جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

جامع ریاضیات تجربی

+ موج آزمون

ویراست دوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

نشرالگو

فصل اول

پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

۱- گزینهٔ ۲ از تساوی دو زوج مرتب نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+۲b=-۱ \\ ۲a-b=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=-۱ \end{cases} \Rightarrow a-b=۲$$

۲- گزینهٔ ۳ از هریک از عددهای ۱ و ۲ دو پیکان خارج شده است، پس $a+b=۲$ و $a-b=۶$ که نتیجه می‌شود $a=۴$ و $b=-۲$. بنابراین $ab=-۸$.

۳- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج‌های مرتب $(۳,۴)$ و $(۳,m^۲)$ نتیجه می‌شود $m^۲=۴$، پس $m=\pm ۲$. با توجه به زوج‌های مرتب $(۴,m+n)$ و $(۴,۲n+۱)$ نتیجه می‌شود $m+n=۲n+۱$، پس $n=m-۱$. اگر $m=۲$، آن‌گاه $n=۱$ و $f=\{(۳,۴),(۳,۲),(۴,۳)\}$ که به خاطر دو زوج مرتب $(۳,۴)$ و $(۳,۲)$ که عضو رابطه هستند، این رابطه، تابع نیست. اگر $m=-۲$، آن‌گاه $n=-۳$ و $f=\{(۳,۴),(-۹,-۲),(۴,-۵)\}$. بنابراین رابطهٔ f، تابع است، پس $mn=۶$.

۴- گزینهٔ ۱ برای اینکه برد تابع f تک‌عضوی باشد باید اعداد ۶، $۳m$ و $۲m+n$ یکسان باشند:

$$۳m=۶\Rightarrow m=۲\ ,\qquad ۲m+n=۶\xrightarrow{m=۲}۴+n=۶\Rightarrow n=۲$$

بنابراین $mn=۴$.

۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=۴x+۴\Rightarrow \begin{cases} f(\frac{x}{۲})=۴(\frac{x}{۲})+۴=۲x+۴ \\ f(\frac{x}{۴})=۴(\frac{x}{۴})+۴=x+۴ \end{cases}$$

بنابراین $f(\frac{x}{۲})-f(\frac{x}{۴})=۲x+۴-(x+۴)=x$.

۶- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\frac{۲}{x-۱}$، آن‌گاه $t\neq ۰$ و $\frac{۱}{t}=\frac{x-۱}{۲}$، پس $x=\frac{۲}{t}+۱=\frac{۲+t}{t}$. به این ترتیب

$$f(\frac{۲}{x-۱})=\frac{x+۱}{x-۱}\Rightarrow f(t)=\frac{\frac{۲+t}{t}+۱}{\frac{۲+t}{t}-۱}=\frac{۲+۲t}{۲}=t+۱$$

بنابراین اگر $x\neq ۰$، آن‌گاه $f(x)=x+۱$.

۷- گزینهٔ ۴ چون $f(۲)-f(۴)=\frac{۲}{۵}$، پس ابتدا مقادیر $f(۲)$ و $f(۴)$ را حساب می‌کنیم:

$$۲<۴\Rightarrow f(۲)=k\times ۲+۴=۲k+۴\ ,\qquad ۴\geq ۴\Rightarrow f(۴)=\frac{۲}{۵}\times ۴=\frac{۸}{۵}$$

بنابراین

$$f(۲)-f(۴)=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۲k+۴-\frac{۸}{۵}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۲k=\frac{۲}{۵}+\frac{۸}{۵}-۴=-۲$$

پس $۲k=-۲$، یعنی $k=-۱$.

۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابع ثابت باشد، باید فقط یک عضو در برد آن وجود داشته باشد. با توجه به آنکه $f(۱)=۲$، پس $\begin{cases} a-b=۲ \\ ۳a-۷b=۲ \end{cases}$. بنابراین $a=۳$ و $b=۱$. در نتیجه $a+b=۴$.

۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که چون تابع f همانی است، پس $f(x-۴)=x-۴$. بنابراین

$$(۲a-۷)x+b+۱=x-۴\Rightarrow \begin{cases} ۲a-۷=۱\Rightarrow a=۴ \\ b+۱=-۴\Rightarrow b=-۵ \end{cases}$$

در نتیجه $f(a+b)=f(-۱)=-۱$.

راه‌حل دوم اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=\frac{۱}{۲}$، به‌دست می‌آید

$$f(-\frac{۷}{۲})=(۲a-۷)\times\frac{۱}{۲}+b+۱\Rightarrow -\frac{۷}{۲}=a-\frac{۷}{۲}+b+۱\Rightarrow a+b=-۱$$

۱۰- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=ax^۲-۳ax+x^۲-bx+b=(a+۱)x^۲-(۳a+b)x+b$$

برای اینکه تابع f خطی باشد، باید ضابطهٔ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس

$$a+۱=۰\Rightarrow a=-۱\Rightarrow f(x)=(۳-b)x+b$$

در نتیجه $f(۱)=۳-b+b=۳$.

۱۱- گزینهٔ ۲ مقادیر $x=۳$، $x=۲$ و $x=۰$ را در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم:

$$f(۳)=۹a+۳b+c,\quad f(۲)=۴a+۲b+c,\quad f(۰)=c$$

بنابراین

$$f(۳)-۲f(۲)+۲f(۰)=۹a+۳b+c-۸a-۴b-۲c+۲c=a-b+c=f(-۱)$$

۱۲- گزینهٔ ۴ تساوی را به شکل $۲x+f(x)=۴x\times f(x)-۱۲$ می‌نویسیم. در نتیجه $(۴x-۱)\times f(x)=۲x+۱۲$، پس $f(x)=\frac{۲x+۱۲}{۴x-۱}$.

۱۳- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$، $x=-\frac{b}{۲a}$ است. بنابراین طبق معادلهٔ داده شده $x=-\frac{۲}{۲a}$ طول رأس سهمی است. پس $\frac{-۲}{۲a}=۱$ و در نتیجه $a=-۱$. مختصات رأس سهمی در معادلهٔ آن صدق می‌کند، پس

$$-۱=a+۲+b\xrightarrow{a=-۱}-۱=-۱+۲+b\Rightarrow b=-۲$$

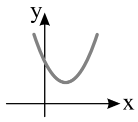
بنابراین $ab=۲$.

۱۴- گزینهٔ ۱ چون سهمی در نقاطی به طول -۱ و ۵ محور طول‌ها را قطع کرده است، این نقاط عرض یکسان دارند. پس معادلهٔ محور تقارن به‌صورت $x=\frac{۵-۱}{۲}=۲$ است که نقاط $(-۱,۰)$ و $(۵,۰)$ نسبت به آن قرینهٔ یکدیگرند.

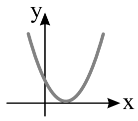
۱۵- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که $c=۵$. همچنین با توجه به معادلهٔ داده شده، طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{b}{۲}$ است، پس $-\frac{b}{۲}=-۲$. بنابراین $b=۴$، در نتیجه $b-c=-۱$.

۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که محور تقارن سهمی مورد نظر خط $x=-\frac{b}{۲a}$ است. چون علامت a و b فرق می‌کند، پس $-\frac{b}{۲a}>۰$ و در نتیجه محور تقارن از ناحیه‌های اول و چهارم می‌گذرد (گزینه‌های (۱) و (۳)). همچنین، اگر سهمی از مبدأ مختصات بگذرد، آن‌گاه $c=۰$، که درست نیست. بنابراین سهمی مورد نظر می‌تواند به‌صورت گزینهٔ (۳) باشد.

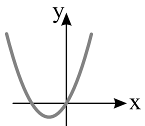
۱۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع در حالت‌های زیر از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد:



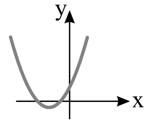
$\Delta<۰$



$\Delta=۰$



$\Delta>۰, c=۰, -\frac{b}{a}<۰$



$\Delta>۰, \frac{c}{a}>۰, -\frac{b}{a}<۰$

بنابراین Δ را حساب می‌کنیم: $\Delta=m^۲-۴(۴-m^۲)=۵m^۲-۱۶$. اکنون توجه کنید که

$$\Delta\le ۰\Rightarrow ۵m^۲-۱۶\le ۰\Rightarrow -\frac{۴}{\sqrt{۵}}\le m\le \frac{۴}{\sqrt{۵}}$$: حالت‌های اول و دوم

$$\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow ۵m^۲-۱۶>۰\Rightarrow m<-\frac{۴}{\sqrt{۵}} \text{ یا } m>\frac{۴}{\sqrt{۵}}\\ \frac{c}{a}\ge ۰\Rightarrow ۴-m^۲\ge ۰\Rightarrow -۲\le m\le ۲\\ -\frac{b}{a}<۰\Rightarrow -m<۰\Rightarrow m>۰\end{cases}$$: حالت‌های سوم و چهارم

$$\xrightarrow[\text{بازه‌های به‌دست آمده}]{\text{اشتراک گیری از}}\frac{۴}{\sqrt{۵}}<m\le ۲$$

اجتماع محدوده‌های به‌دست آمده در همهٔ حالت‌ها برابر است با

$$-\frac{۴}{\sqrt{۵}}\le m\le ۲$$

۱۸- گزینهٔ ۲ محیط شکل برابر است با

$$۴x+۴y=۴۰\Rightarrow y=۱۰-x$$

مساحت شکل برابر است با

$$S=۲xy+xy=۳xy=۳x(۱۰-x)=-۳x^۲+۳۰x$$

بیشترین مقدار این عبارت درجهٔ دوم برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است. بنابراین

$$S_{max}=-\frac{۹۰۰}{۴(-۳)}=۷۵$$

۱۹- گزینهٔ ۳ اعدادی که جواب معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ باشند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. با توجه به معادله مجموع این اعداد برابر $S=-\frac{b}{a}=۳$ است.

۲۰- گزینهٔ ۴ اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^۲+kx+۱=۰\xrightarrow{\Delta<۰}\Delta=k^۲-۴<۰$$

$$k^۲<۴\Rightarrow |k|<۲\Rightarrow -۲<k<۲$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینهٔ (۴) درست است.

۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_f=\{x|۹-x^۲\ge ۰, x^۲-۱>۰\}$$

$$۹-x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲\le ۹\Rightarrow -۳\le x\le ۳$$

$$x^۲-۱>۰\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

از اشتراک ناحیه‌های فوق معلوم می‌شود که $D_f=[-۳,-۱)\cup(۱,۳]$. پس عددهای صحیح ±۳ و ±۲ در دامنهٔ تابع هستند.

۲۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از $-۴\le x\le ۴$ نتیجه می‌گیریم $-۸\le -۲x\le ۸$، پس $-۵=۳-۸\le ۳-۲x\le ۳+۸=۱۱$. بنابراین برد تابع f بازهٔ $[-۵,۱۱]$ است.

راه‌حل دوم چون $f(x)=-۲x+۳$ یک تابع خطی است که ضریب x در آن منفی است برد آن با توجه به دامنه برابر $[f(۴),f(-۴)]$ است که برابر $[-۵, ۱۱]$ می‌شود.

۲۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=x^۲+۲x-۲=(x+۱)^۲-۳$.

از طرف دیگر، اگر $x\in[-۴,۵]$، آن‌گاه

$$-۴\le x\le ۵\Rightarrow -۳\le x+۱\le ۶\Rightarrow ۰\le(x+۱)^۲\le ۳۶\Rightarrow -۳\le(x+۱)^۲-۳\le ۳۳$$

بنابراین بزرگ‌ترین عضو برد f برابر ۳۳ است.

۲۴- گزینهٔ ۴ در مورد گزینهٔ (۴)، $D_f=D_g=[۰,۱]$ و اگر $x\in[۰,۱]$، آن‌گاه $f(x)=g(x)$. بنابراین این دو تابع برابرند. در مورد گزینه‌های دیگر، یا دامنهٔ تابع‌ها برابر نیست، یا $f(x)\neq g(x)$.

گزینهٔ (۱) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}, D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

گزینهٔ (۲) $D_f=D_g=\mathbb{R}, \quad f(x)=|x|, g(x)=x\Rightarrow f(x)\neq g(x)$

گزینهٔ (۳) $D_f=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty), D_g=[۱,+\infty)\Rightarrow D_f\neq D_g$

۲۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $S=\pi r^۲$ و در نتیجه $r=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}$. بنابراین

$$P=۲\pi r=۲\pi(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}})\Rightarrow P(S)=۲\sqrt{\pi}\sqrt{S}=۲\sqrt{\pi S}$$

۲۶- گزینهٔ ۱ اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم، شعاع دایره $\frac{a}{۲}$ و محیط مربع برابر $۴a$ می‌شود. بنابراین

$$\text{مساحت مربع}=a^۲ , \quad \text{مساحت دایره}=\pi\frac{a^۲}{۴} , \quad P=۴a\Rightarrow a=\frac{P}{۴}$$

$$\text{مساحت قسمت‌های رنگ شده}=a^۲-\frac{\pi a^۲}{۴}=a^۲(\frac{۴-\pi}{۴})$$

$$=\frac{P^۲}{۱۶}(\frac{۴-\pi}{۴})=(\frac{۴-\pi}{۶۴})P^۲$$

۲۷- گزینهٔ ۳ معادلهٔ نیم‌دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow y^۲=۱-x^۲\xrightarrow{y\ge ۰}y=\sqrt{۱-x^۲}$$

بنابراین طول مستطیل $۲x$ و عرض آن $\sqrt{۱-x^۲}$ می‌شود و محیط آن برابر است با $P(x)=۲(۲x+\sqrt{۱-x^۲})=۴x+۲\sqrt{۱-x^۲}$.

۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\left.\begin{array}{l}(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=-۱-۲=-۳\\(f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۲-(-۱)=۳\end{array}\right.\Rightarrow\frac{(f+g)(۲)}{(f-g)(۱)}=\frac{-۳}{۳}=-۱$$

۲۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$D_{\frac{f}{g}}=\{x|x\in D_f\cap D_g , g(x)\neq ۰\}=\{۱,۲,۳\}$$

بنابراین

$$(\frac{f}{g})(۱)=\frac{f(۱)}{g(۱)}=\frac{۶}{-۱}=-۶, \quad (\frac{f}{g})(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۳}{۱}=۳$$

$$(\frac{f}{g})(۳)=\frac{f(۳)}{g(۳)}=\frac{۰}{۹}=۰$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع $\frac{f}{g}$ برابر -۳ است.

۳۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^۲+۳x+۲)-(x^۲+۲x+۱)=x+۱$$

بنابراین $(f-g)(x-۱)=x-۱+۱=x$.

راه‌حل دوم چون $f(۱)=۶$ و $g(۱)=۴$ ، پس $(f-g)(۱)=۶-۴=۲$. اکنون اگر در عبارت $(f-g)(x-۱)$ به‌جای x قرار دهیم ۲، $(f-g)(۱)$ به‌دست می‌آید که برابر ۲ است. تنها در عبارت گزینهٔ (۱)، با قرار دادن $x=۲$ ، حاصل ۲ می‌شود.

۳۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** دامنهٔ تابع f به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} ۸-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۸ \\ x-۳>۰\Rightarrow x>۳ \end{cases}\Rightarrow ۳<x\leq ۸\Rightarrow D_f=(۳,۸]$$

دامنهٔ تابع g به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

x	−∞		۳		۵		+∞
$\frac{x-۳}{۵-x}$		−	۰	+	ت ن	−	

$$\Rightarrow D_g=[۳,۵)$$

بنابراین دامنهٔ تابع $f\times g$ به‌صورت زیر است

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(۳,۸]\cap[۳,۵)=(۳,۵)$$

راه‌حل دوم با توجه به گزینه‌ها امتحان می‌کنیم که آیا عدد ۶ در دامنهٔ تابع $f\times g$ قرار دارد یا نه. چون $x=۶$ عبارت زیر رادیکال در تابع g را منفی می‌کند، پس $x=۶$ در دامنهٔ تابع g نیست و در نتیجه در دامنهٔ $f\times g$ هم نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نمی‌توانند جواب باشند.

۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=|x-۱|=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۱ \\ -x+۱ & x<۱ \end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases} ۲x-۱-(x-۱) & x\geq ۱ \\ ۳x+۱-(-x+۱) & x<۱ \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x & x\geq ۱ \\ ۴x & x<۱ \end{cases}$$

۳۳- گزینهٔ ۳ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(-۱)=۲$$

$$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(-۱)=۲$$

$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۳)=۲$$

$$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(-۲)=۴$$

بنابراین $gof=\{(۱,۲),(۲,۲),(-۱,۲),(۳,۴)\}$.

۳۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(fof)(۳)=f(f(۳))$. از طرف دیگر،

$$f(۳)=۳^۲+۴=۱۳\ ,\quad f(f(۳))=f(۱۳)=\frac{۱۳-۱}{۲}=۶$$

بنابراین $(fof)(۳)=۶$.

۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا $(fog)(a)$ و $(gof)(a)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(a)=f(g(a))=f(۳a-۲)=۲(۳a-۲)+۳=۶a-۱$$

$$(gof)(a)=g(f(a))=g(۲a+۳)=۳(۲a+۳)-۲=۶a+۷$$

بنابراین معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$۶a-۱+۶a+۷=۲a\Rightarrow ۱۰a=-۶\Rightarrow a=-\frac{۳}{۵}$$

۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲+۲x)=a(x^۲+۲x)+۱=ax^۲+۲ax+۱$$

بنابراین باید مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+۲ax+۱=۲$ دوعضوی باشد. یعنی باید Δ ی معادلهٔ $ax^۲+۲ax-۱=۰$ مثبت باشد:

$$\Delta=(۲a)^۲-۴a(-۱)=۴a^۲+۴a>۰\Rightarrow ۴a(a+۱)>۰\Rightarrow a>۰ \text{ یا } a<-۱$$

۳۷- گزینهٔ ۱ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(fog)(-۳)=f(g(-۳))=f(۱)=\sqrt{۳}$$

$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۰)=۲$$

$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۱)=\sqrt{۳}$$

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۳) \text{ تعریف نشده}$$

بنابراین $fog=\{(-۳,\sqrt{۳}),\ (-۲,۲),\ (-۱,\sqrt{۳})\}$.

