یا  $20a \leq 0$  درمی‌آید که مجموعه جواب‌های آن  $[-\infty, 0]$  است.

راه‌حل دوم دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادله زیر برسیم:

$$a^2 + 10a + 25 \leq a^2 - 10a + 25 \Rightarrow 20a \leq 0$$

پس مجموعه جواب‌های آن  $[-\infty, 0]$  است.

۱۸۶۸- گزینه ۱ نامعادله را به صورت  $\frac{|x-6|}{|x-2|} > 3$  می‌نویسیم. چون

$x \neq 2$ ، دو طرف این نامعادله را در عبارت مثبت  $|x-2|$  ضرب می‌کنیم:

$$|x-6| > 3|x-2|$$

چون دو طرف نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم:

$$x^2 - 12x + 36 > 9(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow 8(x^2 - 3x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3$$

عددهای صحیح ۱ و ۲ در بازه  $(0, 3)$  هستند. اما  $x=2$  قابل قبول نیست، پس تنها جواب صحیح نامعادله مورد نظر ۱ است.

۱۸۶۹- گزینه ۳ اگر  $x < 0$ ، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن

صدق می‌کنند. همچنین  $x=0$  جواب نامعادله نیست. اگر  $x > 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x^2 - x > 2x \Rightarrow x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ \text{یا} \\ x^2 - x < -2x \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \xrightarrow{x > 0} x+1 < 0 \\ \text{غ.ق.} \end{cases} x < -1$$

۱۸۷۹- گزینه ۱ راه‌حل اول توجه کنید که اگر  $x \geq 0$ ، آن‌گاه  $x = |x|$ .

$$x < |x| \Rightarrow x < 0$$

بنابراین

$$x < 0 \Rightarrow x < x^2 \Rightarrow x(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0$$

در نتیجه

به این ترتیب،  $|x+1| = -x-1$ ،  $|x| = -x$  و  $|1-x| = 1-x$ . بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با  $-3x$ .

راه‌حل دوم  $x = -2$  در نابرابری‌های  $x < |x| < x^2$  صدق می‌کند. بنابراین کافی است حاصل عبارت مورد نظر را به ازای  $x = -2$  به دست آوریم:

$$A = |x+1| + |1-x| + |x| \xrightarrow{x=-2} A = 1+3+2=6$$

فقط مقدار گزینه (۱) به ازای  $x = -2$  برابر ۶ است.

۱۸۸۰- گزینه ۴ راه‌حل اول اگر  $x \geq 0$ ، آن‌گاه  $x+1 > 0$  و نامعادله به

شکل  $(x+1)x < x(x+1)$  درمی‌آید که جواب ندارد. اگر  $-1 < x < 0$ ، آن‌گاه  $x+1 > 0$  و نامعادله به شکل  $(x+1)x < x(x+1)$  درمی‌آید، یعنی  $2x(x+1) > 0$  که درست نیست. اگر  $x \leq -1$ ، آن‌گاه  $x+1 \leq 0$  و نامعادله به شکل  $(x+1)x < -x(x+1)$  درمی‌آید که جواب ندارد. پس مجموعه جواب‌های نامعادله تهی است.

راه‌حل دوم معلوم است که  $x = 0$  و  $x = -1$  جواب‌های نامعادله نیستند، پس می‌توانیم نامعادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{x+1}{|x+1|} < \frac{x}{|x|} \quad (1)$$

می‌دانیم برای هر  $a \neq 0$ ،  $\frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$ . بنابراین تنها حالتی که

نامعادله (۱) می‌تواند جواب داشته باشد به صورت زیر است:

$$\frac{x+1}{|x+1|} = -1, \quad \frac{x}{|x|} = 1$$

از معادله اول نتیجه می‌شود  $x+1 < 0$ ، یعنی  $x < -1$  و از معادله دوم نتیجه می‌شود  $x > 0$ . دو محدوده به دست آمده اشتراک ندارند، پس مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر تهی است.

۱۸۸۱- گزینه ۴ چون از  $|A| = -A$ ، نتیجه می‌شود  $A \leq 0$ ، پس از

$|x^2 - x - 6| = -(x^2 - x - 6)$  نتیجه می‌شود  $x^2 - x - 6 \leq 0$ . بنابراین  $(x+2)(x-3) \leq 0$  و با توجه به جدول تعیین علامت زیر بازه  $[-2, 3]$  مجموعه جواب‌های نامعادله است، که شامل شش عدد صحیح  $(0, \pm 1, \pm 2, 3)$  است.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$		+	-	+

۱۸۸۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$||x^2 - 5| - 2| = 1 \Rightarrow |x^2 - 5| - 2 = \pm 1$$

حالت اول

$$|x^2 - 5| - 2 = -1 \Rightarrow |x^2 - 5| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5 = -1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 5 = 1 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

حالت دوم

$$|x^2 - 5| - 2 = 1 \Rightarrow |x^2 - 5| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5 = -3 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 5 = 3 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} \end{cases}$$

بنابراین معادله هشت جواب دارد.

جواب‌های  $x = -1$  و  $x = -4$  قابل قبول نیستند، زیرا با شرط  $x \geq 0$  معادله را حل کرده‌ایم. پس جواب‌های معادله  $x = 1$  و  $x = 4$  هستند که مجموعه آن‌ها برابر ۵ است.

۱۸۷۴- گزینه ۴ اگر  $x \leq -3$ ، آن‌گاه  $|x+3| = -(x+3)$  و معادله می‌شود

$$x^2 + 2(x+3) - 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$(x-2)(x+6) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -6$$

اگر  $x > -3$ ، آن‌گاه  $|x+3| = x+3$  و معادله می‌شود

$$x^2 - 2(x+3) - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x-6)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ یا } x = -4$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با  $5 - \sqrt{13}$ .

۱۸۷۵- گزینه ۴ با توجه به فرض سؤال، هر یک از معادله‌های

$x^2 - 6x + a = 0$  و  $x^2 - 6x - a = 0$  باید دو جواب داشته باشد. در نتیجه  $36 + 4a > 0$  و  $36 - 4a > 0$  می‌دانیم. (زیرا اگر  $a < 0$ ، معادله

$|x^2 - 6x| = a$  جواب ندارد)، در نتیجه  $36 + 4a > 0$ . بنابراین کافی است

$$36 - 4a > 0 \Rightarrow a < 9$$

بنابراین  $0 < a < 9$ .

۱۸۷۶- گزینه ۴ ابتدا باید مجموعه جواب‌های نامعادله‌های  $|x-3| \geq 2$

و  $|2x+1| \leq 5$  را بیابیم. توجه کنید که

$$|x-3| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 2 \Rightarrow x \geq 5 \\ x-3 \leq -2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

$$|2x+1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x+1 \leq 5 \Rightarrow -6 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -3 \leq x \leq 2$$

پس مجموعه جواب‌های اولی برابر با  $A = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$  و مجموعه جواب‌های دومی  $B = [-3, 2]$  است. بنابراین  $A \cap B = [-3, 1]$ .

۱۸۷۷- گزینه ۲ راه‌حل اول برای حل این نامعادله دو طرف آن را به توان

دو می‌رسانیم تا به نامعادله زیر برسیم:

$$(x+1)^2 \geq (2x-1)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

در نتیجه به نامعادله زیر می‌رسیم:

$$3x^2 - 6x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

بنابراین  $a = 0$  و  $b = 2$ . در نتیجه  $b - a = 2$ .

راه‌حل دوم اگر دو طرف نابرابری  $|A| \geq |B|$  را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود:

$$A^2 \geq B^2 \Rightarrow A^2 - B^2 \geq 0 \Rightarrow (A-B)(A+B) \geq 0$$

و برعکس. در نتیجه نامعادله مورد نظر معادل است با

$$(x+1-2x+1)(x+1+2x-1) \geq 0 \Rightarrow (-x+2)(3x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

بنابراین  $a = 0$  و  $b = 2$ . در نتیجه  $b - a = 2$ .

۱۸۷۸- گزینه ۴ ابتدا نامعادله را به صورت  $|\frac{x-3}{2-x}| \leq 1$  می‌نویسیم.

بنابراین

$$\frac{|x-3|}{|2-x|} \leq 1 \Rightarrow |x-3| \leq |2-x|, \quad x \neq 2$$

$$|x-3|^2 \leq |2-x|^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \leq 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

بنابراین  $[\frac{5}{2}, +\infty)$  مجموعه جواب‌های نامعادله است و در نتیجه  $a = 5$ .

پس  $b = 2$  و  $a + b = 7$ .

## راه حل دوم

$$|x^2 - 7x + 10| < |x^2 - 5x + 6|$$

$$x^2 - 7x + 10 < x^2 - 5x + 6 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$$

$$x^2 - 7x + 10 > -x^2 + 5x - 6 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 16 > 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 > 0$$

$$(x-2)(x-4) > 0 \Rightarrow x > 4 \text{ یا } x < 2$$

مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر برابر با اشتراک این جواب‌ها است، که برابر  $x > 4$  است.

۱۸۸۸- گزینه ۲ نامعادله را به صورت  $x^2 - 2x + 1 < 2 + |x-1|$  می‌نویسیم.

بنابراین

$$(x-1)^2 < 2 + |x-1| \Rightarrow |x-1|^2 < 2 + |x-1|$$

اگر فرض کنیم  $t = |x-1|$ ، آن‌گاه

$$t^2 - t - 2 < 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) < 0$$

چون  $t \geq 0$ ، بنابراین  $t+1 \geq 1$  و در نتیجه باید نامعادله  $t-2 < 0$  را حل کنیم

که  $t < 2$  جواب است. پس  $|x-1| < 2$  و در نتیجه

$$-2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

پس اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ در مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر قرار دارند.

۱۸۸۹- گزینه ۲ ابتدا نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-a^2 - 2 < |x| - 3a < a^2 + 2 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 < |x| < a^2 + 3a + 2$$

واضح است که اگر  $a^2 + 3a + 2 \leq 0$ ، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. پس

$$a^2 + 3a + 2 = (a+1)(a+2) \leq 0$$

a	$-\infty$	$-2$	$-1$	$+\infty$
$a^2 + 3a + 2$		+	-	+

با توجه به جدول فوق باید  $-2 \leq a \leq -1$ .

۱۸۹۰- گزینه ۲ اگر  $x < 1$ ، آن‌گاه سمت چپ نامعادله منفی و

سمت راست آن نامنفی است. پس  $x < 1$  جواب نامعادله است. اگر  $x > 1$ ،

آن‌گاه  $|x+1| = x+1$  و در نتیجه

$$\frac{3}{x-1} \leq x+1 \Rightarrow 3 \leq x^2 - 1 \Rightarrow x^2 \geq 4 \xrightarrow{x > 1} x \geq 2$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله  $\mathbb{R} - [1, 2)$  است و در نتیجه

$$a=1, b=2 \Rightarrow a+b=3$$

۱۸۹۱- گزینه ۴ با جای‌گذاری  $x = \sqrt{2} - 1$  در ضابطه تابع به دست می‌آید

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}-1) &= 5|3\sqrt{2}-3-1| + 3|5\sqrt{2}-5-4| \\ &= 5(3\sqrt{2}-4) - 3(5\sqrt{2}-9) = 7 \end{aligned}$$

با جای‌گذاری  $x = \sqrt{3} - 1$  در ضابطه تابع به دست می‌آید

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}-1) &= 5|3\sqrt{3}-3-1| + 3|5\sqrt{3}-5-4| \\ &= 5(3\sqrt{3}-4) - 3(5\sqrt{3}-9) = 7 \end{aligned}$$

پس

$$f(\sqrt{2}-1) + f(\sqrt{3}-1) = 14$$

۱۸۸۳- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x(x^2-3)| = |x| \Rightarrow |x||x^2-3| = |x|$$

واضح است که  $x=0$  یک جواب معادله است. با شرط  $x \neq 0$  دو طرف معادله را بر  $|x|$  تقسیم می‌کنیم:

$$|x^2-3|=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3=-1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ x^2-3=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

بنابراین معادله پنج جواب دارد.

۱۸۸۴- گزینه ۴ با توجه به ریشه عبارت‌های داخل قدرمطلق، سه حالت

زیر را بررسی می‌کنیم

$$x \leq -2 \Rightarrow -2(x-1) - (x+2) = 5 \Rightarrow -3x = 5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$-2 < x \leq 1 \Rightarrow -2(x-1) + x + 2 = 5 \Rightarrow -x + 4 = 5 \Rightarrow x = -1$$

$$x > 1 \Rightarrow 2(x-1) + x + 2 = 5 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر  $\{-1, \frac{5}{3}\}$  است. پس مجموع

جواب‌ها برابر  $\frac{2}{3}$  است.

۱۸۸۵- گزینه ۴ چون صفر جواب معادله مورد نظر نیست، پس  $a \neq 0$ .

همچنین، سمت چپ معادله نامنفی است، پس  $a > 0$ . اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{x^2}{x+1} = a \Rightarrow x^2 - ax - a = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{x+1} = -a \Rightarrow x^2 + ax + a = 0$$

توجه کنید که معادله  $x^2 - ax - a = 0$  همیشه دو جواب غیرصفر دارد ( $\Delta = a^2 + 4a > 0$ ). بنابراین برای اینکه معادله اصلی دو جواب غیرصفر

داشته باشد، باید معادله  $x^2 + ax + a = 0$  جواب نداشته باشد:

$$\Delta = a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

بنابراین اگر  $0 < a < 4$ ، معادله مورد نظر دو جواب غیرصفر دارد. توجه کنید

که  $x = -1$  (ریشهٔ مخرج کسر)، جواب معادله  $x^2 - ax - a = 0$  نیست.

۱۸۸۶- گزینه ۲ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x| - 4 > 1 \quad \text{یا} \quad |x| - 4 < -1$$

پس  $|x| < 3$  یا  $|x| > 5$ . از نامعادله  $|x| < 3$  نتیجه می‌شود  $-3 < x < 3$ .

از نامعادله  $|x| > 5$  نتیجه می‌شود  $x > 5$  یا  $x < -5$ . بنابراین مجموعه

جواب‌های نامعادله به صورت زیر است:

$$(-\infty, -5) \cup (-3, 3) \cup (5, +\infty)$$

که شامل اعداد صحیح  $\pm 5$ ،  $\pm 4$  و  $\pm 3$  نیست. تعداد این اعداد ۶ تا است.

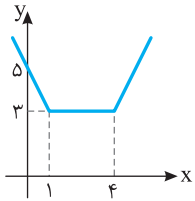
۱۸۸۷- گزینه ۱ راه حل اول نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|(x-5)(x-2)| < |(x-2)(x-3)| \Rightarrow |x-2||x-5| < |x-2||x-3|$$

معلوم است که  $x \neq 2$ . بنابراین  $|x-5| < |x-3|$ . چون دو طرف این

نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توان آن‌ها را به توان دو رساند:

$$x^2 - 10x + 25 < x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > 4$$



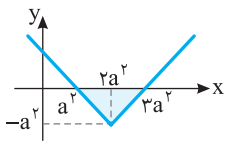
۱۸۹۷- گزینه ۲ برای اینکه حداکثر

مقدار عبارت  $\frac{15}{|x-1|+|x-4|}$  را به دست بیاوریم، کافی است حداقل مقدار تابع  $f(x)=|x-1|+|x-4|$  را به دست

آوریم. نمودار تابع  $f$  در شکل رسم شده است. با توجه به شکل، کمترین مقدار تابع  $f$  برابر ۳ است، بنابراین بیشترین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با  $\frac{15}{3}=5$ .

۱۸۹۸- گزینه ۲ اگر نمودار تابع  $y=|x|$  را  $2a^2$  واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=|x-2a^2|$  به دست می‌آید و اگر این نمودار را  $a^2$  واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=|x^2-2a^2|-a^2$  به دست می‌آید. با توجه به نمودار این تابع، مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با



$$S = \frac{1}{2} a^2 (2a^2) = a^4$$

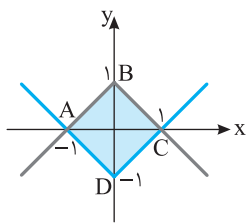
بنابراین

$$a^4 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

۱۸۹۹- گزینه ۳ نمودار دو تابع را

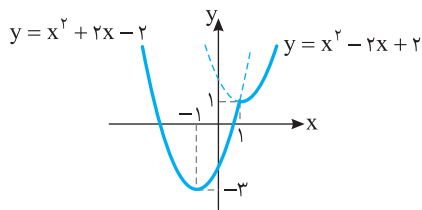
رسم می‌کنیم. مساحت چهارضلعی ABCD مطلوب است. در واقع مساحت مورد نظر از چهار مثلث قائم‌الزاویه به قاعده یک واحد و ارتفاع یک واحد تشکیل شده است. پس مساحت ABCD برابر

$$\text{است با } 4 \times \left(\frac{1 \times 1}{2}\right) = 2$$



۱۹۰۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 2 & x < 1 \end{cases}$

بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است و برد آن بازه  $[-3, +\infty)$  است.



۱۹۰۱- گزینه ۱ ابتدا مقادیر  $f(2+|a|)$  و  $f(2-|a|)$  را حساب می‌کنیم:

$$f(2-|a|) = |2-|a|-2|+1 = |-|a||+1 = |a|+1$$

$$f(2+|a|) = |2+|a|-2|+1 = ||a||+1 = |a|+1$$

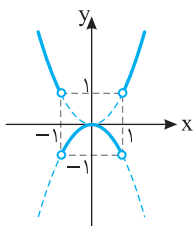
$$\text{بنابراین } f(2-|a|) - 2f(2+|a|) + 1 = |a| + 1 - 2|a| - 2 + 1 = -|a|$$

۱۹۰۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| > 1 \\ -x^2 & |x| < 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به صورت روبه‌رو است و برد تابع  $f$  برابر با  $(-1, +\infty) \cup (1, +\infty)$  است. پس  $a=1$  و

$$b=0 \text{ و در نتیجه } a-b=1$$



۱۸۹۲- گزینه ۳ برای  $x > 1$  ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x-1 > 0, x+1 > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1-x}{x-1} = 2$$

به طریق مشابه برای  $-1 < x < 1$  به دست می‌آید

$$x-1 < 0, x+1 > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1-x}{-(x-1)} = 0$$

همچنین برای  $x < -1$

$$x-1 < 0, x+1 < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-(x+1)}{x+1} - \frac{1-x}{-(x-1)} = -2$$

بنابراین  $R_f = \{0, -2, 2\}$  و برد تابع ۳ عضو دارد.

۱۸۹۳- گزینه ۳ راه‌حل اول اگر  $x \geq 0$ . آن‌گاه

$$|x| = x \Rightarrow |x-|x|| = |x-x| = 0$$

بنابراین  $|2x-0| = |2x| = 2x$  اگر  $x < 0$ . آن‌گاه

$$|x| = -x \Rightarrow |x-|x|| = |x+x| = |2x| = -2x$$

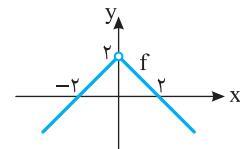
بنابراین  $f(x) = |2x - (-2x)| = |4x| = -4x$  در نتیجه

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -4x & x < 0 \end{cases}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که  $f(1) = 2$ . فقط در تابع گزینه (۳) این شرایط برقرار است.

۱۸۹۴- گزینه ۲ توجه کنید که

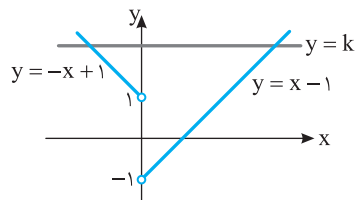
$$f(x) = \frac{2|x|-x^2}{|x|} = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{x} & x > 0 \\ \frac{-2x-x^2}{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x & x > 0 \\ 2+x & x < 0 \end{cases}$$



۱۸۹۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -x(1-\frac{1}{x}) & x < 0 \\ x(1-\frac{1}{x}) & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+1 & x < 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$$

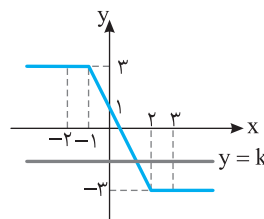
بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که اگر  $k > 1$ ، آن‌گاه خط  $y=k$  و نمودار تابع  $f$  در دو نقطه متقاطع‌اند.



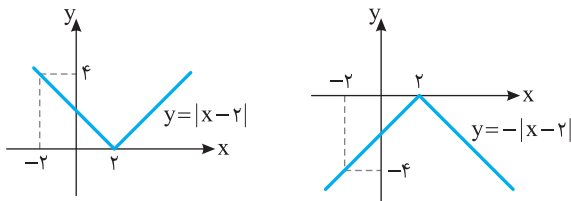
۱۸۹۶- گزینه ۱ نمودار تابع  $f$  را

به کمک نقاط  $(-1, 3)$ ،  $(2, -3)$ ،  $(3, -3)$  و  $(-2, 3)$  رسم می‌کنیم.

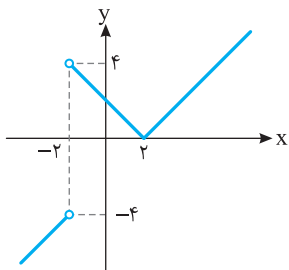
واضح است که اگر خط  $y=k$  این نمودار را در یک نقطه با طول مثبت قطع کند، باید  $-3 < k < 1$ .



ابتدا نمودار توابع  $y=|x-2|$  و  $y=-|x-2|$  را رسم می‌کنیم.



پس نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است.



**گزینه ۱۹۰۷** توجه کنید که با توجه به ریشه‌های عبارتهای داخل

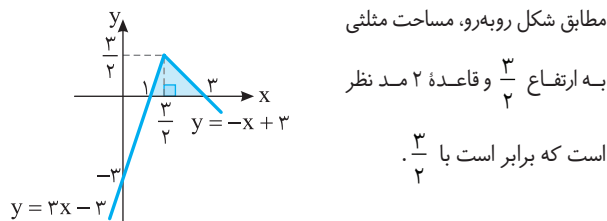
قدرمطلق چهار حالت زیر برای ضابطه تابع وجود دارد:

$$\begin{aligned} x \leq -1 &\Rightarrow f(x) = -x + x - 2 + 2(x+1) = 2x \\ -1 < x \leq 0 &\Rightarrow f(x) = -x + x - 2 - 2(x+1) = -2x - 4 \\ 0 < x \leq 2 &\Rightarrow f(x) = x + x - 2 - 2(x+1) = -4 \\ x > 2 &\Rightarrow f(x) = x - (x-2) - 2(x+1) = -2x \end{aligned}$$

بنابراین روی بازه  $[0, 2]$  نمودار تابع یک پاره‌خط افقی است که طول آن برابر است با ۲.

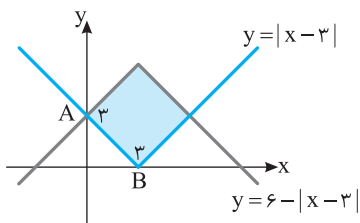
**گزینه ۱۹۰۸** ضابطه تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = x - (2x-3) = -x+3 \\ x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = x + 2x - 3 = 3x-3 \end{cases}$$



**گزینه ۱۹۰۹** در شکل زیر نمودارها را رسم کرده‌ایم. با توجه به اینکه شکل حاصل مربع است، کافی است طول ضلع مربع را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} A(0, 3), B(3, 0) &\Rightarrow AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2} \\ \text{بنابراین مساحت مربع برابر است با } (3\sqrt{2})^2 &= 18 \end{aligned}$$



**گزینه ۱۹۰۳** اگر  $0 \leq x \leq 2$ ، آن‌گاه  $x+2 > 0$  و  $x-2 \leq 0$ ، پس

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \leq 0$$

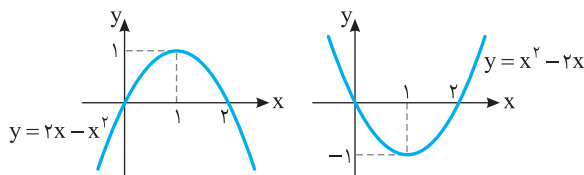
$$x^2 - 2x = x(x-2) \leq 0$$

بنابراین  $f(x) = -x^2 + 4 + (x^2 - 2x) = -2x + 4$  پس  
 $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow -4 \leq -2x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -2x + 4 \leq 4$   
 پس حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است.

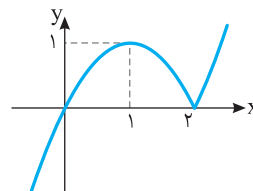
**گزینه ۱۹۰۴** ضابطه تابع به شکل

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x \leq 2 \\ x^2 - 2x & x > 2 \end{cases}$$

است. نمودار توابع  $y = x^2 - 2x$  و  $y = 2x - x^2$  به صورت زیر است.



بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است.



**گزینه ۱۹۰۵** راهحل اول ضابطه تابع به صورت زیر است:

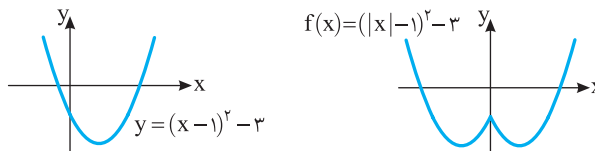
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \leq 0 \\ x^2 - 2x - 2 & x > 0 \end{cases}$$

هر یک از قطعه‌ها بخشی از یک سهمی است (اولی به رأس  $(-1, -3)$  و دومی به رأس  $(1, -3)$ ). پس نمودار تابع به صورت گزینه (۳) است.

**راهحل دوم** توجه کنید که

$$f(x) = |x|^2 - 2|x| - 2 = (|x|-1)^2 - 3$$

بنابراین کافی است ابتدا نمودار تابع  $y = (x-1)^2 - 3$  را رسم کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست این محور قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم.



**راهحل سوم** چون  $f(-x) = f(x)$ ، بنابراین نمودار تابع  $f$  نسبت به محور  $y$  متقارن است (توجه کنید که نمودار  $y = f(-x)$  از قرینه کردن نمودار تابع  $f$  نسبت به محور  $y$  به دست می‌آید). بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر،  $f(0) = -2$ ، پس گزینه (۱) هم رد می‌شود.

**گزینه ۱۹۰۶** توجه کنید که

$$f(x) = \frac{|x-2||x+2|}{x+2} = \begin{cases} |x-2| & x > -2 \\ -|x-2| & x < -2 \end{cases}$$

**راه حل دوم** فرض کنید  $n=2$ . در این صورت  $[\sqrt{fn^2-2n+1}]=[\sqrt{13}]=3$ . فقط مقدار گزینه (۲) به ازای  $n=2$  برابر ۳ می‌شود.

**۱۹۱۷- گزینه ۲** اگر  $[\frac{5-x}{2}]=-4$ . آن گاه  $-4 \leq \frac{5-x}{2} < -3$ . بنابراین  $-8 \leq 5-x < -6 \Rightarrow -13 \leq -x < -11$

در نتیجه  $11 < x \leq 13$ . بنابراین  $a=11$ ،  $b=13$  و  $b-a=2$ .

**۱۹۱۸- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که  $[x+2]=[x]+2$  و  $[x-1]=[x]-1$  بنابراین

$$2[x+2]-[x-1]=7 \Rightarrow 2[x]+4-[x]+1=7 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2 \leq x < 3$$

**۱۹۱۹- گزینه ۱** اگر  $k$  عددی صحیح باشد. آن گاه  $[x+k]=[x]+k$  بنابراین

$$[x+[x-3]]=3 \Rightarrow [x]+[x-3]=3 \Rightarrow [x]+[x]-3=3 \Rightarrow [x]=3$$

در نتیجه  $3 \leq x < 4$ . بنابراین  $a=3$ ،  $b=4$  و  $a+b=7$ .

**۱۹۲۰- گزینه ۳** توجه کنید که  $3 \leq [x] \leq 4$  معادل است با  $[x]=3$  یا  $[x]=4$  پس

$$[x]=3 \Rightarrow 3 \leq x < 4, [x]=4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$$

پس مجموعه جواب‌های نامعادله بازه  $[3, 5]$  است.

در نتیجه  $a=3$ ،  $b=5$  و  $a+b=8$ .

**۱۹۲۱- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$[\sqrt{2}]=[\sqrt{3}]=\dots=[\sqrt{7}]=1, [\sqrt{8}]=[\sqrt{9}]=\dots=[\sqrt{26}]=2$$

$$[\sqrt{27}]=[\sqrt{28}]=\dots=[\sqrt{63}]=3$$

بنابراین

$$A = \underbrace{1+1+\dots+1}_{6} + \underbrace{1+2+2+\dots+2}_{19} + \underbrace{2+3+3+\dots+3}_{37} = 6+38+111=155$$

**۱۹۲۲- گزینه ۳**

$$A = [-\sqrt{10}] + [-\sqrt{9}] + [-\sqrt{8}] + \dots + [\sqrt{10}]$$

$$= ([-\sqrt{10}] + [\sqrt{10}]) + ([-\sqrt{9}] + [\sqrt{9}]) + \dots + ([-\sqrt{1}] + [\sqrt{1}])$$

اگر  $x \in \mathbb{Z}$  آن گاه  $[x]+[-x]=0$  و اگر  $x \notin \mathbb{Z}$  آن گاه  $[x]+[-x]=-1$ . از  $\sqrt{0}$  تا  $\sqrt{10}$  اعداد  $\sqrt{0}$ ،  $\sqrt{1}$ ،  $\sqrt{4}$ ،  $\sqrt{9}$  صحیح هستند و اعداد  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{5}$ ،  $\sqrt{6}$ ،  $\sqrt{7}$ ،  $\sqrt{8}$  و  $\sqrt{10}$  غیر صحیح هستند. بنابراین

$$A = \underbrace{0+0+\dots+0}_{14} + \underbrace{(-1)+(-1)+\dots+(-1)}_{6} = -7$$

**۱۹۲۳- گزینه ۴** از  $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$  نتیجه می‌شود

$$1 < 3x < 2 \Rightarrow [3x]=1, \frac{3}{2} < \frac{1}{x} < 3 \Rightarrow 3 < \frac{2}{x} < 6 \Rightarrow 1 < \frac{2}{3x} < 2 \Rightarrow [\frac{2}{3x}]=1$$

$$[3x] - [\frac{2}{3x}] = 1 - 1 = 0 \text{ بنابراین}$$

**۱۹۲۴- گزینه ۲** از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$2 \leq x < 3 \xrightarrow{\times 2} 4 \leq 2x < 6, \quad 2 \leq y < 3 \xrightarrow{\times 3} 6 \leq 3y < 9$$

در نتیجه با جمع کردن این دو نابرابری معلوم می‌شود که

$$10 \leq 2x+3y < 15 \xrightarrow{\div 5} 2 \leq \frac{2x+3y}{5} < 3$$

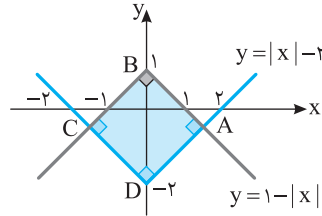
$$\text{پس } [\frac{2x+3y}{5}] = 2$$

**۱۹۱۰- گزینه ۴** نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. مساحت ABCD مطلوب مسئله است. ابتدا طول نقطه‌های A و C را مشخص می‌کنیم:

$$|x|-2=1-|x| \Rightarrow |x|=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{3}{2}$$

بنابراین  $AC=3$  و  $BD=3$ . پس چهارضلعی ABCD یک مربع است

که مساحت آن برابر است با  $S=\frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$ .



**۱۹۱۱- گزینه ۱** توجه کنید که

$$x^3 = -20 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{20}$$

همچنین  $5 < 2\sqrt[3]{20} < 6$ ، بنابراین

$$-6 < -2\sqrt[3]{20} < -5 \Rightarrow -6 < 2x < -5 \Rightarrow [2x] = -6$$

توجه کنید که  $2\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{160}$  و چون  $\sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{160} < \sqrt[3]{216}$  پس

$$5 < 2\sqrt[3]{20} < 6$$

**۱۹۱۲- گزینه ۲** توجه کنید که

$$1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2$$

$$9 \leq x < 16 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3$$

$$16 \leq x < 25 \Rightarrow 4 \leq \sqrt{x} < 5 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 4$$

$$x=25 \Rightarrow \sqrt{25}=5$$

بنابراین

$$A = 1+1+1+\underbrace{2+2+\dots+2}_{65} + \underbrace{3+3+\dots+3}_{67} + \underbrace{4+4+\dots+4}_{69} = 3+10+21+36+5=75$$

**۱۹۱۳- گزینه ۱** توجه کنید که

$$[x]=2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow 6 \leq 3x < 9 \Rightarrow 1 \leq 3x-5 < 4$$

بنابراین  $[3x-5]$  می‌تواند مقادیر ۱، ۲ و ۳ را داشته باشد.

**۱۹۱۴- گزینه ۱** اگر  $[\frac{5-x}{2}]=-3$ . آن گاه  $-3 \leq \frac{5-x}{2} < -2$ . بنابراین

$$-6 \leq 5-x < -4 \Rightarrow -11 \leq -x < -9$$

در نتیجه  $9 < x \leq 11$ .

**۱۹۱۵- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$[3x-2]=1 \Rightarrow 1 \leq 3x-2 < 2 \Rightarrow 3 \leq 3x < 4 \Rightarrow 1 \leq x < \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$2 \leq 2x < \frac{4}{3} \Rightarrow -1 \leq 2x-3 < -\frac{1}{3} \Rightarrow [2x-3] = -1$$

**۱۹۱۶- گزینه ۲** راه حل اول توجه کنید که

$$fn^2 - fn + 1 < fn^2 - 2n + 1 < (2n)^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < fn^2 - 2n + 1 < (2n)^2$$

$$2n-1 < \sqrt{fn^2-2n+1} < 2n$$

$$\text{بنابراین } [\sqrt{fn^2-2n+1}] = 2n-1$$

۱۹۳۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر  $k$  عددی صحیح باشد. آن گاه

$$[x+k]=[x]+k$$

$$\begin{aligned} f(x+3) &= \left[\frac{x+3}{2}\right] - \left[\frac{x+4}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{2}+1\right] - \left[\frac{x}{2}+2\right] \\ &= \left[\frac{x+1}{2}\right] + 1 - \left[\frac{x}{2}\right] - 2 = -f(x) - 1 \end{aligned}$$

$$\text{در نتیجه } f(x+3)+f(x)=-1$$

۱۹۳۲- گزینه ۲ راه حل اول اگر  $x \in [1, 2]$ ، آن گاه  $-2 \leq x-3 < -1$ .

$$\text{بنابراین } |x-3| = -x+3 \text{ همچنین}$$

$$-1 \leq x-2 < 0 \Rightarrow [x-2] = -1$$

$$\text{در نتیجه } f(x) = -1 + (-x+3) = -x+2$$

راه حل دوم  $f(1) = -1 + |-2| = 1$  فقط در گزینه (۲) برقرار است.

۱۹۳۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که باید  $9-x^2 \geq 0$  و در نتیجه

$$-3 \leq x \leq 3 \text{ از طرف دیگر،}$$

$$\left[\frac{x}{2}\right] - 1 = 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x < 4$$

بنابراین عددهای بازه  $[2, 4]$  در دامنه تابع نیستند و دامنه تابع به صورت

$$[-3, 2) \text{ است. پس } a = -3, b = 2, a+b = -1$$

۱۹۳۴- گزینه ۲ باید نامعادله های  $[x]+2 \geq 0$  و  $3-[x] \geq 0$  را حل کنیم

و اشتراک مجموعه جواب های آن ها را به دست آوریم:

$$[x]+2 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq -2 \Rightarrow x \geq -2, \quad 3-[x] \geq 0 \Rightarrow [x] \leq 3 \Rightarrow x < 4$$

$$\text{بنابراین } D_f = [-2, 4) \text{ پس } a = -2, b = 4, a+b = 2$$

۱۹۳۵- گزینه ۱ اگر  $-1 \leq x < 0$ ,

$$[x] = -1, |x| = -x \Rightarrow f(x) = -1+x$$

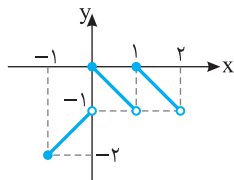
$$\text{اگر } 0 \leq x < 1,$$

$$[x] = 0, |x| = x \Rightarrow f(x) = -x$$

$$\text{اگر } 1 \leq x < 2,$$

$$[x] = 1, |x| = x \Rightarrow f(x) = 1-x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و برد تابع به صورت  $\{-1\} \cup [-2, 0] \cup [-2, 0]$  است.



۱۹۳۶- گزینه ۴ توجه کنید که  $D_f = \{x \mid |x+1|-2 > 0\}$  از طرف

دیگر، چون  $|x+1|-2 \geq 0$  عددی صحیح است، پس اگر مثبت باشد، بزرگ تر یا

$$\text{مساوی ۱ است: } |x+1|-2 \geq 1 \text{ در نتیجه}$$

$$|x+1|-2 \geq 1 \Rightarrow |x+1| \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 2 \\ x+1 \leq -3 \Rightarrow x \leq -4 \end{cases}$$

$$\text{بنابراین } D_f = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$$

۱۹۲۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که  $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$  پس

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow 0 \leq x-2 < 1 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 < 1$$

$$-4 \leq (x-2)^2 - 4 < -3 \Rightarrow [(x-2)^2 - 4] = -4$$

بنابراین  $[x^2 - 4x]$  فقط می تواند مقدار  $-4$  را داشته باشد.

۱۹۲۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0$$

$$-1 \leq (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq (x + \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4}$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow |x + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < x < 0$$

بنابراین  $x^1 < 0$  و در نتیجه  $[x^1] = 0$ .

۱۹۲۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$n^3 < n^3 + 3n^2 + 1 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$n^3 < n^3 + 3n^2 + 1 < (n+1)^3 \Rightarrow n < \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} < n+1$$

بنابراین  $[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}] = n$

۱۹۲۸- گزینه ۳ اگر  $-2 < x < -1$ ، آن گاه  $[x] = -2$  و  $|x| = -x$ ،

بنابراین معادله به شکل زیر است

$$-3x - 4 = 1 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

اگر  $-1 \leq x < 0$ ، آن گاه  $[x] = -1$  و  $|x| = -x$ ، پس معادله به شکل زیر است

$$-3x - 2 = 1 \Rightarrow x = -1$$

اگر  $0 \leq x < 1$ ، آن گاه  $[x] = 0$  و  $|x| = x$ ، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$3x + 0 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

بنابراین مجموع جواب های واقع در بازه  $(-2, 1)$  برابر است با

$$-\frac{5}{3} - 1 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

۱۹۲۹- گزینه ۲ توجه کنید که  $[x-1] = [x] - 1$ ، بنابراین معادله

مورد نظر می شود

$$[x]^2 + 5[x] + 6 = 0 \Rightarrow ([x]+2)([x]+3) = 0$$

اکنون توجه کنید که

$$[x]+2=0 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

$$[x]+3=0 \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow -3 \leq x < -2$$

بنابراین مجموعه جواب های معادله مورد نظر می شود

$$[-3, -2) \cup [-2, -1) = [-3, -1)$$

$$\text{در نتیجه } b-a=2 \text{ و } b=-1, a=-3$$

۱۹۳۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\frac{2[x]+1}{5} = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{2[x]+1}{5} < 4 \Rightarrow 7 \leq [x] < \frac{19}{2}$$

چون  $[x]$  عددی صحیح است، پس

$$[x] = 7 \Rightarrow 7 \leq x < 8, \quad [x] = 8 \Rightarrow 8 \leq x < 9, \quad [x] = 9 \Rightarrow 9 \leq x < 10$$

بنابراین مجموعه جواب های معادله مورد نظر می شود

$$[7, 8) \cup [8, 9) \cup [9, 10) = [7, 10)$$

$$\text{در نتیجه } b-a=3 \text{ و } b=10, a=7$$

۱۹۴۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(f(x)) = f(x) - [3f(x)]$$

اکنون حاصل  $[3f(x)]$  را پیدا می‌کنیم. اگر  $k$  عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$[x+k] = [x] + k$$

در نتیجه

$$[3f(x)] = [3x - 3[3x]] = [3x] - 3[3x] = -2[3x]$$

زیرا  $(3[3x]) \in \mathbb{Z}$  بنابراین

$$f(f(x)) = f(x) - (-2[3x]) = x - [3x] + 2[3x] = x + [3x]$$

در نتیجه  $f(f(x)) - x = [3x]$ .

۱۹۴۲- گزینه ۲ راه حل اول ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$[4-x] + [x-3] = 0 \Rightarrow 4 + [-x] + [x] - 3 = 0$$

$$[x] + [-x] = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

پس عددهای غیر صحیح مخرج کسر را صفر می‌کنند و در دامنه تابع نیستند. بنابراین دامنه تابع  $\mathbb{Z}$  است.

راه حل دوم توجه کنید که  $f(0) = f(1) = 1$ . بنابراین عددهای صفر و ۱ در دامنه تابع هستند و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) رد می‌شوند.