۳۸- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq ۲,-۱\leq ۵-۲x\leq ۳\}$$

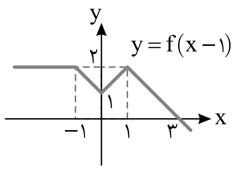
از نامعادلهٔ $-۱\leq ۵-۲x\leq ۳$ نتیجه می‌شود $-۶\leq -۲x\leq -۲$ پس $۱\leq x\leq ۳$.
بنابراین $D_{fog}=\{۰\leq x\leq ۲,۱\leq x\leq ۳\}=[۱,۲]$.

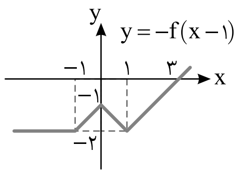
۳۹- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به‌ترتیب $D_f=[۱,+\infty)$ و $D_g=[-\sqrt{۳},\sqrt{۳}]$ است. بنابراین

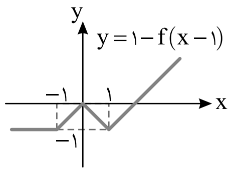
$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x|\ x\geq ۱\ ,-\sqrt{۳}\leq\sqrt{x-۱}\leq\sqrt{۳}\}$$

از نامعادلهٔ $-\sqrt{۳}\leq\sqrt{x-۱}\leq\sqrt{۳}$ نتیجه می‌شود $x-۱\leq ۳$ پس $x\leq ۴$.
بنابراین $D_{gof}=\{x|x\geq ۱\ ,\ x\leq ۴\}=[۱,۴]$.

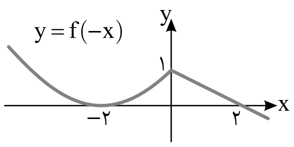
۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x-۱)$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۱-f(x-۱)$ به‌دست بیاید.

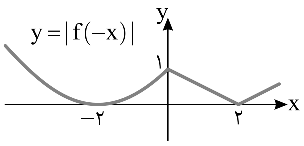




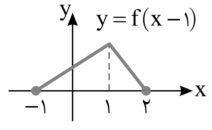


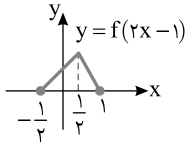
۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم کردن نمودار تابع $y=|f(-x)|$ ، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.





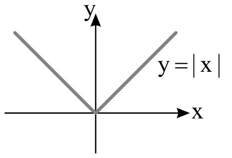
۴۲- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ به‌دست آید. توجه کنید که با این کار نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود.

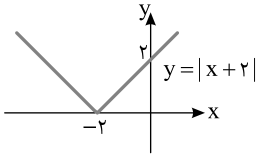


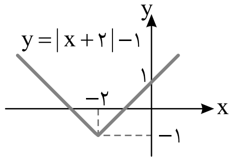


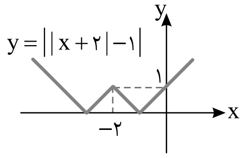
۴۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=f(۲x)-۱$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(۲(x-۱))-۱$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(۲(۲x-۱))-۱=f(۴x-۲)-۱$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=۲(f(۴x-۲)-۱)$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده به‌صورت $y=۲f(۴x-۲)-۲$ است.

۴۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را رسم می‌کنیم و آن را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x+۲|$ به‌دست آید. این نمودار را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x+۲|-۱$ رسم شود. اکنون قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\left||x+۲|-۱\right|$ رسم شود.









۴۵- گزینهٔ ۳ در تابع $\{(۱,۳),(۲,۴),(۵,۷),(۶,۱)\}$ هر مؤلفهٔ دوم متناظر دقیقاً یک مؤلفهٔ اول است. یعنی هیچ دو زوج مرتبی مؤلفهٔ دوم یکسان ندارند، پس این تابع یک‌به‌یک است.

۴۶- گزینهٔ ۲ چون مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(a,۱)$ و $(۴-a,۱)$ یکسان هستند، پس باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشند،

$$۴-a=a\Rightarrow a=۲$$

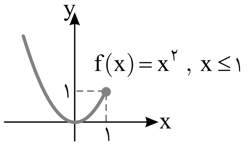
به همین ترتیب باید مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب $(۱۰,۳)$ و $(۱+b,۳)$ برابر باشند،

$$۱۰=۱+b\Rightarrow b=۹$$

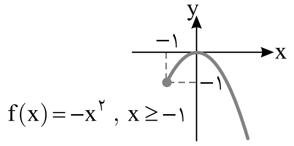
بنابراین $a+b=۱۱$.

۴۷- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار تابع‌های داده شده، واضح است که تابع $f(x)=۱-x^۲, x\le ۰$ یک‌به‌یک است.

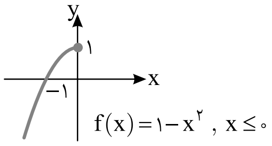
گزینهٔ (۱)



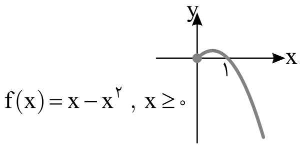
گزینهٔ (۲)



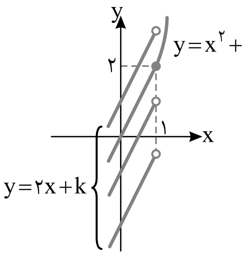
گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)



۴۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نمودار تابع به ازای مقادیر مختلف k به شکل زیر است



واضح است که بیشترین مقدار تابع $y=۲x+k$ به ازای $x<۱$ نباید از ۲ بیشتر باشد، پس

$$۲+k\le ۲\Rightarrow k\le ۰$$

راه‌حل دوم اگر $x\ge ۱$، آن‌گاه تابع $g(x)=x^۲+۱$ یک‌به‌یک است و $R_g=[۲,+\infty)$ و اگر $x<۱$، آن‌گاه تابع $h(x)=۲x+k$ یک‌به‌یک است و $R_h=(-\infty,۲+k)$. در نتیجه برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد باید $R_g\cap R_h=\varnothing$، پس

$$۲+k\le ۲\Rightarrow k\le ۰$$

۴۹- گزینهٔ ۳ تابع گزینهٔ (۱) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-۳<-۱$، اما $f(-۳)<f(-۱)$. تابع گزینهٔ (۲) اکیداً نزولی نیست، زیرا $۰<۱$، اما $f(۰)=f(۱)$. تابع گزینهٔ (۳) اکیداً نزولی است، زیرا $-۳<-۱<۱$ و $f(-۳)>f(-۱)>f(۱)$. تابع گزینهٔ (۴) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-۲<-۱$، اما $f(-۲)=f(-۱)$.

۵۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f نزولی است و $۱<۲<۳$، پس

$$f(۱)\ge f(۲)\ge f(۳)\Rightarrow ۲a+۱\ge a-۲\ge ۲-a$$

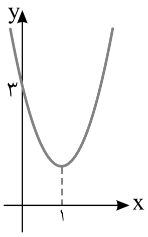
اکنون توجه کنید که

$$۲a+۱\ge a-۲\Rightarrow a\ge -۳ \qquad (۱)$$

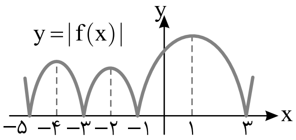
$$a-۲\ge ۲-a\Rightarrow a\ge ۲ \qquad (۲)$$

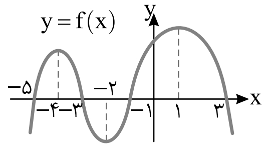
اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $a\ge ۲$.

۵۱- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $y=۲x^۲-۴x+۳$ برابر است با $-\frac{b}{۲a}=۱$. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ و هر زیر مجموعهٔ آن اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(۱,۲)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.

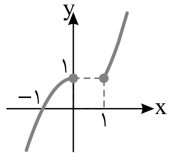


۵۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر نمودار تابع $y=f(x-۱)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف کنیم، نمودار تابع $y=|f(x)|$ به‌دست می‌آید. از روی این نمودار معلوم است که تابع $y=|f(x)|$ روی بازهٔ $(-۲,-۱)$ اکیداً نزولی است.



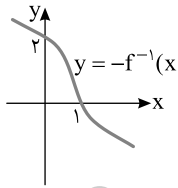


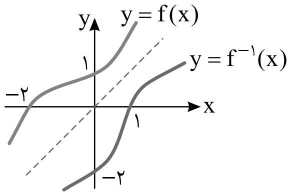
۵۳- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار، تابع f صعودی است.



۵۴- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابعی وارون‌پذیر باشد، باید یک‌به‌یک باشد. تابع گزینهٔ (۱) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۱)=f(۳)=۲$. تابع گزینهٔ (۲) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۲)=f(۵)=۳$. تابع گزینهٔ (۳) یک‌به‌یک است، زیرا $f(۱)=-۱$، $f(۲)=-۲$، $f(۳)=-۴$ و $f(۴)=-۵$، بنابراین مقادیر تابع f متمایزند. تابع گزینهٔ (۴) هم یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۱)=f(۳)=۰$.

۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار f را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم. سپس نمودار تابع $-f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار تابع $f^{-۱}$ را نسبت به محور x رسم کنیم.





۵۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f^{-۱}og)(۲)=f^{-۱}(g(۲))=f^{-۱}(۱)=۴$$

$$(g^{-۱}of)(۳)=g^{-۱}(f(۳))=g^{-۱}(۴)=۳$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(۱)=۲$، پس $f^{-۱}(۲)=۱$. به این ترتیب، $f(۱)+f^{-۱}(۲)=۳$.

۵۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $y=(x-۲)^۲-۴$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$(x-۲)^۲=y+۴\Rightarrow|x-۲|=\sqrt{y+۴}\xrightarrow{x<۲}$$

$$۲-x=\sqrt{y+۴}\Rightarrow x=۲-\sqrt{y+۴}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۴}$$

راه‌حل دوم چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(-۳,۲۱)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۲۱,-۳)$ عبور می‌کند. اکنون گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $f^{-۱}(۲۱)=۲-\sqrt{۲۵}=-۳$

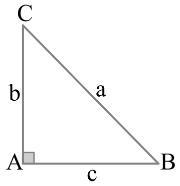
گزینهٔ (۲) $f^{-۱}(۲۱)=-۲+\sqrt{۲۵}=۳$

گزینهٔ (۳) $f^{-۱}(۲۱)=۲-\sqrt{۱۷}$

گزینهٔ (۴) $f^{-۱}(۲۱)=۲+\sqrt{۱۷}$

۵۹- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل،

$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}=\frac{c}{a}\Rightarrow c=\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}a$$



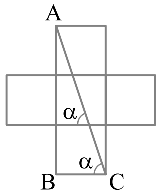
اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲=۲۵+(\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}a)^۲\Rightarrow a^۲=۲۵+\frac{۲۴}{۴۹}a^۲$$

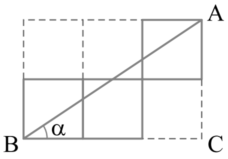
$$\frac{۲۵}{۴۹}a^۲=۲۵\Rightarrow a^۲=۴۹\Rightarrow a=۷$$

۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=A\hat{C}B$. در نتیجه،

$$\tan\alpha=\tan A\hat{C}B=\frac{AB}{BC}=\frac{۳}{۱}=۳$$



۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا شکل را به صورت مقابل کامل می‌کنیم. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،



$$AB^۲=AC^۲+BC^۲=۲^۲+۳^۲=۱۳\Rightarrow AB=\sqrt{۱۳}$$

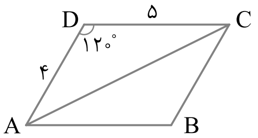
در نتیجه، $\triangle ABC:\ \sin\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$.

۶۲- گزینهٔ ۴ صورت کسر برابر است با

$$۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۳-۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=۰$$

بنابراین $A=۰$.

۶۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که



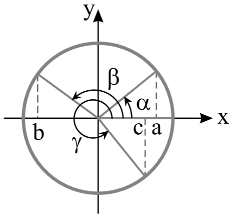
$$S_{ABCD}=۲S_{ADC}$$

$$=۲(\frac{۱}{۲}DC\times AD\times\sin\hat{D})$$

$$=۵\times۴\times\sin۱۲۰^\circ=۲۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۰\sqrt{۳}$$

۶۴- گزینهٔ ۲ اگر $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

۶۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که $b<۰$ و $a>c$. بنابراین $a>c>b$.



۶۶- گزینهٔ ۳ با توجه به $\sin\alpha\cos\alpha>۰$، مشخص است که مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم‌علامت هستند. با توجه به $\cos\alpha\cot\alpha<۰$، مشخص است که مقادیر $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ مختلف‌العلامت هستند. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد. در این ناحیه،

$$\sin\alpha<۰,\quad \cos\alpha<۰,\quad \cot\alpha>۰$$

۶۷- گزینهٔ ۱ چون $۹۰^\circ\le\alpha\le۱۸۰^\circ$، پس $۰\le\sin\alpha\le۱$ و در نتیجه

$$۰\le\frac{m}{۲}-۱\le۱\Rightarrow۱\le\frac{m}{۲}\le۲\Rightarrow۲\le m\le۴$$

۶۸- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $-۱\le \sin x\le ۱$ ، بنابراین $۰\le \sin^۲ x\le ۱$ ، پس $۰\le ۳\sin^۲ x\le ۳$ و در نتیجه $۲\le ۲+۳\sin^۲ x\le ۵$. بنابراین کمترین مقدار عبارت ۲ و بیشترین مقدار آن ۵ است، که حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۰ می‌شود.

۶۹- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه محور طول‌ها با خط مورد نظر زاویهٔ مثلثاتی ۳۰° تشکیل می‌دهد، شیب خط برابر $\tan ۳۰^\circ$ یا همان $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است. پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+b$ است و چون خط از نقطهٔ $(۶,\sqrt{۳})$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کنند:

$$\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times ۶+b\Rightarrow b=-\sqrt{۳}$$

پس معادلهٔ خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-\sqrt{۳}$ یا همان $x-\sqrt{۳}y-۳=۰$ است.

۷۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{۱-\tan x}{\tan x}=۲\Rightarrow ۱-\tan x=۲\tan x\Rightarrow \tan x=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین $\cot x=\frac{۱}{\tan x}=۳$. در نتیجه $\frac{\cot x}{\cot x-۱}=\frac{۳}{۳-۱}=\frac{۳}{۲}$.

۷۱- گزینهٔ ۲ با توجه به رابطهٔ $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ می‌توان نوشت

$$(\frac{۱}{۲m-۱})(m+۲)=۱\Rightarrow ۲m-۱=m+۲\Rightarrow m=۳$$

بنابراین $\tan\alpha=\frac{۱}{۵}$ و $\cot\alpha=۵$ و در نتیجه

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{۲۵}+۲۵=\frac{۶۲۶}{۲۵}$$

۷۲- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ می‌توان نوشت

$$(\frac{۳}{۵})^۲+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{۴}{۵}$$

با توجه به اینکه $۹۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$ ، مقدار $\cos\alpha$ باید منفی باشد، پس $\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$. با توجه به رابطهٔ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ، به‌دست می‌آید $\tan\alpha=\frac{\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}}=-\frac{۳}{۴}$. بنابراین $\tan\alpha-\cos\alpha=-\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۲۰}$.

۷۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ و $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ به‌دست می‌آید

$$A=\frac{\tan^۲ x}{\frac{۱}{\cos^۲ x}}+\frac{\cot^۲ x}{\frac{۱}{\sin^۲ x}}=\tan^۲ x\cos^۲ x+\cot^۲ x\sin^۲ x$$

$$=\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}\times\cos^۲ x+\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}\times\sin^۲ x=\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$$

۷۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{\sin^۴\theta}-\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\frac{\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}$$

$$=\frac{\cos^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\cot^۲\theta$$

راه‌حل دوم اگر در عبارت داده شده به جای θ مقدار ۳۰° را قرار دهیم، مقدار عبارت برابر است با $\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}-۹=۱۶-۴-۹=۳$. اگر در گزینه‌ها به جای θ مقدار ۳۰° را قرار دهیم، فقط $\cot^۲\theta$ برابر ۳ می‌شود. تنها گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

۷۵- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی $\tan\alpha+\cot\alpha=۳$ را به توان دو می‌رسانیم: $\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲\tan\alpha\cot\alpha=۹$.

چون $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ ، پس

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲=۹\Rightarrow \tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha=۷$$

۷۶- گزینهٔ ۱ دو طرف تساوی داده شده را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۳+\frac{۲\cos x}{\sin x}=\frac{۳}{\sin x}\Rightarrow ۳+۲\cot x=\frac{۳}{\sin x}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$۹+۱۲\cot x+۴\cot^۲ x=\frac{۹}{\sin^۲ x}=۹(۱+\cot^۲ x)$$

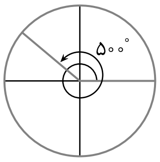
$$۹+۱۲\cot x+۴\cot^۲ x=۹+۹\cot^۲ x\Rightarrow ۵\cot^۲ x-۱۲\cot x=۰$$

$$\cot x=۰\ ,\cot x=\frac{۱۲}{۵}$$

چون $\cos x\ne ۰$ ، پس $\cot x\ne ۰$ و در نتیجه $\cot x=\frac{۱۲}{۵}$.

۷۷- گزینهٔ ۴ در تساوی $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$ قرار می‌دهیم $D=۷۵^\circ$:

$$\frac{۷۵^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۵\pi}{۱۲}$$



۷۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ۵۰۰° را می‌توان ۵ تا ۹۰° به علاوهٔ ۵۰° در نظر گرفت. ۵ تا ۹۰° یعنی ۵ تا ربع دایره، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۵۰۰° در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

راه‌حل دوم $۵۰۰^\circ=۳۶۰^\circ+۱۴۰^\circ$ و $۹۰^\circ\le ۱۴۰^\circ\le ۱۸۰^\circ$ ، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی ۵۰۰° در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

۷۹- گزینهٔ ۳ ابتدا اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB را برحسب رادیان حساب می‌کنیم:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{۹}$$

طول مسیر ماهواره برابر طول کمان AB است که برابر است با

$$l=r\times\theta\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=۳۶۰۰۰\times\frac{\pi}{۹}=۴۰۰۰\pi\ \text{کیلومتر}$$

۸۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ,\quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\ ,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

بنابراین

$$A=\frac{-۲\sin\alpha-۴\sin\alpha}{-۳\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{-۶\sin\alpha}{-۲\cos\alpha}=۳\tan\alpha$$

۸۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\,,\qquad \sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\,,\qquad \cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha-\sin\alpha}=\frac{-۲\cos\alpha}{-۲\sin\alpha}=\cot\alpha$$

۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin ۱۳۵^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=\sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۱۲۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-\cos ۶۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{\sin ۱۳۵^\circ-\cos ۱۲۰^\circ}{\sin ۱۳۵^\circ+\cos ۱۲۰^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}$$

$$=\frac{(\sqrt{۲}+۱)^۲}{۲-۱}=(\sqrt{۲}+۱)^۲=۳+۲\sqrt{۲}$$

۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{۷\pi}{۶}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۴}=\tan(\pi+\frac{\pi}{۴})=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$\cot\frac{۷\pi}{۴}=\cot(۲\pi-\frac{\pi}{۴})=-\cot\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۳}=\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $A=-\frac{۱}{۲}\times۱-۱\times\frac{۱}{۲}=-۱$.

۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{\pi}{۸}+\frac{۷\pi}{۸}=\pi\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۸}=-\cos\frac{۷\pi}{۸}$$

$$\frac{۳\pi}{۸}+\frac{۵\pi}{۸}=\pi\Rightarrow\cos\frac{۳\pi}{۸}=-\cos\frac{۵\pi}{۸}$$

بنابراین

$$\cos^۳\frac{\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۳\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}$$

$$=-\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}-\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}=۰$$

۸۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin\alpha$ مقداری منفی است. پس

$$\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\Rightarrow\frac{۱}{۳}=۱-۲\sin^۲\alpha\Rightarrow۲\sin^۲\alpha=\frac{۲}{۳}$$

$$\sin^۲\alpha=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-\sqrt{۳}}{۳},\qquad \sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\text{(غ.ق.ق.)}$$

۸۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$. پس

$$\frac{۱-۲\sin^۲(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos x}=\frac{\cos ۲(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos x}=\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}-۲x)}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin ۲x}{\cos x}=\frac{۲\sin x\cos x}{\cos x}=۲\sin x$$

۸۷- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{\sin^۲ ۱۵^\circ}+\frac{۱}{\cos^۲ ۱۵^\circ}=\frac{\cos^۲ ۱۵^\circ+\sin^۲ ۱۵^\circ}{\sin^۲ ۱۵^\circ\cos^۲ ۱۵^\circ}$$

$$=\frac{۱}{(\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ)^۲}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ)^۲}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۴})^۲}=۱۶$$

۸۸- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه $\frac{۳\pi}{۸}$ رادیان، نصف $\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان است، در تساوی $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ قرار می‌دهیم $\alpha=\frac{۳\pi}{۸}$ و در نتیجه

$$\cos(۲\times\frac{۳\pi}{۸})=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱\Rightarrow\cos\frac{۳\pi}{۴}=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱$$

$$\cos(\pi-\frac{\pi}{۴})=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱\Rightarrow-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱$$

$$۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos\frac{۳\pi}{۸}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos ۱۰۵^\circ=\cos(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ$$

$$\sin ۱۰۵^\circ=\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=\cos ۱۵^\circ$$

بنابراین

$$۳\cos^۲ ۱۰۵^\circ+\sin^۲ ۱۰۵^\circ=۳\sin^۲ ۱۵^\circ+\cos^۲ ۱۵^\circ$$

$$=۲\sin^۲ ۱۵^\circ+(\sin^۲ ۱۵^\circ+\cos^۲ ۱۵^\circ)=۲\sin^۲ ۱۵^\circ+۱$$

$$=۱-\cos(۲\times۱۵^\circ)+۱=۲-\cos ۳۰^\circ=۲-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۴-\sqrt{۳}}{۲}$$

۹۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$\frac{\sin ۲۲/۵^\circ}{\cos ۲۲/۵^\circ}-\frac{\cos ۲۲/۵^\circ}{\sin ۲۲/۵^\circ}=\frac{\sin^۲ ۲۲/۵^\circ-\cos^۲ ۲۲/۵^\circ}{\sin ۲۲/۵^\circ\times\cos ۲۲/۵^\circ}$$

$$=\frac{-\cos(۲\times۲۲/۵^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\times۲۲/۵^\circ)}=\frac{-\cos ۴۵^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin ۴۵^\circ}=-۲$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot ۲\alpha$ ، بنابراین

$$\tan ۲۲/۵^\circ-\cot ۲۲/۵^\circ=-(\cot ۲۲/۵^\circ-\tan ۲۲/۵^\circ)$$

$$=-۲\cot ۴۵^\circ=-۲$$

۹۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\tan ۱۵^\circ}{۱+\tan^۲ ۱۵^\circ}=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{۱}{\cos^۲ ۱۵^\circ}}=\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$ ، پس

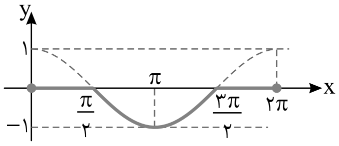
$$\frac{\tan ۱۵^\circ}{۱+\tan^۲ ۱۵^\circ}=\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۴}$$

۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos x}{۲} & \cos x\geq ۰\\ \dfrac{\cos x+\cos x}{۲} & \cos x<۰\end{cases}$$

$$=\begin{cases}۰ & ۰\leq x\leq\dfrac{\pi}{۲}\ \text{یا}\ \dfrac{۳\pi}{۲}\leq x\leq ۲\pi\\ \cos x & \dfrac{\pi}{۲}<x<\dfrac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

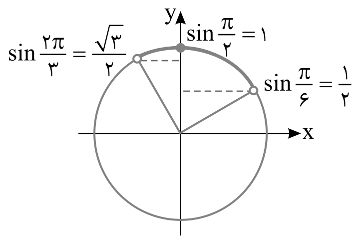
بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو رسم می‌شود:

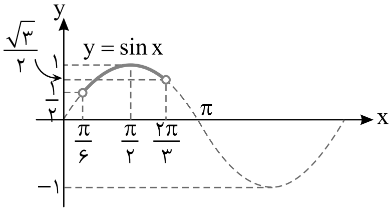


۹۳- گزینهٔ ۲ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر $\frac{\pi}{۶}<x<\frac{۲\pi}{۳}$، آن‌گاه $\frac{۱}{۲}<\sin x\leq ۱$ و می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۴}\leq ۱\Rightarrow ۲<m-۱\leq ۴\Rightarrow ۳<m\leq ۵$$

بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ۴ و ۵ باشد.





۹۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)$ و $y=a\cos(bx+c)$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است. پس $T_f=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$ و $T_g=\frac{۲\pi}{|-a|}=\frac{۲\pi}{|a|}$. بنابراین

$$T_f=۲T_g\Rightarrow ۴=\frac{۴\pi}{|a|}\Rightarrow |a|=\pi\Rightarrow a=\pm\pi$$

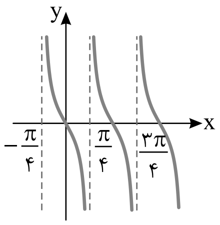
۹۵- گزینهٔ ۱ چون $\sin^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}$، پس

$$f(x)=\sin^۲ x+۱۲=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}+۱۲=\frac{۲۵-\cos ۲x}{۲}$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{۲\pi}{|۲|}=\pi$.

نکته دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin^۲(bx+c)$ و $y=a\cos^۲(bx+c)$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

۹۶- گزینهٔ ۱ تابع $f(x)=-\tan ۲x$ روی بازه‌های به صورت $(\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴},\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴})$ که $k\in\mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



۹۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع تانژانت روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$ اکیداً صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{۴})<\tan x<\tan\frac{\pi}{۴}\Rightarrow -۱<\tan x<۱$$

$$-۱<\frac{۲m-۳}{۵}<۱\Rightarrow -۱<m<۴$$

۹۸- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $\cos(x-\frac{\pi}{۴})=\cos x$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+x\Rightarrow ۲k\pi=-\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-x\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۸}\ ,k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ را مشخص می‌کنیم:

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{۸}$	$\frac{۹\pi}{۸}$	$\frac{۱۷\pi}{۸}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۹۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳}$، بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\sin(\frac{\pi}{۶}-۲x)=\sin\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi}{۶}-۲x=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۳}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{\pi}{۶}-۲x=(۲k+۱)\pi-\dfrac{\pi}{۳}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-k\pi-\dfrac{\pi}{۱۲}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{(۲k+۱)}{۲}\pi+\dfrac{\pi}{۴}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

۱۰۰- گزینهٔ ۴ جایی که نمودار تابع f خط $y=-۱$ را قطع می‌کند، $f(x)=-۱$ است، پس

$$\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)=۰\Rightarrow\frac{\pi}{۴}-۲x=k\pi\Rightarrow ۲x=-k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$x=-\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ عبارت‌اند از

k	۰	۱	۲	−۱	−۲
x	$\frac{\pi}{۸}$	$-\frac{۳\pi}{۸}$	$-\frac{۷\pi}{۸}$	$\frac{۵\pi}{۸}$	$\frac{۹\pi}{۸}$

بنابراین نمودار تابع خط $y=-۱$ را در پنج نقطه از بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ قطع می‌کند.

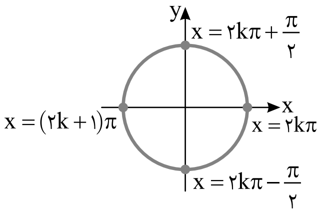
۱۰۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\sin^{۳} x-\sin x=۰\Rightarrow \sin x(\sin^{۲} x-۱)=۰$$

$$\sin x(\sin x-۱)(\sin x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

نقـاط انتهایـی کمان‌های نظیر جواب‌ها را روی دایرهٔ مثلثاتی مشـخص می‌کنیم. بنابراین جواب‌های کلی معادله را می‌توان به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ نوشت.



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\sin^{۳} x-\sin x=۰\Rightarrow \sin x(\sin^{۲} x-۱)=۰\Rightarrow -\sin x\cos^{۲} x=۰$$

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌ها به‌صورت مضارب زوج و مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ هسـتند که می‌توان آن‌ها را به صورت جواب کلی $x=\frac{k\pi}{۲}\ ,k\in\mathbb{Z}$ نوشت.

۱۰۲- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(۱-\cos^{۲} x)+۵\cos x=۴\Rightarrow ۲\cos^{۲} x-۵\cos x+۲=۰$$

$$(\cos x-۲)(۲\cos x-۱)=۰\Rightarrow \cos x=۲, \cos x=\frac{۱}{۲}$$

معادلـهٔ $\cos x=۲$ جواب ندارد، پـس $\cos x=\frac{۱}{۲}$. جواب‌های معادله که در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ قرار دارند، $\frac{\pi}{۳}$ و $۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۲π است.

۱۰۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow ۲\sin x\cos^{۲} x=\sin x$$

$$\sin x(۲\cos^{۲} x-۱)=۰\Rightarrow \sin x\cos ۲x=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌هـای واقـع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌انـد از π، $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$.

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۱۰۴- گزینهٔ ۱ در یک همسـایگی محـذوف ۱، مقادیر f منفی هسـتند، بنابراین در این همسایگی $|f(x)|=-f(x)$، پس

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{|f(x)|}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{-f(x)}=-۱$$

۱۰۵- گزینهٔ ۴ اگر $x\to ۱^{+}$، آن‌گاه $f(x)\to(-۱)^{-}$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^{+}} f(f(x))=\lim_{t\to(-۱)^{-}} f(t)=۲$$

۱۰۶- گزینهٔ ۴ مقادیر حد راست و حد چپ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}(x^{۳}+۲x)=۸+۴=۱۲$$

$$\lim_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}(x^{۲}-۳x)=۴-۶=-۲$$

بنابراین مقدار حد راسـت تابع در $x=۲$، ۱۴ واحد از مقدار حد چپ آن در این نقطه بیشتر است.

۱۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{۳x+a}{۲x-۳}=\frac{۳\times ۲+a}{۲\times ۲-۳}=۶+a$$

$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}(x^{۲}+ax+b)=۲^{۲}+a(۲)+b=۴+۲a+b$$

چون $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$، پس هر یک از حدهای بالا برابر با ۴ است:

$$\begin{cases}۶+a=۴\\ ۴+۲a+b=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ b=۴\end{cases}\Rightarrow a+b=۲$$

۱۰۸- گزینهٔ ۳ ابتـدا توجه کنیـد که بنابر قضایـای حد، $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود دارد. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to -۱}(x^{۲}-x+۱-xf(x))=۶\Rightarrow(-۱)^{۲}-(-۱)+۱-(-۱)\lim_{x\to -۱} f(x)=۶$$

پس $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۳$.

۱۰۹- گزینهٔ ۲ اگـر $x\to ۲^{+}$، آن‌گاه $\sqrt{۲}x\to ۲\sqrt{۲}^{+}$. در نتیجـه $[\sqrt{۲}x]=۲$. پس $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}(x[\sqrt{۲}x])=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}(۲x)=۴$.

۱۱۰- گزینهٔ ۲ عامـل $x-۳$ را از صـورت و مخـرج حـذف می‌کنیـم، سپس حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۳x}{x^{۲}-۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x}{x+۳}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱۱- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x^{۲}-۱۶}{x^{۳}-۶۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x+۴)}{(x-۴)(x^{۲}+۴x+۱۶)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{x+۴}{x^{۲}+۴x+۱۶}=\frac{۴+۴}{۴^{۲}+۴\times ۴+۱۶}=\frac{۱}{۶}$$

۱۱۲- گزینهٔ ۱ وقتی x از سـمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $۳x-۴$ از سـمت چپ به -۱ نزدیک می‌شود، پس $[۳x-۴]=-۲$، از طرف دیگر وقتی x از سـمت چپ به ۱ نزدیک می‌شـود، $|x-۱|=-(x-۱)$. بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to ۱^{-}}([۳x-۴]+\frac{|x-۱|}{x-۱})=\lim_{x\to ۱^{-}}(-۲+\frac{-(x-۱)}{x-۱})=-۲-۱=-۳$$

۱۱۳- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ اســت. توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج، $x-۹=(\sqrt{x})^۲-۳^۲=(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۳)$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹}=\lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-۳}{(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۳)}=\lim_{x\to ۹}\frac{۱}{\sqrt{x}+۳}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۹}+۳}=\frac{۱}{۳+۳}=\frac{۱}{۶}$$

۱۱۴- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۷}\frac{\sqrt[۳]{x+۱}-۲}{x^۲-۴۹}=\lim_{x\to ۷}(\frac{\sqrt[۳]{x+۱}-۲}{x^۲-۴۹}\times\frac{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۱}+۴}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۱}+۴})$$

$$=\lim_{x\to ۷}(\frac{x+۱-۸}{(x-۷)(x+۷)}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۱}+۴})$$

$$=\lim_{x\to ۷}\frac{۱}{(x+۷)(\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۱}+۴)}=\frac{۱}{۱۴(۴+۴+۴)}=\frac{۱}{۱۶۸}$$

۱۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(۲)=۱$ و

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x-\frac{x-۲}{x-۲})=۲-۱=۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x+\frac{x-۲}{x-۲})=۲+۱=۳$$

بنابراین تابع در $x=۲$ فقط پیوستگی راست دارد.

۱۱۶- گزینهٔ ۴ چون تابع در نقطهٔ ۳ پیوسته است، حدهای چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند:

$$\lim_{x\to ۳^-}f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۱۶-ax^۲)=۱۶-۹a$$

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(۲x+a)=۶+a$$

بنابراین $۶+a=۱۶-۹a$ و در نتیجه $a=۱$. به این ترتیب

$$f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x\geq ۳\\ ۱۶-x^۲ & x<۳\end{cases}$$

در نتیجه $\lim_{x\to ۱}f(x)=\lim_{x\to ۱}(۱۶-x^۲)=۱۶-۱^۲=۱۵$.

۱۱۷- گزینهٔ ۳ بایـد مخرج هیچ‌جـا صفر نشـود، در نتیجه بایـد دلتای معادلهٔ $x^۲-۲mx+m+۶=۰$ منفی باشد

$$\Delta=(-۲m)^۲-۴(m+۶)<۰\Rightarrow ۴m^۲-۴(m+۶)<۰$$

$$m^۲-m-۶<۰\Rightarrow(m-۳)(m+۲)<۰\Rightarrow -۲<m<۳$$

بنابرایـن تابـع f بـه ازای چهار مقـدار صحیح ۱- ، ۰، ۱ و ۲ بـرای m روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۱۸- گزینهٔ ۱ در نقاطی که مقدار $\frac{۱}{x}$ عددی صحیح شود، تابع $y=[\frac{۱}{x}]$ ناپیوسته است. این نقاط به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{۱}{x}=k\ ,\quad k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{۱}{k}$$

در بازهٔ $(\frac{۱}{۱۰},۱)$،

$$\frac{۱}{۱۰}<\frac{۱}{k}<۱\Rightarrow ۱<k<۱۰\Rightarrow ۲\leq k\leq ۹$$

یعنی در هشت نقطه تابع ناپیوسته است.

۱۱۹- گزینهٔ ۱ توجـه کنیـد که وقتی x از سـمت چپ بـه -۲ نزدیک می‌شود، $x+۲$ از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{۱}{x+۲}=-\infty$$

۱۲۰- گزینهٔ ۴

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[-x]}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-۱}{x}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{[-x]}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۰}{x}=\lim_{x\to ۰^-}۰=۰$$

۱۲۱- گزینهٔ ۱ اگـر $x\to ۳$ ، آن‌گاه $(x-۳)^۲\to ۰^+$ ، بنابرایـن بـرای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود، باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$$\lim_{x\to ۳}(ax^۳+۳)<۰\Rightarrow ۲۷a+۳<۰\Rightarrow a<-\frac{۱}{۹}$$

۱۲۲- گزینهٔ ۴ برای اینکه نمودار تابع شـبیه شکل مورد نظر شود، وقتی $x\to ۲^-$ و $x\to ۲^+$ ، باید $f(x)\to-\infty$. فقط در گزینهٔ (۴)،

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=-\infty$$

۱۲۳- گزینهٔ ۳ توجـه کنید که $\lim_{x\to ۱^+}x^۲=۱$ و اگـر $x\to ۱^+$ ، مقادیر $x-۱$ مثبت‌انـد و بـه صفـر میـل می‌کننـد. بنابرایـن $\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲}{x-۱}=+\infty$. همین‌طـور $\lim_{x\to ۱^-}x^۲=۱$ و اگـر $x\to ۱^-$ ، مقادیر $x-۱$ منفی‌انـد و به صفر میـل می‌کننـد. بنابراین $\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲}{x-۱}=-\infty$. به این ترتیب، نمـودار تابع f در همسایگی نقطهٔ $x=۱$ به شکل گزینهٔ (۳) است.