۱۹۴۳- گزینه ۱ اگر  $x$  عددی صحیح باشد که در دامنه  $f$  نیست، آن‌گاه

$$[|x+1| - 2] - 5 = 0 \quad (1)$$

و چون  $x$  صحیح است، پس  $|x+1| - 2$  نیز صحیح است، در نتیجه

$$[|x+1| - 2] = |x+1| - 2$$

بنابراین معادله (۱) می‌شود

$$|x+1| - 2 - 5 = 0 \Rightarrow |x+1| = 7 \Rightarrow x+1 = \pm 7 \Rightarrow x = \pm 7 - 1$$

بنابراین مجموع عددهای صحیح مورد نظر برابر  $-2$  است.

۱۹۴۴- گزینه ۳ برای تعیین دامنه تابع  $f$  باید نامعادله  $\frac{4-[x]}{[x]-1} \geq 0$  را حل

کنیم. اگر فرض کنیم  $t = [x]$ ، نامعادله به صورت  $\frac{4-t}{t-1} \geq 0$  درمی‌آید که

جواب آن به صورت  $1 < t \leq 4$  است.

بنابراین

$$1 < [x] \leq 4 \Rightarrow 2 \leq x < 5$$

بنابراین  $D_f = [2, 5)$  و در نتیجه  $a = 2$  و  $b = 5$  و  $a + b = 7$ .

۱۹۴۵- گزینه ۲ باید نامعادله  $4[x] - [x]^2 \geq 0$  را حل کنیم. فرض

می‌کنیم  $[x] = t$  و در نتیجه

$$4t - t^2 \geq 0 \Rightarrow t(4-t) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq 4$$

بنابراین  $0 \leq [x] \leq 4$ . در نتیجه  $0 \leq x < 5$ . پس  $D_f = [0, 5)$  و دامنه تابع

شامل ۵ عدد صحیح است.

۱۹۴۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که نابرابری  $0 \leq x - [x] < 1$  برای هر

مقدار  $x$  برقرار است.

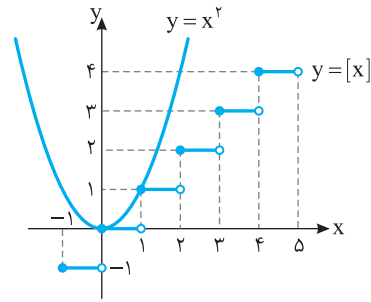
پس

$$-1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -2 < 2[x] - 2x \leq 0 \Rightarrow -2 < f(x) \leq 0$$

بنابراین  $R_f = (-2, 0]$ .

۱۹۳۷- گزینه ۲ نمودار این تابع‌ها را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی

شکل معلوم است که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

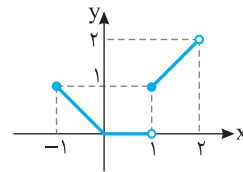


۱۹۳۸- گزینه ۳ ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x, \quad 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



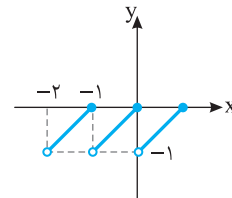
۱۹۳۹- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$-2 < x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq -x < 2 \Rightarrow [-x] = 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

پس نمودار تابع  $f$  به شکل زیر است:



راه حل دوم می‌دانیم برای هر عدد حقیقی  $a$ ،  $[a] \leq a$ . بنابراین

$$[-x] \leq -x \Rightarrow x + [-x] \leq 0$$

چون  $f(x) = x + [-x]$ ، پس مقادیر تابع  $f$  همواره نامثبت هستند، بنابراین گزینه‌های

(۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر  $f(0) = 0$ ، پس گزینه (۱) نیز رد می‌شود.

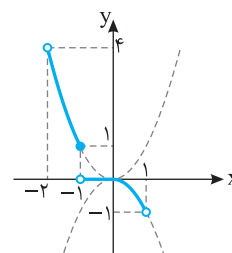
۱۹۴۰- گزینه ۲ ضابطه تابع به شکل زیر است:

$$-2 < x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq -x < 2 \Rightarrow [-x] = 1 \Rightarrow f(x) = x^2$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0 \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x^2$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:





پس مجموعه جواب‌های معادله به صورت  $(-\infty, 1-\sqrt{6}) \cup (1, 5)$  است.

### ریاضی - ۹۲

**گزینه ۴ - ۱۹۵۲ راه حل اول** واضح است که اگر  $x < 0$ ، نامعادله جواب

ندارد. زیرا در این صورت باید  $|x^2 - 2x| < 0$  که غیرممکن است. بنابراین باید با شرط  $x \geq 0$  نامعادله را حل کنیم. اکنون توجه کنید که نامعادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$|x^2 - 2x| < x \Rightarrow |x(x-2)| < x \Rightarrow |x||x-2| < x$$

$$x|x-2| < x \Rightarrow |x-2| < 1$$

$$-1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله بازه  $(1, 3)$  است.

**راه حل دوم** به کمک دو مقدار  $x=1$  و  $x=2$  گزینه صحیح مشخص می‌شود.  $x=1$  در نامعادله صدق نمی‌کند ولی  $x=2$  در آن صدق می‌کند. تنها گزینه‌ای که عدد ۲ در آن قرار دارد ولی عدد ۱ در آن قرار ندارد، گزینه (۴) است.

### خارج از کشور ریاضی - ۹۲

**گزینه ۳ - ۱۹۵۳ راه حل اول** اگر  $|x+1| - 1 < 0$ ، آن‌گاه نامعادله جواب

ندارد. زیرا در این صورت باید  $|x^2 - 2| < 0$  که غیرممکن است. بنابراین باید  $|x+1| - 1 \geq 0$  و در نتیجه

$$|x+1| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0 \\ x+1 \leq -1 \Rightarrow x \leq -2 \end{cases}$$

اگر  $x \leq -2$ ، آن‌گاه  $x+1 < 0$  و  $x^2 - 2 > 0$ ، پس نامعادله به صورت زیر خواهد بود:

$$(غ.ق.ق.) \quad x^2 - 2 < -x - 1 - 1 \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

بنابراین نامعادله در بازه  $(-\infty, -2]$  جواب ندارد. پس باید با فرض  $x \geq 0$  آن را حل کنیم. در این حالت  $x+1 > 0$  و نامعادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$|x^2 - 2| < x + 1 - 1 \Rightarrow |x^2 - 2| < x \Rightarrow -x < x^2 - 2 < x$$

پس باید دستگاه نامعادله‌های  $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 & (1) \\ x^2 + x - 2 > 0 & (2) \end{cases}$  را حل کنیم. مجموعه

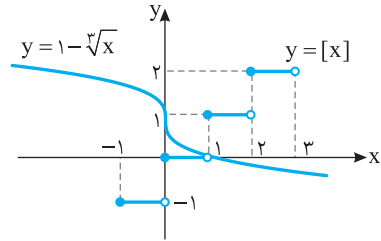
جواب‌های نامعادله (۱) با شرط  $x \geq 0$  به صورت  $0 \leq x < 2$  و مجموعه جواب‌های نامعادله (۲) با شرط  $x \geq 0$  به صورت  $x > 1$  است. اشتراک این مجموعه جواب‌ها بازه  $(1, 2)$  است که وسط بازه نقطه‌ای به طول  $1/5$  است.

**راه حل دوم** ابتدا نمودار توابع  $f(x) = |x^2 - 2|$  و  $g(x) = |x+1| - 1$  را رسم می‌کنیم. توجه کنید جاهایی که  $f(x) < g(x)$ ، بازه  $(a, b)$  است. از روی نمودارها معلوم می‌شود که در این بازه  $x > 0$ ، بنابراین در این بازه، ضابطه  $g$  به صورت  $g(x) = x + 1 - 1 = x$  ساده می‌شود. اکنون توجه کنید که نامعادله مورد نظر می‌شود:

$$|x^2 - 2| < x \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 < x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 < 0$$

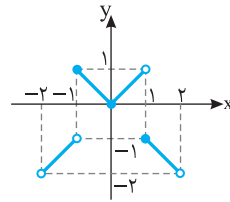
$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) < 0 \xrightarrow{x > 0} 1 < x < 2$$

**گزینه ۴ - ۱۹۴۷** نمودار دو تابع  $y = 1 - \sqrt{x}$  و  $y = [x]$  را رسم می‌کنیم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



**گزینه ۲ - ۱۹۴۸** ابتدا توجه کنید که

اگر  $[x]$  عددی زوج باشد، آن‌گاه  $(-1)^{[x]} = 1$  و در نتیجه  $f(x) = x$ . همچنین اگر  $[x]$  عددی فرد باشد، آن‌گاه  $(-1)^{[x]} = -1$  و در نتیجه  $f(x) = -x$ . بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو است.



**گزینه ۴ - ۱۹۴۹** ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر است:

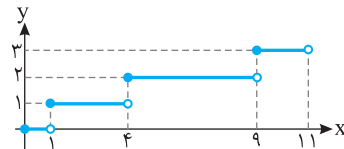
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2 \Rightarrow f(x) = 2$$

$$9 \leq x < 11 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < \sqrt{11} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3 \Rightarrow f(x) = 3$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است.



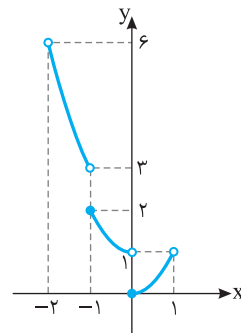
**گزینه ۱ - ۱۹۵۰** توجه کنید که

$$-2 < x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x^2$$

پس نمودار تابع  $f$  به شکل زیر است:



**گزینه ۴ - ۱۹۵۱** معادله  $(x-4)|x| < 2x - 5$  را برای  $x \geq 0$  و  $x < 0$

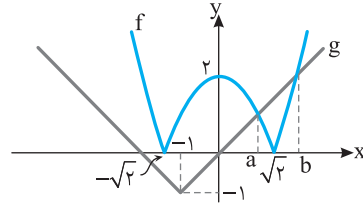
جدداً حل می‌کنیم:

$$x \geq 0 \Rightarrow (x-4)x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow 1 < x < 5$$

$$x < 0 \Rightarrow (x-4)(-x) < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0$$

$$x < 1 - \sqrt{6}, x > 1 + \sqrt{6} \xrightarrow{x < 0} x < 1 - \sqrt{6}$$

بنابراین  $a=1$  و  $b=2$ ، پس بازه مورد نظر به صورت  $(1,2)$  است و وسط بازه نقطه‌ای به طول  $1/5$  است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۵

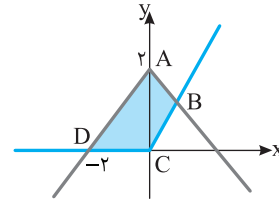
۱۹۵۴- گزینه ۳ با تعیین ضابطه، دو تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:

$$y=2-|x| = \begin{cases} 2-x & x \geq 0 \\ 2+x & x < 0 \end{cases}, \quad y=x+|x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ابتدا مختصات نقطه B را محاسبه می‌کنیم:

$$2-x_B = 2x_B \Rightarrow 3x_B = 2 \Rightarrow x_B = \frac{2}{3}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{3}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$



تجربی - ۹۵

۱۹۵۵- گزینه ۴ عبارت  $x^2+1$  همواره مثبت است، پس

$$|x^2+1| = x^2+1$$

بنابراین

$$2x+1-|x-2| > x^2+1 \Rightarrow -x^2+2x > |x-2| \Rightarrow -x(x-2) > |x-2|$$

$$x \geq 2: -x(x-2) > (x-2) \Rightarrow (x-2)(-x-1) > 0$$

$$-x > 1 \Rightarrow x < -1 \text{ (غ.ق.)}$$

$$x < 2: -x(x-2) > -(x-2) \Rightarrow (x-2)(-x+1) > 0$$

$$-x < -1 \Rightarrow x > 1$$

بنابراین  $1 < x < 2$ .

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۹۵۶- گزینه ۳ ابتدا ضابطه تابع g را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = f(2x-3) - 2f(x) = 2x-3 - [2x-3] - 2x + 2[x] \\ = 2x-3 - [2x] + 3 - 2x + 2[x] \Rightarrow g(x) = 2[x] - [2x]$$

با توجه به اینکه حاصل  $g(x) = 2[x] - [2x]$  همواره عددی صحیح است،

گزینه (۳) یعنی  $\{0, -1\}$  یا گزینه (۴) یعنی  $\{0, 1\}$  پاسخ صحیح هستند که

با قرار دادن چند مقدار خواهیم داشت:

$$x = \frac{1}{10} \Rightarrow y = 0, \quad x = \frac{9}{10} \Rightarrow y = -1$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۹۵۷- گزینه ۲ ابتدا از  $[x^2+x] = -1$ ، مقادیر x را می‌یابیم:

$$-1 \leq x^2+x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \\ x^2+x+1 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{اشتراک} \rightarrow -1 < x < 0$$

تجربی - ۸۸

پس  $0 < x^2 < 1$  و حاصل  $[x^2]$  برابر صفر است.

۱۹۵۸- گزینه ۳ راه‌حل اول از آنجا که به ازای هر عدد طبیعی  $n > 2$

حاصل، عددی منحصر به فرد است به ازای  $n=3$  این عدد را به دست می‌آوریم:

$$n=3: [\sqrt{36-9+1}] - 2[\sqrt{9-6}] = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5-2=3$$

راه‌حل دوم به ازای  $n > 2$ .

$$\begin{cases} 4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2 \\ 2n-1 < \sqrt{4n^2-3n+1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2-3n+1}] = 2n-1 \\ n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2 \\ n-2 < \sqrt{n^2-2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2-2n}] = n-2 \end{cases}$$

پس  $[\sqrt{4n^2-3n+1}] - 2[\sqrt{n^2-2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 4-1=3$

تجربی - ۹۱

۱۹۵۹- گزینه ۱ ضابطه  $f(x-f(x))$  را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = [x] \Rightarrow f(x-f(x)) = f(x-[x])$$

از طرف دیگر  $x-[x]$  همواره در فاصله  $(0,1)$  است، بنابراین

$$f(x-[x]) = 0$$

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۱۹۶۰- گزینه ۱ از نامعادله  $x^2+x < 0$  نتیجه می‌گیریم  $-1 < x < 0$ ،

پس به ازای  $-1 < x < 0$ :

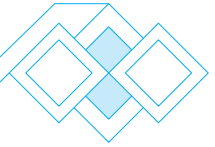
$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1, \quad 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

$$-1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1, \quad 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0$$

$$[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 - 1 + 0 = -2$$

خارج از کشور تجربی - ۸۸

## فصل سیزدهم



۱۹۶۱- گزینه ۳ نقاط A و B را معین می‌کنیم

$$y=0 \Rightarrow 2^{x-1} - 2 = 0 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^1 \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A=(2, 0)$$

$$x=0 \Rightarrow y=2^{-1} - 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow B=(0, -\frac{3}{2})$$

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (0 - (-\frac{3}{2}))^2} = \frac{5}{2}$$

۱۹۶۲- گزینه ۱ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(-\frac{3}{2}) = 9^{\frac{-\frac{3}{2}+a}{2}} = 9^{\frac{-\frac{3}{2}+a}{2}} - 2b = 0 \Rightarrow 2b = 9^{\frac{-\frac{3}{2}+a}{2}}$$

$$f(0) = 26 = 9^a - 2b = 26 \Rightarrow 2b = 9^a - 26$$

بنابراین

$$9^{\frac{-\frac{3}{2}+a}{2}} = 9^a - 26 \Rightarrow 9^{\frac{-\frac{3}{2}+a}{2}} - 9^a = -26 \Rightarrow 9^a (1 - 9^{\frac{-\frac{3}{2}}{2}}) = 26$$

$$9^a (1 - \frac{1}{27}) = 26 \Rightarrow 9^a = 27 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

در نتیجه  $a+b=2$ ، یعنی  $b = \frac{1}{2}$ ،  $2b = 9^a - 26 = 1$  به این ترتیب،

۱۹۶۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(-1) = 9 \Rightarrow a^{-1} + 1 = 9 \Rightarrow a^{-1} = 8 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

بنابراین  $f(x) = (\frac{1}{8})^x + 1$  از طرف دیگر

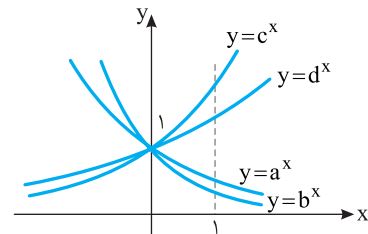
$$f(0) = b \Rightarrow (\frac{1}{8})^0 + 1 = b \Rightarrow b = 1 + 1 = 2$$

در نتیجه  $ab = \frac{1}{4}$

۱۹۶۴- گزینه ۴ چون عرض نقطه برخورد تابع‌ها با خط  $x=1$  به صورت

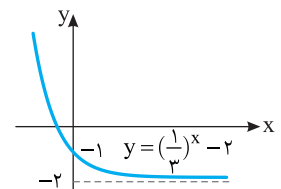
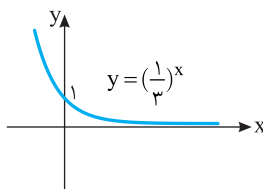
$a, b, c, d$  است، با توجه به نمودار چهار تابع و مقایسه عرض نقطه برخورد

تابع‌ها با خط  $x=1$  معلوم می‌شود  $c > d > a > b$ .

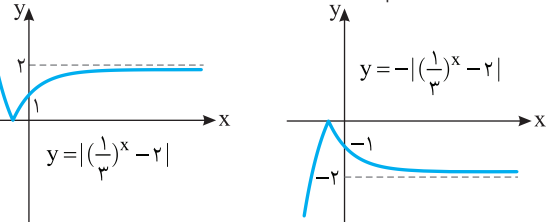


۱۹۶۵- گزینه ۱ توجه کنید که  $f(x) = 1 - |(\frac{1}{3})^x - 2|$  ابتدا نمودار

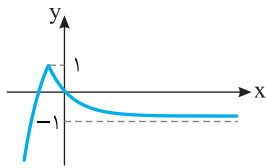
$$y = (\frac{1}{3})^x$$



۱۹۶۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:



در نهایت، نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



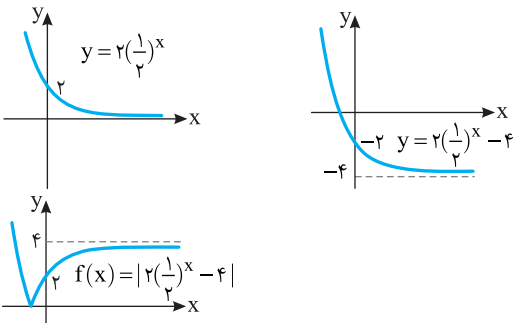
$$f(x) = 1 - |(\frac{1}{3})^x - 2|$$

۱۹۶۷- گزینه ۳

$$f(x) = \frac{|2^{x+1} - 1|}{2^{x-1}} = \frac{|2^{x+1} - 1|}{|2^{x-1}|} = \frac{|2^{x+1} - 1|}{2^{x-1}} = \frac{2^{x+1} - 1}{2^{x-1}}$$

$$= |4 - \frac{2}{2^x}| = |4 - 2(\frac{1}{2})^x| = |2(\frac{1}{2})^x - 4|$$

بنابراین نمودار تابع  $f$  به ترتیب زیر رسم می‌شود:



۱۹۶۸- گزینه ۲ می‌توان نوشت

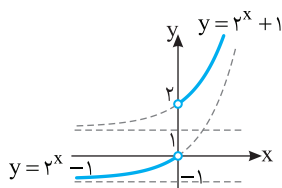
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3^{g(x)-2} = 3^{x+2-2} = 3^x$$

$$f(x) = 3^{x-2} = \frac{1}{9} \times 3^x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{9} \times (f \circ g)(x) \Rightarrow (f \circ g)(x) = 9f(x)$$

۱۹۶۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

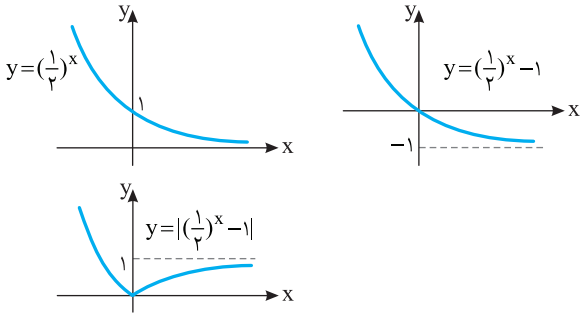
$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & x > 0 \\ 2^x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است.



پس برد تابع به صورت  $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$  است.

بنابراین نمودار تابع به ترتیب زیر رسم می‌شود:



۱۹۷۵- گزینه ۱ فرض می‌کنیم  $s = 2^{m-2} + 1 = 26$  چون  $f^{-1}(s) = 26$ .

پس  $f(26) = s$ . در نتیجه  $f(26) = 5(26) - 1 = 129$ . اکنون می‌توان نوشت

$$s = 2^{m-2} + 1 = 129 \Rightarrow 2^{m-2} = 128 = 2^7$$

بنابراین  $m - 2 = 7$  پس  $m = 9$ .

۱۹۷۶- گزینه ۴ توجه کنید که  $g(x+2) = 2^{x+2-1} = 2^{x+1}$ ، بنابراین

$$f(2^{x+1}) = 2^x + 1$$

$$f(2^{x+1}) = 2^x + 1 \Rightarrow f^{-1}(2^{x+1}) = 2^x + 1$$

$$2^x + 1 = 9 \Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین  $f^{-1}(9) = 2^{3+1} = 16$ .

۱۹۷۷- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = 8^{\frac{x}{3}} = 2^x, \quad g(x-2) = 2^{2(x-2)+5} = 2^{2x+1}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{x}{3}\right)g(x-2) = 2^x \times 2^{2x+1} = 2^{3x+1} = 2^{3x} \times 2 = 2 \times 8^x = 2f(x)$$

۱۹۷۸- گزینه ۳ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x + 2} = \frac{2^x + 2}{2^x + 2} + \frac{-1}{2^x + 2} = 1 - \frac{1}{2^x + 2}$$

اکنون توجه کنید که برای هر  $x$  حقیقی،  $2^x > 0$ . بنابراین

$$2^x + 2 > 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^x + 2} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{2^x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2^x + 2} < 1$$

در نتیجه  $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ .

۱۹۷۹- گزینه ۴ می‌دانیم تابع‌های نمایی به شکل  $f(x) = ka^x$

( $a > 0, a \neq 1$ )، یک‌به‌یک هستند. در نتیجه تابع‌های  $y = 3^{1+2x}$  و  $y = 4^{5-x}$

یک‌به‌یک هستند. تابع  $f(x) = 2^{3-|x|}$ ، یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر  $x$  حقیقی،

$y = 9^x + 2 \times 3^{x+1}$  تابع  $f(x) = f(-x) = 2^{3-|x|}$  اکتون ثابت می‌کنیم تابع

یک‌به‌یک است. دقت کنید که  $9 - (3^x + 3)^2 = (3^x + 3)^2 - 9 = (3^{x_1} + 3)^2 - 9 = (3^{x_2} + 3)^2 - 9$  فرض

می‌کنیم  $f(x_1) = f(x_2)$ . در نتیجه  $(3^{x_1} + 3)^2 - 9 = (3^{x_2} + 3)^2 - 9$ .

بنابراین  $(3^{x_1} + 3)^2 = (3^{x_2} + 3)^2$ ، چون  $3^{x_1} + 3, 3^{x_2} + 3 > 0$ ، پس

$$3^{x_1} + 3 = 3^{x_2} + 3 \Rightarrow 3^{x_1} = 3^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

۱۹۶۹- گزینه ۴ در تابع  $f(x) = 2^{x^2} + 1$  برای  $x = 1$  و  $x = -1$  مقدار

تابع برابر ۳ است. پس تابع یک‌به‌یک نیست.

۱۹۷۰- گزینه ۲ توجه کنید که باید  $k > 0$  و

$$f(x) = 2 \times 2^x \times \left(\frac{1}{k}\right)^x = 2 \times \left(\frac{2}{k}\right)^x$$

بنابراین، چون تابع  $f$  اکیداً صعودی است، پس

$$\frac{2}{k} > 1 \xrightarrow{k > 0} k < 2$$

بنابراین  $0 < k < 2$ .

۱۹۷۱- گزینه ۳ با توجه به فرض مسئله،

$$f(0) = -\frac{21}{4} \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^b - 6 = -\frac{21}{4} \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^b = \frac{3}{4}$$

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^{b-2} = 3 \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^{b-3} = 6 \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^{b-3} - 6 = 0 \Rightarrow f(-3) = 0$$

بنابراین نمودار تابع  $f$  محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول  $-3$  قطع می‌کند.

۱۹۷۲- گزینه ۲ چون نمودار تابع‌های  $f$  و  $g$  در نقطه‌ای به طول  $-1$

مقاطع‌اند، پس

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 2^{-a+b} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1-b} = 2^{-2(-1-b)} = 2^{2(1+b)}$$

بنابراین

$$-a + b = 2(1+b) \Rightarrow a + b = -2 \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$f(1)g(1) = 4 \Rightarrow 2^{a+b} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-b} = 4 \Rightarrow 2^{a+b} \times 2^{-2(1-b)} = 2^2$$

$$2^{a+3b-2} = 2^2 \Rightarrow a+3b = 4 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $a = -5$  و  $b = 3$ . بنابراین

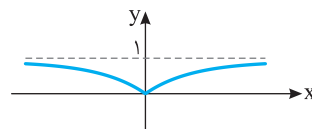
$f(x) = 2^{-5x+3}$ . اکنون فرض کنید  $f^{-1}\left(\frac{1}{128}\right) = m$ . در این صورت

$$f(m) = \frac{1}{128} \Rightarrow 2^{-5m+3} = \frac{1}{128} = 2^{-7} \Rightarrow -5m+3 = -7 \Rightarrow m = 2$$

۱۹۷۳- گزینه ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 1-2^x & x \leq 0 \\ 1-2^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$$

فقط گزینه (۴) این شرط را دارد.

۱۹۷۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y = \frac{|1-2^x|}{2^x} = \frac{|1-2^x|}{|2^x|} = \left| \frac{1-2^x}{2^x} \right| = \left| \frac{1}{2^x} - \frac{2^x}{2^x} \right| = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \right|$$

۱۹۸۷- گزینه ۲ عددهایی که مخرج کسر را صفر کنند، در دامنه تابع قرار

ندارند. پس

$$|2^x - 4| - 3 = 0 \Rightarrow 2^x - 4 = \pm 3 \Rightarrow 2^x = 7, 2^x = 1$$

هر یک از معادله‌های بالا فقط یک جواب دارند و این دو جواب متمایز هستند پس دامنه تابع شامل دو عدد نیست.

۱۹۸۸- گزینه ۴ چون  $\frac{2}{3} = (\frac{3}{2})^{-1}$ ، پس نامعادله مورد نظر می‌شود:

$$(\frac{3}{2})^{1-3^x} < (\frac{3}{2})^{-(3+x)}$$

اکنون توجه کنید که چون  $\frac{3}{2} > 1$ ، پس  $1 - 3^x < -(3+x)$ ، بنابراین  $x > 2$ .

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر بازه  $(2, +\infty)$  است.

۱۹۸۹- گزینه ۳ باید نامعادله‌های  $2^x - 8 \geq 0$  و  $11 - 3^x > 0$  را حل

کنیم و اشتراک مجموعه جواب‌های آن‌ها را به دست آوریم

$$2^x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^3 \Rightarrow x \geq 3, \quad 11 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 3^4 \Rightarrow x < 4$$

بنابراین  $D_f = [3, 4)$ . در نتیجه  $a = 3$ ،  $b = 4$  و  $a + b = 7$ .

۱۹۹۰- گزینه ۱ دامنه تابع  $f$  برابر است با

$$D_f = \{x | -3^{2x+1} + 4 \times 3^x - 1 > 0\}$$

فرض می‌کنیم  $3^x = t$ ، در نتیجه باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$-3t^2 + 4t - 1 > 0 \Rightarrow -(t-1)(3t-1) > 0$$

جواب نامعادله بالا به صورت  $\frac{1}{3} < t < 1$  است. در نتیجه  $\frac{1}{3} < 3^x < 1$ ، بنابراین

$$-1 < x < 0$$

۱۹۹۱- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$2^x(1+2+2^2) = 5^x(2+5) \Rightarrow 2^x \times 7 = 5^x \times 7$$

$$2^x = 5^x \Rightarrow (\frac{2}{5})^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹۹۲- گزینه ۲ معادله را به شکل  $|x| = (2^{-1})^{x-x^2} = 2^{x^2-x}$

می‌نویسیم. بنابراین

$$|x| = x^2 - x \quad (1)$$

اگر  $x \geq 0$ ، این معادله می‌شود:

$$x = x^2 - x \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x = 2, x = 0$$

اگر  $x < 0$ ، معادله (۱) می‌شود:

$$-x = x^2 - x \Rightarrow x^2 = 0$$

که چون  $x < 0$ ، جواب ندارد. بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد:  $x = 2$  و  $x = 0$ .

۱۹۹۳- گزینه ۳ ابتدا  $x$  ای را پیدا می‌کنیم که  $3^x - 1 = 8$ ، یعنی

$3^x = 9$ ، پس  $x = 2$ . به این ترتیب، اگر در تساوی داده شده به جای  $x$  قرار

دهیم،  $2$  به دست می‌آید  $f(2) = 2^3 + 1 = 9$ . از طرف دیگر،

$$f^{-1}(2) = a \Rightarrow f(a) = 2$$

$$x^3 + 1 = 2 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

پس

$$f(3^1 - 1) = 1^3 + 1 \Rightarrow f(2) = 2$$

در نتیجه  $f^{-1}(2) = 2$ . بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با  $9 + 2 = 11$ .

۱۹۸۰- گزینه ۱ توجه کنید که

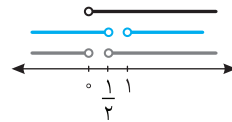
$$f(x) = k \times k^x \times (\frac{1}{2k-1})^x = k(\frac{k}{2k-1})^x$$

تابع  $f$  اکیداً نزولی است. پس باید

$$0 < \frac{k}{2k-1} < 1$$

$$\frac{k}{2k-1} > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{2} \text{ یا } k < 0$$

$$\frac{k}{2k-1} < 1 \Rightarrow \frac{k}{2k-1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{-k+1}{2k-1} < 0 \Rightarrow k > 1 \text{ یا } k < \frac{1}{2}$$



پس  $k > 1$ .

۱۹۸۱- گزینه ۱ با فاکتورگیری از معادله را حل می‌کنیم

$$3^x(3+1) = 1 \cdot 8 \Rightarrow 3^x \times 4 = 1 \cdot 8 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = 3$$

پس معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۹۸۲- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$5^{x-3} = (\frac{1}{5})^{x^2} \Rightarrow 5^{x-3} = 5^{-x^2}$$

$$x-3 = -x^2 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر  $-1$  است.

۱۹۸۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f^{-1}(5) = a \Rightarrow f(a) = 5$$

$$2 + 3^{a-2} = 5 \Rightarrow 3^{a-2} = 3 \Rightarrow a-2 = 1 \Rightarrow a = 3$$

۱۹۸۴- گزینه ۲ اگر فرض کنیم  $2^x = t$ ، معادله مورد نظر می‌شود:

$$t - \frac{2}{t} + 15 = 0 \Rightarrow t^2 + 15t - 2 = 0$$

این معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. از طرف دیگر، معلوم

است که معادله  $2^x = a$  فقط وقتی جواب دارد که  $a$  مثبت باشد و البته اگر  $a$

مثبت باشد، این معادله فقط یک جواب دارد (که  $\log_2 a$  است). بنابراین

معادله اصلی فقط یک جواب دارد.

۱۹۸۵- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می‌توان به شکل

$$3 \times 3^{2x} - 9 \times 3^x + 5 = 0$$

نوشت. اگر فرض کنیم  $3^x = t$ ، این معادله

می‌شود  $3t^2 - 9t + 5 = 0$ . هر دو جواب این معادله مثبت‌اند و مجموع آن‌ها

$$\text{برابر است با } \frac{9}{3} = 3. \text{ به این ترتیب } t_1 + t_2 = 3 \Rightarrow 3^\alpha + 3^\beta = 3$$

۱۹۸۶- گزینه ۲ از معادله  $x + y = 5$  به دست می‌آید  $y = 5 - x$ . با

جای‌گذاری  $5 - x$  به جای  $y$  در معادله  $2^x - 2^y = 4$ ، به دست می‌آید

$$2^x - 2^{5-x} = 4 \Rightarrow 2^x - \frac{2^5}{2^x} = 4 \Rightarrow (2^x)^2 - 4(2^x) - 32 = 0$$

$$(2^x - 8)(2^x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 4 = 0 \Rightarrow 2^x = -4 \\ 2^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \text{ (غ.ق.)}$$

$$y = 5 - x \xrightarrow{x=3} y = 2$$

بنابراین  $x - y = 1$ .

۱۹۹۹- گزینه ۳ باید نامعادله  $2^{x+1} - 4^x \geq 0$  را حل کنیم تا دامنه تابع به دست آید

$$2^{x+1} - 4^x \geq 0 \Rightarrow 2 \times 2^x - (2^x)^2 \geq 0 \Rightarrow 2^x(2 - 2^x) \geq 0$$

با توجه به اینکه  $2^x > 0$  نتیجه می‌شود

$$2 - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$$

بنابراین  $a=1$ .

۲۰۰۰- گزینه ۳ دامنه تابع  $f$  مجموعه  $x$ هایی است که

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4}{27 - 3^x} \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = -2$$

$$27 - 3^x = 0 \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$	$-2$	$3$	$+\infty$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$		+	○	-
$27 - 3^x$		+	+	○
$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4}{27 - 3^x}$		+	○	+

بنابراین

$$D_f = (-\infty, -2] \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 3]$$

در نتیجه  $a = -2$ ،  $b = 3$  و  $a + b = 1$ .

۲۰۰۱- گزینه ۱ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log 90 = \log(9 \times 10) = \log 9 + \log 10 = \log 3^2 + 1 = 2 \log 3 + 1 = 2a + 1$$

۲۰۰۲- گزینه ۱ با استفاده از ویژگی  $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$  می‌توان نوشت

$$\log 6 - \log 2 \times \log_2 3 = \log 6 - \log 2 \times \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$= \log 6 - \log 3 = \log \frac{6}{3} = \log 2$$

۲۰۰۳- گزینه ۱ توجه کنید که  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1$ . بنابراین

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$\log_{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \log_{(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \left( \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right) = -1$$

توجه کنید که

$$\sqrt[4]{3\sqrt{27}\sqrt[3]{81}} = \sqrt[4]{3^4 \times 27 \times 81} = \sqrt[4]{3^4 \times 3^3 \times 3^4} = \sqrt[4]{3^{11}} = 3^{\frac{11}{4}}$$

$$\log_3 \sqrt[4]{3\sqrt{27}\sqrt[3]{81}} = \log_3 3^{\frac{11}{4}} = \frac{11}{4} \log_3 3 = \frac{11}{4}$$

بنابراین

۱۹۹۴- گزینه ۲ توجه کنید که  $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$ . بنابراین اگر فرض

کنیم  $t = (\sqrt{5} + 2)^x$ . معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$t + \frac{1}{t} = 18 \Rightarrow t^2 - 18t + 1 = 0 \Rightarrow t = 9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^x \Rightarrow x = 2$$

$$t = 9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^x \Rightarrow x = -2$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر  $-4$  است.

۱۹۹۵- گزینه ۱ معادله مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2^{2x} + 2^x \times 3^x = 2 \times 3^{2x}$$

اگر فرض کنیم  $2^x = a$  و  $3^x = b$ . این معادله می‌شود:

$$a^2 + ab = 2b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = b^2 - ab \Rightarrow (a-b)(a+b) = b(b-a)$$

$$(a-b)(a+b+b) = 0 \Rightarrow (a-b)(a+2b) = 0$$

بنابراین

$$a - b = 0 \Rightarrow 2^x = 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$a + 2b = 0 \Rightarrow 2^x + 2 \times 3^x = 0$$
 جواب ندارد.

در نتیجه، معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد:  $x = 0$ .

۱۹۹۶- گزینه ۲ فرض می‌کنیم  $a = 2^x$  و  $b = 3^y$ . در نتیجه

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -7 \\ ab = \frac{1}{18} \Rightarrow b = \frac{1}{18a} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{\frac{1}{18a}} = -7 \Rightarrow \frac{1}{a} - 18a = -7$$

$$18a^2 - 7a - 1 = 0 \Rightarrow (9a+1)(2a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{9} = 2^x \text{ جواب ندارد.} \\ a = \frac{1}{2} = 2^x \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

۱۹۹۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1}$$

بنابراین نامعادله مورد نظر می‌شود:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1-2x} > (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-x-3}$$

چون  $0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$  پس

$$1 - 2x < -x - 3 \Rightarrow x > 4$$

۱۹۹۸- گزینه ۴ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$8(2^x)^2 - 6(2^x) + 1 \geq 0$$

اگر فرض کنیم  $2^x = t$ . نامعادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$8t^2 - 6t + 1 \geq 0 \Rightarrow (2t-1)(4t-1) \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{1}{2} \text{ یا } t \leq \frac{1}{4}$$

$$t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x \geq 2^{-1} \Rightarrow x \geq -1$$

$$t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x \leq 2^{-2} \Rightarrow x \leq -2$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله  $(-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$  است که همان

$\mathbb{R} - (-2, -1)$  است. پس  $a = -2$ ،  $b = -1$  و در نتیجه  $a + b = -3$ .

۲۰۰۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\log_4 5 = \frac{\log 5}{\log 4} = \frac{\log 5}{2 \log 2} = \frac{1}{2} \times \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1}{2} \log_2 5$$

در نتیجه باید حاصل عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2} \log_2 5} = (2^{-1})^{\frac{1}{2} \log_2 5} = 2^{-\frac{1}{2} \log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{-\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۲۰۰۶- گزینه ۲ توجه کنید که  $216 = 6^3 = 2^3 \times 3^3$ ، در نتیجه

$$\begin{aligned} \log 216 &= \log(2^3 \times 3^3) = \log 2^3 + \log 3^3 \\ &= 3 \log 2 + 3 \log 3 = 3x + 3y \end{aligned}$$

۲۰۰۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log 5 + \log 20 = \log(5 \times 20) = \log 100 = 2$$

بنابراین  $\log 20 = 2 - \log 5 = 2 - a$

۲۰۰۸- گزینه ۲ از دو طرف تساوی  $2^x = 3^y$  لگاریتم می‌گیریم:

$$\log 2^x = \log 3^y \Rightarrow x \log 2 = y \log 3$$

بنابراین

$$\frac{\log 3}{\log 2} = \frac{x}{y} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{x}{y}$$

در نتیجه  $\log_8 9 = \log_{2^3} 3^2 = \frac{2}{3} \log_2 3 = \frac{2x}{3y}$

۲۰۰۹- گزینه ۱ از تساوی  $2^{\log_2 5} = b$  نتیجه می‌شود

$$\log_2 b = \log_2 5$$

از تساوی  $2^{\log_5 3} = a$  نتیجه می‌شود

$$2^{\log_5 3} = a \Rightarrow \log_2 a = \log_5 3$$

بنابراین  $\log_2 a \times \log_2 b = \log_5 3 \times \log_2 5 = 1$

۲۰۱۰- گزینه ۴ معادله را به صورت  $2 \times 2^x = 5^x$  بازنویسی می‌کنیم. در

نتیجه  $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$ ، بنابراین با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت

$$x = \log_{\frac{5}{2}} 2 = \frac{1}{\log_2 \frac{5}{2}} = \frac{1}{\log_2 5 - \log_2 2} = \frac{1}{\log_2 5 - 1}$$

۲۰۱۱- گزینه ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$A = \log(20 \times 30 \times 50) = \log(3 \times 10^4) = \log 3 + \log 10^4 = a + 4$$

۲۰۱۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{1}{\log_6 18} = \log_{18} 6, \quad \frac{1}{\log_3 18} = \log_{18} 3$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\log_{18} 6 + \log_{18} 3 = \log_{18} (3 \times 6) = 1$$

۲۰۱۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که  $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$

بنابراین

$$\begin{aligned} \log_{(\sqrt{2}-1)}(3 + 2\sqrt{2}) &= \log_{(\sqrt{2}-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 \\ &= 2 \log_{(\sqrt{2}-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) = -2 \end{aligned}$$

۲۰۱۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \log_7 \sqrt[4]{4^3 \sqrt{4^3 \sqrt{2}}} &= \log_7 (4^{\frac{1}{4} \times 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}) \\ &= \log_7 2^{\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \log_7 2^{\frac{17}{4}} = \frac{17}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_7 \sqrt{2^3 \sqrt{4^3 \sqrt{4}}} &= \log_7 (2^{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}) \\ &= \log_7 2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8}} = \log_7 2^{\frac{22}{8}} = \frac{22}{24} \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{17}{24}}{\frac{22}{24}} = \frac{17}{22}$$

بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با  $\frac{17}{22}$

۲۰۱۵- گزینه ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \frac{1}{3} \log_2 3$$

در نتیجه عبارت مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$2^{3 + \log_8 3} = 2^{3 + \frac{1}{3} \log_2 3} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{3} \log_2 3} = 8 \times (2^{\log_2 3})^{\frac{1}{3}} = 8 \times (3)^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[3]{3}$$

راه‌حل دوم

$$2^3 \times 2^{\log_8 3} = 8 \times 2^{\log_8 3} = 8 \times 2^{\frac{\log_2 3}{3}} = 8 \times 3^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[3]{3}$$

۲۰۱۶- گزینه ۴ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{\frac{64}{4}} &= \log \sqrt[3]{\frac{64}{10}} = \log \sqrt[3]{\frac{32}{5}} = \frac{1}{3} \log \frac{32}{5} = \frac{1}{3} (\log 32 - \log 5) \\ &= \frac{1}{3} (\log 2^5 - \log \frac{10}{2}) = \frac{1}{3} (5 \log 2 - (\log 10 - \log 2)) \\ &= \frac{1}{3} (6 \log 2 - \log 10) = \frac{1}{3} (6a - 1) = 2a - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۲۰۱۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\log_5 2 = a \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 5} = a \Rightarrow \log 2 = a \log 5$$

$$\log_3 5 = b \Rightarrow \frac{\log 5}{\log 3} = b \Rightarrow \log 3 = \frac{\log 5}{b}$$

بنابراین

$$\log_{15} 4 = \frac{\log 4}{\log 15} = \frac{2 \log 2}{\log 3 + \log 5} = \frac{2a \log 5}{\frac{\log 5}{b} + \log 5} = \frac{2a}{\frac{1}{b} + 1} = \frac{2ab}{b+1}$$

۲۰۱۸- گزینه ۲ چون  $385 = 5 \times 7 \times 11$ ، پس طرفین سه تساوی داده

شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$\log 11 + \log 5 + \log 5 + \log 7 + \log 7 + \log 11 = a + b + c$$

$$2(\log 11 + \log 5 + \log 7) = a + b + c$$

$$2 \log(11 \times 5 \times 7) = a + b + c \Rightarrow \log 385 = \frac{a+b+c}{2}$$

۲۰۱۹- گزینه ۱ با توجه به خاصیت  $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$  می‌توان نوشت

$$\frac{1}{1 - \log_3 3} + \frac{1}{1 - \log_3 2} = \frac{1}{1 - \log_2 3} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\log_2 3}}$$

$$= \frac{1}{1 - \log_2 3} + \frac{\log_2 3}{\log_2 3 - 1} = \frac{1 - \log_2 3}{1 - \log_2 3} = 1$$

۲۰۲۷- گزینه ۲ چون  $\log_a x = \frac{1}{x} \log_a b$  پس

$$\log_a 10 = a \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}(2 \times 5) = a \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \log_{\sqrt{3}}(2 \times 5) = a$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (\log_{\sqrt{3}} 2 + \log_{\sqrt{3}} 5) = a \Rightarrow 1 + \log_{\sqrt{3}} 5 = 3a \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 5 = 3a - 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{3}} 5 &= \frac{\log_{\sqrt{3}} 5}{\log_{\sqrt{3}} 4} = \frac{\log_{\sqrt{3}}(2 \times 5^2)}{\log_{\sqrt{3}}(2^2 \times 5)} = \frac{\log_{\sqrt{3}} 2 + \log_{\sqrt{3}} 5^2}{\log_{\sqrt{3}} 2^2 + \log_{\sqrt{3}} 5} \\ &= \frac{1 + 2 \log_{\sqrt{3}} 5}{2 + \log_{\sqrt{3}} 5} = \frac{1 + 2(3a - 1)}{2 + 3a - 1} = \frac{6a - 1}{3a + 1} \end{aligned}$$

۲۰۲۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \quad \log_{ab} x = \frac{\log x}{\log(ab)}$$

بنابراین

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{\log x}{\log a}}{\frac{\log x}{\log(ab)}} = 3 \Rightarrow \frac{\log(ab)}{\log a} = 3$$

$$\frac{\log a + \log b}{\log a} = 3 \Rightarrow 1 + \frac{\log b}{\log a} = 3 \Rightarrow \log_a b = 2$$

بنابراین  $\log_a b = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{2}$  در نتیجه  $\log_a b + \log_b a = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

۲۰۲۹- گزینه ۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0$$

بنابراین  $(2^x - 5)(2^x - 3) = 0$  پس

$$\begin{cases} 2^x - 3 = 0 \Rightarrow 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3 \\ 2^x - 5 = 0 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5 \end{cases}$$

چون  $\log_2 5 > \log_2 3$  پس تابعی اکیداً صعودی است.  $f(x) = \log_2 x$

در نتیجه بزرگ‌ترین جواب معادله مورد نظر  $\log_2 5$  است.

۲۰۳۰- گزینه ۱ راه‌حل اول از دو طرف معادله  $2^x = 3^y$  در پایه ۳

لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_3 2^x = \log_3 3^y \Rightarrow x \log_3 2 = y \log_3 3 \Rightarrow y = x \log_3 2$$

در معادله  $x + y = 1$  به جای  $y$  قرار می‌دهیم  $x \log_3 2$  در نتیجه

$$x + x \log_3 2 = 1 \Rightarrow x(1 + \log_3 2) = 1$$

$$x(\log_3 2 + \log_3 2) = 1 \Rightarrow x \log_3 4 = 1$$

$$x = \frac{1}{\log_3 4} \Rightarrow x = \log_4 3$$

راه‌حل دوم

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$2^x = 3^{1-x} \Rightarrow 2^x = \frac{3}{3^x} \Rightarrow 6^x = 3 \Rightarrow x = \log_6 3$$

۲۰۲۰- گزینه ۱ معادله را به صورت  $(3^x)^2 - 3^x - 2 = 0$  می‌نویسیم.

در نتیجه  $(3^x + 1)(3^x - 2) = 0$ . چون عبارت  $3^x + 1$  همواره مثبت است،

نتیجه می‌شود

$$3^x - 2 = 0 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2$$

۲۰۲۱- گزینه ۱ راه‌حل اول با توجه به اینکه

$$\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$$

داریم

$$\begin{aligned} A &= \log_5 \left( \frac{5 \times 6 \times 7 \times \dots \times 124}{6 \times 7 \times 8 \times \dots \times 125} \right) = \log_5 \frac{5}{125} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

راه‌حل دوم با توجه به تساوی  $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$  می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \log_5 5 - \log_5 6 + \log_5 6 - \log_5 7 + \log_5 7 - \log_5 8 \\ &+ \dots + \log_5 124 - \log_5 125 = \log_5 5 - \log_5 125 = 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

۲۰۲۲- گزینه ۱ چون  $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$  پس

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_2 3}} &= \frac{1}{1 + \log_3 2} = \frac{1}{\log_3 3 + \log_3 2} = \frac{1}{\log_3(3 \times 2)} = \frac{1}{\log_3 6} \\ &= \log_6 3 \end{aligned}$$

۲۰۲۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2 \log(3 + \sqrt{5}) = \log(3 + \sqrt{5})^2 = \log(9 + 5 + 6\sqrt{5}) = \log(14 + 6\sqrt{5})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \log(28 + 12\sqrt{5}) - 2 \log(3 + \sqrt{5}) &= \log(28 + 12\sqrt{5}) - \log(14 + 6\sqrt{5}) \\ &= \log \frac{28 + 12\sqrt{5}}{14 + 6\sqrt{5}} = \log 2 = k \end{aligned}$$

۲۰۲۴- گزینه ۲ به کمک تساوی  $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$  می‌توان نوشت

$$\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8 = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 5}{\log 3} \times \frac{\log 8}{\log 5} = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{3 \log 2}{\log 2} = 3$$

۲۰۲۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a = 5^{\log 20} = 5^{\log 10 + \log 2} = 5^{1 + \log 2} = 5 \times 5^{\log 2} = 5 \times 2^{\log 5}$$

$$b = 2^{\log 50} = 2^{\log 10 + \log 5} = 2^{1 + \log 5} = 2 \times 2^{\log 5}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{5 \times 2^{\log 5}}{2 \times 2^{\log 5}} = \frac{5}{2}$$

۲۰۲۶- گزینه ۲ توجه کنید که  $\log_3 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 10}$  از طرف دیگر

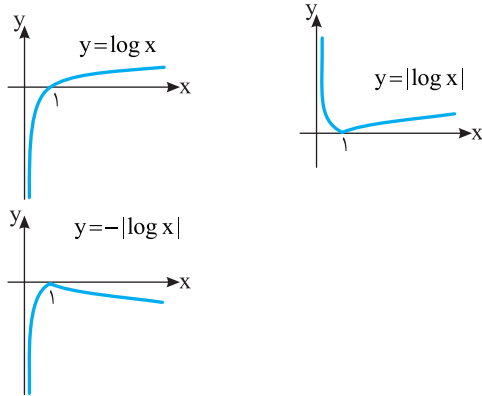
$$\log_3 15 = \log_3(3 \times 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + b$$

$$\log_3 10 = \log_3(2 \times 5) = \log_3 2 + \log_3 5$$

$$= \frac{1}{\log_3 2} + \log_3 5 = \frac{1}{a} + b = \frac{1 + ab}{a}$$

$$\log 15 = \frac{1 + b}{1 + ab} = \frac{a(1 + b)}{1 + ab}$$

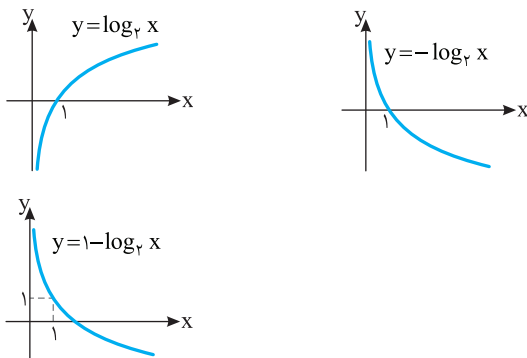




ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}} x = 1 - \log_{\frac{1}{2}} x$$

بنابراین نمودار تابع به ترتیب زیر رسم می‌شود:



شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$10 - x > 0 \Rightarrow x < 10, \quad x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2, \quad x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$$

پس دامنه تابع  $\{3\} - (2, 10)$  است که شامل شش عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ است.

باید همواره  $x^2 - 2mx + 4 > 0$ ، چون ضریب  $x^2$  مثبت است، باید  $\Delta < 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (-2m)^2 - 4 \times (1) \times 4 < 0$$

$$4m^2 - 16 < 0 \Rightarrow 4(m^2 - 4) < 0 \Rightarrow |m| < 2 \Rightarrow -2 < m < 2$$

با تغییرات دو مرحله اول به تابع  $f(x) = 2^{x-1} + 1$  می‌رسیم. با قرینه کردن نمودار تابع نسبت به خط  $y = x$ ، به تابع وارون  $f$  می‌رسیم. ضابطه تابع وارون  $f$  به صورت زیر پیدا می‌شود:

$$y = 1 + 2^{x-1} \Rightarrow 2^{x-1} = y - 1 \Rightarrow x - 1 = \log_2(y - 1) \Rightarrow x = \log_2(y - 1) + 1$$

در نتیجه  $f^{-1}(x) = \log_2(x - 1) + 1$ .

راه حل اول فرض می‌کنیم  $y = -\log_2(x - 1) + 2$ .

در نتیجه

$$2 - y = \log_2(x - 1) \Rightarrow 2^{2-y} = x - 1$$

بنابراین  $x = 2^{2-y} + 1$ ، پس  $f^{-1}(x) = 2^{2-x} + 1$ .

راه حل دوم توجه کنید که  $f(3) = -\log_2 2 + 2 = 1$ ، بنابراین  $f^{-1}(1) = 3$ .

فقط گزینه (۳) در این شرط صدق می‌کند.

گزینه ۴-۲۰۳۱ اگر  $f^{-1}(8) = t$ ، آن‌گاه  $f(t) = 8$ ، بنابراین

$$3 + 5 \log(2t - 3) = 8 \Rightarrow \log(2t - 3) = 1 \Rightarrow 2t - 3 = 10 \Rightarrow t = \frac{13}{2}$$

چون نمودار تابع  $f$  از نقطه‌های  $(2, 3)$  و  $(3, 4)$

می‌گذرد، پس

$$f(2) = 3 \Rightarrow a + \log_{\frac{1}{2}}(2b + 1) = 3 \quad (1)$$

$$f(3) = 4 \Rightarrow a + \log_{\frac{1}{2}}(3b + 1) = 4 \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به دست می‌آید:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2b + 1) - \log_{\frac{1}{2}}(3b + 1) = -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2b + 1}{3b + 1} = -1 \Rightarrow \frac{2b + 1}{3b + 1} = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید:

$$a = 3 - \log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = 3 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

با توجه به شکل دامنه تابع به صورت  $(-3, +\infty)$

است. پس دامنه تابع باید به شکل  $(-\frac{b}{a}, +\infty)$  باشد. بنابراین

$$-\frac{b}{a} = -3 \Rightarrow b = 3a$$

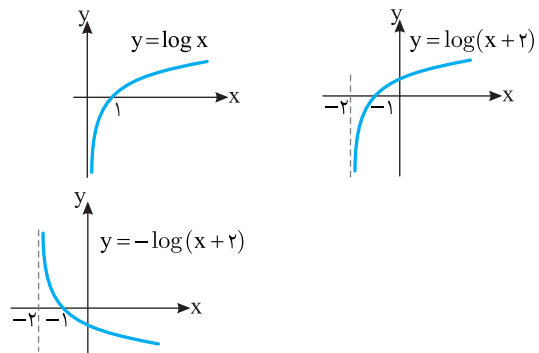
همچنین، نمودار تابع از نقطه  $(0, -2)$  می‌گذرد. بنابراین

$$f(0) = \log_{\frac{1}{2}} b = -2 \Rightarrow b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

در نتیجه  $a = 3$ ، بنابراین  $ab = 12$ .

ابتدا نمودار تابع  $y = \log x$  را دو واحد به چپ انتقال

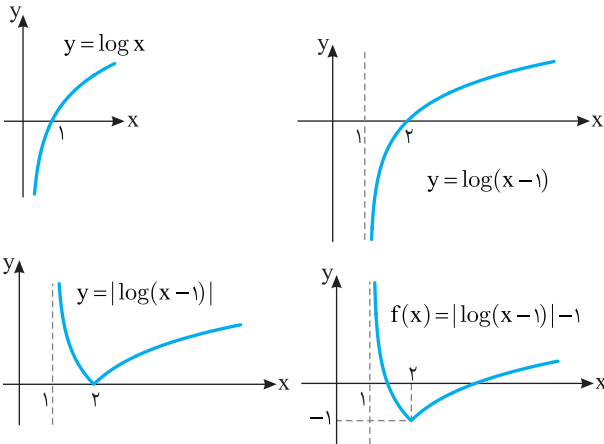
می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = \log(x + 2)$  به دست آید. سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -\log(x + 2)$  به دست آید.



ابتدا نمودار  $y = \log x$  را رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی

از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمت‌های پایین محور طول‌ها را حذف می‌کنیم. تا نمودار  $y = |\log x|$  به دست آید. سپس نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -|\log x|$  رسم شود.

**۲۰۴۶- گزینه ۱** ابتدا نمودار تابع  $y = \log x$  را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = \log(x-1)$  به دست بیاید. سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = |\log(x-1)|$  به دست آید و آن قسمت‌ها را حذف می‌کنیم. در آخر نمودار به دست آمده را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $f$  به دست آید.

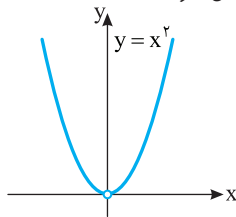


**۲۰۴۷- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که دامنه تابع مجموعه عددهای حقیقی

مخالف صفر است و با توجه به اینکه  $a^{\log_a g(x)} = g(x)$

$$f(x) = 2^{\log_2 x^2} = x^2, \quad x \neq 0$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



**۲۰۴۸- گزینه ۳** برای اینکه عبارت  $\log_{(x-1)}(16-x^2)$  معنادار باشد، باید

$$16-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4, \quad x-1 > 0 \Rightarrow x > 1, \quad x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$$

بنابراین دامنه تابع به صورت  $D_f = (1, 4) - \{2\}$  است. پس  $a=1$ ،  $b=4$  و  $c=2$  در نتیجه  $a+b+c=7$

**۲۰۴۹- گزینه ۴** توجه کنید که

$$y = \frac{4-2^{x+1}}{2^x-1} \Rightarrow y \times 2^x - y = 4 - 2^{x+1}$$

$$2^x(y+2) = 4+y \Rightarrow 2^x = \frac{4+y}{y+2} \Rightarrow x = \log_2 \left( \frac{4+y}{y+2} \right)$$

$$f^{-1}(x) = \log_2 \left( \frac{4+x}{x+2} \right) \quad \text{بنابراین}$$

**۲۰۵۰- گزینه ۲** برای محاسبه ضابطه تابع وارون تابع داده شده،  $x$  را

بر حسب  $y$  حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{\log x}{1+\log x} \Rightarrow y + y \log x = \log x \Rightarrow (y-1) \log x = -y$$

$$\log x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x = 10^{\frac{y}{1-y}}$$

$$f^{-1}(x) = 10^{\frac{x}{1-x}} \quad \text{بنابراین}$$

**۲۰۴۱- گزینه ۴** چون  $f^{-1}(3) = 29$ ، پس  $f(29) = 3$  در نتیجه

$$\log_3(2 \times 29 - k) = 3 \Rightarrow 58 - k = 3^3 = 27 \Rightarrow k = 31$$

**۲۰۴۲- گزینه ۲** نمودار تابع  $f$  نیمساز ناحیه اول را در نقطه‌ای به طول ۲

قطع می‌کند، پس از نقطه  $(2, 2)$  می‌گذرد. همچنین نمودار تابع  $f$  نیمساز ناحیه دوم را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس از نقطه  $(-1, 1)$

می‌گذرد. به این ترتیب

$$f(2) = 2 \Rightarrow \log_2(2a+b) = 2 \Rightarrow 2a+b=4 \quad (1)$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow \log_2(-a+b) = 1 \Rightarrow -a+b=2 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $a = \frac{2}{3}$  و  $b = \frac{10}{3}$ .

**۲۰۴۳- گزینه ۴** توجه کنید که  $D_f = (-2, +\infty)$ ، پس  $x = -2$  باید

ریشه عبارت  $bx+c$  باشد. بنابراین

$$-2b+c=0 \quad (1)$$

از طرف دیگر  $f(0) = -1$  و  $f(-1) = 0$  پس

$$f(0) = \log_a c = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{a} \quad (2)$$

$$f(-1) = \log_a(-b+c) = 0 \Rightarrow -b+c=1 \quad (3)$$

از معادلات (۱) و (۳) نتیجه می‌شود  $b=1$  و  $c=2$ . همچنین از معادله (۲)

نتیجه می‌شود  $a = \frac{1}{2}$  و در نتیجه  $a+b+c = \frac{3}{2}$ .

**۲۰۴۴- گزینه ۲** نقطه برخورد نمودار تابع  $f$  با محور طول‌ها از معادله

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = \log_2(3x-5) = 0 \Rightarrow 3x-5=1 \Rightarrow x=2$$

پس نقطه برخورد نمودار  $f$  با محور طول‌ها  $A(2, 0)$  است. بنابراین نقطه برخورد

نمودار تابع وارون  $f$  با محور عرض‌ها  $B(0, 2)$  است. بنابراین

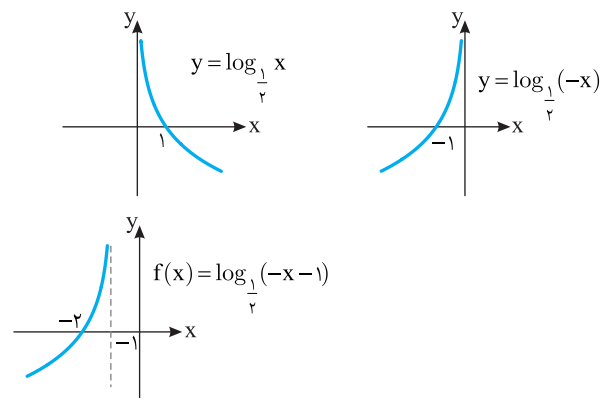
$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

**۲۰۴۵- گزینه ۳** ابتدا نمودار تابع  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  را رسم می‌کنیم، سپس

آن را نسبت به محور  $y$  قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$  به دست

بیاید. سپس آن را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-(x+1)) = \log_{\frac{1}{2}}(-x-1)$  به دست آید. مراحل رسم نمودار

تابع  $f$  را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم:



۲۰۵۷- گزینه ۳ دامنه توابع  $f$  و  $g$  به شکل زیر هستند:

$$x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

بنابراین دامنه تابع  $g \circ f$  طبق تعریف به شکل زیر است:

$$D_{g \circ f} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x | x \neq 0, \log x^2 \neq 1\} \\ = \{x | x \neq 0, x \neq \pm\sqrt{10}\} = \mathbb{R} - \{0, \pm\sqrt{10}\}$$

بنابراین ۳ عدد در دامنه تابع  $g \circ f$  قرار ندارند.

۲۰۵۸- گزینه ۲ از نامعادله  $\log(x+1) > \log 3$  نتیجه می‌شود

$x+1 > 3$  و در نتیجه  $x > 2$ . واضح است که عبارت  $\log(x+1)$  به ازای  $x > -1$  با معنا است. پس مجموعه جواب‌های نامعادله بازه  $(2, +\infty)$  است.

۲۰۵۹- گزینه ۴ برای اینکه  $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$  با معنا باشد، باید  $x-1 > 0$ .

یعنی  $x > 1$ . از طرف دیگر،

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Rightarrow x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

بنابراین  $1 < x < \frac{3}{2}$ .

۲۰۶۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که باید  $16-x^2 > 0$  تا عبارت

$\log(16-x^2)$  معنادار باشد. بنابراین

$$x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4$$

از طرف دیگر،

$$\log(16-x^2) < \log 15 \Rightarrow 16-x^2 < 15 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله  $(-4, -1) \cup (1, 4)$  است که چهار عدد صحیح  $\pm 2$  و  $\pm 3$  در آن قرار دارند.

۲۰۶۱- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_4(2x+1) - \log_4(x-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_4 \left( \frac{2x+1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x+1}{x-1} = 4^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow 2x+1 = 2x-2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log\left(\frac{x}{x+1}\right) = \log(\log 2)$$

در نتیجه

$$\frac{x}{x+1} = \log 2 \Rightarrow x = x \log 2 + \log 2$$

$$x(1 - \log 2) = \log 2 \Rightarrow x(\log 10 - \log 2) = \log 2 \Rightarrow x \log 5 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 5} \Rightarrow x = \log_5 2$$

۲۰۶۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\log_7(14 + \log_7(x-1)) = 4 \Rightarrow 14 + \log_7(x-1) = 7^4 = 16$$

$$\log_7(x-1) = 2 \Rightarrow x-1 = 7^2 = 49 \Rightarrow x = 50$$

۲۰۵۱- گزینه ۳ کافی است معادله  $x^2 - 3x = x$  را حل کنیم:

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

واضح است که  $x=0$  قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۰۵۲- گزینه ۱ معادله را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_7(12b-21) - \log_7(b^2-3) = \log_7 \left( \frac{12b-21}{b^2-3} \right) = 2$$

در نتیجه

$$\frac{12b-21}{b^2-3} = 7^2 = 49 \Rightarrow 49b^2 - 12b - 21 = 12b - 21$$

بنابراین

$$49b^2 - 12b + 9 = (7b-3)^2 = 0$$

بنابراین  $b = \frac{3}{7}$ . اما به ازای  $b = \frac{3}{7}$  هیچ‌یک از عبارت‌های  $\log_7(12b-21)$

و  $\log_7(b^2-3)$  معنادار نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۰۵۳- گزینه ۱ طبق تعریف لگاریتم

$$\log_7(\log_7(x-1)) = 5 \Rightarrow \log_7(x-1) = 7^5 = 32$$

$$x-1 = 3^{32} \Rightarrow x = 3^{32} + 1$$

۲۰۵۴- گزینه ۴ چون  $\log_a b = \frac{1}{k} \log_a b$  پس معادله مورد نظر

می‌شود

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{4}} x^2 + \log_{\frac{1}{16}} x^3 = 9$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x + \frac{2}{4} \log_2 x + \frac{3}{16} \log_2 x = 9$$

$$\frac{3}{2} \log_2 x = 9 \Rightarrow \log_2 x = 6 \Rightarrow x = 2^6 = 64$$

۲۰۵۵- گزینه ۱ فرض می‌کنیم  $\log_3 x = t$ . در نتیجه  $\log_x 3 = \frac{1}{t}$ .

بنابراین به معادله زیر می‌رسیم:

$$t - \frac{6}{t} + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+3) = 0 \Rightarrow t = -3, t = 2$$

پس

$$\log_3 x = -3 \Rightarrow x = 3^{-3}$$

$$\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر  $\frac{1}{3}$  است.

۲۰۵۶- گزینه ۱ باید هر دو عبارت  $\log(x+2)$  و  $\log(3-x)$  با معنا

باشند و نیز  $\log(3-x) \neq 0$ . پس

$$D_f = \{x | x+2 > 0, 3-x > 0, \log(3-x) \neq 0\}$$

اگر  $\log(3-x) = 0$ . آن‌گاه  $x=2$ . بنابراین دامنه تابع  $f$  به صورت

$$\{2\} - (-2, 3) \text{ است.}$$

۲۰۶۴- گزینه ۲ چون  $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$  پس معادله مورد نظر

می‌شود

$$\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt[4]{2}} x + \log_{\sqrt[6]{2}} x = \frac{11}{3}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{6} \log_2 x = \frac{11}{3}$$

$$\frac{11}{12} \log_2 x = \frac{11}{3} \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$$

۲۰۶۵- گزینه ۲ فرض می‌کنیم  $\log_3 x = t$ . در این صورت

$\log_x 3 = \frac{1}{t}$ . در نتیجه  $\frac{1}{\log_x 3} = \log_3 x = t$ . بنابراین، معادله داده شده

به صورت زیر درمی‌آید

$$t - \frac{12}{t} = 1 \Rightarrow t^2 - 12 = t \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0$$

$$(t-4)(t+3) = 0 \Rightarrow t = 4, t = -3$$

در نتیجه

$$\log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4 = 81, \log_3 x = -3 \Rightarrow x = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

۲۰۶۶- گزینه ۲ اگر فرض کنیم  $\log_7 x = t$ ، آن‌گاه

$$\log_8 x = \log_{7^{\frac{1}{3}}} x = \frac{1}{3} \log_7 x = \frac{1}{3} t$$

$$\log_{\frac{1}{8}} x = \log_{7^{-1}} x = -\log_7 x = -\frac{1}{3} t$$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$t \left( \frac{1}{3} t \right) - t + \frac{1}{3} t - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{3} t - 1 = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) = 0 \Rightarrow t = -1, t = 3$$

بنابراین

$$t = -1 \Rightarrow \log_7 x = -1 \Rightarrow x = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$t = 3 \Rightarrow \log_7 x = 3 \Rightarrow x = 7^3 = 343$$

در نتیجه، حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر ۴ است.

۲۰۶۷- گزینه ۱ دستگاه به شکل  $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2 \log x - 3 \log y = 1 \end{cases}$  است. طرفین

معادله اول را در ۳ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین دو معادله را جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3 \log x + 3 \log y = 9 \\ 2 \log x - 3 \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow 5 \log x = 10 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

بنابراین

$$\log x + \log y = 3 \Rightarrow 2 + \log y = 3 \Rightarrow \log y = 1 \Rightarrow y = 10$$

در نتیجه  $x - 2y = 100 - 20 = 80$ .

۲۰۶۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}} (2x-1) = \log_{2^{-1}} (2x-1) = -\log_2 (2x-1)$$

بنابراین نامعادله‌های مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$-3 \leq -\log_2 (2x-1) \leq -2 \Rightarrow 2 \leq \log_2 (2x-1) \leq 3$$

اکنون توجه کنید که

$$\log_2 9 = 2 \leq \log_2 (2x-1) \leq 3 = \log_2 27$$

$$9 \leq 2x-1 \leq 27 \xrightarrow{+1} 10 \leq 2x \leq 28 \xrightarrow{\div 2} 5 \leq x \leq 14$$

بنابراین  $5 \leq x \leq 14$  (توجه کنید که در این محدوده  $2x-1 > 0$ ). تعداد عددهای صحیح در این محدوده ده تا (۵، ۶، ۷، ...، ۱۴) است.

۲۰۶۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\log_2 (1+3x) < \log_2 (x+7) \Rightarrow 1+3x < x+7 \Rightarrow x < 3$$

از طرف دیگر، باید  $1+3x > 0$  و  $x+7 > 0$ . در نتیجه  $x > -\frac{1}{3}$ . بنابراین

مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر برابر  $(-\frac{1}{3}, 3)$  است.

۲۰۷۰- گزینه ۲ برای اینکه  $\log_3 (x+2)$  بامعنا باشد، باید  $x+2 > 0$ .

یعنی  $x > -2$ . از طرف دیگر، باید

$$1 - \log_3 (x+2) \geq 0 \Rightarrow \log_3 (x+2) \leq 1 = \log_3 3 \Rightarrow x+2 \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$$

پس دامنه f بازه  $(-2, 1]$  است.

۲۰۷۱- گزینه ۴ توجه کنید که  $\log_5 25 = 2$ . در نتیجه معادله داده

شده به صورت زیر درمی‌آید

$$\log_5 (28x-6) - \log_5 (x-1) = 2 \Rightarrow \log_5 \left( \frac{28x-6}{x-1} \right) = 2$$

در نتیجه

$$\frac{28x-6}{x-1} = 4^2 = 16 \Rightarrow 28x-6 = 16x-16 \Rightarrow 12x = -10 \Rightarrow x = \frac{-10}{12} = \frac{-5}{6}$$

اما به ازای  $x = \frac{-5}{6}$  هیچ یک از دو عبارت  $\log_5 (28x-6)$  و  $\log_5 (x-1)$

معنادار نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۰۷۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2 \log_x (2x-1) = 1 \Rightarrow \log_x (2x-1)^2 = 1$$

بنابراین

$$(2x-1)^2 = x \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow (4x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, x = 1$$

اکنون توجه کنید که اگر  $x = 1$ ، پایه لگاریتم داده شده در صورت مسئله برابر ۱

می‌شود که ممکن نیست و اگر  $x = \frac{1}{4}$ ، آن‌گاه  $2x-1 = -\frac{1}{2}$ ، که باز هم ممکن

نیست. زیرا لگاریتم عددهای منفی تعریف نمی‌شود. بنابراین هیچ یک از مقادیرهای به دست آمده برای x قابل قبول نیستند و معادله مورد نظر جواب ندارد.

۲۰۷۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\log_2 (x^2 - 6x + 9) = \log_{\sqrt{2}} (x-3)^2 = \frac{2}{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} |x-3| = \log_{\sqrt{2}} |x-3|$$

در نتیجه مسئله به حل معادله زیر منجر می‌شود

$$\log_2 (x+3) + \log_{\sqrt{2}} |x-3| = \log_{\sqrt{2}} (x+3) |x-3| = 4$$

بنابراین  $16 = 2^4 = (x+3) |x-3|$ . اکنون می‌توان گفت

$$x > 3 \Rightarrow (x+3)(x-3) = 16 \Rightarrow x^2 - 9 = 16$$

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5, x = -5 \text{ (غ.ق.)}$$

$$x < 3 \Rightarrow (x+3)(3-x) = 16 \Rightarrow 9 - x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = -7 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

نامعادله مورد نظر را می توان این طور نوشت

$$\frac{1-\log x + 1 + \log x}{(1-\log x)(1+\log x)} > 2 \Rightarrow \frac{2}{1-(\log x)^2} > 2 \Rightarrow \frac{1}{1-(\log x)^2} > 1$$

$$\frac{1}{1-(\log x)^2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1-(\log x)^2}{1-(\log x)^2} > 0 \Rightarrow \frac{(\log x)^2}{1-(\log x)^2} > 0$$

بنابراین باید  $(\log x)^2 \neq 0$  و  $1-(\log x)^2 > 0$ :

$$(\log x)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, \quad (\log x)^2 < 1 \Rightarrow |\log x| < 1$$

$$-1 < \log x < 1 \Rightarrow \frac{1}{10} < x < 10$$

پس مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر  $\{1\} - (\frac{1}{10}, 10)$  است.

توجه کنید که

$$D_f = \{x | x \neq -3, \frac{3x-1}{x+3} > 0, \log(\frac{3x-1}{x+3}) \geq 0\}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{3x-1}{x+3} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$$

$$\log(\frac{3x-1}{x+3}) \geq 0 \Rightarrow \frac{3x-1}{x+3} \geq 1 \Rightarrow \frac{2(x-2)}{x+3} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$$

بنابراین  $D_f = (-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$  در نتیجه عددهای صحیحی که در دامنه تابع  $f$  نیستند.  $-3, -2, -1, 0$  و  $1$  هستند.

۲۰۸۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $(\frac{1}{\sqrt{3}})^{2x} = (\frac{1}{\sqrt{3}})^{2x} = (\frac{1}{\sqrt{3}})^x = \frac{1}{\sqrt{3}^x}$

اکنون نقطه تقاطع نمودارها را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$3^x + \frac{\Lambda}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x} \Rightarrow 3^x + \frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}^x} \xrightarrow{t=3^x} t + \frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{t}$$

$$\xrightarrow{\times 3t} 3t^2 + \Lambda t = 3 \Rightarrow 3t^2 + \Lambda t - 3 = 0$$

$$(3t-1)(t+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 3 \\ t = -3 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

$A(-1, 3)$  نقطه مورد نظر است. بنابراین باید فاصله نقاط  $A(-1, 3)$  و

$$B(-1, 1) \text{ را به دست آوریم که برابر است با } AB = \sqrt{(-1+1)^2 + (3-1)^2} = 2$$

ریاضی-۹۶

۲۰۸۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که  $(\frac{1}{2})^{2x} = \frac{1}{2^{2x}} = \frac{1}{4^x}$  اکنون نقطه  $A$

را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$4^x = (\frac{1}{2})^{2x} + \frac{3}{2} \Rightarrow 4^x = \frac{1}{4^x} + \frac{3}{2} \xrightarrow{t=4^x} t = \frac{1}{t} + \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2t} 2t^2 = 2 + 3t \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$(2t+1)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \text{ (غ.ق.ق.)} \\ t = 2 \Rightarrow 4^x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

۲۰۷۴- گزینه ۲ به کمک ویژگی های لگاریتم می توان نوشت

$$\log_{\delta} x + \log_{\frac{1}{\delta^2}} x - 2 \log_{\delta^2} x = \log_{\delta} 5^2$$

$$\log_{\delta} x + 2 \log_{\delta} x - 2 \times \frac{1}{2} \log_{\delta} x = 2 \log_{\delta} 5$$

$$\log_{\delta} x = \log_{\delta} 5 \Rightarrow x = 5^{\log_{\delta} 5}$$

۲۰۷۵- گزینه ۲ اگر فرض کنیم  $\log_{\delta} x = t$ ، آن گاه  $\log_{\delta} x^2 = 2t$  و

معادله مورد نظر می شود

$$\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+2t} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1+2t-(1+t)}{(1+t)(1+2t)} = \frac{1}{6}$$

$$6t = 1 + 3t + 2t^2 \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1, t = \frac{1}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$t = 1 \Rightarrow \log_{\delta} x = 1 \Rightarrow x = \delta$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\delta} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\delta}$$

بنابراین مجموع مربع های جواب های معادله مورد نظر برابر  $\delta^2 + \sqrt{\delta}^2 = 6$  است.

۲۰۷۶- گزینه ۲ راه حل اول از دو طرف معادله لگاریتم می گیریم:

$$\log x^{(\lambda - \log x)} = \log(\frac{1}{x^2}) \Rightarrow (\lambda - \log x) \log x = -2 \log x$$

$$\begin{cases} \log x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1^0 = 1 \\ \lambda - \log x = -2 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow 10^1 = 10 \end{cases}$$

راه حل دوم معادله را به صورت  $x^2 \times x^{\lambda - \log x} = 1$  یا  $x^{2 + \lambda - \log x} = 1$

می نویسیم. با توجه به اینکه  $X$  عددی مثبت است، دو حالت وجود دارد: پایه در عبارت سمت چپ  $1$  باشد، یعنی  $X = 1$  یا توان در عبارت سمت چپ صفر باشد، یعنی  $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$ . پس  $x = 10^1 = 10$ .

۲۰۷۷- گزینه ۲ از معادله  $\log_{\delta} x + \log_{\delta} y = 4$  به دست می آید

$$\log_{\delta}(xy) = 4 \Rightarrow xy = \delta^4 = 16$$

از معادله  $x + y = 10$  به دست می آید

$$y = 10 - x$$

با جای گذاری  $10 - x$  به جای  $y$  در معادله  $xy = 16$  نتیجه می شود

$$x(10-x) = 16 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-8) = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 8, \quad x = 8 \Rightarrow y = 2$$

در هر صورت  $x^2 + y^2 = 68$ .

۲۰۷۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \Rightarrow 2x-1 < x+1 \Rightarrow x < 2$$

از طرف دیگر، عبارت  $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$  به ازای  $x > \frac{1}{2}$  و عبارت  $\log(x+1)$

به ازای  $x > -1$  معنادار است. بنابراین مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر

بازه  $(\frac{1}{2}, 2)$  است.