۱۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x\to ۱^-$ ، آن‌گاه $\frac{۱}{x}\to ۱^+$ ، پس

$$t=\frac{x+۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}\Rightarrow t\to ۲^+$$

پس $\lim_{x\to ۱^-}f(\frac{x+۱}{x})=\lim_{t\to ۲^+}f(t)=+\infty$.

۱۲۵- گزینهٔ ۲ از روی شکل معلوم است که $\lim_{x\to +\infty}f(x)=۲$.

۱۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to ۱^+}f(x)=+\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^+}(fof)(x)=\lim_{x\to ۱^+}f(f(x))=\lim_{t\to +\infty}f(t)=۲$$

۱۲۷- گزینهٔ ۴ بزرگ‌تریـن جملـهٔ $(x+۱)^۲$ برابر $x^۲$ اسـت. همچنین بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+۱)^۳$ و $(x-۱)^۳$ برابر $x^۳$ است. پس

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x(x+۱)^۲}{(x+۱)^۳+(x-۱)^۳}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x^۳}{۲x^۳}=۱$$

۱۲۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که وقتی $x\to-\infty$ ، مقادیر $x+۱$ و $۳-x$ به ترتیب منفی و مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a|x+۱|+۳x-۱}{|۳-x|+ax-۱۵}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a(-x-۱)+۳x-۱}{۳-x+ax-۱۵}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-a+۳)x-a-۱}{(a-۱)x-۱۲}=\frac{۳-a}{a-۱}$$

در نتیجه $\frac{۳-a}{a-۱}=۲$ ، بنابراین $a=\frac{۵}{۳}$.

۱۲۹- گزینهٔ ۳ برای آنکه حد مورد نظر برابر صفر شود، باید درجهٔ مخرج بیشتر از درجهٔ صورت باشد. مخرج از درجهٔ اول است، پس باید ضریب جملات درجهٔ دوم و سوم در صورت برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} a-۱=۰ \Rightarrow a=۱ \\ ۲a-b=۰ \Rightarrow ۲a=b \end{cases} \Rightarrow b=۲$$

بنابراین $a+b=۳$.

۱۳۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{۱}{x}=۰ \Rightarrow [\lim_{x\to -\infty}\frac{۱}{x}]=[۰]=۰$$

از طرف دیگر، اگر $x\to -\infty$، آن‌گاه $-۱<\frac{۱}{x}<۰$، بنابراین $[\frac{۱}{x}]=-۱$، پس $\lim_{x\to -\infty}[\frac{۱}{x}]=\lim_{x\to -\infty}(-۱)=-۱$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر -۱ است.

۱۳۱- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=۳$ برابر $f'(۳)=۲$ است. پس شیب خط عمود بر این خط، که همان خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=-۱$ است، برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. پس $f'(-۱)=-\frac{۱}{۲}$.

۱۳۲- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های $x=a$ و $x=c$ صفر، در نقطهٔ $x=b$ منفی و در نقطهٔ $x=d$ مثبت است.

۱۳۳- گزینهٔ ۲ با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۱$،

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)+۲}{۲h}=\frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۱}{۲}(-۲)=-۱$$

۱۳۴- گزینهٔ ۱ تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۵$ را می‌نویسیم:

$$f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۵)-۰}{x-۵}$$

$$=\lim_{x\to ۵}((x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴))=۴\times ۳\times ۲\times ۱=۲۴$$

۱۳۵- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر تابع f در نقطهٔ $x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+mh)-f(x_۰+nh)}{h}=(m-n)f'(x_۰)$. بنابراین

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲-۲h)}{۳h}=\frac{۱}{۳}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲-۲h)}{h}$$

$$=\frac{۱}{۳}(۲-(-۲))f'(۲)=\frac{۴}{۳}f'(۲)$$

۱۳۶- گزینهٔ ۳ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\frac{|x^۲-۱|}{x^۲+۱}-۰}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x^۲+۱)(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x+۱}{x^۲+۱}=۱$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\frac{|x^۲-۱|}{x^۲+۱}-۰}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{(x^۲+۱)(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x+۱)}{x^۲+۱}=-۱$$

بنابراین مقدار مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=۱$ به اندازهٔ ۲ واحد از مشتق چپ تابع در این نقطه بیشتر است.

۱۳۷- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطه‌های -۳، ۱ و ۵ پیوسته نیست، پس در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. همین‌طور، در نقطه‌های -۱ و ۳ مشتق چپ و مشتق راست تابع f برابر نیستند، پس تابع f در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. تابع f در نقطه‌های -۲ و ۴ مشتق‌پذیر است. بنابراین تابع f در پنج نقطهٔ صحیح از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست.

۱۳۸- گزینهٔ ۴ بنابر تعریف مشتق، $g(x)=f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$.

بنابراین $g(۸)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۸^۲}}=\frac{۱}{۱۲}$.

۱۳۹- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

پس $(\frac{f}{g})'(-۱)=\frac{f'(-۱)g(-۱)-g'(-۱)f(-۱)}{g^۲(-۱)}$. از طرف دیگر،

$$\begin{cases} f(x)=x^۳+x-۱ \\ f'(x)=۳x^۲+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-۱)=-۳ \\ f'(-۱)=۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x)=x^۴+۱ \\ g'(x)=۴x^۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(-۱)=۲ \\ g'(-۱)=-۴ \end{cases}$$

بنابراین $(\frac{f}{g})'(-۱)=\frac{۴\times ۲-(-۴)(-۳)}{(۲)^۲}=-۱$.

۱۴۰- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x(x^۲-۱)(x^۲+۱)(x^۴+۱)=x(x^۴-۱)(x^۴+۱)$$

$$=x(x^۸-۱)=x^۹-x$$

بنابراین $f'(x)=۹x^۸-۱$. پس $f'(\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}})=۹(\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}})^۸-۱=۰$.

۱۴۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که مقدار عبارت $۴x-x^۲$ در اطراف نقطهٔ $x=-۲$ منفی است و مقدار عبارت $x+۱$ هم در اطراف $x=-۲$ منفی است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^۲-۴x-x-۱=x^۲-۵x-۱$$

$$f'(x)=۲x-۵ \Rightarrow f'(-۲)=-۹$$

همچنین توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=۵$ مقدار عبارت‌های $۴x-x^۲$ و $x+۱$ به‌ترتیب منفی و مثبت است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^۲-۴x+x+۱=x^۲-۳x+۱ \Rightarrow f'(x)=۲x-۳ \Rightarrow f'(۵)=۷$$

در نتیجه $f'(۵)+f'(-۲)=-۲$.

۱۴۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۴(۲x^۲+۳)'(۲x^۲+۳)^{۴-۱}=۴(۴x)(۲x^۲+۳)^۳=۱۶x(۲x^۲+۳)^۳$$

بنابراین $f'(-۱)=۱۶(-۱)(۲(-۱)^۲+۳)^۳=-۱۶\times ۵^۳$.

۱۴۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(\sqrt{g})'=\frac{g'}{۲\sqrt{g}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳+۱}} \Rightarrow f'(۲)=\frac{۳\times ۴}{۲\sqrt{۹}}=۲$$

۱۴۴- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(۹x^۲-۴x)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(۳x^۳-۲x^۲+۱)}{(x+۱)^۴}$$

در نتیجه $f'(۱)=\frac{۳}{۴}$.

۱۴۵- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $f(-۳x+۵)=۲x^۳+۴x-۶$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$(-۳x+۵)'f'(-۳x+۵)=۶x^۲+۴$$

$$-۳f'(-۳x+۵)=۶x^۲+۴\xrightarrow{x=۱}-۳f'(۲)=۱۰\Rightarrow f'(۲)=-\frac{۱۰}{۳}$$

۱۴۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(۲x)g'(f(۲x))=\frac{۱}{۲}(g(f(۲x)))'=(\frac{۱}{۲}g(f(۲x)))'$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=\frac{۱}{۲}g(f(۲x))$ را به‌دست می‌آوریم و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{۲}g(f(۲x))=\frac{۱}{۲}g(۸x^۳+۱)=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۱-(۸x^۳+۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{-۸x^۳}=-x$$

در نتیجه $y'=-۱$.

۱۴۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۱\\ ۳x^۲+۲ & x>۱\end{cases}$$

بنابراین $f'(-۱)+f'(۲)=-۳+۱۴=۱۱$.

۱۴۸- گزینهٔ ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است:

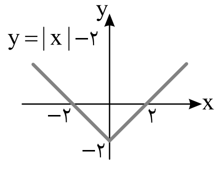
$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)\Rightarrow a+۲=۱+۲b\Rightarrow a-۲b=-۱$$

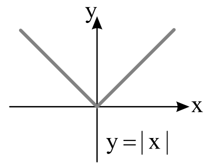
همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

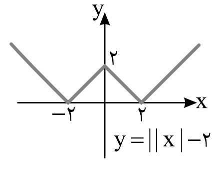
$$f'(x)=\begin{cases}۲ax+۲ & x>۱\\ ۳x^۲+۲b & x<۱\end{cases}\Rightarrow ۲a+۲=۳+۲b\Rightarrow ۲a-۲b=۱$$

$$\begin{cases}a-۲b=-۱\\ ۲a-۲b=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{۷}{۲}$$

۱۴۹- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم می‌شود:







در نقاط $x=۰$، $x=۲$ و $x=-۲$ نمودار تابع نقطهٔ گوشه‌ای دارد و تابع در این نقاط مشتق ندارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,\pm۲\}$.

۱۵۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست، پس مقدار $x^۲+ax-۱۲$ به‌ازای $x=۳$ صفر است:

$$۹+۳a-۱۲=۰\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $f(x)=|x^۲+x-۱۲|$. در نزدیکی نقطهٔ ۲− علامت عبارت $x^۲+x-۱۲$ منفی است، بنابراین

$$f(x)=-(x^۲+x-۱۲)\Rightarrow f'(x)=-۲x-۱\Rightarrow f'(-۲)=۳$$

۱۵۱- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ مورد نظر $(x_۰,y_۰)$ باشد. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_۰)$ است، که چون خط مماس موازی محور x است، پس $f'(x_۰)=۰$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۶x+۳=۳(x-۱)^۲$$

$$f'(x_۰)=۰\Rightarrow ۳(x_۰-۱)^۲=۰\Rightarrow x_۰=۱$$

بنابراین $y_۰=f(x_۰)=f(۱)=-۱$.

۱۵۲- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس مورد نظر برابر $f'(-۲)$ است:

$$f(x)=\frac{۲x}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(-۲)=۲$$

از طرف دیگر $f(-۲)=۴$، پس خط مماس از نقطهٔ $(-۲,۴)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-۴=۲(x+۲)\Rightarrow y=۲x+۸$$

۱۵۳- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ بر نمودار تابع، که سهمی است، مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق f به‌ازای $x=x_۰$ برابر با شیب خط $y=x+۵$ است. بنابراین

$$y'=۴x-۴\Rightarrow ۴x_۰-۴=۱\Rightarrow x_۰=\frac{۵}{۴}$$

چون نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی سهمی $y=۲x^۲-۴x+۶$ است، پس

$$y_۰=۲x_۰^۲-۴x_۰+۶=۲\times(\frac{۵}{۴})^۲-۴\times\frac{۵}{۴}+۶=\frac{۳۳}{۸}$$

بنابراین خط مورد نظر از نقطهٔ $(\frac{۵}{۴},\frac{۳۳}{۸})$ می‌گذرد و شیب آن ۱ است، پس معادله‌اش به‌صورت $y-\frac{۳۳}{۸}=x-\frac{۵}{۴}$، یعنی $۸y-۸x-۲۳=۰$ است.

۱۵۴- گزینهٔ ۲ نقطهٔ تماس را $(a,\frac{۱}{\sqrt{a}})$ فرض می‌کنیم. شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(a)=-\frac{۱}{۲a\sqrt{a}}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-\frac{۱}{\sqrt{a}}=-\frac{۱}{۲a\sqrt{a}}(x-a)$ است.

نقطهٔ $(۳,۰)$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۰-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\frac{-۱}{۲a\sqrt{a}}(۳-a)\Rightarrow ۲a=۳-a\Rightarrow a=۱$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه عرض از مبدأ خط مماس برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۵۵- گزینهٔ ۲ مقدار دو آهنگ تغییر را حساب می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۱,۴]=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{\frac{۱}{۲}-۱}{۳}=-\frac{۱}{۶}=A_۱$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۴,۴/۴۱]=\frac{f(۴/۴۱)-f(۴)}{۴/۴۱-۴}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲/۱}-\frac{۱}{۲}}{۰/۴۱}=\frac{\frac{۲-۲/۱}{۴/۲}}{\frac{۴۱}{۱۰۰}}=\frac{-\frac{۱}{۴۲}}{\frac{۴۱}{۱۰۰}}=-\frac{۵۰}{۴۱\times ۲۱}=A_۲$$

بنابراین $\frac{A_۱}{A_۲}=\frac{-\frac{۱}{۶}}{-\frac{۵۰}{۴۱\times ۲۱}}=\frac{۴۱\times ۲۱}{۶\times ۵۰}=\frac{۴۱\times ۷}{۲\times ۵۰}=\frac{۲۸۷}{۱۰۰}=۲/۸۷$.

۱۵۶- گزینهٔ ۱ مقدار آهنگ تغییر متوسط را در بازهٔ $[۱,۲]$ حساب می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱}=\frac{۱-(-۱)}{۱}=۲$$

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ مورد نظر همان مشتق تابع در این نقطه است که باید برابر ۲ باشد. پس

$$f'(x)=۱+\frac{۲}{x^۲}=۲\Rightarrow\frac{۲}{x^۲}=۱\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=-\sqrt{۲}\ (\text{غ.ق.})\ ,\ x=\sqrt{۲}$$

۱۵۷- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع همان مشتق آن است. پس مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم: $f'(x)=-۳x^۲+۶x-۶$. بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ $(a<۰)$ برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است، پس بیشترین مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با $-\frac{۳۶-۴(-۳)(-۶)}{۴(-۳)}=-۳$.

۱۵۸- گزینهٔ ۴ مشتق اول و دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=۲ax+b\Rightarrow f''(x)=۲a$$

بنابراین

$$f''(۲)=-۲\Rightarrow ۲a=-۲\Rightarrow a=-۱$$

$$f'(۲)=-۲\Rightarrow ۴a+b=-۲\Rightarrow b=۲$$

در نتیجه $a-b=-۳$.

۱۵۹- گزینهٔ ۳ مشتق دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۶x^۲+۶x-۲\Rightarrow f''(x)=۱۲x+۶$$

بنابراین

$$f''(a)=۰\Rightarrow ۱۲a+۶=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۱۶۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=۱-\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{۲}{x^۳}\Rightarrow f''(-۱)=-۲$$

۱۶۱- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۳-۳x^۲+۵}{x^۳+۳x^۲-۲}=\lim_{x\to -۱}\frac{۶x^۲-۶x}{۳x^۲+۶x}=\frac{۶+۶}{۳-۶}=-۴$$

۱۶۲- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{۳x}-x}{x^۲-۷x+۱۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۳}{۲\sqrt{۳x}}-۱}{۲x-۷}=\frac{\frac{۳}{۲\times ۳}-۱}{۶-۷}=\frac{۱}{۲}$$

۱۶۳- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f'(۱+h)+f'(۱-h)}{۱}=f'_+(۱)+f'_-(۱)$$

اکنون تابع مشتق را پیدا می‌کنیم: $f'(x)=\begin{cases}۳x^۲ & x>۱\\ ۴x^۳ & x<۱\end{cases}$.

واضح است که $f'_+(۱)=۳$ و $f'_-(۱)=۴$، بنابراین $L=۳+۴=۷$.

۱۶۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر $f'(x)\geq ۰$ و نقاطی که $f'(x)=۰$، تشکیل یک بازه ندهند تابع اکیداً صعودی است. روی بازهٔ $(-\infty,۳]$ نمودار تابع مشتق بالای محور x یا مماس بر آن است و فقط در نقطهٔ $x=۱$ و $x=۳$ مشتق برابر صفر است. پس تابع روی بازهٔ $(-\infty,۳]$ اکیداً صعودی است.

بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر ۳ است.

۱۶۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=x^۲-۱$، پس

$$f'(x)\geq ۰\Rightarrow x^۲-۱\geq ۰\Rightarrow x\leq -۱\ \text{ یا }\ x\geq ۱$$

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-۱]$ و $[۱,+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی نیست.

۱۶۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=-۳x^۲+۲x=x(-۳x+۲)$.

بنابراین

x	$-\infty$		۰		$\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	

در نتیجه تابع f روی بازهٔ $(۰,\frac{۲}{۳})$ اکیداً صعودی است. بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۱۶۷- گزینهٔ ۴ مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=-x^۳+mx^۲-۱۲x+۱\Rightarrow f'(x)=-۳x^۲+۲mx-۱۲$$

باید مشتق تابع نامثبت باشد، یعنی $f'(x)\leq ۰$، در نتیجه $-۳x^۲+۲mx-۱۲\leq ۰$. برای اینکه این نابرابری همواره درست باشد، باید

$$\Delta\leq ۰\Rightarrow ۴m^۲-۱۴۴\leq ۰\Rightarrow m^۲\leq ۳۶\Rightarrow -۶\leq m\leq ۶$$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $\{۰,\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۴,\pm ۵,\pm ۶\}$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

۱۶۸- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=-۶x^۲+۶x=۰\Rightarrow x=۰, x=۱$$

پس $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر $\sqrt{۲}$ است.

۱۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x+۴-x^۲ & x\geq -۲\\ -۲x-۴-x^۲ & x<-۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲-۲x & x>-۲\\ -۲-۲x & x<-۲\end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x=-۲$ مشتق ندارد، پس نقطهٔ به طول -۲ نقطهٔ بحرانی تابع است.