۲۰۸۸- گزینه ۳ برای اینکه لگاریتم‌ها با معنی باشند باید  $x > \frac{5}{3}$  از

معادله داده شده مقدار  $X$  را به دست می‌آوریم:

$$\log_{\delta}(2x-1) + \log_{\delta}(3x-5) = 1 \Rightarrow \log_{\delta}((2x-1)(3x-5)) = 1$$

$$(2x-1)(3x-5) = \delta \Rightarrow 6x^2 - 13x = \delta \Rightarrow x = \frac{13}{6} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین  $\log_{\gamma}(6x+3) = \log_{\gamma}(13+3) = \log_{\gamma} 2^4 = 4$

ریاضی - ۸۶

۲۰۸۹- گزینه ۳ مقدار  $X$  را از معادله داده شده به دست می‌آوریم:

$$\log_{\gamma}(x^2-1) = 1 + \log_{\gamma}(x+3) \Rightarrow \log_{\gamma}(x^2-1) - \log_{\gamma}(x+3) = 1$$

$$\log_{\gamma}\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+3} = \gamma \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = \gamma(x+3) \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-2 \end{cases}$$

اگر  $x = -2$ ، آن‌گاه  $x-3 < 0$  و  $\log_{\gamma}(x-3)$  تعریف نمی‌شود و اگر

$$x = 5 \text{، آن‌گاه } \log_{\gamma}(x-3) = \log_{\gamma} 2 = \frac{1}{\gamma}$$

ریاضی - ۸۸

۲۰۹۰- گزینه ۳ از معادله  $\log y = 2 \log 3 + \log x$  به دست می‌آید

$$\log y - \log x = \log 9 \Rightarrow \log \frac{y}{x} = \log 9 \Rightarrow \frac{y}{x} = 9 \Rightarrow y = 9x$$

در معادله  $1 = 2^{x-y} \times 4^{x+y}$  به جای  $y$  قرار می‌دهیم  $9x$ ، در نتیجه

$$2^{x-9x} \times 4^{x+9x} = 1 \Rightarrow 2^{x-9x} \times 2^{2x+18x} = 1 \Rightarrow 2^{13x-7} = 1$$

$$13x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{13} \Rightarrow y = 3$$

تجربی - ۹۶

۲۰۹۱- گزینه ۲ دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند، پس

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{b-a} = 9 = 3^2 \Rightarrow b-a = 2 \quad (1)$$

از طرف دیگر  $f(2) = \frac{1}{3}$ ، پس

$$3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow 2a+b = -1 \quad (2)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $a = -1$  و  $b = 1$ . پس

$$f^{-1}(27) = m \text{ اکنون فرض می‌کنیم } f(x) = 3^{-x+1}$$

در این صورت

$$f(m) = 27 \Rightarrow 3^{-m+1} = 27 \Rightarrow -m+1 = 3 \Rightarrow m = -2$$

ریاضی - ۹۵

۲۰۹۲- گزینه ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow ab^0 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2b^2} = \frac{3}{32} \Rightarrow b^2 = 16$$

چون مقدار مثبت  $b$  مورد نظر است، پس  $b = 4$  و  $f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x$

بنابراین

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

تجربی - ۹۱

$A\left(\frac{1}{\gamma}, 2\right)$  نقطه مورد نظر است. بنابراین باید فاصله نقاط  $A\left(\frac{1}{\gamma}, 2\right)$  و  $B\left(-\frac{1}{\gamma}, 1\right)$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2} \text{ با } \sqrt{2} \text{ برابر است}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۰۸۳- گزینه ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از نقاط  $(2, 6)$  و  $(12, 10)$  می‌گذرد، پس  $f(2) = 6$  و  $f(12) = 10$ . بنابراین

$$f(2) = a + \log_{\gamma}(2b-4) = 6 \Rightarrow \log_{\gamma}(2b-4) = 6-a$$

$$f(12) = a + \log_{\gamma}(12b-4) = 10 \Rightarrow \log_{\gamma}(12b-4) = 10-a$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_{\gamma}(12b-4) - \log_{\gamma}(2b-4) = 4 \Rightarrow \log_{\gamma}\left(\frac{12b-4}{2b-4}\right) = 4$$

$$\frac{12b-4}{2b-4} = \gamma^4 \Rightarrow 12b-4 = \gamma^4(2b-4) \Rightarrow 20b = 6\gamma^4 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین  $\log_{\gamma}(2b-4) = \log_{\gamma}(6-4) = 1 = 6-a \Rightarrow a = 5$

ریاضی - ۹۶

۲۰۸۴- گزینه ۱ دامنه تابع به صورت  $\{x | ax+b > 0\}$  است. جواب

نامعادله اخیر به صورت  $(-\infty, -\frac{b}{a})$  یا  $(-\frac{b}{a}, +\infty)$  است. چون تابع فقط در

بازه  $(-\frac{b}{a}, +\infty)$  تعریف شده است، پس  $(1) \quad -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$

از طرف دیگر،  $f(4) = 2 \Rightarrow \log_{\gamma}(4a+b) = 2 \Rightarrow 4a+b = 9 \quad (2)$  با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $a = 2$  و  $b = 1$ . به این ترتیب  $f(x) = \log_{\gamma}(2x+1)$

و در نتیجه  $f\left(-\frac{4}{9}\right) = \log_{\gamma}\left(-\frac{4}{9}+1\right) = \log_{\gamma}\frac{5}{9} = -2$

ریاضی - ۹۴

۲۰۸۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{\frac{5}{25}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{10}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$A = \log_{\lambda}\left(2\sqrt[3]{\frac{5}{25}}\right) = \log_{\lambda}\left(2 \times 2^{-\frac{2}{3}}\right) = \log_{\lambda} 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\lambda} \log_{\lambda} 2 = \frac{1}{9}$$

$$\log_{\frac{1}{A}}(1-1) = \log_{\frac{1}{A}}(9-1) = \log_{\frac{1}{A}} 2^2 = \frac{2}{\frac{1}{A}} \log_{\frac{1}{A}} 2 = \frac{2}{\frac{1}{9}} \log_{\frac{1}{A}} 2 = \frac{18}{A} \log_{\frac{1}{A}} 2$$

ریاضی - ۹۰

۲۰۸۶- گزینه ۲ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log(6-2\sqrt{5}) + 2 \log(1+\sqrt{5}) &= \log(6-2\sqrt{5}) + \log(1+\sqrt{5})^2 \\ &= \log(6-2\sqrt{5}) + \log((6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})) \\ &= \log(36-20) = \log 16 = 4 \log 2 = 4k \end{aligned}$$

تجربی - ۹۰

۲۰۸۷- گزینه ۴ برای اینکه لگاریتم‌ها با معنی باشند باید  $x > 2$ . معادله

را ساده می‌کنیم:

$$2 \log(x-2) = \log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+10)$$

$$(x-2)^2 = x+10 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین  $\log_{\gamma}(x+2) = \log_{\gamma} 8 = \log_{\gamma} 2^3 = \frac{3}{\gamma} \log_{\gamma} 2 = \frac{3}{\gamma}$

ریاضی - ۸۵

۲۰۹۷- گزینه ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_x (3x+8) = 2 - \log_x (x-6) \Rightarrow \log_x (3x+8) + \log_x (x-6) = 2$$

$$\log_x ((3x+8)(x-6)) = 2 \Rightarrow (3x+8)(x-6) = x^2$$

$$3x^2 - 10x - 48 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$(x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 8$$

به ازای  $x = -3$  عبارت‌های  $\log_x (3x+8)$  و  $\log_x (x-6)$  بی‌معنی هستند، بنابراین  $x = 8$  و مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۴ برابر است با

$$\log_4 x = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2}$$

خارج از کشور تجربی-۹۳

۲۰۹۸- گزینه ۴ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_p (2x^2+1) - \log_p (x+2) = 1 \Rightarrow \log_p \frac{2x^2+1}{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = p$$

$$2x^2+1 = px+2 \Rightarrow 2x^2 - px - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = \frac{5}{2}$$

اکنون به محاسبه مقدار  $\log_\lambda (2x-1)$  می‌پردازیم. با توجه به محدوده

تعریف این لگاریتم  $(x > \frac{1}{2})$ ، تنها  $x = \frac{5}{2}$  قابل قبول است. پس

$$\log_\lambda (2x-1) = \log_\lambda (2 \times \frac{5}{2} - 1) = \log_\lambda 4 = \log_{\lambda^{\frac{2}{3}}} 2^2 = \frac{2}{3} \log_\lambda 2 = \frac{2}{3}$$

تجربی-۹۵

۲۰۹۹- گزینه ۲ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$$

$$\log\left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}\right) = \log(2x - 5) \Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 2x - 5$$

$$\xrightarrow{x \neq 3} x + 2 = 2x - 5 \Rightarrow x = 7$$

$$\text{بنابراین } \log_4 \sqrt[3]{x+1} = \log_4 \sqrt[3]{7} = \log_{4^{\frac{1}{3}}} 7 = \frac{1}{3} \log_4 7 = \frac{1}{3}$$

خارج از کشور تجربی-۹۵

۲۱۰۰- گزینه ۱ برای اینکه لگاریتم‌ها با معنی باشند باید  $x > 0$  و  $y > 0$ .

توجه کنید که

$$\log_p x + \log_p y = 2 \Rightarrow \log_p xy = 2 \Rightarrow xy = 9$$

$$x^2 + y^2 = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 18 = 46$$

$$(x+y)^2 = 64 \xrightarrow{x > 0, y > 0} x + y = 8$$

بنابراین

$$\log_4 (x+y) = \log_4 8 = \log_{4^{\frac{1}{2}}} 2^3 = \frac{3}{2} \log_4 2 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

تجربی-۸۹

۲۰۹۳- گزینه ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از دو نقطه  $(5, 11)$  و

$(21, 15)$  می‌گذرد، پس  $f(5) = 11$  و  $f(21) = 15$ . بنابراین

$$f(5) = a + \log_p (15+b)^2 = 11 \Rightarrow a + 2 \log_p (15+b) = 11$$

$$\log_p (15+b) = \frac{11-a}{2}$$

$$f(21) = a + \log_p (63+b)^2 = 15 \Rightarrow a + 2 \log_p (63+b) = 15$$

$$\log_p (63+b) = \frac{15-a}{2}$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_p (63+b) - \log_p (15+b) = 2 \Rightarrow \log_p \left(\frac{63+b}{15+b}\right) = 2$$

$$\frac{63+b}{15+b} = p^2 \Rightarrow 63+b = p^2(15+b) \Rightarrow 63+b = 15p^2 + p^2b \Rightarrow 63 - 15p^2 = p^2b - b \Rightarrow 63 - 15p^2 = b(p^2 - 1)$$

بنابراین

$$a + \log_p (15+1)^2 = 11 \Rightarrow a = 3$$

خارج از کشور ریاضی-۹۶

۲۰۹۴- گزینه ۱ نمودار تابع محور  $x$  را در نقطه‌ای به طول  $-1$  قطع می‌کند.

پس از نقطه  $(-1, 0)$  عبور می‌کند. همچنین نمودار تابع نیمساز ناحیه چهارم را در

نقطه‌ای به عرض  $-1$  قطع می‌کند. پس از نقطه  $(1, -1)$  عبور می‌کند. در نتیجه

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (-a+b) = 0 \Rightarrow -a+b = 1 \quad (1)$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (a+b) = -1 \Rightarrow a+b = 2 \quad (2)$$

بنابراین از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $a = \frac{1}{2}$  و  $b = \frac{3}{2}$ .

خارج از کشور ریاضی-۹۴

۲۰۹۵- گزینه ۴ از معادله داده شده مقدار  $x$  را می‌یابیم:

$$\log(x-2) = 2 \log 2 - \log(x-4) \Rightarrow \log(x-2) + \log(x-4) = \log 4$$

$$\log((x-2)(x-4)) = \log 4 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 4$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x = 3 + \sqrt{5} \text{ (غ.ق.)}, x = 3 - \sqrt{5}$$

$$\text{بنابراین } \log_8 (x-3) = \log_8 (3 + \sqrt{5} - 3) = \log_8 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log_8 5 = \frac{1}{2}$$

ریاضی-۸۷

۲۰۹۶- گزینه ۱ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که  $A^2 = (3^a)^2 = 3^{2a}$

بنابراین

$$\log_3 (9A^2) = \log_3 (3^2 \times 3^{2a}) = \log_3 3^{(2+2a)}$$

$$= (2+2a) \log_3 3 = 2+2a$$

راه‌حل دوم از فرض مسئله نتیجه می‌شود  $\log_3 A = a$ . پس

$$\log_3 (9A^2) = \log_3 (3^2 A^2) = \log_3 (3A)^2 = 2 \log_3 (3A)$$

$$= 2(\log_3 3 + \log_3 A) = 2(1+a) = 2+2a$$

ریاضی-۹۱

## فصل چهاردهم

۲۱۰۱- گزینه ۴

۲۱۰۲- گزینه ۴

۲۱۰۳- گزینه ۱

با توجه به شکل مقابل، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABD،

$$AD^2 = BA^2 + BD^2 \Rightarrow 25^2 = 24^2 + BD^2$$

$$BD^2 = 25^2 - 24^2 = (25-24)(25+24) = 49$$

بنابراین  $BD = 7$ . از طرف دیگر، چون D روی نیمساز زاویه A قرار دارد، پس  $DE = DB = 7$ .

۲۱۰۴- گزینه ۳

چون D روی نیمساز زاویه C قرار دارد، پس فاصله آن از دو ضلع این زاویه برابر است. بنابراین با توجه به شکل مقابل  $DH = DB = 4$  در نتیجه

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} DH \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$$

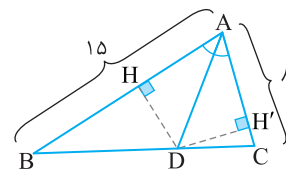
۲۱۰۵- گزینه ۴

چون نقطه D روی نیمساز زاویه A است، پس فاصله آن از AB و AC برابر است، یعنی با توجه به شکل زیر  $DH = DH'$  بنابراین

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{1}{2} DH \times AB + \frac{1}{2} DH' \times AC$$

$$46 = \frac{1}{2} DH' \times 15 + \frac{1}{2} DH' \times 8 \Rightarrow DH' = 4$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} DH' \times AC = 16 \text{ در نتیجه}$$



۲۱۰۶- گزینه ۳

چون C روی نیمساز زاویه O قرار دارد، پس فاصله اش از ضلع های این زاویه برابر است، بنابراین با توجه به شکل روبه رو  $CH = CB = 2$  اکنون توجه کنید که

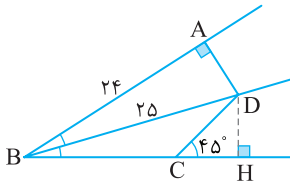
$$S_{AOC} - S_{BOC} = \frac{1}{2} CH \times OA - \frac{1}{2} CB \times OB$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times OA - \frac{1}{2} \times 2 \times OB = OA - OB = 4$$

۲۱۰۷- گزینه ۲

از نقطه D بر امتداد BC عمود می کشیم تا آن را در H قطع کند. چون D روی نیمساز زاویه B است، پس  $AD = DH$ . توجه کنید که  $DH = 7$  در نتیجه  $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$ . بنابراین در مثلث CHD،  $CH = CD = 7$  (زیرا  $\hat{C} = 45^\circ$  و مثلث CHD قائم الزاویه متساوی الساقین است). دو مثلث ABD و HBD به حالت وتر و یک زاویه حاده همبخت هستند.

بنابراین  $BH = AB = 24$ . در نتیجه  $BC = BH - HC = 24 - 7 = 17$ .



۲۱۰۸- گزینه ۴

ارتفاع BH را در مثلث ABD رسم می کنیم. چون مثلث های قائم الزاویه BCD و BHD همبخت اند، پس  $BH = BC = 4$  و  $HD = CD = 11$ . بنابراین  $AH = 23 - 11 = 12$ . در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث AHB،

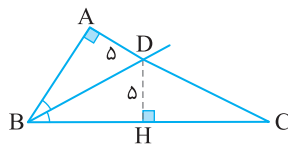
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 144 + 16 = 160 \Rightarrow AB = 4\sqrt{10}$$

۲۱۰۹- گزینه ۴

به شکل زیر توجه کنید. چون نقطه D روی نیمساز زاویه B است، پس  $DA = DH = 5$ . از طرف دیگر، چون مثلث های قائم الزاویه ABD و HBD همبخت اند، پس  $AB = HB$ . بنابراین  $BC - AB = 10 \Rightarrow BC - HB = 10 \Rightarrow HC = 10$ .

اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه DHC،

$$DC^2 = DH^2 + HC^2 = 25 + 100 = 125 \Rightarrow DC = 5\sqrt{5}$$

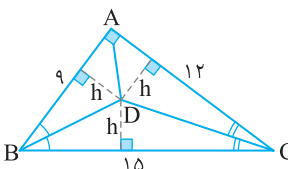


۲۱۱۰- گزینه ۲

چون D روی نیمساز زاویه B قرار دارد، پس فاصله اش از ضلع های AB و BC برابر است. همین طور، چون D روی نیمساز زاویه C قرار دارد، پس فاصله اش از ضلع های AC و BC برابر است. فرض کنید این فاصله برابر h باشد. اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه ABC،  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$ . پس  $BC = 15$ . مساحت مثلث ABC از یک طرف برابر است با  $\frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$  و از طرف دیگر برابر است با مجموع مساحت های سه مثلث ADB و BDC و ADC:

$$\frac{1}{2} h \times 9 + \frac{1}{2} h \times 15 + \frac{1}{2} h \times 12 = 54 \Rightarrow \frac{1}{2} h (9 + 15 + 12) = 54 \Rightarrow h = 3$$

$$\text{بنابراین } S_{BDC} = \frac{1}{2} h \times BC = \frac{1}{2} \times 3 \times 15 = 22.5$$





۲۱۱۸- گزینه ۴ اگر تناسب  $\frac{4x-y}{2x+y} = \frac{1}{5}$  را طرفین - وسطین کنیم،

به دست می آید

$$5(4x-y) = 2x+y \Rightarrow 20x-5y = 2x+y \Rightarrow 18x = 6y \Rightarrow 3x = y$$

$$\frac{6x+y}{x+y} = \frac{6x+3x}{x+3x} = \frac{9x}{4x} = \frac{9}{4}$$

بنابراین

۲۱۱۹- گزینه ۱ فرض می کنیم  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ . در نتیجه  $a = kb$  و

$$c = kd \text{ . بنابراین } \frac{a+yc}{b+yd} = \frac{kb+yc}{b+yd} = \frac{k(b+yd)}{b+yd} = k = \frac{3}{2}$$

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k + k = 2k = 3$$

۲۱۲۰- گزینه ۱ تناسب داده شده را تفصیل در صورت می کنیم:

$$\frac{3a+10-(10+2a)}{10+2a} = \frac{3b+7-(7+2b)}{7+2b} \Rightarrow \frac{a}{10+2a} = \frac{b}{7+2b}$$

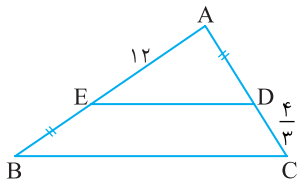
اگر این تناسب را طرفین - وسطین کنیم، به دست می آید

$$a(7+2b) = b(10+2a) \Rightarrow 7a+2ab = 10b+2ab \Rightarrow 7a = 10b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{7}$$

۲۱۲۱- گزینه ۲ مطابق شکل زیر، چون  $ED \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{12}{EB} = \frac{4}{3} \Rightarrow EB = 9$$

در نتیجه  $AB = AE + EB = 12 + 9 = 21$



۲۱۲۲- گزینه ۱ چون  $EF \parallel AB$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث MAB،

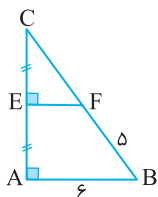
$$\frac{MF}{FA} = \frac{ME}{EB} \quad (1)$$

همین طور،  $DF \parallel AC$  و بنابر قضیه تالس در مثلث MAC،

$$\frac{MD}{DC} = \frac{MF}{FA} \quad (2)$$

از تساوی های (۱) و (۲) به دست می آید

$$\frac{ME}{EB} = \frac{MD}{DC} \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$



۲۱۲۳- گزینه ۱ با توجه به شکل مقابل، چون

$EF \parallel AB$  و نقطه E وسط ضلع AC است، پس بنابر قضیه تالس در مثلث CAB، نقطه F نیز وسط ضلع BC است. بنابراین  $CF = 5$ . همچنین در مثلث CAB، EF میان خط است، پس  $EF = \frac{AB}{2} = 3$  به

این ترتیب، از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه EFC نتیجه می شود

$$FC^2 = EF^2 + EC^2 \Rightarrow 25 = 9 + EC^2 \Rightarrow EC = 4$$

بنابراین، مساحت مثلث CEF برابر است با  $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$

۲۱۱۱- گزینه ۱ تساوی  $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$  را طرفین - وسطین می کنیم

$$2m = 3n \Rightarrow m = \frac{3n}{2}$$

$$\frac{2m+n}{m-n} = \frac{2(\frac{3n}{2})+n}{\frac{3n}{2}-n} = \frac{4n}{\frac{1}{2}n} = 8$$

بنابراین

۲۱۱۲- گزینه ۱ توجه کنید که بنابر فرض تست و ویژگی (ج) تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{a+d}{b+c} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a+d}{b+c} = \frac{3}{2}$$

۲۱۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x, \quad \frac{x}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow z = \frac{5}{3}x$$

بنابراین

$$2x - 3y + z = -2 \Rightarrow 2x - 3(\frac{4}{3}x) + \frac{5}{3}x = -2 \Rightarrow -\frac{1}{3}x = -2 \Rightarrow x = 6$$

۲۱۱۴- گزینه ۲ توجه کنید که  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$  پس  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$  از طرف دیگر،

$$\frac{x}{2} = \frac{2x-ky}{3} \Rightarrow 3x = 4x - 2ky \Rightarrow 3x = -2ky$$

$$3x = -2k(\frac{3}{2}x) \Rightarrow k = -1$$

۲۱۱۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{a}{-5} = c \Rightarrow a = -5c, \quad \frac{4}{b} = c \Rightarrow b = \frac{4}{c}$$

بنابراین

$$a+b+c = 0 \Rightarrow -5c + \frac{4}{c} + c = 0 \Rightarrow -4c + \frac{4}{c} = 0 \Rightarrow -4c^2 + 4 = 0 \Rightarrow c^2 = 1$$

۲۱۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{2} \\ \frac{y}{z} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(\frac{z}{4}) = \frac{z}{8}$$

بنابراین

$$x+y+z = 33 \Rightarrow \frac{z}{8} + \frac{z}{4} + z = 33 \Rightarrow \frac{z+2z+8z}{8} = 33$$

$$\frac{11z}{8} = 33 \Rightarrow z = 24$$

۲۱۱۷- گزینه ۴ راه حل اول با توجه به فرض مسئله

$$a = \delta k, \quad b = \gamma k, \quad c = \phi k$$

$$\frac{3a+2b+mc}{53} = \frac{15k+14k+\phi mk}{53} = \frac{29k+\phi mk}{53} = k$$

بنابراین

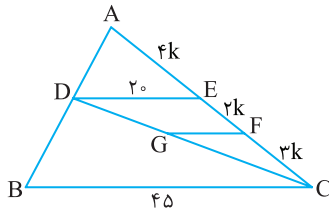
$$29k + \phi mk = 53k \Rightarrow \phi mk = 24k \Rightarrow m = 6$$

راه حل دوم عددهای ۲، ۳ و m را به ترتیب در صورت و مخارج نسبت های داده

شده ضرب می کنیم:  $\frac{3a}{3 \times 5} = \frac{2b}{2 \times 7} = \frac{mc}{m \times 4} = k$ . اکنون با توجه به ویژگی (ج)

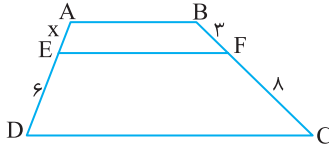
تناسب،

$$\frac{3a+2b+mc}{15+14+\phi m} = k \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 29+4m = 53 \Rightarrow m = 6$$



بنابر قضیه تالس در ذوزنقه،

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$



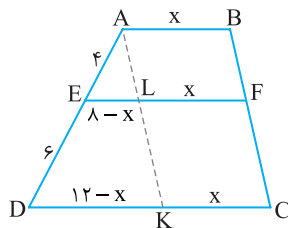
از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF

و CD را به ترتیب در نقطه‌های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت چهارضلعی‌های ABFL و LFCK متوازی‌الاضلاع هستند، پس  $KC=LF=AB=x$  . اکنون توجه کنید که چون  $EL \parallel DK$ ، در مثلث

ADK، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{EL}{DK} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{8-x}{12-x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$40 - 5x = 24 - 2x \Rightarrow 3x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$



بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{10}{BC} \Rightarrow BC = 16$$

چون  $EF \parallel CD$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ADC،

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AE}{EC} \quad (1)$$

چون  $DE \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AD}{DB} \quad (3)$$

اگر فرض کنیم  $DF=x$ ، تساوی (۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{2}{x} = \frac{2+x}{12} \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x-4)(x+6) = 0 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین  $AB = 2 + 4 + 12 = 18$

۲۱۲۴- گزینه ۴ راه‌حل اول چون BEFD متوازی‌الاضلاع است،  $EF=BD=6$  و  $EF \parallel BC$ ، پس بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{4}{4+EB} = \frac{6}{8}$$

$$32 = 24 + 6EB \Rightarrow EB = \frac{4}{3}$$

راه‌حل دوم چون  $FD \parallel AB$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث CAB،

$$\frac{CF}{FA} = \frac{CD}{DB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FA}{CF} = 3 \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون  $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{(1)} \frac{4}{EB} = 3 \Rightarrow EB = \frac{4}{3}$$

۲۱۲۵- گزینه ۳ چون  $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{6}{2} = 3 \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون  $FK \parallel AD$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث CAD،

$$\frac{CF}{CA} = \frac{FK}{AD} \quad (2)$$

اکنون توجه کنید که اگر تناسب (۱) را ترکیب در صورت کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{AF+FC}{FC} = \frac{3+1}{1} \Rightarrow \frac{AC}{FC} = 4 \Rightarrow \frac{FC}{AC} = \frac{1}{4}$$

بنابراین از تناسب (۲) به دست می‌آید

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{AD} \Rightarrow AD = 12$$

۲۱۲۶- گزینه ۴ چون  $ED \parallel AC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث BAC،

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BD}{DC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون  $EF \parallel BD$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABD،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BD} \quad (2)$$

اکنون توجه کنید که اگر تناسب (۱) را ترکیب در صورت کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{BE+EA}{EA} = \frac{4+3}{3} \Rightarrow \frac{AB}{EA} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{3}{7}$$

بنابراین از تناسب (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{3}{7} = \frac{EF}{8} \Rightarrow EF = \frac{24}{7}$$

۲۱۲۷- گزینه ۲ توجه کنید که  $NM \parallel HC$ ، در نتیجه طبق تعمیم

قضیه تالس در مثلث BHC،  $\frac{BM}{BC} = \frac{NM}{HC} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ ، بنابراین

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BM}{BM+MC} = \frac{20}{20+x} = \frac{2}{3}$$

در نتیجه  $x=10$ .

۲۱۲۸- گزینه ۱ فرض کنید  $EF=4k$ ،  $FC=3k$ ،  $AE=4k$

$$EF=2k, FC=3k, AE=4k$$

طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{45} = \frac{4k}{9k} \Rightarrow DE = 20$$

اکنون طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث CED،

$$\frac{GF}{DE} = \frac{CF}{CE} = \frac{3k}{5k} \Rightarrow \frac{GF}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow GF = 12$$

**روش دوم** چون  $ED \parallel AC$ ، بنا بر قضیه تالس در مثلث BAC.

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{4}{EA} = \frac{3}{12} \Rightarrow EA = 16$$

بنابراین محیط متوازی الاضلاع AEDF برابر است با  $2(ED+FD) = 2 \times 20 = 40$ .

**گزینه ۴ - ۲۱۳۸** از نقطه D خطی موازی FE رسم می کنیم تا ضلع AB را در K قطع کند (شکل زیر را ببینید). طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث BKD.

$$ED \parallel KD \Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{EF}{KD}$$

در نتیجه

$$\frac{BF}{BF+FD} = \frac{6}{KD} \quad (1)$$

توجه کنید که با توجه به فرض سؤال،

$$\frac{BF}{FD} = 3 \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BF}{BF+FD} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می شود  $KD = 8$ . اکنون طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC.

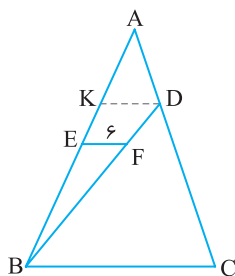
$$KD \parallel BC \Rightarrow \frac{KD}{BC} = \frac{AD}{AC} \quad (3)$$

همچنین طبق فرض سؤال.

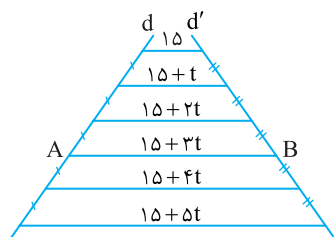
$$\frac{DC}{AD} = 5 \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AD+DC}{AD} = \frac{1+5}{1} = 6$$

$$\frac{AC}{AD} = 6 \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{6}$$

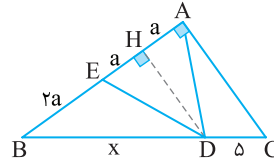
بنابراین از تساوی (۳) نتیجه می شود  $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{6}$ . پس  $BC = 48$ .



**گزینه ۱ - ۲۱۳۹** چون پاره خط های افقی موازی اند، بنا بر قضیه تالس در ذوزنقه، پاره خط هایی که روی خط  $d'$  تشکیل شده اند نیز برابر هستند، نتیجه از روی شکل زیر معلوم می شود که  $15 + 5t = 75$ ، پس  $t = 12$ . بنابراین  $AB = 15 + 3 \times 12 = 51$ .



**گزینه ۲ - ۲۱۳۳** مثلث ADE متساوی الساقین است، پس میانه وارد بر قاعده AE در آن ارتفاع نیز هست (به شکل زیر توجه کنید). از طرف دیگر، اگر  $AH = a$ ، آن گاه  $EH = a$  و  $BE = EA = 2a$ ، همچنین، چون  $HD \parallel AC$ ، بنا بر قضیه تالس،



$$\frac{BH}{HA} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{3a}{a} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 15$$

**گزینه ۴ - ۲۱۳۴** چون BFED لوزی است، پس  $DE = EF = BF = DB = x$  چون  $DE \parallel BC$ ، بنا بر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{9}{9+x} = \frac{x}{x+4} \Rightarrow 9x + 36 = x^2 + 9x \Rightarrow 36 = x^2 \Rightarrow x = 6$$

در نتیجه، بنا بر قضیه تالس،  $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ .

**گزینه ۳ - ۲۱۳۵** بنا بر تعمیم قضیه تالس در مثلث DAB،

$$\frac{DK}{DB} = \frac{EK}{AB} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر، بنا بر تعمیم قضیه تالس در مثلث BDC،

$$\frac{BK}{BD} = \frac{KF}{DC} \quad (2)$$

از تناسب (۱) نتیجه می شود

$$\frac{DK}{DB} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{DB-DK}{DB} = \frac{4-3}{4} \Rightarrow \frac{BK}{DB} = \frac{1}{4}$$

بنابراین از تناسب (۲) نتیجه می شود  $\frac{1}{4} = \frac{2}{DC}$ ، پس  $DC = 8$ .

**تذکر** برای به دست آوردن نسبت  $\frac{BK}{DB}$  می توانیم از تناسب (۱) به صورت زیر استفاده کنیم:

$$\frac{DK}{DB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{DK}{DB} + \frac{BK}{DB} = \frac{3}{4} + \frac{BK}{DB} \Rightarrow 1 = \frac{3}{4} + \frac{BK}{DB} \Rightarrow \frac{BK}{DB} = \frac{1}{4}$$

**گزینه ۴ - ۲۱۳۶** فرض کنید  $EF = x$ ، بنا بر تعمیم قضیه تالس در مثلث CAB،

$$\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{CF}{6} \quad (1)$$

از طرف دیگر، بنا بر تعمیم قضیه تالس در مثلث BCD،

$$\frac{EF}{DC} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{BF}{3} \quad (2)$$

با جمع کردن تناسب های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{3} = \frac{CF+BF}{BC} \Rightarrow \frac{x+2x}{6} = \frac{BC}{6} \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

**گزینه ۲ - ۲۱۳۷** چون  $ED \parallel AC$ ، بنا بر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{ED}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{ED}{20} = \frac{3}{15} \Rightarrow ED = 4$$

برای به دست آوردن طول ضلع بزرگ متوازی الاضلاع AEDF می توانیم یکی از دو روش زیر را به کار ببریم:

**روش اول** چون  $FD \parallel AB$ ، پس باز هم بنا بر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{FD}{AB} = \frac{CD}{CB} \xrightarrow{AE=FD} \frac{FD}{FD+4} = \frac{12}{15}$$

$$15FD = 12FD + 48 \Rightarrow 3FD = 48 \Rightarrow FD = 16$$

۲۱۴۴- گزینه ۳ راه‌حل اول فرض کنید  $AE=s$  و  $AF=t$ ، (شکل

زیر را ببینید). چون  $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{s}{s+x} = \frac{t}{t+y} = \frac{2}{5}$$

بنابراین

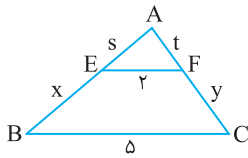
$$\frac{s}{s+x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5s = 2s + 2x \Rightarrow 3s = 2x$$

$$\frac{t}{t+y} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5t = 2t + 2y \Rightarrow 3t = 2y$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم:

$$3(s+t) = 2(x+y) \xrightarrow{x+y=9} s+t=6$$

بنابراین محیط مثلث  $AEF$  برابر است با  $s+t+2=8$ .



راه‌حل دوم برای به دست آوردن  $s+t$ ، تناسب  $\frac{s}{s+x} = \frac{t}{t+y} = \frac{2}{5}$  را تفصیل

در مخرج می‌کنیم

$$\frac{s}{s+x-s} = \frac{t}{t+y-t} = \frac{2}{5-2} \Rightarrow \frac{s}{x} = \frac{t}{y} = \frac{2}{3}$$

اکنون از خاصیت‌های تناسب (خاصیت ج) استفاده می‌کنیم

$$\frac{s}{x} = \frac{t}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{s+t}{x+y} = \frac{2}{3} \xrightarrow{x+y=9} \frac{s+t}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow s+t=6$$

بنابراین محیط مثلث  $AEF$  برابر است با  $s+t+2=8$ .

راه‌حل سوم چون  $EF \parallel BC$ ، پس مثلث‌های  $AEF$  و  $ABC$  متشابه‌اند. در

نتیجه نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست. در نتیجه، با نمادگذاری شکل راه‌حل اول،

$$\frac{s+t+2}{s+x+5+t+y} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{s+t+2}{s+t+9+5} = \frac{2}{5} \Rightarrow s+t=6$$

بنابراین محیط مثلث  $AEF$  برابر است با  $s+t+2=8$ .

۲۱۴۵- گزینه ۱ راه‌حل اول چون  $EF \parallel BD$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس

در مثلث  $ABD$ ،

$$\frac{AF}{AD} = \frac{EF}{BD} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون  $FK \parallel AC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث  $DAC$ ،

$$\frac{FK}{AC} = \frac{DF}{DA} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{DF}{12} \Rightarrow DF = x$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{12-x}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(12-x) = 3 \times 12 \Rightarrow x=3$$

راه‌حل دوم برای به دست آوردن  $x$ ، از تناسب (۱) به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AF}{AD} + \frac{FD}{AD} = \frac{3}{4} + \frac{FD}{AD} \Rightarrow 1 = \frac{3}{4} + \frac{FD}{AD} \Rightarrow \frac{FD}{AD} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر چون  $FK \parallel AC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث  $DAC$ ،

$$\frac{FK}{AC} = \frac{DF}{DA} \xrightarrow{(1)} \frac{x}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow x=3$$

۲۱۴۰- گزینه ۱ از  $A$  خطی موازی  $BC$  رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های  $EF$  و

$CD$  را به ترتیب در  $L$  و  $K$  قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت چون

$ABFL$  و  $LFCK$  متوازی‌الاضلاع هستند، پس  $KC=LF=AB=5$ ، اکنون

توجه کنید که چون  $EL \parallel DK$ ، در مثلث  $ADK$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EL}{DK} \quad (1)$$

از طرف دیگر طبق فرض سؤال،  $\frac{AE}{DE} = \frac{1}{2}$  و اگر این تناسب را ترکیب در مخرج

کنیم به دست می‌آید

$$\frac{AE}{DE+AE} = \frac{1}{2+1} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}$$

بنابراین از تناسب (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow x=1$$

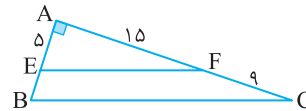
بنابراین  $EF=1+5=6$ .

۲۱۴۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{5}{EB} = \frac{15}{9} \Rightarrow EB = \frac{5 \times 9}{15} = 3$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 24^2 = 8^2(1+3^2) = 8^2 \times 10 \Rightarrow BC = 8\sqrt{10}$$

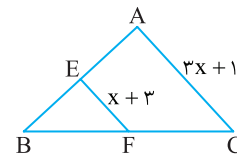


۲۱۴۲- گزینه ۳ پاره‌خط  $EF$  میان‌خط است، پس طول آن برابر با نصف

طول  $AC$  است. بنابراین

$$x+3 = \frac{1}{2}(3x+1) \Rightarrow x=5$$

بنابراین  $EF=5+3=8$ .



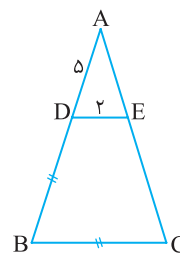
۲۱۴۳- گزینه ۳ چون  $DE \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس،  $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

از طرف دیگر،  $BC=DB$ ، در نتیجه

$$\frac{5}{5+DB} = \frac{2}{DB} \Rightarrow 5DB = 2DB + 10$$

بنابراین  $DB = \frac{10}{3}$ ، اکنون بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{5}{\frac{10}{3}} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$$



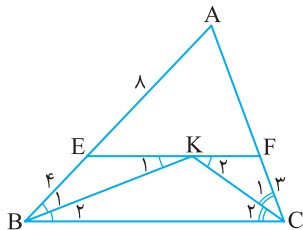
**۲۱۴۹- گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که چون  $EF \parallel BC$ ، از قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود  $\hat{K}_1 = \hat{B}_p$  (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر،  $\hat{B}_p = \hat{B}_1$  پس  $\hat{K}_1 = \hat{B}_1$ ، و در نتیجه مثلث  $BEK$  متساوی‌الساقین است. پس  $EK = EB = ۴$ . به همین ترتیب معلوم می‌شود که  $KF = FC = ۳$ ، به این ترتیب  $EF = ۴ + ۳ = ۷$ . اکنون توجه کنید که چون  $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث  $ABC$ .

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۸}{۸+۴} = \frac{۷}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{۷}{BC} \Rightarrow ۲BC = ۲۱ \Rightarrow BC = \frac{۲۱}{۲}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه تالس در مثلث  $ABC$ ،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{۸}{۴} = \frac{AF}{۳} \Rightarrow AF = ۶$$

بنابراین محیط مثلث  $ABC$  برابر است با  $۸ + ۴ + \frac{۲۱}{۲} + ۳ + ۶ = ۳۱/۵$ .

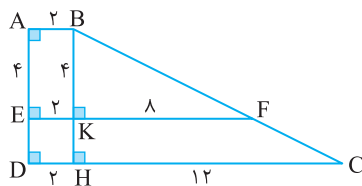


**۲۱۵۰- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که  $AB \parallel EF \parallel DC$ . از نقطه  $B$  خطی موازی  $AD$  رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های  $EF$  و  $CD$  را به ترتیب در  $H$  و  $K$  قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث  $BHC$ ،

$$KF \parallel CH \Rightarrow \frac{BK}{BH} = \frac{KF}{HC} \Rightarrow \frac{۴}{KH+۴} = \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow KH = ۲$$

بنابراین  $BH = ۴ + ۲ = ۶$ . در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $BHC$ ،

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = ۶^2 + ۱۲^2 = ۶^2 \times ۵ \Rightarrow BC = ۶\sqrt{۵}$$



**۲۱۵۱- گزینه ۲** زاویه‌های  $ACB$  و  $ECD$  متقابل به رأس هستند، پس برابرند. بنابراین مثلث‌های  $ACB$  و  $ECD$  متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{x}{۹} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow x = ۱۲$$

**۲۱۵۲- گزینه ۳** توجه کنید که در مثلث‌های  $ABD$  و  $CBA$  زاویه  $B$  مشترک است و  $\hat{B}AD = \hat{C}B$ . بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند (ز.ز). در

نتیجه  $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$ ، بنابراین  $\frac{\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{BC}$ ، در نتیجه  $BC = ۹\sqrt{۲}$ . پس

$$DC = ۹\sqrt{۲} - \sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲}$$

**۲۱۵۳- گزینه ۲** توجه کنید که  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$  (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۴}{۳+BD} \Rightarrow BD = \frac{۱۱}{۳}$$

**۲۱۴۶- گزینه ۲** از تعمیم قضیه تالس در مثلث‌های  $ABC$  و  $BAD$  استفاده می‌کنیم:

$$FH \parallel BC \Rightarrow \frac{FH}{BC} = \frac{AF}{AB}$$

$$FE \parallel AD \Rightarrow \frac{FE}{AD} = \frac{BF}{AB}$$

با جمع کردن دو تساوی بالا معلوم می‌شود که

$$\frac{FH}{BC} + \frac{FE}{AD} = \frac{AF+BF}{AB} = ۱$$

$$\frac{۶}{BC} + \frac{۲}{۵} = ۱$$

$$\frac{۶}{BC} = ۱ - \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow BC = ۱۰$$

**۲۱۴۷- گزینه ۳** چون در لوزی همه ضلع‌ها برابرند، پس

$$AD = AB = BC = CD = ۶$$

از طرف دیگر، چون  $FC \parallel AD$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث  $EAD$ ،

$$\frac{FC}{AD} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow \frac{FC}{۶} = \frac{۶}{۱۲}$$

پس  $FC = ۳$ . بنابراین  $BF = ۶ - ۳ = ۳$ . اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث  $AFB$ ،

$$AB^2 = AF^2 + FB^2$$

$$۳۶ = AF^2 + ۹$$

$$AF = ۳\sqrt{۳}$$

به این ترتیب، مساحت مثلث  $ABF$  برابر است با

$$\frac{۱}{۲} AF \times BF = \frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$

**تذکر** برای به دست آوردن  $FC$ ، چون  $AD$  موازی است و  $C$  وسط  $DE$  است، بنابر قضیه تالس نتیجه می‌گیریم  $F$  نیز وسط  $AE$  است. در نتیجه  $FC$  مثلث  $EAD$  میان خط است پس می‌توان  $FC$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$FC = \frac{AD}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

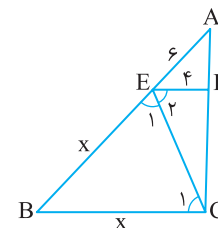
**۲۱۴۸- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که چون  $EF \parallel BC$ ، از قضیه خطوط

موازی و مورب نتیجه می‌شود  $\hat{E}_p = \hat{C}_1$  (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر،  $\hat{E}_p = \hat{E}_1$  پس  $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$ . بنابراین مثلث  $EBC$  متساوی‌الساقین است و در نتیجه  $EB = BC = x$ . اکنون توجه کنید که چون  $EF \parallel BC$ ، از تعمیم قضیه تالس در مثلث  $ABC$  نتیجه می‌شود

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۶}{۶+x} = \frac{۴}{x}$$

$$۶x = ۲۴ + ۴x \Rightarrow x = ۱۲$$

در نتیجه، بنابر قضیه تالس در مثلث  $ABC$ ،  $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$ .



۲۱۵۷- گزینه ۱ توجه کنید که  $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{2}$ . همچنین  $\hat{A} = \hat{A}$ .

بنابراین  $\triangle ABC \sim \triangle AED$  (ض.ض). در نتیجه  $\frac{BC}{DE} = \frac{1}{2}$ .