از طرف دیگر،

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}۲-۲x=۰\Rightarrow x=۱\\ -۲-۲x=۰\Rightarrow x=-۱ \quad \text{(غ.ق.ق.)}\end{cases}$$

بنابراین نقطهٔ به طول ۱ نقطهٔ بحرانی تابع است. مجموع عرض‌های نقاط بحرانی برابر است با $f(-۲)+f(۱)=-۴+۵=۱$.

۱۷۰- گزینهٔ ۳ ریشه‌های صورت و مخرج تابع مشتق اگر در دامنهٔ تابع باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x)=۲x\sqrt[۳]{x}+\frac{(x^۲-۴)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۶x^۲+x^۲-۴}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۷x^۲-۴}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

مشخص است که صورت کسر دو ریشه و مخرج آن یک ریشه دارد که همگی در دامنهٔ تابع هستند (دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است)، بنابراین تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[۱,۳]$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳-x}}$$

تابع f در نقاط $x=۱$ و $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{x-۱}=\sqrt{۳-x}\Rightarrow x-۱=۳-x\Rightarrow x=۲$$

پس مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $\{۱,۲,۳\}$ است که دارای سه عضو است.

۱۷۲- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطه‌های ۱− و ۲ مینیمم نسبی دارد. مجموع این عددها برابر ۱ است.

۱۷۳- گزینهٔ ۳ جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است. بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x=-۲$ دارد.

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	

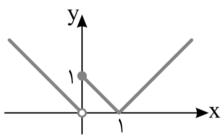
۱۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۸x^۳-۳x^۲=x^۲(۸x-۳)$.

بنابراین جدول تغییرات تابع f به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۳}{۸}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘		↘	min نسبی	↗	

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۱۷۵- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به شکل مقابل است. این تابع در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x=۱$ مینیمم نسبی دارد.



۱۷۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۴x-۸$. بنابراین

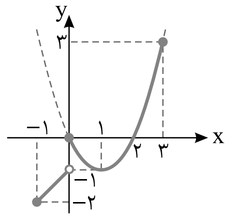
$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

اکنون توجه کنید که چون

$$f(۰)=۱,\quad f(۲)=-۷,\quad f(۵)=۱۱$$

پس مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f به‌ترتیب برابر ۱۱ و ۷− و اختلاف آن‌ها برابر $۱۱-(-۷)=۱۸$ است.

۱۷۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حداکثر مقدار تابع برابر ۳ و حداقل مقدار آن برابر ۲− است و اختلاف این دو مقدار برابر ۵ است.



۱۷۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^۲+۱-۲x(x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲},\qquad x>۰$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۱-x^۲=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=-۱\,\text{(غ.ق.ق.)}$$

از طرف دیگر، $f(۱)=\frac{۱}{۲}$، $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=۰$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر است با $f(۱)=\frac{۱}{۲}$.

۱۷۹- گزینهٔ ۳ چون $y=۲x-a$، پس

$$A(x)=xy=x(۲x-a)=۲x^۲-ax$$

$$A'(x)=۰\Rightarrow ۴x-a=۰\Rightarrow x=\frac{a}{۴}$$

بنابراین کمترین مقدار xy برابر است با $۲(\frac{a}{۴})^۲-a\times\frac{a}{۴}=-\frac{a^۲}{۸}$.

۱۸۰- گزینهٔ ۱ طول اضلاع قائمهٔ مثلث را a و b فرض می‌کنیم. می‌خواهیم بیشترین مقدار مساحت، یعنی $S=\frac{۱}{۲}ab$ را به‌دست آوریم. توجه کنید که $a^۲+b^۲=۱۶$. پس $b=\sqrt{۱۶-a^۲}$، در نتیجه

$$S(a)=\frac{۱}{۲}a\sqrt{۱۶-a^۲}$$

$$S'(a)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶-a^۲}-\frac{a^۲}{۲\sqrt{۱۶-a^۲}}\Rightarrow S'(a)=۰\Rightarrow a=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲})\sqrt{۸}=۴$.

۱۸۱- گزینهٔ ۴ نقطهٔ $B(x,y)$ را روی نمودار در نظر می‌گیریم. پس $y=\sqrt{۲x+۹}$. بنابراین

$$d(x)=AB=\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۰)^۲}=\sqrt{(x-۴)^۲+۲x+۹}=\sqrt{x^۲-۶x+۲۵}$$

$$d'(x)=\frac{۲x-۶}{۲\sqrt{x^۲-۶x+۲۵}}\,,\qquad d'(x)=۰\Rightarrow x=۳$$

بنابراین کمترین مقدار d به‌ازای $x=۳$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۴.

۱۸۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که مساحت مستطیل ABCD برابر است با $(۳x-۱)(۱-۲x)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=(۳x-۱)(۱-۲x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۳(۱-۲x)+(۳x-۱)(-۲)=-۱۲x+۵$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow -۱۲x+۵=۰\Rightarrow x=\frac{۵}{۱۲}$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و بیشترین مقدار آن به ازای $x=\frac{۵}{۱۲}$ به‌دست می‌آید، که برابر است با $\frac{۱}{۲۴}$. در نتیجه بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD برابر $\frac{۱}{۲۴}$ است.

۱۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$AB=AC\Rightarrow\sqrt{(a+۱)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{(a-۳)^۲+(۱-۵)^۲}$$

$$\sqrt{a^۲+۲a+۱+۰}=\sqrt{a^۲-۶a+۹+۱۶}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$a^۲+۲a+۱=a^۲-۶a+۲۵\Rightarrow ۸a=۲۴\Rightarrow a=۳$$

۱۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $AB=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۰-۰)^۲}=۳$. بنابراین

$$AC=۳\Rightarrow\sqrt{(۰-a)^۲+(۰-b)^۲}=۳\Rightarrow a^۲+b^۲=۹ \quad (۱)$$

$$BC=۳\Rightarrow\sqrt{(۳-a)^۲+(۰-b)^۲}=۳\Rightarrow(۳-a)^۲+b^۲=۹$$

$$۹-۶a+a^۲+b^۲=۹ \quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $۹-۶a=۰$، پس $a=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید $b^۲=۹-a^۲=۹-\frac{۹}{۴}=\frac{۲۷}{۴}$، بنابراین

$$|b|=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۸۵- گزینهٔ ۱ وسط ضلع BC نقطهٔ $(\frac{-۲+۴}{۲},\frac{۳+۱}{۲})$ یعنی نقطهٔ $(۱,۲)$ است. طول میانهٔ نظیر رأس A برابر با فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ وسط ضلع BC است، یعنی برابر است با $\sqrt{(۲-۱)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۰}$.

۱۸۶- گزینهٔ ۳ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(۳,a)$ و $(۲,۷)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{a-۷}{۳-۲}=a-۷$. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-۱,۴)$ و $(۱,۸)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۴-۸}{-۱-۱}=۲$. اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ است، پس

$$(a-۷)(۲)=-۱\Rightarrow a=\frac{۱۳}{۲}$$

۱۸۷- گزینهٔ ۳ طول عمود وارد از نقطهٔ $(۳,۱)$ بر خط $۴x+۳y+۲۰=۰$ فاصلهٔ این نقطه از این خط است که برابر است با

$$\frac{|۴\times۳+۳\times۱+۲۰|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۳۵}{۵}=۷$$

۱۸۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط $ax+by+c=۰$ ویژگی‌های مورد نظر را داشته باشد، چون شیب این خط -۱ است، پس $-\frac{a}{b}=-۱$، در نتیجه $a=b$. از طرف دیگر، چون فاصلهٔ مبدأ از این خط برابر با ۵ است، پس

$$\frac{|a\times۰+a\times۰+c|}{\sqrt{a^۲+a^۲}}=۵\Rightarrow\frac{|c|}{\sqrt{۲}|a|}=۵\Rightarrow|c|=۵\sqrt{۲}|a|\Rightarrow c=\pm۵\sqrt{۲}a$$

بنابراین خط‌های راست مورد نظر $ax+ay+۵\sqrt{۲}a=۰$ و $ax+ay-۵\sqrt{۲}a=۰$ هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت $x+y+۵\sqrt{۲}=۰$ و $x+y-۵\sqrt{۲}=۰$ نوشت.

۱۸۹- گزینهٔ ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین $۲a=PF+PF'=۶+۸=۱۴$. اکنون دقت کنید که $A'F'=AF=۵$. با توجه به شکل فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با

$$FF'=AA'-AF-A'F'\Rightarrow ۲c=۱۴-۵-۵=۴$$

۱۹۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** طول قطر بزرگ، طول قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی بیضی به‌ترتیب $۲a$، $۲b$ و $۲c$ است. بنابراین

$$۲a=۸\Rightarrow a=۴\ ,\quad ۲b=۶\Rightarrow b=۳$$

از طرف دیگر،

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۱۶=۹+c^۲\Rightarrow c^۲=۷\Rightarrow c=\sqrt{۷}$$

بنابراین فاصلهٔ کانونی بیضی مورد نظر برابر است با $۲c=۲\sqrt{۷}$.

راه‌حل دوم چون $a^۲=b^۲+c^۲$، پس $۴a^۲=۴b^۲+۴c^۲$، در نتیجه $(۲a)^۲=(۲b)^۲+(۲c)^۲$، یعنی

$$۸^۲=۶^۲+(۲c)^۲\Rightarrow(۲c)^۲=۲۸\Rightarrow ۲c=۲\sqrt{۷}$$

۱۹۱- گزینهٔ ۱ چون مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است و کانون‌های بیضی روی محور x هستند، پس قطر کوچک بیضی روی محور y است، یعنی BB' قطر کوچک بیضی است. اکنون توجه کنید که $a=OA'=۱۷$ و $b=OB=۱۵$. در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۱۷^۲=۱۵^۲+c^۲\Rightarrow c=۸$$

بنابراین $AF'=a+c=۲۵$. در نتیجه، مساحت مثلث ABF' برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AF'\times OB=\frac{۱}{۲}\times۲۵\times۱۵=\frac{۳۷۵}{۲}$$

۱۹۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** بنابر فرض‌های مسئله، $b=OB'=۶$ و $a=BF=۸$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۸^۲=۶^۲+c^۲\Rightarrow c=۲\sqrt{۷}$$

پس خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$.

راه‌حل دوم چون $a=۸$ و $b=۶$، پس

$$e=\sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲}=\sqrt{۱-(\frac{۳}{۴})^۲}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۷}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

۱۹۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** بنابر فرض مسئله،

$$۲c=۲\sqrt{۵}\Rightarrow c=\sqrt{۵}\ ,\quad ۲a-۲b=۲\Rightarrow a-b=۱ \quad (۱)$$

بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲-b^۲=c^۲\Rightarrow(a-b)(a+b)=۵$$

$$\xrightarrow{(۱)}a+b=۵ \quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲)، $a=۳$ به‌دست می‌آید. در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$.

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن a، از تساوی (۱)، $b=a-۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲=(a-۱)^۲+c^۲$$

$$a^۲=a^۲-۲a+۱+۵\Rightarrow۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

۱۹۴- گزینهٔ ۲ مرکز دایره وسط دو سر قطر است، پس نقطهٔ $(\frac{۳-۱}{۲},\frac{۶+۲}{۲})$، یعنی $(۱,۴)$ مرکز دایره است. اکنون توجه کنید که شعاع دایره برابر $\frac{۱}{۲}AB$ است، چون $AB=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۶-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=۴\sqrt{۲}$، در نتیجه $r=۲\sqrt{۲}$. بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۱)^۲+(y-۴)^۲=۸\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۸y=۸-۱-۱۶=-۹\Rightarrow c=-۹$$

۱۹۵- گزینهٔ ۴ در معادلهٔ گستردهٔ دایره ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر ۱ است. پس طرفین معادلهٔ داده شده را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضریب $x^۲$ برابر ۱ شود: $x^۲+\frac{a}{۲}y^۲-۲x+\frac{b}{۲}y-۴=۰$. به این ترتیب $\frac{a}{۲}=۱$، پس $a=۲$. از طرف دیگر، چون شعاع دایره برابر ۳ است، پس

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(\frac{b}{۲})^۲-۴(-۴)}=۳\Rightarrow\sqrt{(\frac{b}{۲})^۲+۲۰}=۶\Rightarrow b=\pm۸\Rightarrow ab=\pm۱۶$$

۱۹۶- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. مختصات نقطه‌های داده شده در این معادله صدق می‌کنند:

$$۱+a+c=۰\ ,\quad ۱+b+c=۰\ ,\quad ۱+۱-a+b+c=۰$$

از معادلهٔ دوم $b+c=-۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین در معادلهٔ سوم

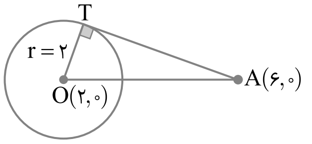
$$۲-a+b+c=۰\Rightarrow ۲-a+(-۱)=۰\Rightarrow a=۱$$

در نتیجه از معادلهٔ اول $c=-۲$ و از معادلهٔ دوم $b=۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با

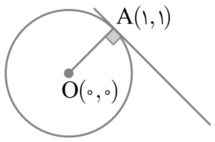
$$\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۱-۴(-۲)}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۱۹۷- گزینهٔ ۲ نقطهٔ $O(۲,۰)$ مرکز دایره و شعاع دایره $r=۲$ است. همچنین $OA=\sqrt{(۶-۲)^۲+۰^۲}=۴$، و در نتیجه

$$AT=\sqrt{OA^۲-r^۲}=\sqrt{۴^۲-۲^۲}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$



۱۹۸- گزینهٔ ۱ مرکز دایره نقطهٔ $O(۰,۰)$ است. شیب خطی که نقطه‌های O و A روی آن قرار دارند، برابر است با $\frac{۱-۰}{۱-۰}=۱$. بنابراین شیب خط مماس بر دایره که بر خط گذرنده از O و A عمود است، برابر -۱ است. پس معادلهٔ خط مماس بر دایره در نقطهٔ $A(۱,۱)$ به‌صورت زیر است:

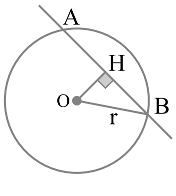


$$y-۱=(-۱)(x-۱)\Rightarrow y=-x+۲$$

۱۹۹- گزینهٔ ۲ مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲=\frac{۱۶۹}{۲۵}$ نقطهٔ $O(۰,۰)$ و شعاع آن برابر $r=\frac{۱۳}{۵}$ است. بنابراین مطابق شکل زیر، OH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,۰)$ از خط $۴x+۳y-۱۲=۰$ است، که برابر است با $\frac{|۰+۰-۱۲|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۲}{۵}$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

$$OB^۲=OH^۲+HB^۲\Rightarrow(\frac{۱۳}{۵})^۲=(\frac{۱۲}{۵})^۲+HB^۲\Rightarrow HB=۱$$

اکنون توجه کنید که $AB=۲HB=۲$.



۲۰۰- گزینهٔ ۳ مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x=۰$ نقطهٔ $O_۱(-\frac{-۴}{۲},۰)$، یعنی $O_۱(۲,۰)$ و شعاع آن برابر است با

$$r_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+۰^۲-۴(۰)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۰-۰}=۲$$

مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۸y+k=۰$ نقطهٔ $O_۲(-\frac{۲}{۲},-\frac{-۸}{۲})$، یعنی $O_۲(-۱,۴)$ و شعاع آن برابر است با

$$r_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۸)^۲-۴(k)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۶۴-۴k}=\sqrt{۱۷-k}$$

برای اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند باید $O_۱O_۲=r_۱+r_۲$. پس

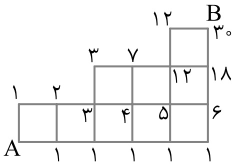
$$\sqrt{(۲+۱)^۲+(۰-۴)^۲}=۲+\sqrt{۱۷-k}\Rightarrow ۳=\sqrt{۱۷-k}\Rightarrow ۹=۱۷-k\Rightarrow k=۸$$

۲۰۱- گزینهٔ ۳ رقم صدگان عدد مورد نظر نمی‌تواند صفر باشد. بنابراین برای صدگان ۴ انتخاب داریم. برای هر یک از رقم‌های دهگان و یکان ۵ انتخاب داریم. بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با $۴\times۵\times۵=۱۰۰$.

۲۰۲- گزینهٔ ۴ نفر اول می‌تواند بر روی هر یک از صندلی‌ها بنشیند، پس برای او ۶ انتخاب وجود دارد. نفر دوم باید صندلی‌ای به‌جز صندلی نفر اول را انتخاب کند، پس ۵ انتخاب دارد. به همین ترتیب، نفر سوم هم ۴ انتخاب دارد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۶\times۵\times۴=۱۲۰$.

۲۰۳- گزینهٔ ۱ برای هر سؤال یکی از چهار گزینه درست است، پس کلید هر سؤال ۴ حالت دارد. پس تعداد حالت‌های مختلف که یک کلید **۲۰** سؤالی می‌تواند داشته باشد $\underbrace{۴\times۴\times\cdots\times۴}_{\text{۲۰تا}}$ یعنی $۴^{۲۰}$ است.

۲۰۴- گزینهٔ ۲ تعداد راه‌های رسیدن از نقطهٔ A به هر نقطه روی شکل را به کمک اصل جمع حساب می‌کنیم که مطابق شکل روبه‌رو است. بنابراین به ۳۰ طریق مختلف می‌توانیم از نقطهٔ A به نقطهٔ B برویم.



۲۰۵- گزینهٔ ۲ اگر صدگان عدد ۷ باشد، هر کدام از رقم‌های دهگان و یکان می‌توانند نه حالت داشته باشند (فقط ۷ نمی‌توانند باشند). پس ۸۱ عدد به این صورت وجود دارد. اگر دهگان عدد ۷ باشد، رقم یکان می‌تواند نه حالت و رقم صدگان می‌تواند هشت حالت داشته باشد (۷ و صفر نمی‌تواند باشد). پس ۷۲ عدد به این شکل وجود دارد. به همین ترتیب اگر یکان عدد ۷ باشد، دهگان می‌تواند نه حالت داشته باشد و صدگان می‌تواند هشت حالت داشته باشد. یعنی ۷۲ عدد نیز به این شکل وجود دارد. بنابراین تعداد کل عددهای مطلوب برابر است با $۸۱+۷۲+۷۲=۲۲۵$.