۲۱۵۸- گزینه ۴ توجه کنید که  $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$  و  $\hat{A} = \hat{A}$ . در نتیجه،

دو مثلث  $ADE$  و  $ACB$  به حالت (ض.ض) متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{DE}{BC} = \frac{6}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 12$$

۲۱۵۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه  $BEF$ .

$$BF^2 = BE^2 + EF^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BF = 5$$

از طرف دیگر مثلث‌های قائم‌الزاویه  $ABC$  و  $FBE$  که یک زاویه حاده مشترک دارند، متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{\text{محیط}(ABC)}{\text{محیط}(FBE)} = \frac{AB}{FB} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\frac{\text{محیط}(ABC)}{12} = 2 \Rightarrow \text{محیط}(ABC) = 24$$

۲۱۶۰- گزینه ۴ چون  $EF \parallel BC$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث‌های  $AEF$  و  $ABC$  متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{\text{مساحت}(AEF)}{\text{مساحت}(ABC)} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{\text{مساحت}(AEF)}{\text{مساحت}(ABC) - \text{مساحت}(AEF)} = \frac{4}{25 - 4} = \frac{4}{21}$$

۲۱۶۱- گزینه ۲ راه حل اول با توجه به شکل معلوم می‌شود

$$\triangle ADB \sim \triangle ABC \text{ (ز.ز)}$$

بنابراین

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{4}{AB} = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC = 9$$

در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 9^2 = 6^2 + BC^2 \Rightarrow BC = 3\sqrt{5}$$

$$\text{بنابراین } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = 9\sqrt{5}$$

راه حل دوم بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $ADB$ ،

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow 6^2 = 4^2 + DB^2 \Rightarrow DB = 2\sqrt{5}$$

در نتیجه  $S_{ADB} = \frac{1}{2} AD \times DB = 4\sqrt{5}$ . اکنون توجه کنید که مثلث‌های

$ADB$  و  $ABC$  متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADB}} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{4\sqrt{5}} = \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow S_{ABC} = 9\sqrt{5}$$

۲۱۶۲- گزینه ۲ فرض کنید  $DC = x$ . مثلث‌های  $ABD$  و  $CBA$  به

حالت (ز.ز) متشابه‌اند ( $\hat{A}_1 = \hat{C}$  و زاویه  $B$  مشترک). بنابراین

$$\frac{BD}{BA} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{6}{4+x} \Rightarrow 16 = 4+x \Rightarrow x = 12$$

۲۱۵۴- گزینه ۳ راه حل اول چون  $EF \parallel BC$ ، پس بنابر قضیه خطوط

موازی و مورب  $\hat{F}_1 = \hat{C}$  (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه

$AHF$  و  $FKC$  که یک زاویه حاده برابر دارند، متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

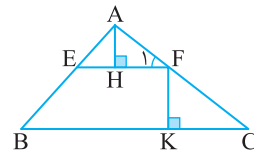
$$\frac{AF}{FC} = \frac{AH}{FK} = \frac{2}{3}$$

اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{AF}{AF+FC} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{2}{5}$$

بنابراین از تعمیم قضیه تالس در مثلث  $ABC$  نتیجه می‌شود

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{6}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 15$$



راه حل دوم از نقطه  $H$  عمود  $HD$  را بر ضلع  $BC$  رسم می‌کنیم (شکل زیر را

ببینید). واضح است که  $FK = HD$ . از طرف دیگر چون  $EF \parallel BC$ ، بنابر

قضیه اساسی تشابه مثلث‌های  $AEF$  و  $ABC$  متشابه هستند و  $AH$  و  $AD$

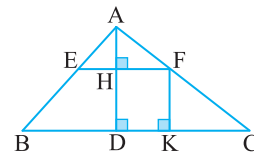
به ترتیب ارتفاع‌های آن‌ها هستند. از طرف دیگر

$$\frac{AH}{HD} = \frac{AH}{FK} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AH}{AH+HD} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{2}{5}$$

بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث  $AEF$  و  $ABC$  است، پس

نسبت تشابه این دو مثلث نیز  $\frac{2}{5}$  است، در نتیجه

$$\frac{EF}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{6}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 15$$



۲۱۵۵- گزینه ۴ چون  $AB \parallel DE$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و

مورب  $\hat{B} = \hat{D}$  و  $\hat{A} = \hat{E}$ . بنابراین مثلث‌های  $ABC$  و  $EDC$  به حالت (ز.ز)

متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{9}{ED} = \frac{6}{10} \Rightarrow ED = 15$$

همین‌طور  $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ . اگر این تناسب را ترکیب در صورت کنیم،

به دست می‌آید

$$\frac{BC+DC}{DC} = \frac{3+5}{5} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{32}{DC} = \frac{8}{5} \Rightarrow DC = 20$$

بنابراین محیط مثلث  $CDE$  برابر است با  $20 + 10 + 15 = 45$ .

۲۱۵۶- گزینه ۳ توجه کنید  $\hat{AEB} = \hat{CED}$  (زاویه‌های متقابل به

رأس). همچنین  $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{1}{2}$ . بنابراین دو مثلث  $AEB$  و  $CED$  به حالت

(ض.ض) متشابه هستند. در نتیجه  $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$  پس  $x = CD = 20$ .

۲۱۶۸- گزینه ۱ چون  $AB \parallel CD$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و

$$\text{مورب } \hat{B}AC = \hat{A}CD \text{ . همچنین } \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{3}{4} \text{ . بنابراین}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta CAD \text{ (ضرض)}$$

در نتیجه

$$\frac{BC}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow BC = \frac{3}{4} AD = \frac{3}{4} (24) = 18$$

۲۱۶۹- گزینه ۴ مثلث‌های  $ABC$  و  $DAC$  به حالت (ز ز) متشابه‌اند.

زیرا  $\hat{B} = \hat{A}_1$  و زاویه  $C$  در آن‌ها مشترک است. بنابراین

$$\frac{(ABC) \text{ محیط}}{(DAC) \text{ محیط}} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{(ABC) \text{ محیط}}{15} = \frac{6}{5} \Rightarrow (ABC) \text{ محیط} = 18$$

۲۱۷۰- گزینه ۴ مثلث‌های  $ABC$  و  $DBE$  قائم‌الزاویه‌اند و زاویه  $B$  در

آن‌ها مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{\text{مساحت } (ABC)}{\text{مساحت } (DBE)} = \left(\frac{AB}{DB}\right)^2 \quad (1)$$

از طرف دیگر.

$$\text{مساحت } (ACDE) + \text{مساحت } (DBE) = \text{مساحت } (ABC) \\ = 2(\text{مساحت } (DBE))$$

در نتیجه، تناسب (۱) می‌شود

$$2 = \left(\frac{x}{x}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{64}{x^2} \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$$

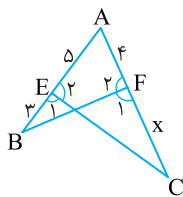
۲۱۷۱- گزینه ۴ فرض کنید  $CF = x$ ، چون  $\hat{E}_1 = \hat{F}_1$ ، پس زاویه‌های

$E_1$  و  $F_1$  نیز که مکمل این دو زاویه برابر هستند، برابرند (شکل زیر را

ببینید). بنابراین مثلث‌های  $ABF$  و  $ACE$  به حالت (ز ز) متشابه‌اند

( $\hat{F}_1 = \hat{E}_1$ ) و زاویه  $A$  مشترک). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{8}{4+x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 40 = 16 + 4x \Rightarrow x = 6$$

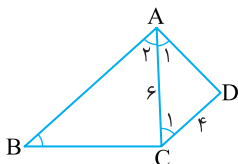


۲۱۷۲- گزینه ۲ چون  $AB \parallel CD$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و

مورب  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$  (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های  $ABC$  و  $CAD$  به

حالت (ز ز) متشابه‌اند ( $\hat{B} = \hat{A}_1$  و  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ ). در نتیجه

$$\frac{AB}{CA} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{6} = \frac{6}{4} \Rightarrow AB = 9$$



۲۱۶۳- گزینه ۲ مثلث‌های قائم‌الزاویه  $ABC$  و  $EFC$  که یک زاویه حاده

مشترک دارند، متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

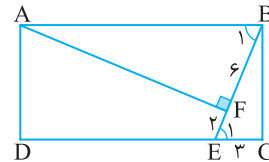
$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{EF} \Rightarrow \frac{AC}{6} = \frac{10}{4} \Rightarrow AC = 15$$

۲۱۶۴- گزینه ۲ چون  $AB \parallel CD$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و

مورب  $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$  (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه  $AFB$  و

$BCE$  که یک زاویه حاده برابر دارند، متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BF}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{8} = \frac{6}{3} \Rightarrow AB = 16$$



۲۱۶۵- گزینه ۲ در مثلث  $AEF$ ،  $\hat{A} + \hat{E}_1 = 90^\circ$  و در مثلث  $DCE$ ،

$\hat{D} + \hat{E}_1 = 90^\circ$  از طرف دیگر  $\hat{E}_1 = \hat{E}_1$ ، پس  $\hat{A} = \hat{D}$ . در نتیجه مثلث‌های

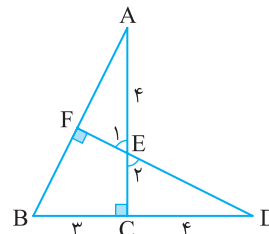
قائم‌الزاویه  $ABC$  و  $DEC$  متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{4+EC}{4}$$

$$12 = 4EC + EC^2$$

$$EC^2 + 4EC - 12 = 0$$

$$(EC - 2)(EC + 6) = 0 \Rightarrow EC = 2$$



۲۱۶۶- گزینه ۴ چون  $DE \parallel AB$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه

مثلث‌های  $DEF$  و  $BAF$  متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{DE}{BA} = \frac{DF}{BF} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{2}{9} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون  $DC \parallel AB$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث‌های

$BAK$  و  $DCK$  متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{DC}{BA} = \frac{DK}{BK} \Rightarrow \frac{x+y}{9} = \frac{6}{5} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{\frac{x}{9}}{\frac{x+y}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{5}} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{5}{27}$$

۲۱۶۷- گزینه ۳ توجه کنید که  $\hat{A}EB = \hat{C}ED$  (زاویه‌های متقابل به

رأس). همچنین  $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{1}{3}$ . بنابراین دو مثلث  $AEB$  و  $CED$  به حالت

(ضرض) متشابه هستند. در نتیجه

$$\frac{AB}{CD} = \frac{10}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 30$$

۲-۲۱۷۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه CDE.

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 \Rightarrow 5^2 = CE^2 + 3^2 \Rightarrow CE = 4$$

مثلث‌های قائم‌الزاویه ABE و DCE که یک زاویه حاده برابر دارند (زاویه E)، متشابه‌اند. بنابراین

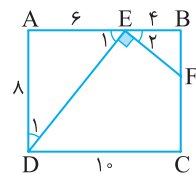
$$\frac{AB}{DC} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{BE}{4} \Rightarrow BE = 8$$

بنابراین  $BC = 8 + 4 = 12$ . اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABC.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 12^2 = 6^2(1+2^2) = 6^2 \times 5 \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}$$

۳-۲۱۷۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $BE = 10 - 6 = 4$ . از طرف دیگر،  $\hat{E}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ$  و  $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ$ ، پس  $\hat{D}_1 = \hat{E}_2$  (شکل زیر را ببینید).

بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه ADE و BEF که یک زاویه حاده برابر دارند، متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه



$$\frac{AE}{BF} = \frac{AD}{BE} \Rightarrow \frac{6}{BF} = \frac{8}{4} \Rightarrow BF = 3$$

در نتیجه  $FC = 10 - 3 = 7$ .

۲-۲۱۷۵- گزینه ۲ توجه کنید که  $\frac{BC}{CD} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ،  $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  و

$\hat{A} = \hat{C}$ . بنابراین مثلث‌های ABC و ACD متشابه‌اند (ض.ض.ض). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 12$$

۳-۲۱۷۶- گزینه ۳ در دو مثلث ABC و EDC،  $\frac{AC}{EC} = \frac{12}{3} = 4$ .

چون زاویه C هم در این دو مثلث مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ض.ض.ض). بنابراین

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{12}{3} = \frac{AB}{6} \Rightarrow AB = 24$$

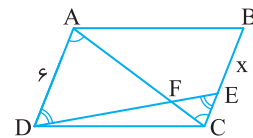
۳-۲۱۷۷- گزینه ۳ چون  $AD \parallel BC$ ، پس مثلث‌های ADF و CEF

متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CE} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{6}{CE} \Rightarrow CE = 12$$

از طرف دیگر، چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس

$$AD = BC \Rightarrow 6 = x + 2 \Rightarrow x = 4$$



۴-۲۱۷۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که چون

$DC = AB = 14$ ، پس  $AF = 3$ . از طرف

دیگر، چون  $\hat{K}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ$  و  $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ$ ، پس  $\hat{K}_1 = \hat{E}_1$

بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه AEF و DKE متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AE}{DK} = \frac{AF}{DE} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{3}{6} \Rightarrow x = 4$$

۳-۲۱۷۹- گزینه ۳ توجه کنید که بنابر قضیه اساسی تشابه،

$$\triangle AEF \sim \triangle AMN \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \left(\frac{AE}{AM}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AEF} + 33} = \frac{25}{36} \Rightarrow S_{AEF} = 75$$

همچنین بنابر قضیه اساسی تشابه،

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$$

$$\frac{75}{S_{ABC}} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = 192$$

۲-۲۱۸۰- گزینه ۲ بنابر قضیه اساسی تشابه چون مثلث‌های AEF و AMN

متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \left(\frac{AF}{AN}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

اگر این تناسب را تفسیر در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN} - S_{AEF}} = \frac{9}{64 - 9} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{EFNM}} = \frac{9}{55} \quad (1)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AF}{AC}\right)^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{S_{EFNM}}{S_{ABC}} = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$$

۱-۲۱۸۱- گزینه ۱ چون  $AB \parallel CD$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و

مورب  $\hat{B} = \hat{C}$  و  $\hat{A} = \hat{D}$ . بنابراین مثلث‌های ABE و DCE متشابه‌اند

(ز.ز). در نتیجه

$$\frac{AB}{DC} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{BE}{CE}$$

اگر این تناسب را ترکیب در صورت کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{5+2}{2} = \frac{BE+CE}{CE} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{BC}{CE} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{28}{CE} \Rightarrow CE = 8$$

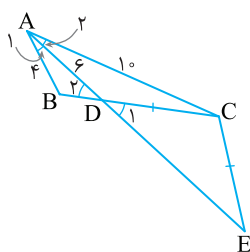
۳-۲۱۸۲- گزینه ۳ چون  $CD = CE$ ، پس مثلث CDE متساوی‌الساقین

است و در نتیجه  $\hat{D}_1 = \hat{E}$  (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر  $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$

(متقابل به رأس)، پس  $\hat{D}_2 = \hat{E}$ . بنابراین مثلث‌های ABD و ACE به حالت

(ز.ز) متشابه‌اند ( $\hat{D}_2 = \hat{E}$  و  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{6}{6+DE} \Rightarrow DE = 9$$

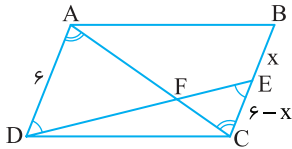




**۲۱۸۷- گزینه ۲** چون در متوازی الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس  $AD = x + 6 - x = 6$  از طرف دیگر چون  $AD \parallel BC$ ، پس مثلث‌های  $ADF$  و  $CEF$  متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CE} \xrightarrow{\frac{AF}{CF} = 2} 2 = \frac{6}{CE} \Rightarrow CE = 3$$

در نتیجه  $6 - x = 3$ ، پس  $x = 3$ .



**۲۱۸۸- گزینه ۱** توجه کنید که  $\frac{EC}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{DC}{CB} = \frac{1}{2}$ ، بنابراین

مثلث‌های  $EDC$  و  $ACB$  متشابه‌اند (ض.ض.ض). در نتیجه

$$\hat{A}BC = \hat{D}CE = 35^\circ$$

به این ترتیب،  $\hat{B}AC = 18^\circ - (65^\circ + 25^\circ) = 8^\circ$ .

**۲۱۸۹- گزینه ۱** توجه کنید که بنا بر قضیه اساسی تشابه،

$$\triangle AMF \sim \triangle ANC \Rightarrow \frac{S_{AMF}}{S_{ANC}} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$$

$$\triangle AEM \sim \triangle ABN \Rightarrow \frac{S_{AEM}}{S_{ABN}} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$$

بنابراین

$$\frac{S_{AMF}}{S_{ANC}} = \frac{S_{AEM}}{S_{ABN}} \Rightarrow \frac{18}{18 + 22} = \frac{S_{AEM}}{S_{AEM} + 48} \Rightarrow S_{AEM} = 27$$

**۲۱۹۰- گزینه ۴** مثلث‌های  $ABC$  و  $DBE$  قائم‌الزاویه‌اند و زاویه  $B$  در آن‌ها مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{\text{مساحت}(ABC)}{\text{مساحت}(DBE)} = \left(\frac{AB}{DB}\right)^2 \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$\text{مساحت}(ABC) = \text{مساحت}(DBE) + \text{مساحت}(ACDE)$$

$$\text{مساحت}(ABC) = \text{مساحت}(DBE) + \frac{3}{2} \text{مساحت}(DBE) = \frac{5}{2} \text{مساحت}(DBE)$$

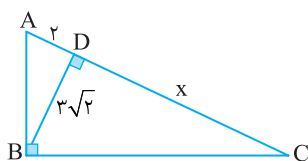
در نتیجه، تناسب (۱) می‌شود  $\frac{5}{2} = \left(\frac{AB}{DB}\right)^2$ ، پس  $AB = 5\sqrt{10}$ .

**۲۱۹۱- گزینه ۲** بنا بر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^2 = CH \times CB = 6 \times 9 \Rightarrow AC = 3\sqrt{6}$$

**۲۱۹۲- گزینه ۴** بنا بر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$BD^2 = AD \times DC \Rightarrow (3\sqrt{2})^2 = 2x \Rightarrow x = 9$$



**۲۱۹۳- گزینه ۳** بنا بر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 12 = x(2x + 2) \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

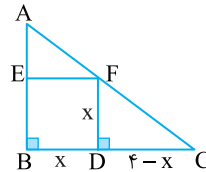
$$(x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

پس  $BC = 2x + 2 = 6$ .

**۲۱۸۳- گزینه ۳** فرض کنید طول ضلع مربع BEFD برابر  $x$  باشد. مثلث‌های قائم‌الزاویه  $ABC$  و  $FDC$  که یک زاویه حاده برابر دارند (زاویه  $C$ )، متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{4}{4-x} \Rightarrow 3(4-x) = 4x \Rightarrow x = \frac{12}{7}$$

بنابراین محیط مربع BEFD برابر است با  $4x = \frac{48}{7}$ .



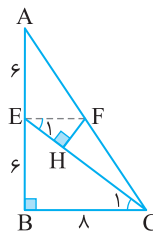
**۲۱۸۴- گزینه ۳** چون نقطه‌های  $E$  و  $F$  به ترتیب وسط ضلع‌های  $AB$  و  $AC$  از مثلث  $ABC$  هستند، در نتیجه  $EF$  در مثلث  $ABC$  میان‌خط است،

پس  $EF = \frac{BC}{2} = 4$ . همچنین می‌توان نتیجه گرفت  $EF \parallel BC$  موازی است.

بنابراین طبق قضیه خطوط موازی و مورب  $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$ . اکنون توجه کنید که

مثلث‌های قائم‌الزاویه  $EFH$  و  $CEB$  متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{EF}{CE} = \frac{FH}{EB} \xrightarrow{\text{فیناغورس } CE=10} \frac{4}{10} = \frac{FH}{6} \Rightarrow FH = \frac{2}{5}$$



**۲۱۸۵- گزینه ۱** بنا بر قضیه تالس در مثلث  $DEC$ .

$$FG \parallel EC \Rightarrow \frac{DF}{FE} = \frac{DG}{GC} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{DG}{9} \Rightarrow DG = 6$$

بنا بر قضیه اساسی تشابه  $\triangle AEB \sim \triangle DEC$ ، پس

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{6}{15} = \frac{3}{EC} \Rightarrow EC = \frac{7}{5}$$

در نتیجه با استفاده از تعمیم قضیه تالس در مثلث  $DEC$ .

$$\frac{GF}{EC} = \frac{DG}{DC} \Rightarrow \frac{GF}{7/5} = \frac{6}{15} \Rightarrow GF = 3$$

**۲۱۸۶- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

چون  $AD \parallel BC$ ، بنا بر قضیه خطوط موازی و مورب،  $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$  (شکل روبه‌رو را ببینید). از طرف دیگر،

$$\begin{cases} \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

در نتیجه  $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$ . بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه  $BEC$  و  $CBD$  که یک زاویه حاده برابر دارند، متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

۲۱۹۹- گزینه ۳ راه حل اول بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه

AHC

$$HC^2 = CK \times CA \Rightarrow y^2 = \sqrt{70} \times 10 = 70 \Rightarrow y = \sqrt{70}$$

همین‌طور در مثلث قائم الزاویه ABC

$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow 100 = \sqrt{70} \times (x + \sqrt{70})$$

$$100 = \sqrt{70}x + 70 \Rightarrow \sqrt{70}x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{\sqrt{70}}$$

بنابراین  $xy = 30$

راه حل دوم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه ABC

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow AH^2 = xy \quad (1)$$

برای به دست آوردن AH، از رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه HAC استفاده می‌کنیم

$$AH^2 = AK \times AC \Rightarrow AH^2 = 3 \times 10 = 30$$

در نتیجه با استفاده از تساوی (۱)  $xy = 30$

۲۲۰۰- گزینه ۱ در مثلث قائم الزاویه FDC، بنابر رابطه‌های طولی،

$$FC^2 = EC \times DC \xrightarrow{DC=EC} FC^2 = 2EC^2$$

همچنین در مثلث قائم الزاویه ABC،  $AD^2 = BD \times DC$  یعنی

$$16 = \frac{DC}{2} \Rightarrow DC = 8 \text{ بنابرین } 16 = 2 \times DC$$

$$FC^2 = 2EC^2 = 2 \times 4^2 \Rightarrow FC = 4\sqrt{2}$$

۲۲۰۱- گزینه ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$CD^2 = BD \times AD \Rightarrow x^2 = 16 \times 9 = 144 \Rightarrow x = 12$$

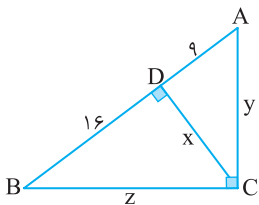
همچنین

$$y^2 = AD \times AB = 9 \times 25 \Rightarrow y = 15$$

و

$$z^2 = BD \times AB = 16 \times 25 \Rightarrow z = 20$$

در نتیجه  $x + y + z = 47$



۲۲۰۲- گزینه ۲ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$BH^2 = AH \times CH \Rightarrow (x+4)^2 = 9(x+2)$$

$$x^2 + 8x + 16 = 9x + 18 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1$$

به این ترتیب اگر  $x = 2$ ، آن‌گاه

$$(ABC) \text{ مساحت} = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} (6)(12) = 39$$

و اگر  $x = -1$ ، آن‌گاه  $(10)(3) = 15 = \frac{1}{2} BH \times AC = \text{مساحت}(ABC)$

بنابراین مساحت مثلث ABC می‌تواند برابر ۱۵ یا ۳۹ باشد.

۲۲۰۳- گزینه ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه BCD،

$$CH^2 = HB \times HD = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4$$

بنابراین  $CH = 2$  در نتیجه

$$(BCD) \text{ مساحت} = \frac{1}{2} CH \times BD = \frac{1}{2} (2)(\sqrt{2} + \sqrt{8}) = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

به این ترتیب  $(ABCD) \text{ مساحت} = 2 \times (BCD) \text{ مساحت} = 6\sqrt{2}$

۲۱۹۴- گزینه ۲ فرض می‌کنیم  $CE = x$ . از E پاره خط EF را عمود بر

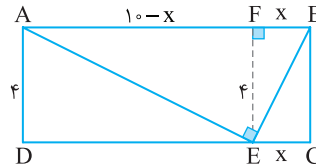
AB رسم می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). در این صورت  $FA = 10 - x$ ،  $FB = x$

و  $EF = 4$ . بنابراین در مثلث قائم الزاویه AEB، بنابر رابطه‌های طولی،

$$EF^2 = FB \times FA \Rightarrow 4^2 = x(10 - x) \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x - 2)(x - 8) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 8$$

چون  $CE < DE$ ، پس  $CE = x = 2$



۲۱۹۵- گزینه ۲ راه حل اول در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر

مثلث را به دو مثلث کوچک متشابه تقسیم می‌کند. بنابراین مثلث‌های AHB

و CHA متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{2BH}{AC} = \frac{BH}{2\sqrt{3}} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

به این ترتیب، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث AHC

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 4^2 \times 3 = 2^2 \times 3 + HC^2$$

$$HC^2 = 4^2 \times 3 - 2^2 \times 3 = 36 \Rightarrow HC = 6$$

راه حل دوم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 4BH^2 = BH \times BC \Rightarrow 4BH = BC$$

$$4BH - BH = BC - BH \Rightarrow 3BH = CH$$

از طرف دیگر بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

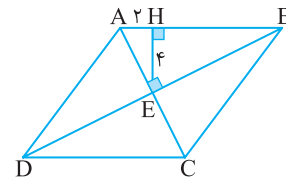
$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow 12 = \frac{CH}{3} \times CH \Rightarrow CH^2 = 36 \Rightarrow CH = 6$$

۲۱۹۶- گزینه ۲ در لوزی قطرها بر هم عمودند، بنابراین مثلث AEB

قائم الزاویه است. در این مثلث قائم الزاویه از رابطه‌های طولی نتیجه می‌شود

$$EH^2 = AH \times HB \Rightarrow 16 = 2 \times HB \Rightarrow HB = 8$$

بنابراین  $AB = 2 + 8 = 10$



۲۱۹۷- گزینه ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه ABC،

$$AH^2 = HB \times HC \Rightarrow 16 = HB \times 8 \Rightarrow HB = 2$$

همین‌طور در مثلث قائم الزاویه BDC

$$DH^2 = H'B \times H'C = 4 \times 6 \Rightarrow DH' = 2\sqrt{6}$$

۲۱۹۸- گزینه ۳ چون  $AD \parallel BC$ ، پس  $\hat{C}BF = \hat{A}DE$ ، بنابراین

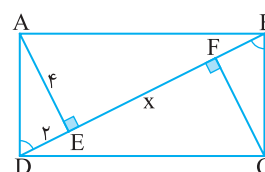
مثلث‌های قائم الزاویه AED و CFB

همنهشت‌اند (به حالت وتر و یک زاویه

حاده). بنابراین  $BF = DE = 2$

اکنون در مثلث قائم الزاویه ABD،

بنابر رابطه‌های طولی،



$$AE^2 = DE \times EB \Rightarrow 16 = 2 \times (x + 2) \Rightarrow x = 6$$

۲۲۰۹- گزینه ۳ فرض می‌کنیم  $BH=a$  و  $HE=b$ . در این صورت

$$a+b=BE=2EC \Rightarrow EC = \frac{a+b}{2}$$

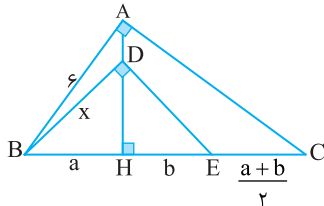
بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ .

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 36 = a(a+b + \frac{a+b}{2}) = \frac{3}{2}a(a+b)$$

$$a(a+b) = 24$$

همین‌طور، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه  $BDE$ .

$$BD^2 = BH \times BE \Rightarrow x^2 = a(a+b) = 24 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$



۲۲۱۰- گزینه ۳ در مثلث قائم‌الزاویه  $ADC$ ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه  $ADC$ ، بنابر رابطه‌های طولی

$$DE \times AC = AD \times DC \Rightarrow DE \times 2\sqrt{5} = 2 \times 4 \Rightarrow DE = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

۲۲۱۱- گزینه ۴ مساحت مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  برابر مجموع مساحت

دو مثلث  $ABD$  و  $ADC$  است. پس

$$S_{ABC} = S_{ADC} + S_{ABD} \Rightarrow \frac{AB \times AC}{2} = \frac{DN \times AC}{2} + \frac{DM \times AB}{2}$$

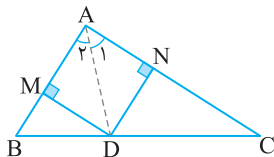
هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه، به یک فاصله است. پس  $DM = DN = x$ .

$$3 \times 7 = x \times 7 + x \times 3 \Rightarrow 10x = 21 \Rightarrow x = 2/1$$

توجه کنید که  $\hat{A}_1 = 45^\circ$ ، پس مثلث  $ADN$  قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

است. یعنی  $AN = DN = x$ ، پس بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث  $ADN$

$$AD^2 = AN^2 + DN^2 = 2x^2 \Rightarrow AD = x\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$$



تجربی - ۹۵

۲۲۱۲- گزینه ۴ محل تلاقی امتداد ساق‌های دوزنقه  $ABCD$  را  $M$

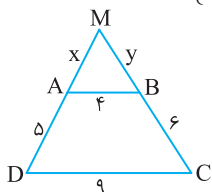
می‌نامیم، با توجه به تعمیم قضیه تالس در مثلث  $MDC$ ،

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{4}{9}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{5+x} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 20 \Rightarrow x = 4 \\ \frac{y}{6+y} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 24 + 4y \Rightarrow y = 4/8 \end{cases}$$

بنابراین محیط مثلث  $MAB$  برابر است با

$$P = x + y + 4 = 4 + 4/8 + 4 = 12/8$$



تجربی - ۹۴

۲۲۰۴- گزینه ۳ در مثلث قائم‌الزاویه  $BDE$ ، بنابر رابطه‌های طولی،

$$DH^2 = HB \times HE = 9 \times 4 = 36$$

پس  $DH = 6$ . بنابراین  $AH = 12 + 6 = 18$ . از طرف دیگر، در مثلث

قائم‌الزاویه  $BAC$ ، بنابر رابطه‌های طولی،

$$AH^2 = HB \times HC \Rightarrow 18^2 = 9(4+x) \Rightarrow x = 32$$

۲۲۰۵- گزینه ۲ بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث  $ABC$ ،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 27 + 9 = 36$$

بنابراین  $AC = 6$ . از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،

$$BH \times AC = AB \times BC \Rightarrow x \times 6 = 3\sqrt{3} \times 3 \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۲۲۰۶- گزینه ۴ راه‌حل اول بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $ACD$ ،

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow 100 = 64 + CD^2 \Rightarrow CD = 6$$

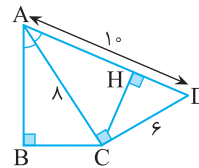
ارتفاع  $CH$  را در مثلث  $CAD$  رسم می‌کنیم. توجه کنید که چون نقطه  $C$  روی

نیمساز زاویه  $A$  است، پس  $CB = CH$ . از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در

مثلث قائم‌الزاویه  $ACD$ ،

$$AC \times CD = CH \times AD \Rightarrow 6 \times 6 = CH \times 10 \Rightarrow CH = 4/8$$

بنابراین  $CB = CH = 4/8$ .



راه‌حل دوم چون  $\hat{CAB} = \hat{DAC}$ ، دو مثلث قائم‌الزاویه  $CAB$  و  $DAC$

متشابه هستند (ز.ز). بنابراین

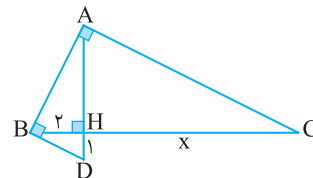
$$\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AC} \xrightarrow{CD=6} \frac{6}{BC} = \frac{10}{8} \Rightarrow BC = 4/8$$

۲۲۰۷- گزینه ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه  $ABD$ ،

$$BH^2 = AH \times HD \Rightarrow 4 = AH \times 1 \Rightarrow AH = 4$$

همین‌طور، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،

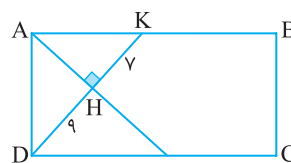
$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow 16 = 2 \times x \Rightarrow x = 8$$



۲۲۰۸- گزینه ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه  $DAK$ ،

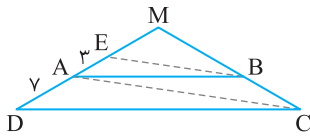
$$AD^2 = DH \times DK = 9 \times 16 = 144$$

بنابراین  $AD = 12$ .



$$\frac{ME}{EA} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{ME}{3} = \frac{ME+3}{7} \Rightarrow 7ME = 3ME + 9 \Rightarrow ME = 2/25$$

پس  $MD = 2/25 + 3 + 7 = 12/25$



خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۲۲۱۷- گزینه ۱ راه حل اول از نماد گذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.

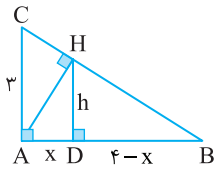
بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه ABH.

$$h^2 = x(4-x) \Rightarrow h = \sqrt{x(4-x)}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه اساسی تشابه، دو مثلث BDH و BAC متشابه هستند. از تشابه این دو مثلث قائم الزاویه نتیجه می‌شود

$$\frac{h}{3} = \frac{4-x}{4-x+x} \Rightarrow \frac{h}{3} = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{4} \Rightarrow \frac{h^2}{9} = \frac{x(4-x)}{16}$$

$$\frac{x}{9} = \frac{4-x}{16} \Rightarrow 16x = 36 - 9x \Rightarrow x = \frac{36}{25} = 1/44$$



راه حل دوم چون  $AB = x + 4 - x = 4$ ، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC،

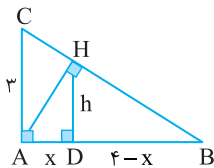
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه ABC،

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 5 = 4 \times 3 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

اکنون از رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه AHB نتیجه می‌شود

$$AH^2 = AD \times AB \Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^2 = x \times 4 \Rightarrow x = \frac{144}{100} = 1/44$$



ریاضی - ۹۹

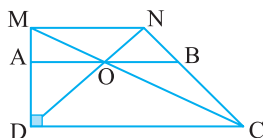
۲۲۱۸- گزینه ۲ شکل سؤال به صورت زیر است. توجه کنید که

$$\triangle MDC: OA \parallel DC \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیه}} \frac{MA}{MD} = \frac{OA}{DC}$$

$$\triangle NDC: OB \parallel DC \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیه}} \frac{NB}{NC} = \frac{OB}{DC}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه تالس در دوزنقه MNCD، پس  $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$

$$\frac{OA}{OB} = 1 \text{ و } OA = OB \text{ در نتیجه } \frac{OA}{DC} = \frac{OB}{DC}$$



تجربی - ۹۷

۲۲۱۳- گزینه ۳ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر قضیه

اساسی تشابه، دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند، پس

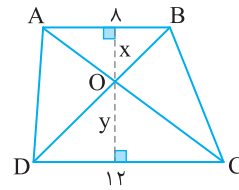
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2y \\ x + y = 10 \Rightarrow 3x + 3y = 30 \end{cases} \Rightarrow \Delta y = 30 \Rightarrow y = 6, x = 4$$

$$S_{OCD} = \frac{y \times 12}{2} = 36 \text{ برابر است با } S_{OAB}$$

توجه کنید که ارتفاع مثلث ADC نیز برابر ۱۰ است، در نتیجه

$$S_{ADC} = \frac{10 \times 12}{2} = 60$$

$$S_{ADO} = S_{ADC} - S_{OCD} = 60 - 36 = 24$$



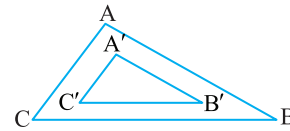
تجربی - ۹۵

۲۲۱۴- گزینه ۳ این دو مثلث که اضلاعی موازی دارند، متشابه هستند.

نسبت تشابه آن‌ها، برابر نسبت دو ضلع بزرگ‌تر یعنی  $\frac{9}{6}$  یا  $\frac{3}{2}$  است. اگر

مساحت مثلث ABC و A'B'C' را به ترتیب S و S' بنامیم، به دست می‌آید

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{S-S'}{S'} = \frac{9-4}{4} = \frac{5}{4} = 1/25$$



خارج از کشور تجربی - ۹۵

۲۲۱۵- گزینه ۱ بنابر قضیه تالس در مثلث OBD،

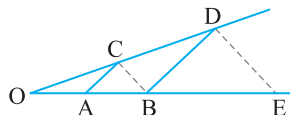
$$AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \quad (1)$$

بنابر قضیه تالس در مثلث OED،

$$BC \parallel ED \Rightarrow \frac{OB}{BE} = \frac{OC}{CD} \quad (2)$$

از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{8}{BE} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}$$



خارج از کشور تجربی - ۹۴

۲۲۱۶- گزینه ۲ بنابر قضیه تالس در مثلث MAC،

$$EB \parallel AC \Rightarrow \frac{ME}{EA} = \frac{MB}{BC} \quad (1)$$

بنابر قضیه تالس در مثلث MDC،

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \quad (2)$$

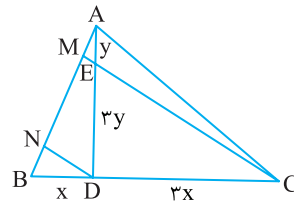
از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

۲۲۱۹- گزینه ۳ از فرض‌های مسئله شکل زیر به دست می‌آید. از قضیه تالس نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \triangle BMC: DN \parallel CM &\Rightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{BD}{DC} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow BN = \frac{1}{3} MN \\ \triangle AND: ME \parallel DN &\Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{3} MN \end{aligned}$$

بنابراین  $AM = BN = \frac{1}{3} MN$  پس

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AM}{AM + MN + BN} = \frac{AM}{AM + 3AM + AM} = \frac{1}{5} \Rightarrow AB = 5AM$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۷

۲۲۲۰- گزینه ۱ بنا بر فرض سؤال اگر  $AB = 2x$ ، آن‌گاه  $CD = 5x$  و اگر  $AF = y$ ، آن‌گاه  $DF = 3y$ . قطر  $AC$  را رسم می‌کنیم. بنا بر تعمیم قضیه تالس،

$$\triangle ADC: OF \parallel DC \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD} = \frac{1}{4} \xrightarrow{CD=5x} OF = \frac{5}{4}x$$

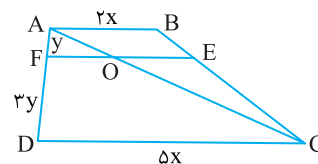
$$\triangle CAB: OE \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{OE}{AB}$$

$$\xrightarrow{\frac{CE}{CB} = \frac{DF}{DA} = \frac{3}{4} \text{ (قضیه تالس در دوزنقه)}} \frac{3}{4} = \frac{OE}{AB}$$

$$\xrightarrow{AB=2x} OE = \frac{3}{2}x$$

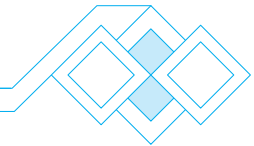
$$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{\frac{11}{4}x}{5x} = \frac{11}{20} \text{ پس } EF = OF + OE = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}x = \frac{11}{4}x$$

بنابراین



خارج از کشور تجربی - ۹۷

## فصل پانزدهم



۲۲۲۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow a^{\frac{2}{2}} = 2 \Rightarrow a^1 = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow a^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{4}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{a}\sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$$

۲۲۲۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a - \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = 4 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 6$$

بنابراین

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 8 \Rightarrow (a + \frac{1}{a})^2 = 8 \Rightarrow |a + \frac{1}{a}| = \sqrt{8}$$

با توجه به اینکه  $a$  عددی منفی است، پس  $a + \frac{1}{a} = -\sqrt{8}$ . در نتیجه

$$(a - \frac{1}{a})(a + \frac{1}{a}) = 2(-\sqrt{8}) \Rightarrow a^2 - \frac{1}{a^2} = -4\sqrt{2}$$

۲۲۲۸- گزینه ۳ عبارت مورد نظر را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 + xy - 2y^2 = x^2 - y^2 + xy - y^2 = (x-y)(x+y) + y(x-y)$$

$$= (x-y)(x+y+y) = (x-y)(x+2y)$$

بنابراین عامل  $x+2y$  در تجزیه عبارت وجود دارد.

۲۲۲۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4})} + \frac{5}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{16}+1-\sqrt[3]{4})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1} + \frac{5}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1} \right)$$

اکنون مخرج هر یک از کسرها را به کمک اتحاد چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left( \frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}-1} + \frac{5(\sqrt[3]{4}+1)}{\sqrt[3]{2}-1} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left( \frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1} + \frac{5(\sqrt[3]{4}+1)}{4+1} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{4}+1) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) = 1+\sqrt[3]{2}$$

۲۲۳۰- گزینه ۳ اولاً نمودار از نقطه  $(0, m)$  می‌گذرد و با توجه به شکل  $m$

عددی مثبت است. با این شرایط حاصل ضرب صفراهای تابع منفی است که در نمودار همین وضعیت وجود دارد. ثانیاً طول رأس سهمی عددی منفی است.