۲۰۶- گزینهٔ ۳ حروف یکسان را کنار هم قرار می‌دهیم و آن‌ها را به عنوان یک عضو جایگشت در نظر می‌گیریم. یعنی می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های مختلف M ، I ، S و P را حساب کنیم که برابر $۴!=۲۴$ است.

۲۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(n,۵)=۲P(n,۴)\Rightarrow\frac{n!}{(n-۵)!}=۲\times\frac{n!}{(n-۴)!}$$

$$\frac{۱}{(n-۵)!}=\frac{۲}{(n-۴)(n-۵)!}\Rightarrow n-۴=۲\Rightarrow n=۶$$

۲۰۸- گزینهٔ ۳ باید سه رقم متمایز از میان رقم‌های ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۷ و ۹ انتخاب کنیم و با آن‌ها عددی سه رقمی بنویسیم. تعداد راه‌های این کار برابر است با $P(۶,۳)=\frac{۶!}{۳!}=۱۲۰$.

۲۰۹- گزینهٔ ۱ ارقام اول و آخر را باید از بین پنج رقم فرد انتخاب کنیم که این کار به $P(۵,۲)$ حالت امکان‌پذیر است. سه رقم وسط را هم باید از بین هشت رقم باقیمانده انتخاب کنیم که این کار به $P(۸,۳)$ حالت امکان‌پذیر است. بنابراین تعداد اعداد مطلوب سؤال برابر است با

$$P(۵,۲)\times P(۸,۳)=\frac{۵!}{۳!}\times\frac{۸!}{۵!}=\frac{۸!}{۳!}$$

۲۱۰- گزینهٔ ۴ در اینجا ترتیب بیرون آوردن ۴ گوی از ۲۰ گوی مهم است، پس تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $P(۲۰,۴)=\frac{۲۰!}{(۲۰-۴)!}=\frac{۲۰!}{۱۶!}$.

۲۱۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\binom{n}{۴}=\binom{n}{۷}\Rightarrow\frac{n!}{۴!(n-۴)!}=\frac{n!}{۷!(n-۷)!}\Rightarrow ۴!(n-۴)!=۷!(n-۷)!$$

$$۴!\times(n-۴)(n-۵)(n-۶)(n-۷)!=۴!\times۵\times۶\times۷\times(n-۷)!$$

$$(n-۴)(n-۵)(n-۶)=۷\times۶\times۵\Rightarrow n-۴=۷\Rightarrow n=۱۱$$

بنابراین $\binom{n}{۸}=\binom{۱۱}{۸}=\frac{۱۱!}{۸!۳!}=\frac{۱۱\times۱۰\times۹}{۶}=۱۶۵$.

راه‌حل دوم می‌دانیم اگر $\binom{n}{k}=\binom{n}{m}$ ، آن‌گاه $m+k=n$. پس $n=۷+۴=۱۱$. پس $\binom{n}{۸}=\binom{۱۱}{۸}=\frac{۱۱!}{۸!۳!}=\frac{۱۱\times۱۰\times۹}{۶}=۱۶۵$.

۲۱۲- گزینهٔ ۴ محسن به $\binom{۶}{۳}$ طریق می‌تواند سه تا از کتاب‌هایش را انتخاب کند و ابراهیم نیز به $\binom{۸}{۳}$ طریق می‌تواند سه تا از کتاب‌هایش را انتخاب کند. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $\binom{۸}{۳}\binom{۶}{۸}=۱۱۲۰$.

۲۱۳- گزینهٔ ۴ اگر به چهار پرسش از پنج پرسش نخست پاسخ دهد، باید به شش پرسش از هشت پرسش دیگر پاسخ دهد. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{۸}{۶}\binom{۵}{۴}=۱۴۰$. اگر به هر پنج پرسش نخست پاسخ دهد، باید به پنج پرسش از هشت پرسش دیگر پاسخ دهد. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{۸}{۵}\binom{۵}{۵}=۵۶$. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $۱۴۰+۵۶=۱۹۶$.

۲۱۴- گزینهٔ ۱ اگر سه نفر از هشت نفر را انتخاب کنیم و در یک تیم قرار دهیم، پنج نفر باقی‌مانده تیم پنج نفره را تشکیل می‌دهند. بنابراین تعداد حالت‌های ممکن برابر $\binom{۸}{۳}$ است: $\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۳!\times۵!}=۵۶$.

۲۱۵- گزینهٔ ۱ ابتدا یک زن و شوهر را از بین شش زن و شوهر به $\binom{۶}{۱}$ حالت انتخاب می‌کنیم. اکنون باید سه نفر را از بین پنج زوج دیگر انتخاب کنیم. ابتدا سه زوج انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{۵}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است. سپس از بین هر زوج انتخاب شده زن یا شوهر را انتخاب می‌کنیم که این کار به $۲\times۲\times۲$ راه ممکن است. پس کل حالت‌های انتخاب پنج نفر از بین ساکنین آپارتمان برابر است با $۴۸۰=۲^۳\times\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۱}$.

۲۱۶- گزینهٔ ۱ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است. بنابراین $\binom{n}{۶}=\binom{n}{۵}$ و در نتیجه $n=۵+۶=۱۱$.

تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ یازده عضوی برابر است با $\binom{۱۱}{۳}$ یا همان $\binom{۱۱}{۸}$.

۲۱۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(S)=۲^۲=۴,\quad n(A)=\binom{۲}{۱}+\binom{۲}{۲}=۲+۱=۳$$

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$.

۲۱۸- گزینهٔ ۴ تعداد راه‌های انتخاب سه لامپ از دوازده لامپ برابر است با $n(S)=\binom{۱۲}{۳}$. چون هشت لامپ درون جعبه سالم‌اند، پس اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $n(A)=\binom{۸}{۳}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۸}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{\frac{۸!}{۵!۳!}}{\frac{۱۲!}{۹!۳!}}=\frac{۸!\times۹!}{۵!\times۱۲!}=\frac{۶\times۷\times۸}{۱۰\times۱۱\times۱۲}=\frac{۱۴}{۵۵}$$

۲۱۹- گزینهٔ ۱ واضح است که $n(S)=\binom{۱۰}{۳}$. برای اینکه سه مهره همرنگ باشند، یا باید هر سه آبی باشند یا هر سه قرمز. پس تعداد حالت‌های انتخاب سه مهرهٔ همرنگ برابر است با $n(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۶}{۳}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۴+۲۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}$$

۲۲۰- گزینهٔ ۴ چون A و B دو پیشامد ناسازگارند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow \frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۴}+P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۸}$$

بنابراین $P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$.

۲۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۱=۰/۳-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲$$

از طرف دیگر

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۳+۰/۴-۰/۲=۰/۵$$

۲۲۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید A پیشامد این باشد که هر دو عدد رو شده زوج باشند و B پیشامد این باشد که مجموع دو عدد رو شده برابر ۶ باشد، در این صورت

$$B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\},\ \ A\cap B=\{(۲,۴),(۴,۲)\}$$

پس $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۵}$.

۲۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۰/۲=P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A\cap B')}{۱-P(B)}=\frac{P(A\cap B')}{۰/۸}$$

در نتیجه $P(A\cap B')=۰/۲\times۰/۸=۰/۱۶$.

۲۲۴- گزینهٔ ۴ A را پیشامد گرفتن بیماری سارس و B را پیشامد درمان فرد می‌گیریم. در این صورت $P(A)=\frac{۲}{۱۰۰}$ و $P(B|A)=\frac{۱}{۱۰}$. در نتیجه

$$\frac{۱}{۱۰}=P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۲}{۱۰۰}}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۰۰۲$$

در نتیجه احتمال اینکه فرد هم دچار بیماری شود و هم درمان شود ۰/۰۰۲ است.

۲۲۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که نفر اول به هدف بزنند و B پیشامد این باشد که نفر دوم به هدف بزنند.

توجه کنید که $P(A)=۰/۸$ و $P(B)=۰/۷$. پیشامدهای A و B مستقل‌اند و در نتیجه $P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰/۸\times۰/۷=۰/۵۶$. احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۸+۰/۷-۰/۵۶=۰/۹۴$$

۲۲۶- گزینهٔ ۳ پیشامد «به هدف زدن شخص اول» را A و پیشامد «به هدف زدن شخص دوم» را B می‌نامیم. پس

$$P(A)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(A')=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\ ,\quad P(B)=\frac{۳}{۸}\Rightarrow P(B')=۱-\frac{۳}{۸}=\frac{۵}{۸}$$

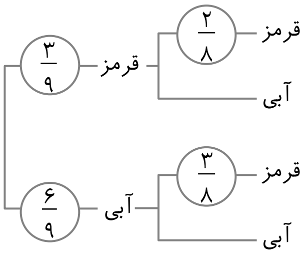
پیشامد «حداقل یکی از آن‌ها به هدف نزنند» برابر $A'\cup B'$ است که چون A' و B' مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A')P(B')=\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۲۹}{۳۲}$$

۲۲۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که در اینجا فضای احتمال $S=\{$ق ق, ق آ, آ ق, آ آ$\}$ است. فرض کنید $R_۲$ پیشامد این باشد که توپ دوم قرمز و $R_۱$ و $B_۱$ به‌ترتیب پیشامدهای این باشند که توپ اول قرمز و توپ اول آبی باشد. در این صورت، چون $R_۱$ و $B_۱$ فضای S را افراز می‌کنند، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(R_۲)=P(R_۱)P(R_۲|R_۱)+P(B_۱)P(R_۲|B_۱)=\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۳}$$

راه‌حل دوم نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید



$$P(\text{قرمز بودن توپ دوم})=\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۳}$$

۲۲۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید B پیشامد انتخاب جعبهٔ اول برای افزودن ۲ مهرهٔ سفید باشد. در این صورت B' پیشامد انتخاب جعبهٔ دوم برای افزودن ۲ مهرهٔ سفید است. همچنین فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهرهٔ انتخاب شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۳}{۴}$$

توجه کنید که اگر دو مهرهٔ سفید به جعبهٔ اول اضافه شوند، این جعبه شامل ۸ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه می‌شود، پس احتمال سفید بودن مهرهٔ انتخابی از این جعبه برابر $\frac{۸}{۱۰}$ می‌شود، یعنی $P(A|B)=\frac{۸}{۱۰}$. به طور مشابه

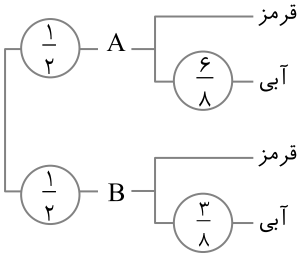
$$P(A|B')=\frac{۷}{۱۰}$$

۲۲۹- گزینهٔ ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که در پرتاب دو تاس اول عددهای برابر نیایند (که از اینها $(۲,۳)$، $(۳,۲)$، $(۱,۴)$ و $(۴,۱)$ مطلوب‌اند)، B پیشامد این باشد که در پرتاب دو تاس اول عددهای برابر بیایند (که ابتدا $(۱,۱)$ و سپس $(۱,۲)$ یا $(۲,۱)$ مطلوب‌اند) و C پیشامد این باشد که مجموع نهایی برابر ۵ باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$$

$$=\frac{۳۰}{۳۶}\times\frac{۴}{۳۰}+\frac{۶}{۳۶}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۲}{۳۶}=\frac{۷۳}{۶۴۸}$$

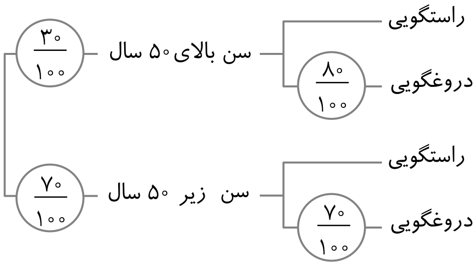
۲۳۰- گزینهٔ ۴ جعبه‌ها را A و B می‌نامیم. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم است که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۹}{۱۶}$$

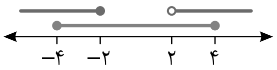
۲۳۱- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۳۰}{۱۰۰}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}+\frac{۷۰}{۱۰۰}\times\frac{۷۰}{۱۰۰}=\frac{۷۳}{۱۰۰}=۰/۷۳$$

۲۳۲- گزینهٔ ۲ به کمک شکل زیر، مجموعهٔ داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم: $A=[-۴,-۲]\cup(۲,۴]$. بنابراین اعداد صحیح ۴−، ۳−، ۲−، ۳ و ۴ در مجموعهٔ A قرار دارند.



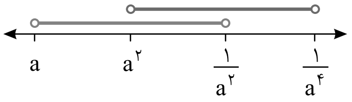
۲۳۳- گزینهٔ ۲ عدد ۲ باید در نامساوی‌های زیر صدق کند:

$$۲a\le۲\Rightarrow a\le۱\,,\quad ۲<۳+a\Rightarrow a>-۱$$

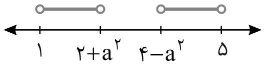
بنابراین $-۱<a\le۱$ و در نتیجه $a\in(-۱,۱]$.

۲۳۴- گزینهٔ ۴ چون $-۱<a<۰$، پس $a<a^۲<\frac{۱}{a^۲}<\frac{۱}{a^۴}$. بنابراین با توجه به شکل زیر،

$$(a,\frac{۱}{a^۲})\cap(a^۲,\frac{۱}{a^۴})=(a^۲,\frac{۱}{a^۲})$$



۲۳۵- گزینهٔ ۳ در حالت زیر اشتراک بازه‌ها تهی خواهد بود:



پس

$$۴-a^۲\ge۲+a^۲\Rightarrow a^۲\le۱\Rightarrow-۱\le a\le۱$$

یعنی

$$a\in[-۱,۱]$$

۲۳۶- گزینهٔ ۳ ابتدا مجموعهٔ A را با نوشتن اعضایش مشخص می کنیم. توجه کنید برای آنکه $\frac{۱۰}{x}$ عددی صحیح شود، مقادیر صحیحی که x می‌تواند اختیار کند، شامل مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۱۰ یعنی $\pm۱,\pm۲,\pm۵,\pm۱۰$ است. بنابراین $A=\{\pm۱,\pm۲,\pm۵,\pm۱۰\}$. در نتیجه A مجموعه‌ای متناهی است. از طرفی مجموعهٔ B شامل اعداد صحیحی است که معکوسشان از ۱ بزرگ‌ترند. می‌دانیم معکوس همهٔ عددهای صحیح (به جز صفر)، از ۱ کوچک‌ترند پس مجموعهٔ B تهی است. بنابراین مجموعهٔ B نیز مجموعه‌ای متناهی است.

۲۳۷- گزینهٔ ۴ اگر تعداد محدودی از اعضای مجموعهٔ نامتناهی A را که در مجموعهٔ متناهی B نیز قرار دارند، حذف کنیم، باز هم مجموعه‌ای نامتناهی باقی می‌ماند. یعنی $A-B$ نامتناهی است.

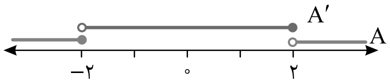
بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) اگر $A=\mathbb{W}$ و $B=\mathbb{N}$، آن‌گاه $A-B=\{۰\}$. پس $A-B$ متناهی است ولی A و B نامتناهی‌اند.

گزینهٔ (۲) اگر $A=\mathbb{Z}$ و $B=\{۱\}$، آن‌گاه $A-B=\mathbb{Z}-\{۱\}$. پس $A-B$ نامتناهی است ولی B متناهی است.

گزینهٔ (۳) اگر $A=\{\frac{۱}{۲}\}$ و $B=\mathbb{Z}$، آن‌گاه $A-B=\varnothing$. پس A متناهی و B نامتناهی است ولی $A-B$ متناهی است.

۲۳۸- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، $A'=(-۲,۲]$. بنابراین اعداد صحیح ۱−، صفر، ۱ و ۲ عضو A' هستند، که مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



۲۳۹- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ علاقه‌مندان به فوتبال را با A و مجموعهٔ علاقه‌مندان به والیبال را با B نشان می‌دهیم. در این صورت $n(A)=۳۰$، $n(B)=۳۵$. از طرف دیگر ۴۰ نفر حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند. پس $n(A\cup B)=۴۰$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۴۰=۳۰+۳۵-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۲۵$$

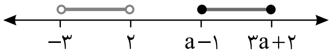
پس ۲۵ نفر به هر دو رشته علاقه دارند.

۲۴۰- گزینهٔ ۲

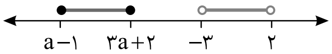
$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A-B)+n(B-A)$$

$$۲۰-۴=n(A-B)+n(B-A)\Rightarrow n(A-B)+n(B-A)=۱۶$$

۲۴۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در دو حالت زیر این دو بازه جدا از هم هستند:



$$a-۱\ge۲\Rightarrow a\ge۳$$



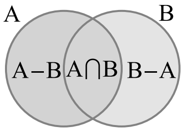
$$۳a+۲\le-۳\Rightarrow a\le-\frac{۵}{۳}$$

از طرف دیگر برای اینکه $[a-۱,۳a+۲]$ بازه باشد باید $a-۱<۳a+۲$ و در نتیجه $a>-\frac{۳}{۲}$. بنابراین

$$a\in([۳,+\infty)\cup(-\infty,-\frac{۵}{۳}])\cap(-\frac{۳}{۲},+\infty)$$

اگر $a\ge۳$، دو بازهٔ مورد نظر جدا از هم هستند.

۲۴۲- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل مجموعه‌های $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ دو به دو جدا از هم هستند.



۲۴۳- گزینهٔ ۱ توجه‌کنید که در شکل اول، ۶ دایرهٔ رنگی وجود دارد. در شکل دوم، ۴ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، در شکل سوم، ۲×۴ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، ... در شکل nاُم، $۴\times(n-۱)$ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد دایره‌های رنگی در شکل nاُم را a_n بگیریم، $a_n=۶+۴(n-۱)=۴n+۲$ (توجه کنید که شکل nاُم، n دایرهٔ خاکستری دارد). بنابراین

$$a_{۲۰}=۴\times۲۰+۲=۸۲$$

۲۴۴- گزینهٔ ۱ جملهٔ عمومی الگو $t_n=an+b$ است، پس

$$\begin{cases}t_۴=۱۶\\ t_{۱۶}=۲۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴a+b=۱۶\\ ۱۶a+b=۲۸\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به‌دست می‌آید $a=۱$ و $b=۱۲$. بنابراین

$$t_n=n+۱۲\Rightarrow t_۲=۱۴$$

۲۴۵- گزینهٔ ۲ شکل nاُم از $(n+۲)^۲$ مربع کوچک تشکیل شده است که اگر n زوج باشد، $۲(n+۲)$ مربع کوچک سفید و اگر n فرد باشد، $۲(n+۲)-۱=۲n+۳$ مربع کوچک سفید در شکل وجود دارد. بنابراین در شکل هجدهم، $(۲۰)^۲$ مربع کوچک وجود دارد که ۴۰تای آن‌ها سفید هستند. پس در شکل هجدهم ۳۶۰ مربع کوچک رنگی وجود دارد.

۲۴۶- گزینهٔ ۳ باید ببینیم به ازای کدام مقدار n تساوی $\frac{۴n-۳}{n+۳}=۳$ برقرار می‌شود. پس

$$۴n-۳=۳n+۹\Rightarrow n=۱۲$$

بنابراین جملهٔ دوازدهم دنباله برابر ۳ است.

۲۴۷- گزینهٔ ۴ عدد آخر دستهٔ اول $۲^۲$، عدد آخر دستهٔ دوم $۴^۲$، عدد آخر دستهٔ سوم $۶^۲$ و ... عدد آخر دستهٔ nاُم برابر $(۲n)^۲$ است. پس عدد آخر دستهٔ دهم $۲۰^۲$ است. بنابراین عدد اول دستهٔ یازدهم ۴۰۲ است.

۲۴۸- گزینهٔ ۴ از رابطهٔ داده شده $a_n=a_{n-۱}-۳$ به‌دست می‌آید. یعنی هر جملهٔ دنباله از جمع کردن -۳ با جملهٔ قبلی آن به‌دست می‌آید. پس یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت -۳ و جملهٔ اول -۴ داریم که جملهٔ بیستم آن برابر است با $a_{۲۰}=a_۱+۱۹d=-۴+۱۹(-۳)=-۶۱$.

۲۴۹- گزینهٔ ۱ فرض‌کنید جملهٔ اول این دنباله، $a_۱$ و قدرنسبت آن d باشد. در این‌صورت

$$a_۴=۵\Rightarrow a_۱+(۴-۱)d=۵\Rightarrow a_۱+۳d=۵ \qquad (۱)$$

$$a_۹=۳۰\Rightarrow a_۱+(۹-۱)d=۳۰\Rightarrow a_۱+۸d=۳۰ \qquad (۲)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید $۵d=۲۵$، پس $d=۵$. اکنون اگر این مقدار d را در تساوی (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید $a_۱=-۱۰$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی مورد نظر، برابر است با

$$a_n=a_۱+(n-۱)d=-۱۰+(n-۱)(۵)=۵n-۱۵$$

۲۵۰- گزینهٔ ۲ این اعداد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند که متناهی بوده و قدرنسبت آن ۷ است. کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۱۰۵ و بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۹۹۴ است. پس تعداد این اعداد $\frac{۹۹۴-۱۰۵}{۷}+۱$ است که برابر است با ۱۲۸.

۲۵۱- گزینهٔ ۲ عدد $\frac{۱}{۲}$ واسطهٔ حسابی $\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{x+۲}$ است، پس

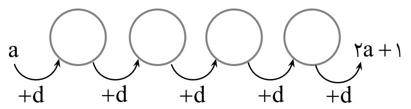
$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۲})\Rightarrow ۱=\frac{x+۲+x}{x(x+۲)}$$

در نتیجه

$$x^۲+۲x=۲x+۲\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

۲۵۲- گزینهٔ ۲ چون $a>۰$، پس $۲a+۱>a$. اکنون قدرنسبت دنباله را به‌دست می‌آوریم $d=\frac{۲a+۱-a}{۴+۱}=\frac{a+۱}{۵}$. اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهایی که درج کرده‌ایم برابر ۳d است و در نتیجه

$$\frac{۳(a+۱)}{۵}=۹\Rightarrow ۳a+۳=۴۵\Rightarrow ۳a=۴۲\Rightarrow a=۱۴$$



۲۵۳- گزینهٔ ۳ جملات دنبالهٔ حسابی را به‌صورت $a-d\,,a\,,a+d$ درنظر می‌گیریم. مجموع آن‌ها ۳a است. پس $۳a=۲۱$ و در نتیجه $a=۷$. از طرف دیگر،

$$(a-d)(a)(a+d)=۱۶۸\Rightarrow ۷(۴۹-d^۲)=۱۶۸$$

$$۴۹-d^۲=۲۴\Rightarrow d^۲=۲۵\Rightarrow d=\pm۵\Rightarrow ۲,۷,۱۲ \text{ یا } ۱۲,۷,۲$$

پس نسبت بزرگ‌ترین عدد به کوچک‌ترین عدد برابر ۶ است.

۲۵۴- گزینهٔ ۳ فرض‌کنید قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی r باشد $(r>۰)$. در این‌صورت

$$a_۱+a_۵=۳۰\Rightarrow a_۱+a_۱r^۴=۳۰\Rightarrow a_۱(۱+r^۴)=۳۰ \qquad (۱)$$

$$a_۳+a_۷=۱۲۰\Rightarrow a_۱r^۲+a_۱r^۶=۱۲۰\Rightarrow a_۱r^۲(۱+r^۴)=۱۲۰ \qquad (۲)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید $r^۲=۴$؛ پس $r^۴=۱۶$. به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $a_۱=\frac{۳۰}{۱۷}$.

۲۵۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** چون $۳+۹=۵+۷=۴+۸$ پس

$$a_۳a_۹=a_۵a_۷=a_۴a_۸$$

در نتیجه $a_۳a_۵a_۷a_۹=(a_۴a_۸)^۲=۹$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a_۴=a_۱r^۳\,,\quad a_۸=a_۱r^۷\Rightarrow a_۴a_۸=a_۱^۲r^{۱۰}=۳$$

پس

$$a_۳a_۵a_۷a_۹=a_۱r^۲a_۱r^۴a_۱r^۶a_۱r^۸=a_۱^۴r^{۲۰}=(a_۱^۲r^{۱۰})^۲=۹$$

۲۵۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$a_۱a_۲\cdots a_۸=\sqrt{(a_۱a_۸)^۸}\Rightarrow ۸۱=\sqrt{(a_۱a_۸)^۸}\Rightarrow a_۱a_۸=\pm۳$$

از طرف دیگر،

$$۲+۷=۱+۸\Rightarrow a_۲a_۷=a_۱a_۸$$

$$۴+۵=۱+۸\Rightarrow a_۴a_۵=a_۱a_۸$$

پس $a_۲a_۴a_۵a_۷=(a_۲a_۷)(a_۴a_۵)=(a_۱a_۸)^۲=۹$.

۲۵۷- گزینهٔ ۲ اگر جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی a و قدرنسبت آن d باشد، جملات دوم، چهارم و نهم به‌ترتیب $a+d$ ، $a+۳d$ و $a+۸d$ هستند. پس $a+۳d$ واسطهٔ هندسی $a+d$ و $a+۸d$ است و درنتیجه

$$(a+۳d)^۲=(a+d)(a+۸d)\Rightarrow a^۲+۶ad+۹d^۲=a^۲+۹ad+۸d^۲$$

$$d^۲=۳ad\Rightarrow d=۳a$$

پس قدرنسبت دنبالهٔ حسابی ۳ برابر جملهٔ اول آن است.

۲۵۸- گزینهٔ ۲ چون $x<۰$ ، پس $\sqrt[۴]{x^۴}=|x|=-x$. در نتیجه

$$۳\sqrt[۳]{x^۳}+۲\sqrt[۴]{x^۴}=۳x+۲(-x)=x$$

۲۵۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$b\sqrt[۶]{a^۶}-a=۰\Rightarrow b|a|-a=۰\Rightarrow b|a|=a$$

بنابراین اگر $a>۰$ ، $b=۱$ و اگر $a<۰$ ، $b=-۱$. در نتیجه $\sqrt[۶]{a^۶}+\sqrt[۶]{b^۶}=|a|+|b|=|a|+۱$ که اگر a مثبت باشد برابر با $۱+a$ و اگر a منفی باشد، برابر با $۱-a$ است.

۲۶۰- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$\sqrt[۴]{\sqrt{\sqrt{۲^n}}}=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{\sqrt{۸}}}\Rightarrow\sqrt[۴\times۲\times۲]{۲^n}=\sqrt[۳\times۴\times۲]{۸}\Rightarrow ۲^{\frac{n}{۴\times۲\times۲}}=۲^{\frac{۳}{۳\times۴\times۲}}$$

$$۲^{\frac{n}{۱۶}}=۲^{\frac{۱}{۸}}\Rightarrow\frac{n}{۱۶}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow n=۲$$

۲۶۱- گزینهٔ ۳ از $a>\sqrt{a}$ نتیجه می‌شود $a>۱$. بنابراین $a^۲<a^۳$ و در نتیجه $\sqrt[۳]{a^۲}<\sqrt[۳]{a^۳}$. یعنی $\sqrt[۳]{a^۲}<a$. همچنین $\frac{۳}{۴}>\frac{۱}{۲}$ پس $a^{\frac{۳}{۴}}=\sqrt[۴]{a^۳}>\sqrt{a}=a^{\frac{۱}{۲}}$. بنابراین نابرابری داده شده در گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۶۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a^{\frac{۳}{۵}}=۱۶\Rightarrow(a^{\frac{۳}{۵}})^{\frac{۵}{۳}}=۱۶^{\frac{۵}{۳}}\Rightarrow a=۱۶^{\frac{۵}{۳}}$$

بنابراین $a^{\frac{۳}{۴}}=(۱۶^{\frac{۵}{۳}})^{\frac{۳}{۴}}=۱۶^{\frac{۵}{۳}\times\frac{۳}{۴}}=۱۶^{\frac{۵}{۴}}=(۲^۴)^{\frac{۵}{۴}}=۲^۵=۳۲$.

۲۶۳- گزینهٔ ۳ با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا به‌دست می‌آید

$$\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳}\sqrt[۴]{۳}}=\sqrt{۳\times۳^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۱}{۴}}}=\sqrt{۳^{\frac{۱۹}{۱۲}}}=۳^{\frac{۱۹}{۲۴}}$$

بنابراین $a=\frac{۱۹}{۲۴}$.

۲۶۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $۴a^۲+\frac{۹}{a^۲}=(۲a+\frac{۳}{a})^۲-۱۲$. از طرف دیگر، بنابر فرض $a+\frac{۳}{۲a}=۴$. اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید $۲a+\frac{۳}{a}=۸$. بنابراین، حاصل عبارت موردنظر برابر است با $۸^۲-۱۲=۵۲$.

۲۶۵- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}{\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}}\div\sqrt{\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۳-۲\sqrt{۲}}}=\sqrt{\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۶-۲\sqrt{۵}}}\times\sqrt{\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۶+۲\sqrt{۵}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(۳+۲\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})}{(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})}}=\sqrt{\frac{۳^۲-(۲\sqrt{۲})^۲}{۶^۲-(۲\sqrt{۵})^۲}}=\sqrt{\frac{۹-۸}{۳۶-۲۰}}=\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}=\frac{۱}{۴}$$

۲۶۶- گزینهٔ ۱ بنابر اتحاد مربع مجموع سه جمله،

$$(a-b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(-ab-bc+ca)\qquad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$ab+bc-ca=۸\Rightarrow-ab-bc+ca=-۸$$

در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$۳۶=a^۲+b^۲+c^۲-۱۶\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲=۵۲$$

۲۶۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(x-۱)(x-۲)=x^۲-۳x+۲$ و $(x-۴)(x+۱)=x^۲-۳x-۴$. بنابراین

$$(x-۱)(x-۲)(x-۴)(x+۱)=(x^۲-۳x+۲)(x^۲-۳x-۴)$$

$$=(۷+۲)(۷-۴)=۲۷$$

۲۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸-(۸x^۳-۱۲x^۲+۶x-۱)$$

$$=-۷x^۳+۶x^۲+۶x-۷$$

بنابراین ضریب $x^۲$ برابر ۶ است.

۲۶۹- گزینهٔ ۳ ابتدا عبارت را به کمک اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$A=(x-۱)(x+۱)(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)+۱$$

$$=((x-۱)(x^۲+x+۱))((x+۱)(x^۲-x+۱))+۱$$

$$=(x^۳-۱)(x^۳+۱)+۱=x^۶-۱+۱=x^۶$$

حال قرار می‌دهیم $x=\sqrt[۱۲]{۲}$ و نتیجه می‌شود $A=(\sqrt[۱۲]{۲})^۶=\sqrt{۲}$.

۲۷۰- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$x^۲-y^۲-۶x-۸y-۷=(x^۲-۶x+۹)-(y^۲+۸y+۱۶)$$

$$=(x-۳)^۲-(y+۴)^۲=(x-۳-(y+۴))(x-۳+y+۴)$$

$$=(x-y-۷)(x+y+۱)$$

بنابراین $x+y+۱$ عامل عبارت مورد نظر است.

۲۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^۴+۳x^۲+۴=x^۴+۴x^۲+۴-x^۲=(x^۲+۲)^۲-x^۲$$

$$=(x^۲+۲-x)(x^۲+۲+x)$$

بنابراین $x^۲-x+۲$ عاملی از عبارت مورد نظر است.

۲۷۲- گزینهٔ ۳ صورت کسر اول برابر است با

$$۳y^۳+۳=۳(y^۳+۱)=۳(y+۱)(y^۲-y+۱)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۳(y+۱)(y^۲-y+۱)}{y-x}\times\frac{x(y-x)}{x(۱-y+y^۲)}=۳(y+۱)$$

۲۷۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد جملهٔ مشترک، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$a^۲+ab+ac+bc=a^۲+a(b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

توجه کنید که $a+c=a+b+c-b=۳+۲=۵$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $۳\times۵=۱۵$.

۲۷۴- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{a^۶-۱}{a^۴-a^۲}=\frac{(a^۲)^۳-۱}{a^۲(a^۲-۱)}=\frac{(a^۲-۱)((a^۲)^۲+a^۲+۱)}{a^۲(a^۲-۱)}$$

$$=\frac{a^۴+a^۲+۱}{a^۲}=\frac{a^۴}{a^۲}+\frac{a^۲}{a^۲}+\frac{۱}{a^۲}=a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۱$$

$$=(a-\frac{۱}{a})^۲+۲+۱=\sqrt{۵}^۲+۳=۸$$

۲۷۵- گزینهٔ ۱ مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱}-۵=\frac{(۴+۲\sqrt{۳})(\sqrt{۳}+۱)}{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}-۵=\frac{۴\sqrt{۳}+۴+۶+۲\sqrt{۳}}{۳-۱}-۵$$

$$=\frac{۱۰+۶\sqrt{۳}}{۲}-۵=۵+۳\sqrt{۳}-۵=۳\sqrt{۳}$$

۲۷۶- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر داده شده را در $۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۴}{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}=\frac{۴(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{(۱+\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۳})^۲}$$

$$=\frac{۴(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۲(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{\sqrt{۲}}$$

اکنون صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}.$$

۲۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا مخرج طرف چپ تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{(\sqrt[۳]{۳})^۳-۱}$$

$$=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۹}+\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۳}+\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$.

۲۷۸- گزینهٔ ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر است با $P(۲)=۲^۵-۴(۲)^۳+۳(۲)^۲-۲+۱=۱۱$.

۲۷۹- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ برابر است با $P(۱)=۳-۴a-۵=-۴a-۲$. چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است، پس این باقی‌مانده صفر است، در نتیجه

$$-۴a-۲=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۲۸۰- گزینهٔ ۳ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر است، پس $P(-۳)=۰$، در نتیجه

$$P(-۳)=(-۳)^۸+۳(-۳)^۷+a(-۳)^۲-۹=۰$$

بنابراین $a=۱$ و $P(x)=x^۸+۳x^۷+x^۲-۹$. از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x+۲$ برابر است با $P(-۲+۱)=P(-۱)$. اکنون توجه کنید که $P(-۱)=(-۱)^۸+۳(-۱)^۷+(-۱)^۲-۹=-۱۰$.

۲۸۱- گزینهٔ ۱ جواب‌های معادله برابر هستند با

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۸\pm\sqrt{۸^۲-۴\times۱۳}}{۲}=\frac{۸\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۴\pm\sqrt{۳}$$

۲۸۲- گزینهٔ ۳ معادلهٔ گزینهٔ (۳) به ازای هر مقدار m جواب حقیقی دارد، زیرا معادله‌ای که به‌ازای هر m، دلتای مربوط به آن همیشه مثبت باشد، جواب این تست است.

$$mx^۲-x-m=۰\Rightarrow\Delta=۱+۴m^۲>۰$$

توجه کنید که اگر $m=۰$، آن‌گاه معادله به یک معادلهٔ درجهٔ اول تبدیل می‌شود که باز هم دارای جواب حقیقی است. بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) $x^۲-۲x+m=۰\Rightarrow\Delta=۴-۴m\Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

گزینهٔ (۲) $x^۲-x+m^۲=۰\Rightarrow\Delta=۱-۴m^۲\Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

گزینهٔ (۴) $mx^۲-x+۱=۰\Rightarrow\Delta=۱-۴m\Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

۲۸۳- گزینهٔ ۱ باید $\Delta\geq۰$، پس

$$x^۲-(k+۱)x+۱=۰\Rightarrow\Delta=(k+۱)^۲-۴\geq۰$$

$$(k+۱)^۲\geq۴\xrightarrow{k>۰}k+۱\geq۲\Rightarrow k\geq۱$$

پس حداقل مقدار مثبت k برابر ۱ است.

۲۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که چون مجموع ضریب‌های معادلهٔ $۹۲x^۲-۱۶۷x+۷۵=۰$ برابر با صفر است، پس یکی از جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ۱ و جواب دیگر آن $\frac{۷۵}{۹۲}$ است. چون $\frac{۷۵}{۹۲}<۱$، پس کوچک‌ترین جواب $\frac{۷۵}{۹۲}$ است.