بنابراین

$$-\frac{2m-1}{2(-1)} < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$$

بنابراین اگر  $0 < m < \frac{1}{2}$ ، نمودار تابع  $f$  به صورت رسم شده است.

۲۲۲۱- گزینه ۲ اگر اشتراک دو بازه  $(-1, 3)$  و  $[a, a+1]$  تهی باشد،

یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:



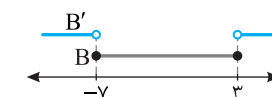
$$a+1 \leq -1 \Rightarrow a \leq -2$$

$$a \geq 3$$

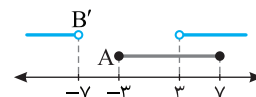
بنابراین اگر اشتراک دو بازه، تهی نباشد باید  $-2 < a < 3$ . پس به ازای مقادیر صحیح  $-1, 0, 1, 2$  برای  $a$  اشتراک دو بازه تهی نیست.

۲۲۲۲- گزینه ۳ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که

$$B' = (-\infty, -\gamma) \cup (3, +\infty)$$



بنابراین، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که  $A \cap B' = (3, \gamma]$ .



۲۲۲۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم دنباله حاصل  $2^0, a_1, \dots, a_n, 8^0$

باشد. در این صورت قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$d = \frac{8^0 - 2^0}{n+2-1} = \frac{6^0}{n+1}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{a_1}{a_n} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2^0 + d}{8^0 - d} = \frac{1}{3} \Rightarrow 6^0 + 3d = 8^0 - d \Rightarrow d = 5$$

پس  $\frac{6^0}{n+1} = 5$ ، یعنی  $n = 11$ .

۲۲۲۴- گزینه ۴ جمله دهم دنباله هندسی مورد نظر برابر  $2^{10} = 1024$

است و جمله  $n$ ام دنباله حسابی مورد نظر برابر  $8 + 4(n-1)$  است. بنابراین

$$8 + 4n - 4 = 1024 \Rightarrow 4n = 1020 \Rightarrow n = 255$$

پس جمله دویست و پنجاه و پنجم دنباله حسابی  $8, 12, 16, \dots$  با جمله دهم

دنباله هندسی  $2, 4, 8, \dots$  برابر است.

۲۲۲۵- گزینه ۴ فرض کنید  $a$  و  $b$  دو عدد مورد نظر باشند طوری که

$0 < a < b$  بنابراین

$$\frac{a+b}{2} = \frac{5}{3} \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{25}{9} ab \Rightarrow 9a^2 + 9b^2 + 18ab = 10^0 ab$$

$$9a^2 + 9b^2 - 82ab = 0 \Rightarrow (a-9b)(9a-b) = 0$$

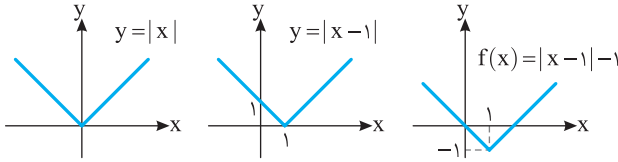
$$\begin{cases} a=9b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{9} \text{ (غ.ق.ق.)} \\ b=9a \Rightarrow \frac{b}{a} = 9 \end{cases}$$

بنابراین

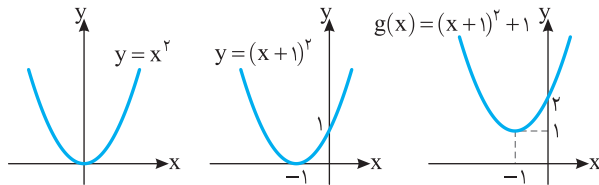
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x=-\frac{3}{\sqrt{13}}$$

اگر نمودار تابع  $y=|x|$  را یک واحد به راست منتقل

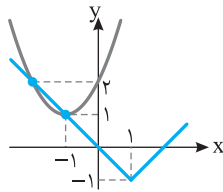
کنیم، نمودار تابع  $y=|x-1|$  به دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع  $f(x)=|x-1|-1$  به دست می‌آید.



اگر نمودار تابع  $y=x^2$  را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=(x+1)^2$  به دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به بالا منتقل کنیم نمودار تابع  $y=(x+1)^2+1$  به دست می‌آید.



اگر نمودار توابع  $f$  و  $g$  را در یک دستگاه رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم که در دو نقطه متقاطع‌اند.



توجه کنید که  $x^2=|x|^2$ . اکنون نامعادله را به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$|x|^2 \leq 4|x| \Rightarrow |x|^2 - 4|x| \leq 0 \Rightarrow |x|(|x| - 4) \leq 0$$

چون  $|x| \geq 0$  پس

$$|x| - 4 \leq 0 \Rightarrow |x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

بنابراین  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$  و  $0$  در نامعادله صدق می‌کنند.

برای اینکه عبارت  $\sqrt{4x+1}$  بامعنی باشد باید  $x \geq -\frac{1}{4}$

بنابراین  $x+1$  مثبت است و  $|x+1|=x+1$ . پس معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{4x+1}=2x+x+1 \Rightarrow \sqrt{4x+1}=3x+1$$

اکنون طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را حل می‌کنیم:

$$4x+1=9x^2+6x+1 \Rightarrow 9x^2+2x=0$$

$$x(9x+2)=0 \Rightarrow x=0, x=-\frac{2}{9}$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند و معادله دو جواب دارد.

۲۲۳۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که  $\alpha+\beta=6$  و  $\alpha\beta=2$  اگر  $x_1$  و

$x_2$  جواب‌های معادله مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$S=x_1+x_2=(\alpha+\frac{1}{\beta})+(\beta+\frac{1}{\alpha})=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6+\frac{6}{2}=9$$

$$P=x_1x_2=(\alpha+\frac{1}{\beta})(\beta+\frac{1}{\alpha})=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=2+2+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

پس معادله مورد نظر به صورت زیر است

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-9x+\frac{9}{2}=0 \Rightarrow 2x^2-18x+9=0$$

۲۲۳۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \sin x = \frac{3 \cos x}{1} \Rightarrow \sin^2 x = 9 \cos^2 x$$

می‌دانیم  $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 1$  پس

$$1 - \cos^2 x = 9 \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

از طرف دیگر،

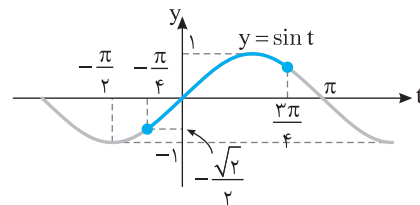
$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cos x = AB \Rightarrow AB = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

۲۲۳۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر  $0 \leq x \leq \pi$ ، آن‌گاه

$$-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$$

و با توجه به نمودار زیر نتیجه می‌شود

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$



بنابراین

$$-1 \leq -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 \leq 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq f(x) \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{پس } R_f = \left[0, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

۲۲۳۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=-\cos x, \quad \cos\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)=\sin x$$

بنابراین

$$-2 \cos x = 3 \sin x \Rightarrow \tan x = -\frac{2}{3}$$

از طرف دیگر،

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{4}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{13}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویه  $x$  در ناحیه دوم قرار دارد، پس  $\cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

۲۲۴۳- گزینه ۱ حد چپ و حد راست تابع  $f$  را در نقطه  $x = -2$  به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-2a - 12x) = -2a + 24$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-3a - 15x) = -3a + 30$$

برای اینکه تابع  $f$  در  $x = -2$  حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست آن در این نقطه با هم برابر باشند. پس

$$-2a + 24 = -3a + 30 \Rightarrow a = 6$$

بنابراین

$$f(x) = 6[x] + 3x[2x] \Rightarrow f(-2) = 6(-2) + 3(-2)(-4) = 12$$

۲۲۴۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر  $x \rightarrow 0$ ، آن‌گاه  $x^2 \rightarrow 0^+$  و

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x^2)}{3-f(x^2)} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)}{3 - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)} = \frac{2}{3 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

پس  $-x^2 \rightarrow 0^-$ .

۲۲۴۵- گزینه ۲ اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L_1$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_2$  آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_1 L_2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_1 - L_2 = \frac{7}{2} \Rightarrow L_1 = L_2 + \frac{7}{2}$$

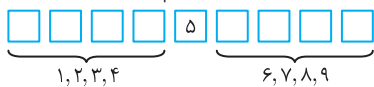
بنابراین

$$(L_2 + \frac{7}{2})L_2 = 2 \Rightarrow L_2^2 + \frac{7}{2}L_2 - 2 = 0 \Rightarrow 2L_2^2 + 7L_2 - 4 = 0$$

$$(L_2 + 4)(2L_2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_2 = -4 \Rightarrow L_1 = -\frac{1}{2} \\ L_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow L_1 = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{8} \text{ یا } 8$$

۲۲۴۶- گزینه ۳ با توجه به شرط‌های مسئله، باید رقم وسط ۵ باشد، چهار رقم نخست ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۶، ۷، ۸، ۹ باشند.



بنابراین پاسخ برابر است با  $4! \times 4! = 24^2 = 2^6 \times 3^2$

۲۲۴۷- گزینه ۳ فرض کنید پیشامد مورد نظر  $A$  باشد. در این صورت

$A'$  پیشامد این است که دو نفر انتخاب شده کنار هم نشسته باشند. بنابراین  $n(A') = 6$  و در نتیجه

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{\binom{7}{2}} = \frac{5}{7}$$

۲۲۴۸- گزینه ۲ باید ۴ تا لامپ سالم یا ۳ تا سالم و یکی خراب انتخاب کنیم. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{\binom{5}{4} + \binom{5}{3} \binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{5 + 10 \times 3}{70} = \frac{1}{2}$$

۲۲۳۸- گزینه ۳ توجه کنید که  $f(0) = -2$  و  $f(\log_a 3) = 0$ . بنابراین

$$f(0) = 1 - b = -2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = a^{3x} - 3$$

$$f(\log_a 3) = a^{3 \log_a 3} - 3 = 0 \Rightarrow a^{\log_3 3} = 3$$

$$\log_3 3 = \log_a 3 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین  $a = 2$  و  $b = 3$  پس  $ab = 6$ .

۲۲۳۹- گزینه ۲ ابتدا طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم

$$2^a 2^{b+1} = 3^a 3^b \Rightarrow 2^{a+b+1} = 3^{a+b}$$

بنابراین

$$2 \times 2^{a+b} = 3^{a+b} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{a+b} = 2 \Rightarrow a+b = \log_{\frac{3}{2}} 2$$

۲۲۴۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$64 < 120 < 128 \Rightarrow 2^6 < 120 < 2^7$$

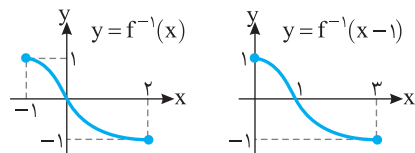
بنابراین

$$\log_2 2^6 < \log_2 120 < \log_2 2^7 \Rightarrow 6 < \log_2 120 < 7 \Rightarrow [\log_2 120] = 6$$

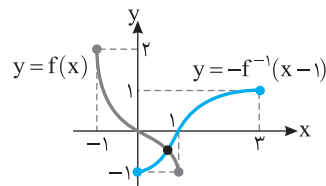
۲۲۴۱- گزینه ۱ اگر نمودار تابع  $f$  را نسبت به خط  $y = x$  قرینه کنیم،

نمودار تابع  $f^{-1}$  به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f^{-1}(x-1)$  به دست می‌آید و اگر

نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y = -f^{-1}(x-1)$  به دست می‌آید.



مطابق شکل زیر دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.



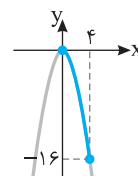
۲۲۴۲- گزینه ۳ ابتدا دامنه تابع‌های  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = [0, 4]$$

بنابراین  $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [0, 4]$ . از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} (f \times g)(x) &= f(x)g(x) = (\sqrt{4x-x^2} - 2\sqrt{x})(\sqrt{4x-x^2} + 2\sqrt{x}) \\ &= 4x - x^2 - 4x = -x^2 \end{aligned}$$

بنابراین نمودار تابع  $f \times g$  به صورت زیر است و برد آن بازه  $[-16, 0]$  است.





اگر  $r = \frac{2}{5}$ ، جمله‌ها می‌شوند  $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$  و اگر  $r = \frac{5}{2}$ ، جمله‌ها می‌شوند  $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$ . بنابراین، در هر صورت، بزرگ‌ترین جمله در میان این سه جمله برابر  $\frac{5}{2}$  است.

**۳- گزینۀ ۲۲۵۳** ابتدا توجه کنید که

$$A = ((x-2)(x^2+2x+4))(x^3+8) + 64 = (x^3-8)(x^3+8) + 64$$

$$= x^6 - 64 + 64 = x^6$$

بنابراین مقدار  $A$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  برابر است با  $A = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$ .

**۳- گزینۀ ۲۲۵۴** تساوی‌های داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a^3 + a^2b + 2ab^2 = 2 \quad (1)$$

$$b^3 + 2a^2b + ab^2 = 7 \quad (2)$$

اگر طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3a^2b = 2 + 7 \Rightarrow (a+b)^3 = 2 + 7 \Rightarrow a+b = 3$$

اگر طرفین تساوی (۲) را از طرفین تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^3 - b^3 - a^2b + ab^2 = 1 - 3 \Rightarrow (a^3 - a^2b) + (-b^3 + ab^2) = -2$$

$$a^2(a-b) + b^2(a-b) = -2 \Rightarrow (a-b)(a^2 + b^2) = -2$$

چون  $a+b=3$ ، پس

$$(a+b)(a-b)(a^2 + b^2) = -2 \Rightarrow 3(a-b)(a^2 + b^2) = -2$$

**۱- گزینۀ ۲۲۵۵** ابتدا توجه کنید که

$$a^5 b^6 = \sqrt[5]{4 - \sqrt{15}} \times \sqrt[6]{4 + \sqrt{15}} = \sqrt[5]{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = \sqrt[5]{16 - 15} = 1$$

بنابراین

$$(ab)^5 b = 1 \Rightarrow (ab)^5 = \frac{1}{b}$$

پس

$$(ab)^{210} = ((ab)^5)^{42} = \left(\frac{1}{b}\right)^{42} = \left(\frac{1}{b^6}\right)^7$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt[6]{4 + \sqrt{15}}}\right)^7 = \frac{1}{4 + \sqrt{15}} = 4 - \sqrt{15}$$

**۳- گزینۀ ۲۲۵۶** چون معادله جواب دارد، پس

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4k^2 - 4(k^2 + 10k + 20) \geq 0 \Rightarrow 40k + 80 \leq 0 \Rightarrow k \leq -2$$

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله باشند، آنگاه  $\alpha + \beta = 2k$ ،  $\alpha\beta = k^2 + 10k + 20$ .

و در نتیجه

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4k^2 - 2k^2 - 20k - 40$$

$$= 2k^2 - 20k - 40 = 2(k-5)^2 - 90$$

بنابراین

$$k \leq -2 \Rightarrow k - 5 \leq -7 \Rightarrow (k-5)^2 \geq 49$$

$$2(k-5)^2 \geq 90 \Rightarrow 2(k-5)^2 - 90 \geq 8$$

بنابراین کمترین مقدار مجموع مربعات جواب‌ها برابر ۸ است.

**۲- گزینۀ ۲۲۵۷** اولاً چون معادله دو جواب دارد، پس

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4k > 0 \Rightarrow k < 4$$

ثانیاً اختلاف جواب‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  برابر  $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$  است، پس

$$\frac{\sqrt{16-4k}}{1} < 1 \Rightarrow 16-4k < 1 \Rightarrow 4k > 15 \Rightarrow k > \frac{15}{4}$$

بنابراین  $\frac{15}{4} < k < 4$ .

**۳- گزینۀ ۲۲۴۹** اگر ارتفاع  $DH$  در مثلث  $ADC$  را رسم کنیم، چون  $D$

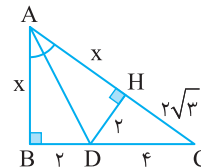
روی نیمساز زاویه  $BAC$  است، نتیجه می‌گیریم  $DH = DB = 2$ ، بنابراین، از قضیه فیثاغورس در مثلث  $DHC$  نتیجه می‌شود

$$DC^2 = HC^2 + HD^2 \Rightarrow 16 = HC^2 + 4 \Rightarrow HC = 2\sqrt{3}$$

همچنین از همنهشتی مثلث‌های  $ABD$  و  $AHD$  نتیجه می‌شود  $AH = AB = x$  اکنون از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  نتیجه

می‌شود

$$(x + 2\sqrt{3})^2 = x^2 + 36 \Rightarrow x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 = x^2 + 36 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$



**۳- گزینۀ ۲۲۴۰** ابتدا توجه کنید که مثلث‌های  $EFC$  و  $DCK$

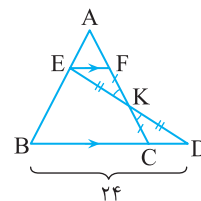
همنهشت‌اند (ز ض ز). بنابراین  $CD = EF$ . از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث  $ABC$ ،

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = \frac{1}{3} BC$$

در نتیجه  $CD = \frac{1}{3} BC$ ، یعنی  $BC = 3CD$ . اکنون توجه کنید که

$$BD = 24 \Rightarrow BC + CD = 24 \Rightarrow 3CD + CD = 24$$

$$4CD = 24 \Rightarrow CD = 6$$



**۱- گزینۀ ۲۲۵۱** فرض می‌کنیم قدرنسبت دنباله حسابی  $d$  باشد. در این صورت

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_9 = a_1 + 8d, \quad a_{13} = a_1 + 12d$$

از طرف دیگر، چون  $a_8, a_9, a_{13}$  دنباله‌ای هندسی است، پس

$$a_9^2 = a_{13} \times a_8 \Rightarrow (a_1 + 8d)^2 = (a_1 + 12d)(a_1 + 7d)$$

$$a_1^2 + 16a_1d + 64d^2 = a_1^2 + 19a_1d + 84d^2$$

$$3a_1d = -20d^2 \Rightarrow a_1 = -\frac{20}{3}d$$

بنابراین

$$\frac{a_9}{a_8} = \frac{a_1 + 8d}{a_1 + 7d} = \frac{-\frac{20}{3}d + 8d}{-\frac{20}{3}d + 7d} = \frac{\frac{4}{3}d}{\frac{1}{3}d} = 4$$

**۴- گزینۀ ۲۲۵۲** جمله‌های مورد نظر را  $\frac{a}{r}, a, ar$  می‌گیریم. در این صورت

$$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین جمله‌ها می‌شوند  $1, 1, 1$ . از طرف دیگر، طبق فرض،

$$\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{39}{10} \Rightarrow 10r^2 - 29r + 10 = 0 \Rightarrow (5r-2)(2r-5) = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{5}, r = \frac{5}{2}$$

۲۲۶۱- گزینه ۲ نامعادله مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{|1+|x|-|x||}{1+|x|} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+|x|} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+|x|} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

پس مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر بازه  $[-1, 1]$  است. بنابراین  $a = -1$  و  $b = 1$  و  $b - a = 2$ .

۲۲۶۲- گزینه ۳ اگر  $x \neq 5$ ، نامعادله مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{|3|}{|5-x|} < \frac{1}{2} \Rightarrow |x-5| > 6$$

بنابراین  $(x \neq 5)$ ,

$$\begin{cases} x-5 > 6 \\ x-5 < -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 11 \\ x < -1 \end{cases}$$

به این ترتیب، مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر برابر است با

$$(-\infty, -1) \cup (11, +\infty)$$

در نتیجه  $a = -1$  و  $b = 11$ ،  $b - a = 12$ .

۲۲۶۳- گزینه ۲ اگر  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ، آن‌گاه  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$  و در نتیجه

$$0 < 2 \sin \alpha < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < 2 \sin \alpha - \sqrt{2} < 0$$

۲۲۶۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$$

$$\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5}$$

بنابراین

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{5} + \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{3 \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) - 2 \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}}{-3 \sin \frac{\pi}{5} + 2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{3 \sin \frac{\pi}{5}}{-\sin \frac{\pi}{5}} = -3$$

۲۲۶۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{2}{3} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{6}$$

بنابراین

$$\sin^6 x + \cos^6 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

۲۲۶۶- گزینه ۳ اگر فرض کنیم  $t = 2^x$ ، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$t^2 + (k-3)t + k - 4 = 0$$

بنابراین  $t^2 + (k-3)t + k - 4 = (t+k-4)(t+1)$ . پس جواب‌های این

معادله  $t = -1$  و  $t = 4 - k$  هستند. بنابراین

$$2^x = -1 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$2^x = 4 - k \Rightarrow x = \log_2(4 - k), k < 4$$

۲۲۵۸- گزینه ۳ نمودار تابع  $f$  محور طول‌ها را در  $x = -1$  و  $x = 4$  قطع

کرده است. پس  $f(x) = a(x+1)(x-4)$ . نمودار تابع  $f$  محور عرض‌ها را در

$y = 2$  قطع کرده است. پس

$$f(0) = 2 \Rightarrow a(0+1)(0-4) = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

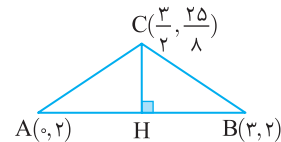
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$$

بنابراین نقطه  $C\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right)$  رأس سهمی است و

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{0 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 3$$

پس  $CH = \frac{25}{8} - 2 = \frac{9}{8}$  و  $AB = 3$ . در نتیجه

$$S_{ABC} = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{3 \times \frac{9}{8}}{2} = \frac{27}{16}$$



۲۲۵۹- گزینه ۴ باید با شرط  $x > 0$  نامعادله  $f(x) < 0$  را حل کنیم:

$$x + \frac{1}{x+2} - 5 < 0 \Rightarrow x(x+2) + 1 - 5(x+2) < 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 9 < 0$$

ریشه‌های چندجمله‌ای  $x^2 - 3x - 9$  به صورت  $\frac{3-3\sqrt{5}}{2}$  و  $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$

هستند. پس

$$\frac{3-3\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$$

از طرف دیگر  $x > 0$ ، پس  $0 < x < \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ . بنابراین حداکثر مقدار  $a$  برابر

$$\frac{3+3\sqrt{5}}{2} \text{ است.}$$

۲۲۶۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که باید  $2x - x^2 \geq 0$  تا عبارت

$$\sqrt{2x - x^2}$$
 در معادله با معنی باشد. پس  $0 \leq x \leq 2$ .

اگر  $x = 2$ ، آن‌گاه سمت چپ معادله برابر صفر و سمت راست آن برابر ۲

است. پس  $x = 2$  جواب معادله نیست.

اگر  $0 < x < 1$ ، آن‌گاه  $[x] = 0$  و معادله به صورت  $2\sqrt{2x - x^2} = 0$  در می‌آید

که  $x = 0$  جواب آن است ولی مدنظر مسئله نیست.

اگر  $1 \leq x < 2$ ، آن‌گاه  $[x] = 1$  و معادله به صورت  $2\sqrt{2x - x^2} = 1$  در می‌آید

که به صورت زیر آن را حل می‌کنیم:

$$4(2x - x^2) = 1 \Rightarrow 4x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

توجه کنید که در بازه  $[1, 2]$  قرار ندارد بنابراین قابل قبول نیست.

پس جواب مثبت معادله  $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$  است.

بنابراین دامنه تابع  $f$  باید  $(4, +\infty)$  و برد آن  $(8, +\infty)$  باشد. پس

$$f(x) = y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2}, D_{f^{-1}} = [8, +\infty)$$

**گزینه ۴ - ۲۲۷۲** ابتدا توجه کنید که حد صورت کسر  $\frac{x^3 - a^3}{2x - 8}$  در نقطه

$x = a$ ، صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز صفر باشد. در غیر این صورت حاصل حد کسر برابر صفر خواهد بود که چنین نیست. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} (2x - 8) = 0 \Rightarrow 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

پس مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$b = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2 + 4x + 16)}{2(x-4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4x + 16}{2} = \frac{16 + 16 + 16}{2} = 24$$

در نتیجه  $a + b = 28$ .

**گزینه ۱ - ۲۲۷۳** ابتدا توجه کنید که اگر  $1 < x < 2$ ، آن گاه  $[x] = 1$  و در

نتیجه  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-b}{x} = -b$  از طرف دیگر حد صورت کسر

در  $x = 1$  برابر صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز در این نقطه

صفر باشد. در غیر این صورت حد چپ تابع  $f$  در  $x = 1$  برابر صفر می‌شود که در نتیجه برای پیوستگی تابع در  $x = 1$  باید حد راست آن یعنی  $-b$  هم برابر صفر شود که مخالف فرض سؤال است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{-bx + b} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-b(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{-b} = -\frac{2}{b}$$

برای اینکه تابع  $f$  در  $x = 1$  حد داشته باشد باید

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow -\frac{2}{b} = -b \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$$

برای اینکه تابع  $f$  در  $x = 1$  پیوسته باشد، باید

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow c = -b = \pm\sqrt{2}$$

**گزینه ۲ - ۲۲۷۴** ابتدا توجه کنید که  $f(2) = bc$  و

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{32(x-2)}{(x-a)(x+a)}$$

چون  $a$  و  $b$  مثبت‌اند، پس حد چپ تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  برابر صفر نیست و در نتیجه حد راست آن هم برابر صفر نیست. پس حد مخرج عبارت

در  $x = 2$  باید صفر باشد. در غیر این صورت حد راست

تابع  $f$  در  $x = 2$  برابر صفر می‌شود. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} ((x-a)(x+a)) = 0 \Rightarrow (2-a)(2+a) = 0 \Rightarrow a = 2, a = -2 \text{ (غ.ق.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{32(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{32}{x+2} = 8$$

چون جواب معادله نباید مثبت باشد، پس

$$\log_2(4-k) \leq 0 \Rightarrow \log_2(4-k) \leq \log_2 1 \Rightarrow 4-k \leq 1 \Rightarrow k \geq 3$$

در نتیجه  $3 \leq k < 4$ .

**گزینه ۲ - ۲۲۶۷** از طرفین معادله در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم. معادله

به صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3(9x) \Rightarrow (\log_3 x)(\log_3 x) = \log_3 9 + \log_3 x$$

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0 \Rightarrow (\log_3 x + 1)(\log_3 x - 2) = 0$$

بنابراین

$$\log_3 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, \quad \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$$

پس حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۳ است.

**گزینه ۴ - ۲۲۶۸** معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_2 x \left( \frac{1}{2} \log_2 x \right) = \frac{1}{2} \log_2 x \Rightarrow \log_2 x \left( \frac{1}{2} \log_2 x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{cases} \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \log_2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

پس جواب بزرگ‌تر معادله برابر  $\sqrt[3]{4}$  است.

**گزینه ۴ - ۲۲۶۹** ابتدا توجه کنید که  $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ . بنابراین  $x = 2$

باید تنها ریشه مخرج  $g(x)$  باشد. یعنی مخرج  $g(x)$  باید به صورت

$$(x-2)^2 \text{ باشد که در این صورت } b = -4 \text{ از طرف دیگر}$$

$$g(x) = \frac{ax-b}{x^2+bx+4} = \frac{ax+4}{(x-2)^2}$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \frac{ax+4}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x-2} \Rightarrow ax+4 = -2(x-2)$$

$$ax+4 = -2x+4$$

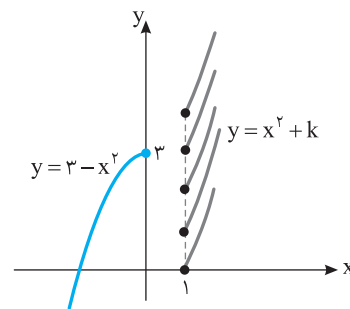
پس  $a = -2$ ،  $b = -4$  و در نتیجه  $ab = 8$ .

**گزینه ۱ - ۲۲۷۰** نمودار تابع به ازای چند مقدار مختلف  $k$  در شکل زیر

رسم شده است. واضح است که اگر  $f(1) > 3$ ، آن گاه تابع  $f$  یک‌به‌یک خواهد

بود. پس

$$1+k > 3 \Rightarrow k > 2$$



**گزینه ۴ - ۲۲۷۱** ابتدا توجه کنید که

$$x \leq 0 \text{ یا } x \geq 4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 6x - x^2 = 2x$$

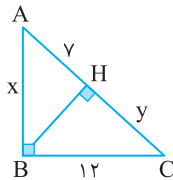
$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x + 6x - x^2 = -2x^2 + 10x$$

**گزینه ۴ - ۲۲۸۰** فرض می‌کنیم  $HC=y$ . در این صورت، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،  $x^2 = y(y+y)$ . از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ .

$$(y+y)^2 = x^2 + y^2 = y(y+y) + y^2 \Rightarrow y^2 + 14y + y^2 = y^2 + 7y + 12^2$$

$$(غ.ق.ق.) \quad y^2 + 7y - 144 = 0 \Rightarrow (y+16)(y-9) = 0 \Rightarrow y = 9, y = -16$$

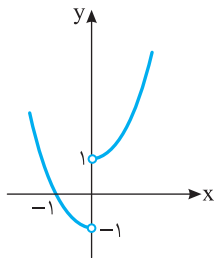
در نتیجه  $x^2 = y(y+y) = 9 \times 16 = 144$  پس  $x = 12$



**گزینه ۴ - ۲۲۸۱** ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}(x^2+1) & x > 0 \\ \frac{x}{-x}(x^2+1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2+1 & x > 0 \\ -x^2-1 & x < 0 \end{cases}$$

پس نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. بنابراین اگر نمودار تابع  $f$  خط  $y=k$  را در دو نقطه قطع کند، حدود  $k$ ، به صورت  $k > 1$  است.



**گزینه ۲ - ۲۲۸۲** با توجه به زوج مرتب‌های  $(0, x^3)$ ,  $(-1, x^2 - x)$

می‌توان نوشت:

$$0 > -1 \Rightarrow x^3 \geq x^2 - x$$

$$x^3 - x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x(x^2 - x + 1) \geq 0$$

چون در چندجمله‌ای درجه دوم  $x^2 - x + 1$ ،  $\Delta < 0$  و  $a > 0$ ، پس همواره  $x^2 - x + 1 > 0$ . بنابراین  $x \geq 0$ . با توجه به زوج مرتب‌های  $(x^2, 8)$  و  $(0, x^3)$  می‌توان نوشت:

$$x^2 > 0 \Rightarrow 8 \geq x^3 \Rightarrow 2 \geq x$$

با توجه به اینکه  $x$  باید عددی صحیح باشد، از اشتراک شرایط به دست آمده نتیجه می‌شود  $x \in \{1, 2\}$ ، پس دو مقدار صحیح برای  $x$  وجود دارد.

توجه کنید که  $x=0$  قابل قبول نیست چرا که در این صورت  $f = \{(-1, 0), (0, 0), (0, 8)\}$  که تابع نیست.

**گزینه ۱ - ۲۲۸۳** با توجه به اینکه تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$  اکیداً نزولی است، پس

$$\begin{cases} x > 3 \Rightarrow f(x) < f(3) \Rightarrow f(x) < 0 \\ x < 3 \Rightarrow f(x) > f(3) \Rightarrow f(x) > 0 \end{cases}$$

چون  $f$  در  $x=2$  پیوسته است، پس باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع  $f$  در این نقطه با هم برابر باشند:

$$2a + b = 8 \xrightarrow{a=2} 4 + b = 8 \Rightarrow b = 4, \quad bc = 8 \xrightarrow{b=4} c = 2$$

**گزینه ۲ - ۲۲۷۵** حالت‌های زیر ممکن است:

**حالت اول** یک توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{3}{1} \binom{6}{2} = 3 \times 15 = 45$$

**حالت دوم** دو توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{3}{2} \binom{6}{1} = 3 \times 6 = 18$$

**حالت سوم** سه توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{3}{3} \binom{6}{0} = 1$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با  $45 + 18 + 1 = 64$ .

**گزینه ۲ - ۲۲۷۶** فرض کنید پیشامد مورد نظر  $A$  باشد. در این صورت

$A = X \cup Y$ ، که در آن  $X$  پیشامد این است که از جعبه اول مهره قرمز و از جعبه دوم مهره آبی بیرون بیاید و  $Y$  پیشامد این است که از جعبه اول مهره آبی و از جعبه دوم مهره قرمز بیرون بیاید. بنابراین

$$P(A) = P(X) + P(Y) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{8} \times \frac{6}{10} = \frac{21}{40}$$

**گزینه ۱ - ۲۲۷۷** فرض کنید  $A$  پیشامد این باشد که شماره کارت ۲ باشد

و  $B$  پیشامد این باشد که رنگ کارت آبی است. در این صورت

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

**گزینه ۲ - ۲۲۷۸** توجه کنید که

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

**گزینه ۳ - ۲۲۷۹** اگر پاره خط  $EF$  را رسم کنیم، از عکس قضیه تالس نتیجه

می‌شود که  $EF \parallel BC$  و بنابر تعمیم قضیه تالس،  $EF = \frac{1}{2} BC$ . از طرف دیگر،

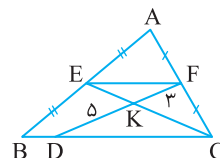
چون  $EF \parallel BC$ ، پس مثلث‌های  $EKF$  و  $CKD$  متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{EF}{DC} = \frac{FK}{DK} = \frac{3}{5} \Rightarrow EF = \frac{3}{5} DC$$

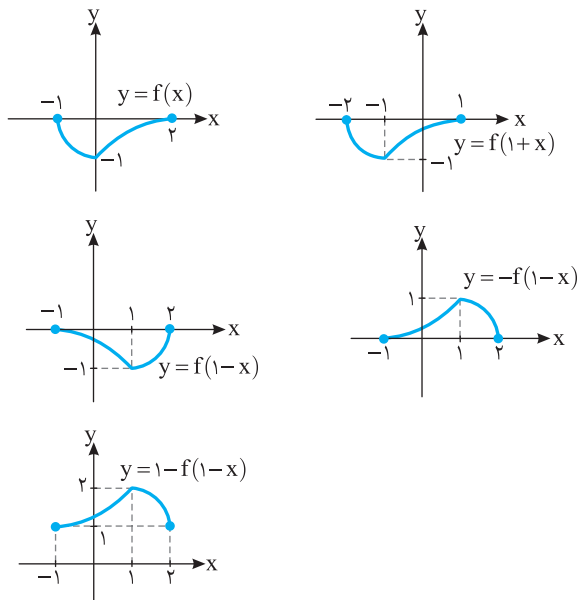
به این ترتیب

$$\frac{1}{2} BC = \frac{3}{5} DC \Rightarrow BC = \frac{6}{5} DC \xrightarrow{-DC} BC - DC = \frac{1}{5} DC - DC$$

$$BD = \frac{1}{5} DC \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{1}{5}$$



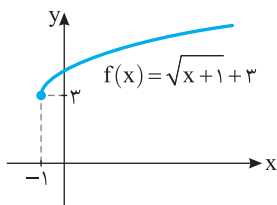
**گزینه ۴ - ۲۲۸۹** ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=f(1+x)$  رسم شود. اکنون نمودار این تابع را نسبت به محور  $y$  قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=f(1-x)$  حاصل شود. سپس نمودار را نسبت به محور  $x$  قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=-f(1-x)$  به دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به سمت بالا جابه‌جا می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=1-f(1-x)$  به دست آید.



**گزینه ۲ - ۲۲۹۰** اگر نمودار تابع  $g(x)=3f(2x)$  را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=3f(2(x+1))=3f(2x+2)$  به دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را سه واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=3f(2x+2)+3$  به دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را یک سوم کنیم، نمودار تابع  $y=3f(\frac{1}{3}(2x+2))+3=3f(x+\frac{2}{3})+3$  به دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را یک سوم کنیم، نمودار تابع  $y=\frac{1}{3}x(3f(x+\frac{2}{3})+3)=f(x+\frac{2}{3})+1$  به دست می‌آید.

**گزینه ۴ - ۲۲۹۱** ضابطه تابع وارون تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:  
 $y=1-\sqrt{3+x} \Rightarrow \sqrt{3+x}=1-y \Rightarrow 3+x=(1-y)^2 \Rightarrow x=(1-y)^2-3$   
 بنابراین  $f^{-1}(x)=(1-x)^2-3$ . پس  
 $f^{-1}(x)=(1-x)^2-3=1+x^2-2x-3=x^2-2x-2=x^2+ax+b$   
 در نتیجه  $a=-2, b=-2 \Rightarrow 2a+3b=-10$

**گزینه ۱ - ۲۲۹۲** برای هر  $x \in R_f$  تساوی  $(fof^{-1})(x)=x$  برقرار است. با توجه به نمودار تابع  $f$ ،  $R_f=[3, +\infty)$ . پس برای هر  $x \geq 3$ ،  $g(x)=x-2$   
 $x \geq 3 \Rightarrow x-2 \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq 1 \Rightarrow R_g=[1, +\infty)$

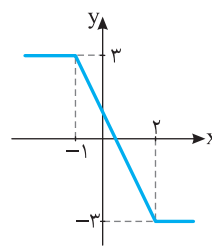


اکنون باید دامنه تابع  $g$  را مشخص کنیم. برای این کار نامعادله  $(x^2-9)f(x) \geq 0$  را حل می‌کنیم.

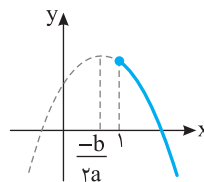
$x$	$-\infty$	$-3$	$3$	$+\infty$
$x^2-9$		+	-	+
$f(x)$		+	+	-
$(x^2-9)f(x)$		+	-	-

مجموعه جواب‌های نامعادله فوق  $\{3\} \cup (-\infty, -3]$  است. بنابراین تنها یک عدد طبیعی (عدد ۳) جزء دامنه تابع  $g$  است.

**گزینه ۳ - ۲۲۸۴** نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. از روی نمودار مشخص است که تابع روی بازه  $[-1, 2]$  و هر بازه‌ای به صورت  $[c, d]$  که در آن  $d \leq 2$  و  $c \geq -1$  اکیداً نزولی است. بنابراین بیشترین مقدار  $b-a$  وقتی به دست می‌آید که  $a=-1$  و  $b=2$ ، در این صورت  $b-a=2-(-1)=3$ .



**گزینه ۲ - ۲۲۸۵** تابع  $f(x)=ax^2+bx+c$  با شرط  $a < 0$  روی بازه  $(-\infty, \frac{-b}{2a})$  صعودی و روی بازه  $(\frac{-b}{2a}, +\infty)$  نزولی است. بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشد تا تابع  $f$  روی بازه  $[1, +\infty)$  نزولی باشد (به شکل زیر توجه کنید):  
 $k-1 < 0 \Rightarrow k < 1$   
 $\frac{-1}{2(k-1)} \leq \frac{-1}{2(k-1)} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{-1-2k+2}{2(k-1)} \leq 0$   
 $\frac{-2k+1}{2(k-1)} \leq 0 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$  یا  $k > 1$   
 از اشتراک شرط‌های به دست آمده نتیجه می‌شود  $k \leq \frac{1}{2}$ .



**گزینه ۴ - ۲۲۸۶** توجه کنید که  $(fog)(x)=(gof)(x) \Rightarrow f(g(x))=g(f(x))$

$2(a-x)-3=a-(2x-3) \Rightarrow 2a-2x-3=a-2x+3 \Rightarrow a=6$   
**گزینه ۴ - ۲۲۸۷** توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{x}{2x-1} \Rightarrow \frac{1}{g(x)+1}=\frac{x}{2x-1}$$

$$xg(x)+x=2x-1 \Rightarrow xg(x)=x-1 \Rightarrow g(x)=\frac{x-1}{x}$$

**گزینه ۳ - ۲۲۸۸** می‌دانیم  $D_{fof}=\{x|x \in D_f, f(x) \in D_f\}$ . پس  
 $\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \\ f(x) \in D_f \Rightarrow -1 \leq 2x-5 \leq 3 \Rightarrow 4 \leq 2x \leq 8 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$   
 اشتراک جواب‌های به دست آمده به صورت  $2 \leq x \leq 3$  است. پس  $D_{fof}=[2, 3]$

۲۲۹۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = 3(x+m) - 4 = 3x + 3m - 4$$

از طرف دیگر،

$$(f \circ g)^{-1}(\lambda) = -1 \Rightarrow (f \circ g)(-1) = \lambda$$

$$3 \times (-1) + 3m - 4 = \lambda \Rightarrow 3m - 7 = \lambda \Rightarrow m = 5$$

۲۲۹۴- گزینه ۳ اگر  $(m, n)$  نقطه برخورد نمودار تابع‌های  $f$  و  $f^{-1}$  باشد، نتیجه می‌شود  $f(m) = n$  و  $f(n) = m$  پس

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + b = 2 \\ -1 + 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین  $ab = -1$

۲۲۹۵- گزینه ۴ دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $\frac{2\pi}{|a\pi|}$  است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 4$$

کمترین مقدار تابع  $f$  برابر  $a^2 - |b|$  است. بنابراین

$$a^2 - |b| = -4 \Rightarrow 16 - |b| = -4 \Rightarrow |b| = 20$$

بیشترین مقدار تابع  $f$  برابر  $a^2 + |b|$  است که برابر است با  $16 + 20 = 36$ .

۲۲۹۶- گزینه ۱ تابع  $y = \tan x$  روی بازه  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  اکیداً صعودی

است، پس  $\tan x \geq \tan(-\frac{\pi}{4})$  و در نتیجه  $\tan x \geq -1$ . بنابراین

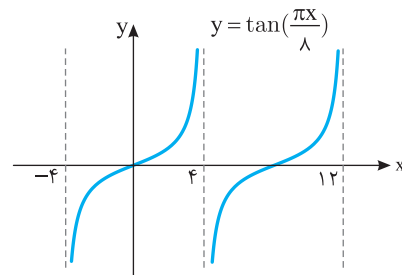
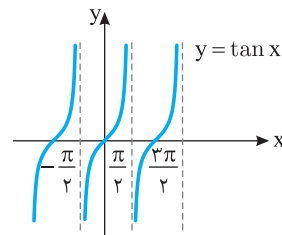
$$2m^2 - 5 \geq -1 \Rightarrow 2m^2 \geq 4 \Rightarrow m^2 \geq 2 \Rightarrow |m| \geq \sqrt{2}$$

پس حداقل مقدار  $|m|$  برابر  $\sqrt{2}$  است.

۲۲۹۷- گزینه ۲ برای رسم نمودار تابع  $f$  ابتدا نمودار تابع  $y = \tan x$  را

رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در  $\frac{\lambda}{\pi}$  ضرب می‌کنیم. نمودار

تابع به شکل زیر است. پس حداقل مقدار  $a$  برای اینکه تابع  $f$  روی دامنه‌اش یعنی بازه  $(a, 12)$  اکیداً صعودی باشد برابر ۴ است.



۲۲۹۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر  $3a - 2$

است که با توجه به نمودار تابع برابر  $-1$  است. پس

$$3a - 2 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر  $6 = \frac{45}{\gamma} - \frac{3}{\gamma}$  است. پس

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = 6 \Rightarrow b = \pm 6$$

اگر  $b = -6$ ، آن‌گاه  $f(x) = 1 + 2 \sin(-\frac{2\pi}{6}x + \frac{\pi}{3})$  که در این صورت تابع

باید در همسایگی راست  $x = 0$  نزولی باشد که این طور نیست. پس  $b = 6$  و در نتیجه  $ab = 2$ .

۲۲۹۹- گزینه ۴ توجه کنید که  $\alpha$  در ناحیه سوم قرار دارد، پس

$\cos \alpha < 0$ . از طرف دیگر،

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (\frac{-4}{5})^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow |\cos \alpha| = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{5}$$

می‌دانیم  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  و  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ . پس

$$\sin 2\alpha = 2 \times (\frac{-4}{5}) \times (\frac{-3}{5}) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{-4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-7}{25}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{-7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{-7}{24}$$

۲۳۰۰- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{1 + \cos 4^\circ}{\sin 4^\circ} = \frac{1 + (2 \cos^2 2^\circ - 1)}{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ}$$

$$= \frac{2 \cos^2 2^\circ}{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ} = \frac{\cos 2^\circ}{\sin 2^\circ} = \cot 2^\circ$$

۲۳۰۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$A = \tan 23^\circ - \tan 4^\circ = \tan(18^\circ + 5^\circ) - \tan(9^\circ - 5^\circ)$$

$$= \tan 5^\circ - \cot 5^\circ = \frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ} - \frac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ} = \frac{\sin^2 5^\circ - \cos^2 5^\circ}{\cos 5^\circ \sin 5^\circ}$$

چون  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$  و  $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ ، پس

$$A = \frac{-\cos 10^\circ}{\frac{1}{2} \sin 10^\circ} = -2 \cot 10^\circ = -2 \cot(9^\circ + 1^\circ) = 2 \tan 1^\circ$$

۲۳۰۲- گزینه ۳ معادله را به صورت  $\cos x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$  می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌ها به صورت زیر هستند:  $(k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = -\frac{1}{8} \text{ (غ.ق.ق.)} \\ x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

۲۳۰۳- گزینه ۱ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 5 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 3 = 0$$

**۲۳۰۸-گزینه ۲** چون حد صورت در نقطه  $x=2$  برابر ۳ است. باید حد مخرج کسر در این نقطه برابر صفر باشد. تا حد مورد نظر نامتناهی شود. همچنین، چون حد چپ و حد راست کسر هر دو  $+\infty$  شده‌اند، پس باید مقادیر  $3x^2+ax-b$  در یک همسایگی محذوف نقطه  $x=2$  مثبت باشند. در نتیجه  $x=2$  ریشه مضاعف معادله  $3x^2+ax-b=0$  است. یعنی  $3x^2+ax-b$  باید به صورت  $3(x-2)^2$  باشد.

$$3x^2+ax-b=3(x-2)^2=3x^2-12x+12$$

پس  $a=-12$ ،  $b=-24$  یعنی  $a+b=-24$ .

**۲۳۰۹-گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ . از طرف

دیگر اگر  $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه  $f(x) < -3$ . بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-3)^-} f(t) = -\infty$$

**۲۳۱۰-گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده

جمله‌ای شامل  $x^f$  وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر  $-\infty$  یا  $+\infty$  می‌شود. بنابراین ضرب  $x^f$  در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه  $a=4$ ،  $b=2$ . پس  $a=2$ . به این ترتیب

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3-1}{12x^3+x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{12x^3} = \frac{1}{3}$$

در نتیجه  $ab = \frac{2}{3}$ .

**۲۳۱۱-گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-k}{x+2}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x)-kf(x)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)(f(x)-k)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-k}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x-2} = f'(-2) \times \frac{f(-2)}{-4} = \frac{k^2}{-4} \end{aligned}$$

بنابراین  $-\frac{k^2}{-4} = -2$ ، در نتیجه  $k^2 = 8$ .

**۲۳۱۲-گزینه ۳** مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع  $f$  در نقطه  $x=0$

را به کمک تعریف به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt[3]{x^2+1} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt[3]{x^2+1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^2+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sqrt[3]{x^2+1} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sqrt[3]{x^2+1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt[3]{x^2+1}) = -1 \end{aligned}$$

بنابراین  $2f'_+(0) - f'_-(0) = 3$ .

اگر فرض کنیم  $t = \sin x$ ، معادله به صورت  $2t^2 - 5t + 3 = 0$  در می‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود  $t_1 = \frac{3}{2}$  و  $t_2 = 1$ . چون  $\sin x = \frac{3}{2}$  قابل قبول نیست، پس

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \frac{x \in (0, 2\pi)}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادله داده شده تنها یک جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد.

**۲۳۰۴-گزینه ۳** طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1 \rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$1 - \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه  $[0, 4\pi]$  عبارت‌اند از  $x=0$ ،  $x=\pi$ ،  $x=2\pi$ ،

$x=3\pi$  و  $x=4\pi$ . ولی توجه کنید که جواب‌های  $x=\pi$ ،  $x=2\pi$  و

$x=4\pi$  در معادله اصلی صدق نمی‌کنند و قابل قبول نیستند. این جواب‌ها به

دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم تولید شده‌اند. بنابراین

معادله در بازه  $[0, 4\pi]$  دو جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر  $3\pi$  است.

**۲۳۰۵-گزینه ۲** توجه کنید که حد مخرج کسر وقتی  $x \rightarrow 1$  برابر صفر

است. بنابراین باید حد صورت کسر نیز وقتی  $x \rightarrow 1$  برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + b) = 1 - a + b = 0 \Rightarrow b - a = -1$$

را **حل اول** چون  $b = a - 1$  پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + b}{2x^2 - 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + a - 1}{(2x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1-a)}{(2x-1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1-a)}{(2x-1)} = \frac{2-a}{2-1} = 2-a \end{aligned}$$

طبق فرض مسئله حاصل حد برابر ۳ است، پس  $2-a=3$ ، یعنی  $a=-1$ .

بنابراین  $b = a - 1 = -2$ . در نتیجه  $a+b = -3$ .

را **حل دوم** از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + b}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - a}{4x - 3} = \frac{2-a}{1} = 2-a$$

پس  $2-a=3$ ، بنابراین  $a=-1$ ، چون  $b-a=-1$ ، پس  $b=-2$ . بنابراین

$$a+b = -3$$

**۲۳۰۶-گزینه ۴** توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{\sqrt{x+2} - x} \times \frac{\sqrt{3x-2} + 2}{\sqrt{3x-2} + 2} \times \frac{\sqrt{x+2} + x}{\sqrt{x+2} + x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x-2-4}{x+2-x^2} \times \frac{\sqrt{x+2} + x}{\sqrt{3x-2} + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3(x-2)}{(2-x)(x+1)} \times \frac{\sqrt{x+2} + x}{\sqrt{3x-2} + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3}{-(x+1)} \times \frac{\sqrt{x+2} + x}{\sqrt{3x-2} + 2} \right) = \frac{3}{-3} \times \frac{2+2}{2+2} = -1$$

**۲۳۰۷-گزینه ۱** اگر  $x \rightarrow 3^+$ ، آن‌گاه  $[x] = 3$  و  $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ، در

نتیجه  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ ، اگر  $x \rightarrow 3^-$ ، آن‌گاه  $[x] = 2$  و  $f(x) = \frac{-1}{x-3}$ ، در

نتیجه  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ .

۲۳۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = (\lambda x^2 + 10x)(ax^2 + 1) + (2ax)(2x^2 + 5x^2 - 3)$$

بنابراین

$$f'(1) = (\lambda + 10)(a + 1) + (2a)(2 + 5 - 3) = 18a + 18 + 8a = 26a + 18$$

چون  $f'(1) = -8$  پس

$$26a + 18 = -8 \Rightarrow 26a = -26 \Rightarrow a = -1$$

۲۳۱۴- گزینه ۳ چون تابع در نقطه  $x=2$  مشتق پذیر است، پس در این

نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\lambda a + 4 = 4 + 2b \Rightarrow \lambda a - b = 0$$

$$\text{از طرف دیگر } f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 2 & x > 2 \\ 2x + b & x < 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3ax^2 + 2) = 12a + 2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + b) = 4 + b$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 12a + 2 = 4 + b \Rightarrow 12a - b = 2$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات } \begin{cases} \lambda a - b = 0 \\ 12a - b = 2 \end{cases} \text{ نتیجه می شود } a = \frac{1}{4} \text{ و } b = 1.$$

$$\text{پس } a + b = \frac{5}{4}$$

۲۳۱۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$g(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow g'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\text{بنابراین } g'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{2 \times \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{4}}} f'\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) = -4f'(2)$$

$$g'\left(\frac{1}{4}\right) = (-4)(-5) = 20 \text{ در نتیجه } f'(2) = \frac{4+1}{2-3} = -5$$

۲۳۱۶- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 2x^2 + 3ax^2 + 6x, \quad f''(x) = 6x^2 + 6ax + 6$$

پس معادله  $6x^2 + 6ax + 6 = 0$  نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta = 36a^2 - 144 < 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow |a| < 2$$

۲۳۱۷- گزینه ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[a, 1]$  برابر است با

$$\frac{f(1) - f(a)}{1 - a} = \frac{0 - (a-2)\sqrt{1-a}}{1-a} = \frac{2-a}{\sqrt{1-a}}$$

بنابراین

$$\frac{2-a}{\sqrt{1-a}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{(2-a)^2}{1-a} = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{4+a^2-4a}{1-a} = \frac{25}{4}$$

$$4a^2 - 16a + 16 = 25 - 25a$$

$$4a^2 + 9a - 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}, a = -3$$

با توجه به گزینه‌های داده شده جواب  $-3$  است.

۲۳۱۸- گزینه ۲ فرض کنید نقطه مورد نظر  $(x_0, y_0)$  باشد. شیب خط

مماس بر نمودار تابع  $f$  در این نقطه برابر با  $f'(x_0)$  است که چون خط مماس

موازی محور  $x$  است، پس  $f'(x_0) = 0$ . اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$$

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 3(x_0 - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

بنابراین  $y_0 = f(x_0) = f(2) = 6$ .

۲۳۱۹- گزینه ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطه  $(x_0, y_0)$  بر نمودار

تابع  $f$  مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق تابع  $f$  به ازای  $x = x_0$  برابر با

شیب خط  $y = 2x + 4$  یعنی  $2$  است. بنابراین

$$f'(x) = 6x^2 - 4 \Rightarrow f'(x_0) = 2 \Rightarrow 6x_0^2 - 4 = 2$$

$$x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ یا } x_0 = -1$$

چون نقطه  $(x_0, y_0)$  روی نمودار تابع  $f$  است، پس

$$y_0 = f(1) = 2 - 4 + 6 = 4 \text{ یا } y_0 = f(-1) = -2 + 4 + 6 = 8$$

بنابراین خط‌های مورد نظر از نقطه  $(1, 4)$  یا نقطه  $(-1, 8)$  می‌گذرند و شیب آن‌ها  $2$

است. پس معادله این دو خط به صورت  $y = 2x + 2$  یا  $y = 2x + 10$  است.

۲۳۲۰- گزینه ۴ خط  $y = 4x + 2$  در نقطه  $A(1, 6)$  بر نمودار تابع  $f$

مماس است. بنابراین  $f(1) = 6$  و  $f'(1) = 4$ . در نتیجه چون

$$\text{پس } f'(x) = 3x^2 - 2ax$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 - a + b = 6 \\ f'(1) = 3 - 2a = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{9}{2} \Rightarrow a + b = 4$$

۲۳۲۱- گزینه ۱ باید تابع مشتق تابع  $f$  را تعیین علامت کنیم:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

بنابراین تابع  $f$  روی بازه  $[0, 1]$  نزولی است. می‌دانیم در صورتی که  $c \geq 0$  و  $d \leq 1$ ،

تابع  $f$  روی بازه  $[c, d]$  نزولی است اما بیشترین مقدار  $b - a$ ، زمانی است که

$$b - a = 1 - 0 = 1 \text{ پس } a = 0 \text{ و } b = 1.$$

۲۳۲۲- گزینه ۱ مشتق تابع  $f$  برابر است با  $f'(x) = -6x^2 + 2ax - 6$ .

برای آنکه تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$  اکیداً نزولی باشد باید همواره  $f' \leq 0$  پس

$$a < 0, \Delta \leq 0 \Rightarrow -6 < 0, \Delta = 4a^2 - 144 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 6$$

۲۳۲۳- گزینه ۲ ابتدا تابع  $f'$  را تعیین علامت می‌کنیم

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+	-	+
$f(x)$		↘	↘	↗	↘	↗

تابع  $f'$  در نقطه‌های  $-2$ ،  $0$ ، و  $1$  هم برابر صفر است و هم در اطراف این

نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین تابع  $f$  در این نقطه‌ها اکسترمم نسبی

دارد. پس مجموع طول این نقطه‌ها برابر  $-2 + 0 + 1 = -1$  است.



۲۳۲۹- گزینه ۴ فرض کنید نقطه B روی سهمی به معادله  $y=2x^2$

باشد. بنابراین مختصات آن به صورت  $B(x, 2x^2)$  است. پس

$$AB = \sqrt{(x-9)^2 + (2x^2-0)^2} = \sqrt{x^2 - 18x + 81 + 4x^4}$$

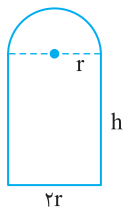
اگر  $f(x) = \sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}$ ، آن گاه

$$f'(x) = \frac{4x^3 + x - 9}{\sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + x - 9 = 0 \Rightarrow (4x^3 - 8) + (x - 1) = 0$$

$$4x(x-1)(x^2+x+1) + (x-1) = (x-1)(4x^2+4x+9) = 0 \Rightarrow x=1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای  $x=1$  به دست می آید. پس B نقطه  $(1, 2)$  و عرض آن برابر ۲ است.



۲۳۳۰- گزینه ۴ در واقع باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد. پس

$$\text{محیط} = \Delta \Rightarrow 2h + 2r + \left(\frac{r\pi}{2}\right) = 2h + 2r + r\pi = 5$$

$$h = \frac{5 - 2r - r\pi}{2} = \frac{5}{2} - r - \frac{r\pi}{2}$$

نیم دایره  $S$  + مستطیل  $S$  = مساحت پنجره

$$S(r) = (h \times 2r) + \left(\frac{r \times r \times \pi}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - r - \frac{r\pi}{2}\right) \times 2r + \frac{r^2\pi}{2} = -2r^2 - \frac{r^2\pi}{2} + 5r$$

$$S'(r) = -4r - r\pi + 5, S'(r) = 0 \Rightarrow -4r - r\pi + 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{5}{4+\pi}$$

۲۳۳۱- گزینه ۳ حجم جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع ۸ و ارتفاع ۳

است که استوانه‌ای به شعاع ۳ و ارتفاع ۳ از آن حذف شده است. بنابراین حجم جسم حاصل برابر با  $V = (\pi \times 8^2 \times 3) - (\pi \times 3^2 \times 3) = 165\pi$  است.

۲۳۳۲- گزینه ۱ با توجه به اینکه  $BB'$  قطر کوچک بیضی است و روی

محور  $y$  قرار دارد، مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است. پس  $b = OB = 4\sqrt{2}$  و  $c = OF' = 2$ ، در نتیجه

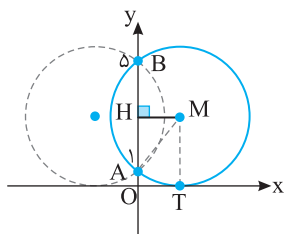
$$a^2 = b^2 + c^2 = (4\sqrt{2})^2 + 2^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

$$S_{ABF'} = \frac{BO \times AF'}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times (6+2)}{2} = 16\sqrt{2}$$

توجه کنید که  $AF' = OA + OF' = a + c = 6$ .

۲۳۳۳- گزینه ۲ فرض کنید نقطه M مرکز دایره مورد نظر باشد و این دایره در

نقطه T بر محور  $x$  مماس شده باشد. با توجه به نام گذاری‌های روی شکل  $AB = 5 - 1 = 4$ ، پس  $AH = 2$ . بنابراین  $TM = OH = 3$ ، یعنی شعاع این دایره برابر ۳ است.



۲۳۲۴- گزینه ۳ توجه کنید که  $f'(x) = x^2 - 2x - 8$  و

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x=4, x=-2$$

با توجه به آنکه  $f(4) = -\frac{83}{3}$  و  $f(-2) = \frac{25}{3}$ ، پس نقاط  $(-2, \frac{25}{3})$  و

$(4, -\frac{83}{3})$  نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند. بنابراین فاصله آنها برابر است با

$$\sqrt{(4 - (-2))^2 + (-\frac{83}{3} - \frac{25}{3})^2} = \sqrt{6^2 + 36^2} = 6\sqrt{37}$$

۲۳۲۵- گزینه ۲ تابع f در نقطه  $x=2$  مشتق پذیر است. برای آنکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید  $f'(2) = 0$ ، پس

$$f'(x) = \frac{x+1}{3\sqrt[3]{(x+a)^2}}, f'(2) = 0$$

$$f'(2) = \frac{3}{3\sqrt[3]{(2+a)^2}} = \frac{3(2+a)+3}{3\sqrt[3]{(2+a)^2}} = 0 \Rightarrow 9+3a=0 \Rightarrow a=-3$$

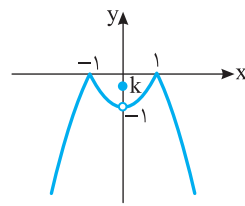
۲۳۲۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x \leq -\sqrt{2} \text{ یا } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ x^2 - 2x & -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \text{ یا } x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & x < -\sqrt{2} \text{ یا } 0 < x < \sqrt{2} \\ 2x - 2 & -\sqrt{2} < x < 0 \text{ یا } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

همچنین در نقاط  $x = -\sqrt{2}$  و  $x = \sqrt{2}$ ،  $x=0$  مشتق چپ و مشتق راست تابع برابر نیستند، پس تابع در این نقطه‌ها مشتق پذیر نیست. بنابراین تابع f، پنج نقطه بحرانی دارد.



۲۳۲۷- گزینه ۴ به نمودار تابع f

توجه کنید. واضح است که اگر تابع f در نقطه  $x=0$  ماکزیمم نسبی داشته باشد، اما ماکزیمم مطلق نداشته باشد، باید  $-1 < k < 0$ . توجه کنید که اگر  $k \geq 0$ ، آن گاه تابع f در نقطه  $x=0$  ماکزیمم مطلق تابع f دارد و اگر  $k \leq -1$ ، در نقطه  $x=0$  مینیمم نسبی دارد.

۲۳۲۸- گزینه ۱ تابع f در تمام نقطه‌های دامنه‌اش مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+a)}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1-a}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

اگر  $f'(x) = 0$ ، آن گاه  $a=1$  که در این صورت  $f(x) = 1$ . چون کمترین مقدار

تابع f روی بازه  $[0, 4]$  برابر  $\frac{4}{3}$  است، پس  $a=1$  قابل قبول نیست. پس

$f'(x) \neq 0$ ، بنابراین نقاط ابتدا و انتهای بازه را بررسی می کنیم:  $f(0) = a$  و

$$f(4) = \frac{2+a}{3}, f(0) = a = \frac{4}{3} \text{ اگر } a = \frac{4}{3} \text{ و اگر } a = \frac{4}{3}$$

آن گاه  $a=2$ . بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر  $\frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$  است.

۲۳۳۶- گزینه ۱ در دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$  مرکز دایره نقطه

$O(1, -2)$  و شعاع دایره  $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4 \times (-8)} = \sqrt{13}$  و در

دایره  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$  مرکز دایره نقطه  $O'(2, -1)$  و شعاع دایره  $r' = 3$  است. پس

$$OO' = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{2}$$

$$r+r' = \sqrt{13} + 3$$

$$|r-r'| = \sqrt{13} - 3$$

$$|r-r'| < OO' < r+r'$$

بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

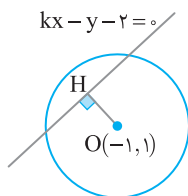
۲۳۳۷- گزینه ۲ در این دایره شعاع برابر ۱ و مرکز نقطه  $O(-1, 1)$

است. چون خط  $kx - y - 2 = 0$ ، دایره را در دو نقطه قطع کرده است باید فاصله مرکز دایره از خط کمتر از شعاع دایره باشد، پس

$$OH = \frac{|k(-1) - 1 - 2|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} < 1 \Rightarrow \frac{|-k-3|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$$

$$\frac{(k+3)^2}{k^2+1} < 1 \Rightarrow k^2 + 6k + 9 < k^2 + 1$$

$$6k < -8 \Rightarrow k < -\frac{4}{3}$$



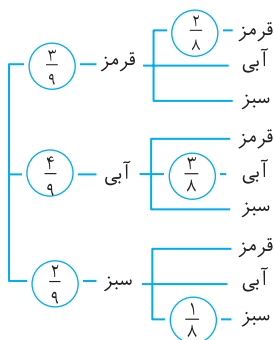
۲۳۳۸- گزینه ۳ A را پیشامد هم‌رنگ بودن هر دو مهره در نظر می‌گیریم.

پس  $A'$  پیشامد غیرهم‌رنگ بودن مهره‌ها است. با توجه به نمودار درختی زیر، احتمال هم‌رنگ بودن مهره‌ها برابر است با

$$P(A) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

بنابراین احتمال هم‌رنگ نبودن مهره‌ها برابر است با

$$P(A') = 1 - P(A) = \frac{13}{18}$$



بنابراین  $AM = 3$ . با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AHM،

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \Rightarrow 3^2 = r^2 + HM^2 \Rightarrow HM = \sqrt{5}$$

پس مرکز این دایره نقطه  $(\sqrt{5}, 3)$  و شعاع آن برابر ۳ است. پس معادله‌اش

به صورت  $(x-\sqrt{5})^2 + (y-3)^2 = 9$  است. دقت داشته باشید که دایره‌ای

به معادله  $(x+\sqrt{5})^2 + (y-3)^2 = 9$  نیز می‌تواند پاسخ این سؤال باشد.

۲۳۳۴- گزینه ۴ مرکز این دایره نقطه  $(1, -4)$  است. پس شیب خطی که

شعاع نظیر نقطه  $(2, -3)$  روی آن است، برابر است با  $m = \frac{-3-(-4)}{2-1} = 1$ .

چون خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع عمود است، پس شیب خط مماس مورد نظر برابر با  $m' = -1$  است. پس برای نوشتن معادله خط مورد نظر،

معادله خطی با شیب  $-1$  و گذرنده از نقطه  $(2, -3)$  را می‌نویسیم:

$$y+3 = -1(x-2) \Rightarrow y = -x-1$$

۲۳۳۵- گزینه ۲ راه‌حل اول فرض کنید نقاط A و B محل برخورد خط

با دایره و O مرکز دایره باشد. ابتدا توجه کنید که مرکز دایره مورد نظر نقطه  $O(-1, -2)$  است و شعاع این دایره برابر است با

$r = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2 - 4 \times (-4)} = 3$ . از طرف دیگر طول پاره خط OH برابر با

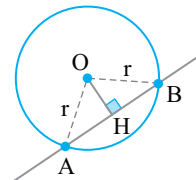
فاصله مرکز دایره از خط است. پس

$$OH = \frac{|2 \times (-1) + 1 \times (-2) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OHA،

$$r^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 3^2 = 5 + AH^2 \Rightarrow AH = 2$$

بنابراین طول وتر مورد نظر برابر با  $AB = 2AH = 4$  است.



راه‌حل دوم ابتدا محل‌های برخورد خط و دایره را مشخص می‌کنیم، سپس

فاصله بین این دو نقطه را به دست می‌آوریم که برابر با طول وتر مورد نظر است:

$$2x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 2x$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + (1-2x)^2 + 2x + 4(1-2x) - 4 = 0$$

$$5x^2 - 10x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{10+4\sqrt{5}}{10}, x_2 = \frac{10-4\sqrt{5}}{10}$$

$$A(x_1, y_1) = \left(\frac{10+4\sqrt{5}}{10}, \frac{-10-8\sqrt{5}}{10}\right) = \left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}, -1-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$B(x_2, y_2) = \left(\frac{10-4\sqrt{5}}{10}, \frac{-10+8\sqrt{5}}{10}\right) = \left(1-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -1+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$AB = \sqrt{\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5} - \left(1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right)^2 + \left(-1-\frac{4\sqrt{5}}{5} - \left(-1+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{-8\sqrt{5}}{5}\right)^2} = 4$$

حالت دوم

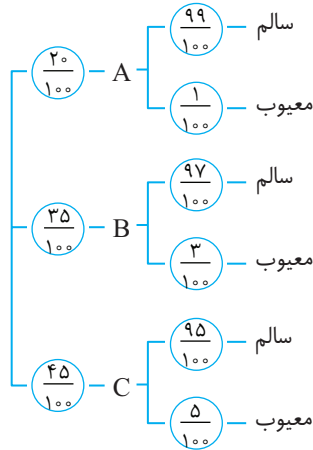
$$\binom{3}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{12}{4^3}$$

دو بار سیاه و یک بار قرمز

$$\frac{12}{4^3} + \frac{12}{4^3} = \frac{24}{4^3} = \frac{3}{8}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با  $\frac{3}{8}$

۲۳۴۰- گزینه ۴ توجه کنید که



اگر X پیشامد معیوب بودن محصول انتخاب شده باشد. آن گاه

$$P(X) = \frac{20}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{35}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{5}{100}$$

$$= \frac{20}{10000} + \frac{105}{10000} + \frac{225}{10000} = \frac{350}{10000} = 0.035$$

۲۳۴۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x} \quad (\pi < x < \frac{3\pi}{2})$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} (\sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x) = -\frac{1}{\cos x} (2 \times \frac{1}{2} - \sin^2 x)$$

$$= -\frac{1}{\cos x} (1 - \sin^2 x) = -\frac{1}{\cos x} \times \cos^2 x = -\cos x$$

۲۳۴۲- گزینه ۳ فرض کنید سرعت آب برابر v باشد. در این صورت،

سرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب ۱۰۰+v و در جهت مخالف حرکت آب برابر ۱۰۰-v است. در نتیجه

$$\frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5 \Rightarrow \frac{240}{100-v} - \frac{240}{100+v} = 1$$

$$240 \left( \frac{1}{100-v} - \frac{1}{100+v} \right) = 1 \Rightarrow 240 \left( \frac{2v}{100^2 - v^2} \right) = 1$$

$$100^2 - v^2 = 480v \Rightarrow v^2 + 480v - 100^2 = 0$$

$$(v-20)(v+500) = 0 \Rightarrow v = 20$$

۲۳۴۳- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \Rightarrow x > 4 \text{ یا } x < -1 \quad (1)$$

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x+6}{x+1} > 0$$

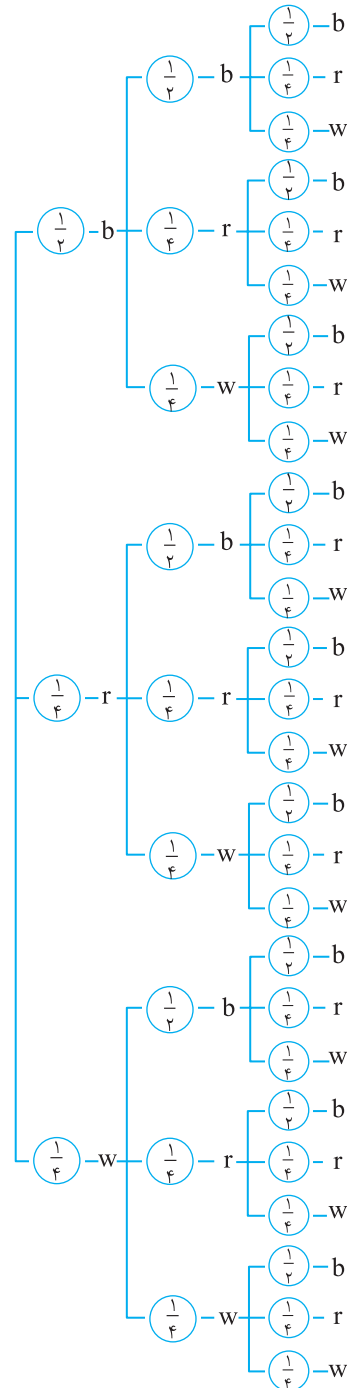
$$x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (2)$$

۲۳۳۹- گزینه ۲ راه حل اول نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید.

از روی نمودار معلوم می شود احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$



دقت کنید که b, r و w به ترتیب نماد سیاه، قرمز و سفید هستند.

راه حل دوم عقربه باید دقیقاً دو بار روی سیاه و یک بار روی قرمز یا سفید قرار گیرد. بنابراین دو حالت رخ می دهد.

حالت اول

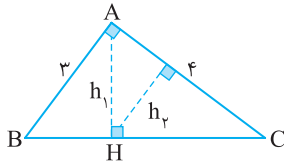
$$\binom{3}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{12}{4^3}$$

دو بار سیاه و یک بار سفید

**گزینه ۲ - ۲۳۴۸** ابتدا توجه کنید که طول ضلع دیگر مثلث ABC برابر  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  است. از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث متشابه با مثلث اصلی ایجاد می‌کند. بنابراین، با نمادگذاری شکل زیر، مثلث‌های ABC و AHC متشابه‌اند. در نتیجه نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

نسبت تشابه آن‌هاست یعنی



**گزینه ۳ - ۲۳۴۹** ابتدا توجه کنید که

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(5\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -(-\sin\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با  $\frac{1}{4}$

**گزینه ۳ - ۲۳۵۰** ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار تابع  $y = \sin x$  با تبدیلات به دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطه صفر بالای محور X هستند، پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع  $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  برابر  $a + b$  است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر  $\sqrt{3}$  است، پس  $a + b = \sqrt{3}$ . از طرف دیگر، چون نقطه  $(\pi, -\frac{3}{4})$  روی نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{4} \Rightarrow a - b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

بنابراین

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow b + b\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{3}{4}$$

$$b\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

**گزینه ۱ - ۲۳۵۱** توجه کنید که

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x^2}$$

بنابراین

$$2x-1 = -3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x-1 = 0 \Rightarrow (3x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = -1$$

به ازای  $x = -1$ ، مقدار  $9x+1$  منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸ تعریف نمی‌شود. بنابراین  $x = \frac{1}{3}$  و

$$\log_8(9x+1) = \log_8(3+1) = \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$$

مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر  $\mathbb{R} - [-6, 4]$  است.



**راه حل دوم** اعداد ۵ و -۷ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$1 < \frac{2 \times 5 - 3}{5+1} = \frac{7}{6} < 3, \quad 1 < \frac{2 \times (-7) - 3}{-7+1} = \frac{17}{6} < 3$$

بنابراین گزینه (۱) جواب نامعادله است.

**گزینه ۳ - ۲۳۴۴** باید دسته‌های چهارتایی، پنج‌تایی یا شش‌تایی از هشت شیء متمایز انتخاب کند. تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 70 + 56 + 28 = 154$$

**گزینه ۴ - ۲۳۴۵** توجه کنید که

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \Rightarrow 2a^2 + 4a = 4 - 12a + 9a^2$$

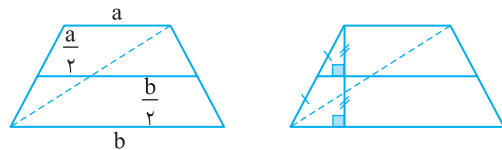
$$7a^2 - 16a + 4 = 0 \Rightarrow (7a-2)(a-2) = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{7}, a = 2$$

توجه کنید که اگر  $a = 2$ ، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر از ۲ است). بنابراین  $a = \frac{2}{7}$ . در نتیجه  $\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$

**گزینه ۲ - ۲۳۴۶** فرض کنید طول قاعده‌ها a و b باشد (شکل رسم شده را ببینید). در این صورت طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌ها را به هم وصل می‌کند برابر  $\frac{a+b}{2}$  است. توجه کنید که ارتفاع دوزنقه بالایی و پایینی برابر است. در نتیجه اگر این ارتفاع برابر h باشد، آن‌گاه

$$\frac{\frac{1}{2}h(a+\frac{a+b}{2})}{\frac{1}{2}h(\frac{a+b}{2}+b)} = \frac{a+\frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2}+b} = 1 \Rightarrow \frac{3a+b}{a+3b} = 1$$

$$3a+b = a+3b \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow \frac{a}{b} = 1$$



**گزینه ۴ - ۲۳۴۷** ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (3\sqrt{5})^2 + 6^2 = 81 \Rightarrow BC = 9$$

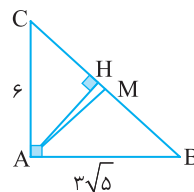
از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow 36 = CH \times 9 \Rightarrow CH = 4$$

$$\text{بنابراین } HM = CM - CH = \frac{BC}{2} - CH = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{BC}{HM} = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 18$$



۲۳۵۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $\sin(\frac{3\pi}{4}-x) = -\cos x$  بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$f \sin x(-\cos x) = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله و جواب‌های درون بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq k\pi - \frac{\pi}{12} \leq 2\pi$$

$$\frac{1}{12} \leq k \leq 2 + \frac{1}{12} \Rightarrow k = 1, 2$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{12}, x = 2\pi - \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

$$2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq k\pi + \frac{7\pi}{12} \leq 2\pi$$

$$-\frac{7}{12} \leq k < 2 - \frac{7}{12} \Rightarrow k = 0, 1$$

$$x = \frac{7\pi}{12}, x = \pi + \frac{7\pi}{12} \quad (2)$$

مجموع جواب‌های (۱) و (۲) برابر است با  $\frac{14\pi - 2\pi}{12} = \frac{11\pi}{6}$

۲۳۵۸- گزینه ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x^2 + 10x + 16 = (x+2)(x+8)$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)}{2 + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \left( \frac{(x+2)(x+8)}{2 + \sqrt{x}} \times \frac{4 - 2\sqrt{x} + \sqrt{x^2}}{4 - 2\sqrt{x} + \sqrt{x^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)(4 - 2\sqrt{x} + \sqrt{x^2})}{2^3 + \sqrt{x^3}}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)(4 - 2\sqrt{x} + \sqrt{x^2})}{8 + x}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} ((x+2)(4 - 2\sqrt{x} + \sqrt{x^2}))$$

$$= \frac{1}{6} (-8+2)(4 - 2(-2) + 2^2) = -12$$

راه‌حل دوم با استفاده از قاعده هوییتال به دست می‌آید

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6 \times \frac{1}{3\sqrt{x^2}}} = \frac{-16 + 10}{6 \times \frac{1}{3 \times (-2)^2}} = \frac{-6}{2} = -12$$

۲۳۵۹- گزینه ۴ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطه صفر تعریف نشده

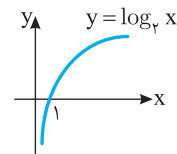
است، پس درباره حد چپ آن در نقطه صفر نمی‌توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x}$$

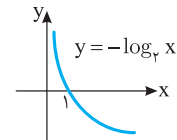
چون  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0$  و در یک همسایگی راست نقطه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = -\infty$$
 پس مقادیر  $2x$  مثبت‌اند.

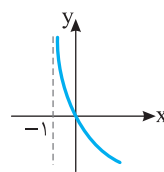
۲۳۵۲- گزینه ۲ نمودار تابع  $y = \log_p x$  به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع  $y = -\log_p x$  به صورت زیر است:



اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع  $y = -\log_p(x+1)$  می‌رسیم



که همان نمودار داده شده است:

توجه کنید که  $y = -\log_p(x+1) = \log_p(x+1)^{-1}$

$$U(x) = (x+1)^{-1}$$

۲۳۵۳- گزینه ۱ برای اینکه تابع  $f$  در نقطه  $x = -2$  فقط از چپ پیوسته

باشد، باید  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2)$  و  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \neq f(-2)$  اکنون

توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\lambda + x^3}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(2+x)(4-2x+x^2)}{-(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-(4-2x+x^2)) = -(4-2(-2)+(-2)^2) = -12$$

چون  $f(-2) = a$ ، پس باید  $a = -12$ .

توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 12$  و در نتیجه  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \neq f(-2)$ .

۲۳۵۴- گزینه ۱ فرض کنید  $A$  و  $B$  به ترتیب پیشامدهای قبولی این فرد

در آزمون‌های اول و دوم باشند. در این صورت  $P(A) = 0/7$ ،  $P(B) = 0/6$  و

$P(B|A) = 0/8$  اکنون توجه کنید که

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0/8 = \frac{P(A \cap B)}{0/7} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/56$$

در نتیجه،

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/7 + 0/6 - 0/56 = 0/74$$

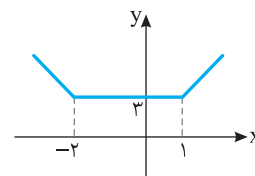
۲۳۵۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\text{گروه اول: } \bar{x} = 80, \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5, CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

$$\text{گروه دوم: } \bar{x} = 72, \sigma^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4, CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

چون ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است، پس گروه دوم بهتر است. البته بهتر است که در صورت سؤال پرسیده شود «پراکندگی مسئولیت‌پذیری در کدام گروه کمتر است».

۲۳۵۶- گزینه ۱ نمودار تابع  $f$



به صورت روبه‌رو است. از روی این

نمودار معلوم است که تابع  $f$  روی بازه

$(-\infty, -2)$  اکیداً نزولی است.

۲۳۶۰- گزینه ۳ خارج از برنامه درسی

۲۳۶۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $f'(f) = \lim_{x \rightarrow f} \frac{f(x) - f(f)}{x - f}$  از طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\Delta - 2x) - (-2)(1 + \sqrt{x})}{(\Delta - 2x)^2} \Rightarrow f'(f) = \frac{\frac{1}{2}(-3) + 2(3)}{(-3)^2} = \frac{5}{12}$$

۲۳۶۲- گزینه ۲ چون تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر است، پس روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است و در نتیجه در  $x=2$  پیوسته و مشتق پذیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1}$$

$$-4 + 2a + b = \frac{1}{2-1} = 1 \Rightarrow 2a + b = 5$$

همچنین،

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow -4 + a = -1 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین  $b = 5 - 2a = -1$

۲۳۶۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f \circ g)'(r) = g'(r) \times f'(g(r)) \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$g'(x) = \frac{2(x-1) - (1)(2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(2) = -3$$

همچنین،  $g(2) = 5$ . بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می شود  $6 = (-3)f'(5)$  پس  $f'(5) = -2$ .

۲۳۶۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{8 - \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - 1)}{3} = \frac{11}{4}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه ای} = f'(2)$$

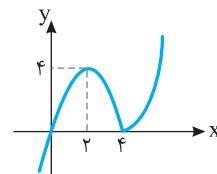
از طرف دیگر،  $f'(x) = x + \frac{1}{x^2}$ ، پس  $f'(2) = \frac{9}{4}$ . بنابراین اختلاف مورد نظر

$$\frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ می شود}$$

۲۳۶۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & x \leq 4 \\ x^2 - 4x & x > 4 \end{cases}$

بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. از روی این شکل معلوم می شود که نقطه مینیمم نسبی تابع  $f$  و نقطه ماکزیمم نسبی تابع  $f$  است.

$$\text{فاصله این نقطه ها برابر است با } \sqrt{(4-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



۲۳۶۶- گزینه ۳ اگر مطابق شکل داده شده، طول یکی از ضلع های

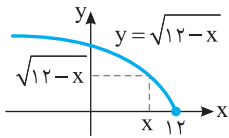
مستطیل برابر  $x$  باشد، طول ضلع دیگرش می شود  $\sqrt{12-x}$ . بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل} = x\sqrt{12-x}$$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع  $f(x) = x\sqrt{12-x}$  را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = (1)\sqrt{12-x} + x\left(\frac{-1}{2\sqrt{12-x}}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{12-x}(2\sqrt{12-x}) = x \Rightarrow 2(12-x) = x \Rightarrow x = 8$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع  $f$ ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر به ازای  $x=8$  به دست می آید و برابر است با  $8\sqrt{4} = 16$ .

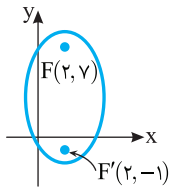
۲۳۶۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$FF' = 2c \Rightarrow 8 = 2c \Rightarrow c = 4$$

از طرف دیگر،  $2b = 6$ ، پس  $b = 3$  و در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

به این ترتیب  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$



۲۳۶۸- گزینه ۱ توجه کنید که شکل  $n$  ام از مربعی با  $n^2$  دایره و ردیف هایی از ۱، ۲، ۳، ... و  $n-1$  دایره درست شده است. بنابراین

$$9^2 + 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 81 + \frac{8 \times 9}{2} = 117$$

۲۳۶۹- گزینه ۴ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow f(x) + 4 = (x-1)^2$$

$$x = \sqrt{f(x) + 4} + 1$$

بنابراین  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$ . در نتیجه طول نقطه تقاطع نمودار تابع های  $f^{-1}$  و  $g$  جواب معادله زیر است:

$$\sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x+4} + 2 = x-9 \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = x-11 \quad (1)$$

$$4(x+4) = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-21) = 0$$

$$x = 5, x = 21$$

توجه کنید که  $x=5$  جواب نیست، زیرا به ازای  $x=5$  سمت چپ معادله (۱) مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین  $x=21$ .

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که  $f(x) = (x-1)^2 - 4$ . طول نقطه برخورد نمودار تابع های  $f^{-1}$  و  $g$  جواب معادله  $f^{-1}(x) = g(x)$  است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(g(x)) \Rightarrow x = f(g(x))$$

$$x = (g(x)-1)^2 - 4 \Rightarrow x+4 = \left(\frac{x-9}{2}\right)^2 \Rightarrow x+4 = \left(\frac{x-11}{2}\right)^2$$

$$4x+16 = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0$$

$$(x-5)(x-21) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 21$$

اکنون توجه کنید که  $R_{f^{-1}} = D_f = [1, +\infty)$ ، پس مقادیر  $f^{-1}$  مثبت اند. اما

$g(5) < 0$ ، پس  $x=5$  جواب معادله  $f^{-1}(x) = g(x)$  نیست. بنابراین  $x=21$ .

۲۳۷۴- گزینه ۴ باید سه مدرسه از پنج مدرسه انتخاب کنیم (به  $\binom{5}{3}$  طریق)

و از هر کدام از آن‌ها یک نفر را انتخاب کنیم (هر کدام به  $\binom{4}{1}$  طریق). بنابراین پاسخ

$$\binom{5}{3} \binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

۲۳۷۵- گزینه ۱ توجه کنید که

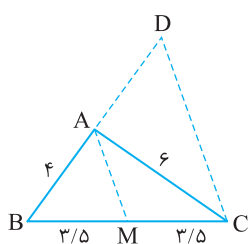
$$ra + \sqrt{3a+16} = 1 \Rightarrow \sqrt{3a+16} = 1-ra \Rightarrow \sqrt{3a+16}^2 = (1-ra)^2$$

$$3a+16 = 1-2ra+fa^2 \Rightarrow fa^2 - 2ra - 15 = 0$$

$$(fa+5)(a-3) = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{f}, a = 3$$

توجه کنید که  $a=3$  در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی  $a = -\frac{5}{f}$  در

تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین  $a = -\frac{5}{f}$  و  $fa+9=4$



۲۳۷۶- گزینه ۲ راه حل اول توجه

کنید که در مثلث BCD، از نقطه M،

وسط ضلع BC، خطی موازی ضلع CD

رسم شده است. در نتیجه، این خط از

وسط ضلع DB نیز می‌گذرد. یعنی

$$BD = 2AB = 8$$

۲۳۷۷- گزینه ۲ راه حل دوم چون  $AM \parallel DC$ ، بنا بر تعمیم قضیه تالس در مثلث BCD،

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{4}{8} \Rightarrow BD = 8$$

توجه کنید که در مثلث ایجاد شده هم ضلع‌ها به سه

قسمت برابر تقسیم می‌شوند. از طرف دیگر، مثلث‌های ABC و AEF

متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{AEF} \quad (1)$$

همین‌طور، مثلث‌های AEF و AMN متشابه‌اند، پس

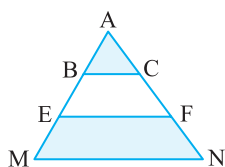
$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{AMN} = \frac{9}{4} S_{AEF}$$

$$S_{AMN} - S_{AEF} = \frac{9}{4} S_{AEF} - S_{AEF}$$

$$S_{EFNM} = \frac{5}{4} S_{AEF} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{S_{ABC}}{S_{EFNM}} = \frac{1}{5}$$



۲۳۷۰- گزینه ۲ فرض کنید  $A_1$  پیشامد این باشد که مهره خارج شده

سفید باشد و  $A_2$  پیشامد این باشد که مهره خارج شده سیاه باشد. در این

صورت اگر B پیشامد مورد نظر باشد، بنا بر قانون احتمال کل،

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

$$= \frac{5}{11} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{6}{11} \times \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$$

$$= \frac{5}{11} \times \frac{6}{45} + \frac{6}{11} \times \frac{10}{45} = \frac{90}{11 \times 45} = \frac{2}{11}$$

۲۳۷۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x} \quad \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sin x} (-\sin x) = \frac{\tan x}{-\frac{1}{\cos x}} = \frac{\tan x}{\sin x} (-\sin^2 x)$$

$$= -\tan x \cos x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

۲۳۷۲- گزینه ۴ فرض می‌کنیم سرعت پرنده در هوای آرام برابر v باشد.

چون سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت است، پس سرعت پرنده در جهت موافق

باد برابر  $v+5$  و در جهت مخالف باد برابر  $v-5$  است. چون پرنده یک

کیلومتر رفته و یک کیلومتر برگشته است، پس مدت زمان رفت  $\frac{1}{v+5}$  و مدت

زمان برگشت  $\frac{1}{v-5}$  کیلومتر بر ساعت است. به این ترتیب،

$$\frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{2v}{v^2-25} = \frac{3}{20}$$

$$3v^2 - 40v - 75 = 0 \Rightarrow (3v+5)(v-15) = 0 \Rightarrow v = 15$$

۲۳۷۳- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$\frac{yx-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{yx-8}{(x+1)(x-2)} - \frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{yx-8-x(x+1)}{(x+1)(x-2)} > 0$$

$$\frac{-x^2+6x-8}{(x+1)(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{-(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

x	-∞	-1	2	4	+∞
$\frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}$		+	+	-	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر  $(-1, 2) \cup (2, 4)$  می‌شود.

۲۳۷۴- گزینه ۲ توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{-8}{-2} > \frac{0}{-2} \Rightarrow 4 > 0, \quad \frac{21-8}{9-3-2} > \frac{3}{3-1} \Rightarrow \frac{13}{4} > \frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه (۳) جواب نامعادله است.

۲۳۲۸- گزینه ۲ چون دامنه تابع بازه  $(-\frac{a}{p}, +\infty)$  است و از روی نمودار

تابع معلوم می‌شود که این بازه  $(\frac{1}{p}, +\infty)$  است، پس  $a = -1$ . از طرف دیگر

نمودار تابع از نقطه  $(2, 0)$  گذشته است، پس  $y(2) = 0$ :

$$-1 + \log_b(4-1) = 0 \Rightarrow \log_b 3 = 1 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین ضابطه تابع  $y = -1 + \log_3(2x-1)$  می‌شود. طول نقطه برخورد

نمودار تابع مورد نظر با خط  $y = 1$  جواب معادله زیر است:

$$-1 + \log_3(2x-1) = 1 \Rightarrow \log_3(2x-1) = 2 \Rightarrow 2x-1 = 9 \Rightarrow x = 5$$

۲۳۸۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{2|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{2(-(x-2))} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{-2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{2} = 2$$

چون  $f(2) = 2$ ، پس تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  فقط از راست پیوسته است.

۲۳۸۴- گزینه ۴ فرض کنید  $A$  پیشامد موفقیت این فرد و  $B$  پیشامد موفقیت دوستش باشد. در این صورت

$$P(A) = 2P(B), \quad P(A \cup B) = \frac{7}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{(P(A))^2}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{7}{9}$$

$$= P(A) + \frac{P(A)}{2} - \frac{(P(A))^2}{2}$$

$$(P(A))^2 - 3P(A) + \frac{14}{9} = 0 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(A) = \frac{7}{9} \text{ (غ.ق.)}$$

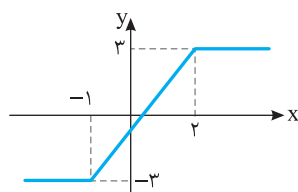
۲۳۸۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که  $\bar{X}_A = 14$  و  $\bar{X}_B = 14/5$ . بنابراین

$$\sigma_A^2 = \frac{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = 2$$

$$\sigma_B^2 = \frac{2^2 + 1/5^2 + 1^2 + 1/5^2 + 3^2}{5} = 3/7$$

$$\text{چون } CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{X}_A} = \frac{\sqrt{2}}{14} \text{ و } CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{X}_B} = \frac{\sqrt{3/7}}{14/5} \text{ پس } CV_A < CV_B$$

یعنی دقت عمل  $A$  بیشتر است. البته بهتر است در صورت سؤال پرسیده شود «نمرات مهارت» کدام کارگر پراکندگی کمتری دارد.



۲۳۸۶- گزینه ۳ نمودار تابع  $f$

به صورت زیر است. از روی این نمودار معلوم است که تابع  $f$  روی بازه  $(-1, 2)$  اکیداً صعودی است.

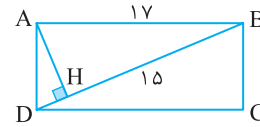
۲۳۸۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

۲۳۷۸- گزینه ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه  $ABD$ .

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{17^2}{15} = \frac{289}{15} = 19 \frac{4}{15}$$

پس طول قطر مستطیل  $\frac{4}{15}$  واحد از عدد ۱۹ بیشتر است.



۲۳۷۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{9\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(\frac{7\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = -\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cot \alpha$$

بنابراین (چون  $\alpha < 0$ ، ربع سوم است،

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \frac{4}{3} \times (-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$(-\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) + \frac{3}{4} = 0/27$$

۲۳۸۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که  $y = a + b \sin x$ . از روی نمودار

تابع معلوم می‌شود که  $b$  مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر  $a + b$  است. چون این مقدار برابر ۳ است، پس  $a + b = 3$ . همچنین، نمودار تابع از

نقطه  $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$  گذشته است، پس

$$0 = a + b \sin(-\frac{5\pi}{6}) = a + b(-\frac{1}{2}) = a - \frac{b}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه تابع مورد نظر  $y = 1 + 2 \sin x$  می‌شود، که مقدار آن به ازای

$$1 + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \text{ با } x = \frac{\pi}{6} \text{ برابر است.}$$

۲۳۸۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $3^x - 2 = 81^x = (3^4)^x = 3^{4x} = 3^{4x-2}$ .

بنابراین

$$x^2 - 2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{6}, x = 2 + \sqrt{6}$$

چون به ازای  $x = 2 - \sqrt{6}$ ، مقدار  $x - 2$  منفی می‌شود و  $\log_6(x - 2)$  به

ازای آن تعریف نشده است، پس  $x = 2 - \sqrt{6}$  قابل قبول نیست. بنابراین

و در نتیجه  $x = 2 + \sqrt{6}$

$$\log_6(x - 2) = \log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2} \log_6 6 = \frac{1}{2}$$



بنابراین  $(k \in \mathbb{Z})$

پس

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-\frac{1}{4} + (1)\left(\frac{1}{4} + 1\right)}{\frac{1}{4}} = 3$$

۲۳۹۲- گزینه ۳ چون تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  مشتق پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته نیز است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a}{ax+b} = 4 \Rightarrow \frac{a}{2a+b} = 4 \Rightarrow 2a+b=2$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\lambda a}{(ax+b)^2} & x > 2 \\ -3x^2 + 6 & x < 2 \end{cases}$$

از طرف دیگر

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\lambda a}{(ax+b)^2} = \frac{-\lambda a}{(2a+b)^2} = \frac{-\lambda a}{2^2} = -2a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3x^2 + 6) = -6$$

بنابراین

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow -2a = -6 \Rightarrow a = 3$$

۲۳۹۳- گزینه ۲ توجه کنید که  $f(x) = x \left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$  پس

$$f'(x) = (1) \left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}} + x \times \frac{1}{3} \left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}-1} \frac{(3)(x+2) - (1)(3x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{x}{3} \left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{2x+5}{(x+2)^2}$$

در نتیجه

$$f'(-3) = \left(\frac{-1}{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + (-3) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{(3(-3)-1)(-1)(-3+1)}{(-1)^2} = \frac{1}{-1} - 3 \times \frac{1}{3} = -2$$

۲۳۹۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که نقطه‌های ابتدایی و انتهایی نمودار تابع

$(0, f(0))$  و  $(\lambda, f(\lambda))$  هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند

برابر است با  $\frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda - 0} = \frac{3 - (-5)}{\lambda} = 1$ . اکنون طول نقطه‌ای را روی نمودار تابع  $f$

پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

$$f'(x) = \frac{9}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1$$

$$(x+1)^2 = 9 \Rightarrow x = 2, x = -4 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین طول نقطه مورد نظر برابر ۲ است و عرض آن برابر است با  $f(2) = 1$ .

معادله خطی که از نقطه  $(2, 1)$  می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ است به صورت

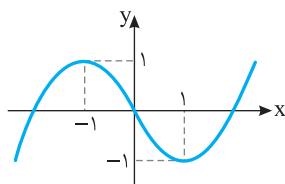
$$y - 1 = (1)(x - 2) \text{ یعنی } y = x - 1 \text{ است. عرض نقطه‌ای که این خط محور } y$$

را قطع می‌کند برابر است با  $y = 0 - 1 = -1$ .

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & x \leq 0 \\ x^2 - 2x & x > 0 \end{cases}$$

ابتدا توجه کنید که

پس نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. بنابراین نقطه‌های ماکزیمم نسبی و



مینیمم نسبی تابع  $f$  به ترتیب

نقطه‌های  $(-1, 1)$  و  $(1, -1)$

هستند که فاصله آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$3x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2}$$

چون باید  $\cos x \neq 0$ ، پس جواب‌های به شکل  $k\pi - \frac{\pi}{2}$  قبول نیستند. در

نتیجه، جواب‌های کلی معادله مورد نظر به صورت  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  هستند  $(k \in \mathbb{Z})$ .

۲۳۸۸- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{\Delta x^2 - 18x + 16}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{\Delta x - 8} \times \frac{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}}{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\lambda - (3x+2)}{(\Delta x - 8)(x-2)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(\Delta x - 8)(x-2)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(\Delta x - 8)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})}$$

$$= \frac{-3}{(2)(4 + 2 \times 2 + 2^2)} = -\frac{1}{8}$$

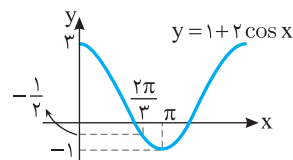
راه حل دوم بنابر قاعده هوییتال،

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{\Delta x^2 - 18x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}{2 \times x - 18} = \frac{-\frac{1}{2}}{2 \times 2 - 18} = -\frac{1}{8}$$

۲۳۸۹- گزینه ۱ توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{2\pi}{3}\right)^+} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  و

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{2\pi}{3}\right)^+} (1 + 2 \cos x) = 0$  و در یک همسایگی راست نقطه  $\frac{2\pi}{3}$ ، مقادیر

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{2\pi}{3}\right)^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = -\infty \text{ بنابراین}$$



۲۳۹۰- گزینه ۴ خارج از برنامه دسی

۲۳۹۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که  $f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4} + h\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)$

$$f'(x) = \frac{(-1)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{(\sqrt{x})^2}$$

از طرف دیگر،

۲۳۹۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(\lambda) = g^{-1}(f^{-1}(\lambda))$$

اکنون فرض کنید  $f^{-1}(\lambda) = a$  در این صورت

$$f(a) = \lambda \Rightarrow \frac{1}{5}a - 4 = \lambda \Rightarrow a = 30$$

اکنون فرض کنید  $g^{-1}(30) = b$  در این صورت

$$g(b) = 30 \Rightarrow b^3 + b = 30 \Rightarrow b = 3$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(\lambda) = g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = g^{-1}(30) = 3$$

۲۴۰۰- گزینه ۲ فرض کنید  $A, B, C$  به ترتیب پیشامد انتخاب

بسته‌های ریاضی، تجربی و علوم انسانی باشند. اگر پیشامد برنده شدن بهروز  $X$  باشد، آن‌گاه

$$P(X) = P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)$$

$$= \frac{5}{18} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{18} \times \frac{8}{9} + \frac{6}{18} \times \frac{9}{9} = \frac{35}{180} + \frac{56}{180} + \frac{54}{180} = \frac{145}{180} = \frac{29}{36}$$

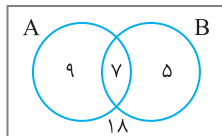
۲۴۰۱- گزینه ۴ اگر گروه ورزش را با  $A$  و گروه روزنامه دیواری را با  $B$

نمایش دهیم، آن‌گاه  $n(A) = 16$ ،  $n(B) = 12$  و  $n(A \cap B) = 9$  بنابراین

$$n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = 16 - 9 = 7$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 16 + 12 - 7 = 21$$

بنابراین  $18 - 21 = 3$  نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۲۴۰۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sqrt[5]{4^3 \sqrt{16}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{4^3 \times 16} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{3}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{3}} = 2^{\frac{17}{3}}$$

$$(2A)^{-\frac{1}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2^{\frac{3}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{3}}}$$

۲۴۰۳- گزینه ۲ برای اینکه سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  همواره

پایین محور  $X$  قرار بگیرد، باید  $a < 0$  و  $b^2 - 4ac < 0$ . بنابراین در سهمی به

معادله  $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$  باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$1 - m < 0 \Rightarrow m > 1$$

$$4(m-3)^2 + 4(1-m) < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \Rightarrow (m-2)(m-5) < 0$$

$$2 < m < 5$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده برابر  $2 < m < 5$  است. بنابراین اگر  $2 < m < 5$ ، آن‌گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور  $X$  قرار دارد.

۲۴۰۴- گزینه ۱ اگر نمودار تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  را سه واحد به

طرف  $X$  های مثبت سپس دو واحد به طرف  $Y$  های منفی انتقال دهیم، نمودار

تابع  $f(x) = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2$  ساده شده

ضابطه این تابع به صورت  $f(x) = -x^2 + 8x - 12$  است. بنابراین می‌خواهیم

بازه‌ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع  $f$  بالای خط  $y = x$  قرار دارد.

**راه‌حل اول** برای اینکه بدانیم در چه بازه‌ای نمودار تابع  $f$  بالای خط  $y = x$

قرار دارد، کافی است نامعادله  $f(x) > x$  را حل کنیم:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

۲۳۹۶- گزینه ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم مستطیل مورد نظر ABCD

باشد و طول نقطه  $C$  برابر  $X$  باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطه  $B$  روی دایره

$x^2 + y^2 = 36$  است، پس عرض نقطه  $B$  برابر است با  $\sqrt{36 - x^2}$ . به این

ترتیب،  $S_{ABCD} = 2x\sqrt{36 - x^2}$  باید بیشترین مقدار تابع

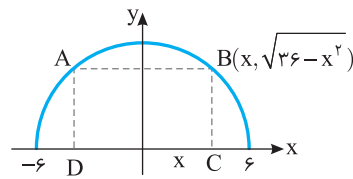
$f(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}$  را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 2\sqrt{36 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 36 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \quad (x > 0)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع  $f$ ، یعنی بیشترین مساحت مستطیل ABCD، به

ازای  $x = 3\sqrt{2}$  به دست می‌آید و برابر است با  $2(3\sqrt{2})\sqrt{36 - 18} = 36$ .

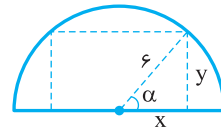


**راه‌حل دوم** با نمادگذاری شکل زیر، فرض می‌کنیم طول ضلع‌های مستطیل

$2x$  و  $y$  باشند. در این صورت  $x = 6 \cos \alpha$  و  $y = 6 \sin \alpha$ . بنابراین

$$2xy = 2(6 \cos \alpha)(6 \sin \alpha) = 36 \sin 2\alpha \leq 36$$

توجه کنید که تساوی وقتی به دست می‌آید که  $2\alpha = 90^\circ$ ، یعنی  $\alpha = 45^\circ$ .



۲۳۹۷- گزینه ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. فاصله مرکز

دایره تا خط  $2x - 3y + 1 = 0$  برابر است با

$$OH = \frac{|2(-1) - 3(4) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

چون  $HB = \frac{AB}{2} = \sqrt{7}$ ، پس بنا بر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه

$OHB$ ،

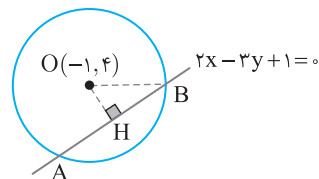
$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{7})^2 = 20 \Rightarrow OB = 2\sqrt{5}$$

یعنی شعاع دایره مورد نظر برابر  $2\sqrt{5}$  است. بنابراین معادله این دایره

به صورت  $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20$  است. طول نقطه‌های برخورد این دایره با

خط  $y = 2$  جواب معادله زیر هستند:

$$(x+1)^2 + (2-4)^2 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16 \Rightarrow x = -5, x = 3$$



۲۳۹۸- گزینه ۳ توجه کنید که شکل  $n$  از مستطیلی با  $2x(n+1)$  دایره

و نواری با  $n$  دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره‌های شکل  $n$  برابر

است با  $2(n+1) + n = 3n + 2$ . پس تعداد دایره‌های شکل دوازدهم برابر

است با  $3 \times 12 + 2 = 38$ .

**۲۴۰۸-گزینه ۴** ابتدا دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$  را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \\ 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-3, 1) \cup (1, 3]$$

برای اینکه بازه  $(k-2, 3k+2)$  زیرمجموعه دامنه تابع  $f$  باشد یا باید زیرمجموعه  $[-3, 1)$  باشد یا باید زیرمجموعه  $(1, 3]$  باشد. پس دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

**حالت اول**  $(k-2, 3k+2) \subseteq [-3, 1)$ . در این حالت باید  $k-2 \geq -3$  و  $3k+2 \leq 1$  پس  $-\frac{1}{3} \leq k \leq -\frac{1}{3}$ .

**حالت دوم**  $(k-2, 3k+2) \subseteq (1, 3]$ . در این حالت باید  $k-2 \geq 1$  و  $3k+2 \leq 3$  که ممکن نیست.

بنابراین  $k \in [-1, -\frac{1}{3}]$  که در گزینه (۴) بازه  $[-1, -\frac{1}{3}]$  آمده است.

**۲۴۰۹-گزینه ۴** توجه کنید که اگر  $g(x) = x^2 - x$  آن گاه  $g(1) = 0$  و  $g(2) = 2$  بنابراین

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 2$$

بنابراین

$$f(1) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 0 \Rightarrow 2^{-A-B} = 2 \Rightarrow -A-B = 1 \Rightarrow A+B = -1$$

$$f(2) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 2 \Rightarrow 2^{-2A-B} = 4 \Rightarrow -2A-B = 2 \Rightarrow 2A+B = -2$$

از حل دستگاه معادلات  $\begin{cases} A+B = -1 \\ 2A+B = -2 \end{cases}$  نتیجه می شود  $A = -1$  و  $B = 0$ .

در نتیجه

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \Rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 6$$

**۲۴۱۰-گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که

$$\tan \frac{11\pi}{4} = \tan \left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin \frac{15\pi}{4} = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \cos \left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4} = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

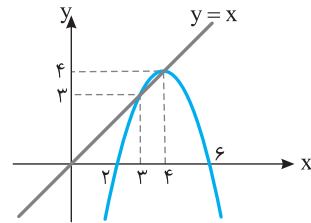
**۲۴۱۱-گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که  $f(x) = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$  بنابراین

دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $\frac{2\pi}{|2b|}$  و حداکثر مقدار تابع برابر  $1 + \frac{a}{2}$  است. با توجه به نمودار تابع  $f$  دوره تناوب برابر  $\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$  و حداکثر مقدار تابع برابر

$\frac{3}{2}$  است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1, \quad 1 + \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

**راه حل دوم** به نمودار این تابع و خط  $y = x$  توجه کنید. در بازه  $(3, 4)$  نمودار تابع  $f$  بالای این خط قرار دارد.



**راه حل سوم** در تابع  $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ . مقادیر  $f(3)$  و  $f(4)$  را به دست می آوریم:

$$f(3) = -9 + 24 - 12 = 3, \quad f(4) = -16 + 32 - 12 = 4$$

بنابراین در نقاط  $x = 3$  و  $x = 4$  نمودار تابع  $f$  بالای خط  $y = x$  قرار ندارد، بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳ یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینه (۱) جواب است.

**۲۴۰۵-گزینه ۴** فرض کنید بهروز به تنهایی در  $t$  ساعت این کار را انجام می دهد. بنابراین فرهاد در  $t+9$  ساعت این کار را انجام می دهد. پس بهروز در

هر ساعت  $\frac{1}{t}$  از این کار و فرهاد در هر ساعت  $\frac{1}{t+9}$  از این کار را انجام

می دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار  $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9}$  از این کار را انجام می دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می کنند، پس در یک

ساعت  $\frac{1}{20}$  کار را با هم انجام می دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow 20(t+9) + 20t = t(t+9) \Rightarrow t^2 - 31t - 180 = 0$$

$$(t-36)(t+5) = 0 \Rightarrow t = 36, t = -5 \text{ (غ.ق.)}$$

**۲۴۰۶-گزینه ۲** اگر  $x \geq \frac{1}{2}$  آن گاه معادله به صورت  $2x - 1 + x + 2 = 3$

در می آید که جواب آن  $x = \frac{2}{3}$  است. اگر  $-2 < x < \frac{1}{2}$  آن گاه معادله

به صورت  $-2x + 1 + x + 2 = 3$  در می آید که  $x = 0$  جواب آن است. اگر  $x \leq -2$  آن گاه معادله به صورت  $-2x + 1 - x - 2 = 3$  در می آید که

$x = -\frac{4}{3}$  جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جواب های معادله

$x = \frac{2}{3}$  و  $x = 0$  هستند که مجموع آن ها برابر  $\frac{2}{3}$  است.

**۲۴۰۷-گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

بنابراین

$$(g \circ f^{-1})(2) = g(1) = \text{تعریف نشده}, \quad (g \circ f^{-1})(5) = g(2) = 3$$

$$(g \circ f^{-1})(4) = g(3) = 1, \quad (g \circ f^{-1})(6) = g(4) = 2$$

بنابراین

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{5, 4, 6\}$$

در نتیجه

$$D_{\frac{g}{g \circ f^{-1}}} = D_g \cap D_{g \circ f^{-1}} - \{x | (g \circ f^{-1})(x) = 0\} = \{4, 5\}$$

در توابع داده شده در گزینه ها فقط تابع گزینه (۱) دامنه اش  $\{4, 5\}$  است.

تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  پیوسته است، پس  $a+b=0$ . از طرف دیگر

$$f(-1) = -a+b, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax+b) = -a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x[x]) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (-x) = 1$$

تابع  $f$  در نقطه  $x=-1$  پیوسته است، پس  $-a+b=1$ . از حل دستگاه

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=1 \end{cases} \text{ معادلات نتیجه می‌شود } a = -\frac{1}{2} \text{ و } b = \frac{1}{2}$$

**گزینه ۲ - ۲۴۱۶** ابتدا توجه کنید که  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-5) = -1$ . بنابراین اولاً

باید  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b)$  برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت

$x^2+ax+b$  در یک همسایگی نقطه  $x=2$  مثبت باشد. پس

باید برابر  $(x-2)^2$  باشد، در نتیجه

$$x^2+ax+b = x^2-4x+4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

پس  $a+b=0$ .

**گزینه ۳ - ۲۴۱۷** ابتدا توجه کنید که

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

$$\text{بنابراین } (fog)'(1) = g'(1)f'(g(1)) = g'(1)f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

**گزینه ۴ - ۲۴۱۸** خط  $y=3x-5$  در نقطه  $(2,1)$  بر نمودار تابع  $y$

ماس است. پس  $g(2)=1$  و  $g'(2)=3$ . از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{2x-2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$\text{بنابراین } (fog)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = g'(2)f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

**گزینه ۱ - ۲۴۱۹** ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطه  $x=2$

علامت عبارت  $x^2-2x$  منفی است، بنابراین  $|x^2-2x| = 2x-x^2$  در

واقع تابع  $f$  به صورت زیر است

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x & x \leq 0 \\ 2x-x^2 & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2+ax+b & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & x < 0 \\ 2-2x & 0 < x < 2 \\ x+a & x > 2 \end{cases}$$

چون تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  مشتق‌پذیر است، پس  $f'_+(2) = f'_-(2)$ . بنابراین

$$2+a = 2-4 \Rightarrow a = -4$$

از طرف دیگر تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  پیوسته است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

بنابراین

$$2+2a+b = 4-4 \Rightarrow b = -2a-2 = 6$$

در نتیجه  $a+b=2$ .

با توجه به اینکه نمودار تابع  $f$  در اطراف نقطه  $x=0$  صعودی است، مقادیر  $a$  و  $b$  هم علامت‌اند. بنابراین  $a=1$  و  $b=1$  یا  $a=-1$  و  $b=-1$ . پس  $a+b$  می‌تواند برابر ۲ یا -۲ باشد که فقط حالت  $a+b=2$  در گزینه‌ها وجود دارد.

**گزینه ۱ - ۲۴۱۲** ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) \\ &= (\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) \end{aligned}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$(\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x - 1)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x - 1 = 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 2 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

معادله  $\sin x + \cos x - 1 = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  جواب‌های  $x=0$  و  $x=\frac{\pi}{2}$

را دارد که مجموع آن‌ها برابر  $\frac{5\pi}{2}$  است.

**گزینه ۱ - ۲۴۱۳** بازه  $(x+1, 2x-1)$  یک همسایگی عدد ۳ است،

بنابراین بایستی  $x+1 < 3 < 2x-1$ .

مجموعه جواب‌های نامعادله‌های  $x+1 < 3$  و  $3 < 2x-1$  را به دست می‌آوریم:

$$(1) \quad x+1 < 3 \Rightarrow x < 2 \quad (2) \quad 3 < 2x-1 \Rightarrow x > 2$$

اشتراک مجموعه جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) برابر تهی است.

**گزینه ۳ - ۲۴۱۴** ابتدا توجه کنید که  $f(2) = 2a-1$  و

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax-1) = 2a-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+\sqrt{x+2})}{x+1} = \frac{3(2+2)}{2+1} = 4$$

بنابراین برای اینکه تابع  $f$  در  $x=2$  پیوسته باشد باید تساوی  $2a-1=4$  برقرار

باشد که نتیجه می‌شود  $a = \frac{5}{2}$ . توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید به

کمک قاعده هوییتال نیز به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{1 - \frac{1}{\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

**گزینه ۳ - ۲۴۱۵** ابتدا توجه کنید که

$$f(1) = a+b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x[x]) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

۲۴۲۳- گزینه ۲ فرض کنید  $B_1$  پیشامد تعلق لامپ انتخابی به جعبه

اول،  $B_2$  پیشامد تعلق لامپ انتخابی به جعبه دوم و  $A$  پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی باشد. طبق فرمول احتمال کل،

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

طبق فرض  $P(B_1) = \frac{5}{12}$  و  $P(B_2) = \frac{7}{12}$ ، زیرا لامپ را از بین ۵ لامپ از جعبه اول

و ۷ لامپ از جعبه دوم انتخاب می‌کنیم، همچنین چون ۴ تا از ۲۰ لامپ جعبه اول و ۳

تا از ۱۲ لامپ جعبه دوم معیوب‌اند، پس  $P(A|B_1) = \frac{4}{20}$  و  $P(A|B_2) = \frac{3}{12}$ .

در نتیجه

$$P(A) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{20} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{1}{12} + \frac{7}{48} = \frac{11}{48}$$

۲۴۲۴- گزینه ۳ می‌دانیم اگر  $A$  و  $B$  مستقل باشند،  $A$  و  $B'$  نیز

مستقل‌اند. بنابراین

$$\begin{cases} P(A \cap B) = 0/6 \\ P(A \cap B') = 0/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A)P(B) = 0/6 \\ P(A)P(B') = 0/2 \end{cases}$$

$$P(A)P(B) + P(A)P(B') = 0/8$$

$$P(A)(P(B) + P(B')) = 0/8 \Rightarrow P(A) = 0/8$$

$$\frac{P(A)P(B) = 0/6}{0/8} \Rightarrow P(B) = \frac{0/6}{0/8} = \frac{3}{4}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

$$0/8 + (1 - \frac{3}{4}) - 0/2 = 0/8 + 0/25 - 0/2 = 0/85$$

۲۴۲۵- گزینه ۱ فرض کنید  $A$  پیشامد شرکت کردن امیر و  $B$  پیشامد

شرکت کردن بهروز در مسابقه علمی باشد. طبق فرض  $P(A) = 0/6$ .

$P(B) = 0/3$  و  $P(A|B) = 0/5$ . باید  $P(A|B')$  را حساب کنیم. طبق

قانون احتمال کل

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

$$0/6 = 0/3 \times 0/5 + (1 - 0/3)P(A|B')$$

$$0/6 = 0/15 + 0/7P(A|B') \Rightarrow P(A|B') = \frac{0/45}{0/7} = \frac{9}{14}$$

۲۴۲۶- گزینه ۲ اگر فضای نمونه‌ای آزمایش را فقط برای مهره دوم

تشکیل دهیم، ۱۰ مهره عضو این فضای نمونه‌ای هستند که ۶ تا از آن‌ها سفید

است. بنابراین احتمال سفید بودن مهره دوم  $0/6$  است.

۲۴۲۷- گزینه ۲ در دوزنقه  $ABCD$  نقاط  $M$  و  $N$  وسط‌های دو ساق

هستند، پس بنابر قضیه میان‌خط در دوزنقه  $MN = \frac{AB+DC}{2}$  و اگر ارتفاع

$AH' = HH' = h$  آن‌گاه  $AH$  را رسم کنیم، آن‌گاه

۲۴۲۰- گزینه ۳ راه‌حل اول تابع  $f$  در  $x=0$  تعریف نشده پس در این

نقطه مشتق‌پذیر نیست. عبارت  $x^3 - 2x$  در ضابطه  $f$  داخل قدرمطلق قرار

دارد و این عبارت در  $x=0$  و  $x = \pm\sqrt{2}$  برابر صفر می‌شود و در نتیجه تابع  $f$

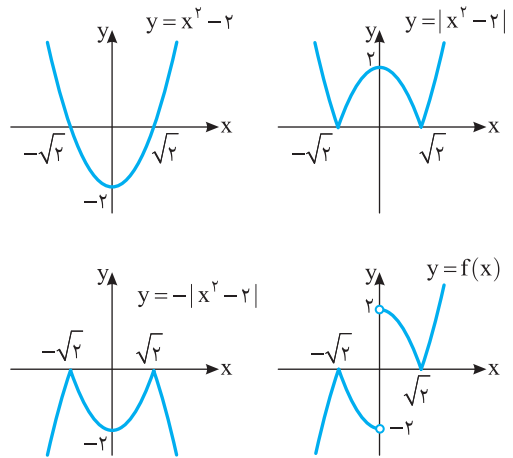
در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. بنابراین تابع  $f$  در سه نقطه مشتق ندارد.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x} = \frac{|x||x^2 - 2|}{x} = \begin{cases} |x^2 - 2| & x > 0 \\ -|x^2 - 2| & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. واضح است که در  $x = \sqrt{2}$ ،  $x = 0$

و  $x = -\sqrt{2}$  تابع  $f$  مشتق‌پذیر نیست.



۲۴۲۱- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[0, 2]$  برابر است با

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع  $f$  در  $x = \frac{3}{4}$  برابر است با  $f'(\frac{3}{4})$ :

$$f'(x) = \sqrt{4x+1} + \frac{4(x+2)}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'(\frac{3}{4}) = 2 + \frac{11}{4} = \frac{19}{4}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[0, 2]$  از آهنگ لحظه‌ای آن در

$x = \frac{3}{4}$  به اندازه  $\frac{1}{4} - \frac{19}{4} = -5$  بیشتر است.

۲۴۲۲- گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع  $f$  معلوم است که این تابع فقط در

$x=3$  اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx = x(4x^2 + 3ax + 2b)$$

علامت  $f'(x)$  در  $x=0$  نباید تغییر کند و فقط در  $x=3$  باید تغییر کند.

بنابراین باید  $b=0$  و

$$f'(x) = x(4x^2 + 3ax) = x^2(4x + 3a)$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

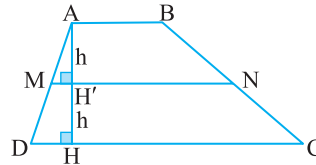
$$f(x) = x^4 - 4x^3 \Rightarrow f(-2) = 48$$

بنابر فرض سؤال،

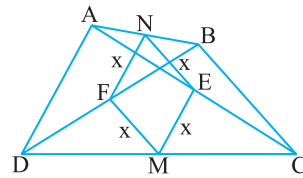
$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}h(AB+MN)}{\frac{1}{2}h(MN+DC)} = \frac{3}{5}$$

$$5AB + 5MN = 3MN + 3DC$$

$$5AB - 3DC = -2\left(\frac{AB+DC}{2}\right) \Rightarrow 6AB = 2DC \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{1}{3}$$



**۲۴۲۸- گزینه ۱** فرض کنید نقاط  $M$  و  $N$  وسط‌های دو ضلع غیر مجاور چهارضلعی  $ABCD$  و نقاط  $E$  و  $F$  وسط‌های دو قطر آن باشند و چهارضلعی  $MENF$  لوزی به ضلع  $x$  باشد. بنابر قضیه میان خط در مثلث نتیجه می‌گیریم  $BC = AD = 2x$  پس  $BC = 2EN = 2x$  و  $AD = 2ME = 2x$  یعنی دو ضلع غیرمجاور دیگر چهارضلعی  $ABCD$  برابرند.



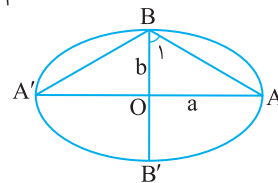
**۲۴۲۹- گزینه ۳** اگر قطر بزرگ و  $BB'$  قطر کوچک بیضی

باشند، آن‌گاه اندازه زاویه  $ABA'$  مورد سؤال است. می‌دانیم  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  و بنابر فرض  $e = \frac{2}{3}$ .

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{2}{3} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه  $OAB$  می‌نویسیم

$$\tan \hat{B}_1 = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{ABA}' = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$



**۲۴۳۰- گزینه ۲** داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

$$10/6, 10/6, 11/2, 11/5, 11/9, 12/3, 12/7, 12/8, 13/5, 30/2$$

چون تعداد داده‌ها ۱۰ تا است، پس میانه برابر میانگین داده‌های پنجم و ششم، چارک اول برابر داده سوم و چارک سوم برابر داده هشتم است. بنابراین

$$Q_2 = \frac{11/9 + 12/3}{2} = 12/1, Q_1 = 11/2, Q_3 = 12/8$$

$$\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{11/2 + 12/8 - 2 \times 12/1}{12/8 - 11/2} = \frac{-1/2}{1/6} = -3$$