۲۸۵- گزینهٔ ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{۳})(x-۲\sqrt{۲})=۰\xrightarrow{x_۱<x_۲}x_۱=\sqrt{۳}\ ,\quad x_۲=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین $x_۱^۴+x_۲^۲=(\sqrt{۳})^۴+(۲\sqrt{۲})^۲=۹+۸=۱۷$.

۲۸۶- گزینهٔ ۳ این دو عدد فرد را x و $x+۲$ فرض می‌کنیم. بنابراین

$$x^۲+(x+۲)^۲=۱۳۰\Rightarrow۲x^۲+۴x+۴=۱۳۰\Rightarrow x^۲+۲x-۶۳=۰$$

$$(x+۹)(x-۷)=۰\Rightarrow x=-۹\ (\text{غ.ق.ق.})\ ,\ x=۷$$

بنابراین دو عدد مورد نظر، ۷ و ۹ هستند و اختلاف مربع‌های آن‌ها برابر ۴۹–۸۱ یعنی ۳۲ است.

۲۸۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x_۱^۲x_۲+x_۱x_۲^۲=x_۱x_۲(x_۱+x_۲)$$

از طرف دیگر، $x_۱+x_۲=۴$ و $x_۱x_۲=-۱$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $(-۱)(۴)=-۴$.

۲۸۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=۲$ و $\alpha\beta=-۵$. بنابراین

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۸-۳\times(-۵)\times۲=۳۸$$

۲۸۹- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=-\frac{۱}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=-۱$. بنابراین

$$\frac{m-۱}{۲}=-۱\Rightarrow m-۱=-۲\Rightarrow m=-۱$$

۲۹۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_۱+x_۲=-۵$ و چون $۲x_۱-x_۲=۱۷$، پس با جمع کردن طرفین این تساوی‌ها به‌دست می‌آید $x_۱=۴$. چون $x_۱$ جواب معادلهٔ مورد نظر است، پس ۴ در این معادله صدق می‌کند:

$$۴^۲+۵(۴)-۴m+۱۶=۰\Rightarrow m=۱۳$$

۲۹۱- گزینهٔ ۴ β جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$۲\beta^۲-\beta-۷=۰\Rightarrow ۲\beta^۲=\beta+۷$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{۱}{۲}$. بنابراین $\alpha+۲\beta^۲=\alpha+\beta+۷=\frac{۱}{۲}+۷=\frac{۱۵}{۲}$.

۲۹۲- گزینهٔ ۳ مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها را حساب می‌کنیم

$$S=\alpha+\beta=۲-\sqrt{۳}+۳+\sqrt{۳}=۵$$

$$P=\alpha\beta=(۲-\sqrt{۳})(۳+\sqrt{۳})=۳-\sqrt{۳}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۵x+۳-\sqrt{۳}=۰$$

۲۹۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۱$ و $x_۱x_۲=-۱$. بنابراین

$$\frac{۱}{x_۱+۱}+\frac{۱}{x_۲+۱}=\frac{x_۲+۱+x_۱+۱}{(x_۱+۱)(x_۲+۱)}=\frac{x_۱+x_۲+۲}{۱+(x_۱+x_۲)+x_۱x_۲}=\frac{۱+۲}{۱+۱-۱}=۳$$

$$\frac{۱}{x_۱+۱}\times\frac{۱}{x_۲+۱}=\frac{۱}{(x_۱+۱)(x_۲+۱)}=\frac{۱}{۱+(x_۱+x_۲)+x_۱x_۲}=\frac{۱}{۱+۱-۱}=۱$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر $x^۲-۳x+۱=۰$ است.

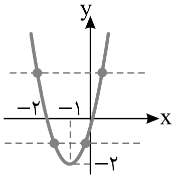
۲۹۴- گزینهٔ ۲ برای اینکه جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ مختلف العلامت باشند، کافی است $\frac{c}{a}<۰$. توجه کنید که در این حالت $\Delta>۰$. بنابراین

$$\frac{m+۲}{m}<۰\Rightarrow -۲<m<۰$$

۲۹۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** برای اینکه معادلهٔ مورد نظر دو جواب منفی داشته باشد، باید $\Delta>۰$، مجموع جواب‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. در نتیجه

$$\Delta>۰\Rightarrow ۱۶-۴(-۲)(a)>۰\Rightarrow a>-۲\ ,\ \frac{۴}{-۲}=-۲<۰\ ,\ \frac{a}{-۲}>۰\Rightarrow a<۰$$

بنابراین $-۲<a<۰$.



راه‌حل دوم ابتدا معادلهٔ داده‌شده را به‌صورت $۲x^۲+۴x=a$ می‌نویسیم. اکنون سهمی به معادلهٔ $y=۲x^۲+۴x$ و خط $y=a$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. بنابراین اگر $-۲<a<۰$، معادله دو جواب منفی دارد و اگر $a>۰$، معادله یک جواب منفی و یک جواب مثبت دارد.

توجه کنید که $x=۰$ و $x=-۲$ طول نقاط برخورد سهمی با محور x هستند و رأسش که نقطهٔ مینیمم آن است نقطهٔ $(-۱\ ,-۲)$ است.

۲۹۶- گزینهٔ ۱ شرط داشتن دو جواب، مثبت بودن Δ است. پس

$$\Delta=(a+۱)^۲-۶۴>۰\Rightarrow(a+۱)^۲>۶۴\Rightarrow\begin{cases}a+۱>۸\Rightarrow a>۷\\ \text{یا}\\ a+۱<-۸\Rightarrow a<-۹\end{cases}\qquad(۱)$$

شرط مثبت بودن دو جواب این است که مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها مثبت باشند. حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر ۴ است که مثبت است و مجموع جواب‌ها برابر $-\frac{a+۱}{۲}$ است. پس

$$-\frac{a+۱}{۲}>۰\Rightarrow a+۱<۰\Rightarrow a<-۱\qquad(۲)$$

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a<-۹$.

۲۹۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که معادله دو جواب دارد که یکی مثبت و یکی منفی است، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها منفی است:

$$\frac{۵(k-۲)}{k+۶}<۰\Rightarrow k\in(-۶,۲)$$

از طرف دیگر چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع جواب‌ها منفی است

$$-\frac{۱۷(k+۱)}{k+۶}<۰\Rightarrow\frac{k+۱}{k+۶}>۰\Rightarrow k\in(-\infty,-۶)\cup(-۱,+\infty)$$

بنابراین $k\in(-۱,۲)$.

۲۹۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x=-۱$ یک جواب معادله است.

$$(-۱)^۳-(-۱)^۲-۳(-۱)-۱=۰$$

بنابراین معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x^۳+x^۲-۲x^۲-۳x-۱=۰\Rightarrow x^۲(x+۱)-(۲x^۲+۳x+۱)=۰$$

$$x^۲(x+۱)-(x+۱)(۲x+۱)=۰\Rightarrow(x+۱)(x^۲-۲x-۱)=۰$$

پس جواب‌های دیگر از حل معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$ به دست می‌آیند که عبارت‌اند از $۱+\sqrt{۲}$ و $۱-\sqrt{۲}$. در نتیجه مجموع جواب‌های منفی معادله برابر است با $-۱+(۱-\sqrt{۲})=-\sqrt{۲}$.

۲۹۹- گزینهٔ ۴ چون $x=۲$ یکی از جواب‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند: $۸+۴a+۲+۶=۰$ پس $a=-۴$. چون $x-۲$ عاملی از $x^۳-۴x^۲+x+۶$ است، بنابراین $x^۳-۴x^۲+x+۶=(x-۲)Q(x)$.

برای به دست آوردن $Q(x)$ چندجمله‌ای $x^۳-۴x^۲+x+۶$ را بر $x-۲$ تقسیم می‌کنیم، که نتیجه می‌شود $Q(x)=x^۲-۲x-۳$. بنابراین

$$x^۳-۴x^۲+x+۶=(x-۲)(x^۲-۲x-۳)=(x-۲)(x+۱)(x-۳)$$

پس به غیر از $x=۲$ جواب‌های دیگر معادله -۱ و ۳ هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها ۱۰ است.

۳۰۰- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=x^۲\geq۰$، معادله به‌صورت $t^۲-۳t-۱=۰$ در می‌آید که جواب‌های آن $t=\frac{۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$ است. عدد $\frac{۳-\sqrt{۱۳}}{۲}$ منفی است و قابل قبول نیست. بنابراین

$$x^۲=\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}}$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با

$$-\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}}\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}}=-\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$$

۳۰۱- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$ و $t\geq۰$. همچنین معادله به شکل $t^۲-۲t+m^۲-۱=۰$ در می‌آید. اگر این معادله دو جواب مثبت داشته باشد، معادلهٔ اصلی چهار جواب خواهد داشت. بنابراین در معادلهٔ $t^۲-۲t+m^۲-۱=۰$ باید شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$\Delta>۰\Rightarrow ۴-۴(m^۲-۱)>۰\Rightarrow m^۲<۲\Rightarrow-\sqrt{۲}<m<\sqrt{۲}$$

$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow ۲>۰\ ,\quad \frac{c}{a}>۰\Rightarrow m^۲-۱>۰\Rightarrow m<-۱\ \text{یا}\ m>۱$$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $(-\sqrt{۲},-۱)\cup(۱,\sqrt{۲})$ باشد، معادلهٔ اصلی چهار جواب خواهد داشت. این مجموعه را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت

$$m\in(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})-[-۱,۱]$$

۳۰۲- گزینهٔ ۳ معادلـه را بـه شـکل $(x^۲-x)^۲+۲(x^۲-x)-۳=۰$ می‌نویسیم. با قرار دادن $x^۲-x=t$ به‌دست می‌آید

$$t^۲+۲t-۳=۰\Rightarrow t=-۳\,,\,t=۱$$

$x^۲-x=-۳\Rightarrow x^۲-x+۳=۰\Rightarrow\Delta<۰\Rightarrow$ معادله جواب ندارد

$x^۲-x=۱\Rightarrow x^۲-x-۱=۰\Rightarrow\Delta>۰\Rightarrow$ مجموع جواب‌ها $=۱$

۳۰۳- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x(\frac{۲}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱})=۰\Rightarrow x(\frac{۲(x+۱)-(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)})=۰$$

$$x(\frac{x+۳}{(x-۱)(x+۱)})=۰\Rightarrow\frac{x(x+۳)}{(x-۱)(x+۱)}=۰$$

جواب‌های این معادله ۰ و ۳− هستند که هر دو قابل قبول هستند و مجموع آن‌ها ۳− است.

۳۰۴- گزینهٔ ۳ دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرهای دو طرف که برابر $۳(x-۳)(x+۳)$ است ضرب می‌کنیم:

$$۳(x-۳)(x+۳)\frac{x+۳}{x-۳}+۳(x-۳)(x+۳)\frac{x-۳}{x+۳}=\frac{۱۰}{۳}\times۳(x-۳)(x+۳)$$

$$۳(x+۳)^۲+۳(x-۳)^۲=۱۰(x-۳)(x+۳)$$

$$۳(x^۲+۶x+۹)+۳(x^۲-۶x+۹)=۱۰(x^۲-۹)$$

$$۶x^۲+۵۴=۱۰x^۲-۹۰\Rightarrow ۴x^۲=۱۴۴\Rightarrow x=\pm۶$$

چون ۶− و ۶ هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۳۶− است.

۳۰۵- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{۲x-۲a+x+۳}{(x+۳)(x-a)}=۴\Rightarrow\frac{۳x-۲a+۳}{(x+۳)(x-a)}=۴$$

$$۳x-۲a+۳=۴x^۲+(۱۲-۴a)x-۱۲a$$

$$۴x^۲+(۹-۴a)x-۱۰a-۳=۰$$

بنابراین

مجموع جواب‌ها $=\frac{۴a-۹}{۴}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴a-۹=-۱\Rightarrow a=۲$

اگـر $a=۲$، آن‌گاه معادلـه به‌صـورت $۴x^۲+x-۲۳=۰$ درمی‌آیـد که چون $\Delta>۰$ پس معادله دو جواب دارد. ($x=۲$ و $x=-۳$ که هر کدام مخرج یکی از کسرها را در معادلهٔ اولیه صفر می‌کنند، هیچ کدام جواب معادلهٔ بالا نیستند. پس هر دو جواب این معادله قابل قبول هستند.)

۳۰۶- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را در $x(x+a)$ ضرب می‌کنیم

$$x+a+۳x=۲x^۲+۲ax\Rightarrow ۲x^۲+(۲a-۴)x-a=۰$$

برای اینکه معادله جواب داشته باشد باید $\Delta\geq۰$. پس

$$(۲a-۴)^۲+۸a\geq۰\Rightarrow ۴a^۲-۱۶a+۱۶+۸a\geq۰\Rightarrow a^۲-۲a+۴\geq۰$$

عبـارت $a^۲-۲a+۴$ همواره مثبت اسـت، پس معادله بـه‌ازای تمام مقادیر a جواب دارد.

۳۰۷- گزینهٔ ۲ سمت راست معادلهٔ داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱۵}{x^۲+x+۱}=۲(x^۲+x+۱)-۱$$

اگر فرض کنیم $x^۲+x+۱=t$، این معادله می‌شود

$$\frac{۱۵}{t}=۲t-۱\Rightarrow ۱۵=۲t^۲-t\Rightarrow ۲t^۲-t-۱۵=۰\Rightarrow t=-\frac{۵}{۲},t=۳$$

به این ترتیب

$x^۲+x+۱=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow x^۲+x+\frac{۷}{۲}=۰$ جواب ندارد $(\Delta<۰)$

$$x^۲+x+۱=۳\Rightarrow x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=-۲\,,\,x=۱$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۳۰۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(x+\frac{۱}{x})^۲=x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲=(x-\frac{۱}{x})^۲+۴$$

پـس معادلهٔ مـورد نظر بـه معادلهٔ $(x-\frac{۱}{x})^۲=\frac{۳}{۲}(x-\frac{۱}{x})$ تبدیل می‌شـود.

بنابراین یا $x-\frac{۱}{x}=۰$، یعنی $x^۲-۱=۰$، که مجموع جواب‌هایش صفر اسـت،

یـا $x-\frac{۱}{x}=\frac{۳}{۲}$، یعنی $x^۲-\frac{۳}{۲}x-۱=۰$ کـه مجموع جواب‌هایش $\frac{۳}{۲}$ اسـت.

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر با $\frac{۳}{۲}$ است.

۳۰۹- گزینهٔ ۴ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}=۴\Rightarrow x+۱=۴x^۲\Rightarrow ۴x^۲-x-۱=۰$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $-\frac{۱}{۴}$ است.

۳۱۰- گزینهٔ ۳ اگر ماشـین کندتر به تنهایی در t ساعت کار را تمام کند، ماشـین سـریع‌تر به تنهایی در $\frac{t}{۳}$ ساعت کار را تمام می‌کند. پس ماشین کندتر به تنهایی در یک سـاعت $\frac{۱}{t}$ کار و ماشـین سریع‌تر به تنهایی در یک ساعت $\frac{۳}{t}$ کار را انجـام می‌دهـد. از طرف دیگر دو ماشـین با هم در یک سـاعت $\frac{۱}{۶}$ کار را انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{۱}{t}+\frac{۳}{t}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{۴}{t}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow t=۲۴$$

بنابراین ماشین کندتر به تنهایی در ۲۴ ساعت کار را انجام می‌دهد.

۳۱۱- گزینهٔ ۳ بـا توجـه به جـدول تعیین علامـت باید $a-b<۰$، پس $a<b$. همچنین $x=b$ ریشهٔ عبارت است، بنابراین

$$(a-b)b-۲a+۲b=۰\Rightarrow(a-b)b-۲(a-b)=۰$$

$$(a-b)(b-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}a-b=۰\Rightarrow a=b & \text{(غ.ق.ق.)}\\ b-۲=۰\Rightarrow b=۲\end{cases}$$

چون a عددی طبیعی است، پس

$$a<b=۲\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $a+b=۳$.

۳۱۲- گزینهٔ ۲ بـا توجـه به جـدول تعیین علامت، مشـخص اسـت که عبارت مورد نظر باید چندجمله‌ای درجهٔ اول باشـد. پس $a-۲=۰$ و در نتیجه $a=۲$. بنابرایـن عبارت به صورت $y=-(۲+b)x+۴$ اسـت. چون $x=۴$ ریشهٔ عبارت است، پس

$$-(۲+b)\times۴+۴=۰\Rightarrow b=-۱$$

بنابراین $a-b=۳$.

۳۱۳- گزینهٔ ۳ ابتدا عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y=\frac{(x-۱)(x-۲)(x-۱)(x+۱)}{(x-۲)^۳}$$

اکنون آن را ساده می‌کنیم $y=\frac{(x-۱)^۲(x+۱)}{(x-۲)^۲}$. چون عبارت‌های $(x-۱)^۲$ و $(x-۲)^۲$ نامنفی هستند، علامت عبارت اخیر را با توجه به علامت $x+۱$ تعیین می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۱		۱		۲		$+\infty$
y		−	۰	+	۰	+	ت ن	+	

۳۱۴- گزینهٔ ۲ دو نامعادلهٔ $۳x-۲<۵x+۶$ و $۴x-۱<۳x-۲$ را حل می‌کنیم:

$$۳x-۲<۵x+۶\Rightarrow -۲x<۸\Rightarrow x>-۴\ ,\ \ ۴x-۱<۳x-۲\Rightarrow x<-۱$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های فوق یعنی $-۴<x<-۱$ جواب مسئله است. پس $a=-۴$ و $b=-۱$ و در نتیجه $a+b=-۵$.

۳۱۵- گزینهٔ ۱ باید شرایط $\Delta<۰$ و $a>۰$ برقرار باشند. پس

$$m-۱>۰\Rightarrow m>۱\quad (۱)$$

$$\Delta=۸-۴m(m-۱)<۰\Rightarrow m^۲-m-۲>۰\Rightarrow (m+۱)(m-۲)>۰$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر باید

$$m<-۱ \text{ یا } m>۲\quad (۲)$$

از دو شرط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m>۲$.

m	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
$m^۲-m-۲$		+	۰	−	۰	+	

۳۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا جدول تعیین علامت عبارت $y=\frac{(۱-x)^۲(x+۲)^۳}{x|x|(۲-x)^۵}$ را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		۲		$+\infty$
y		+	۰	−	ت ن	+	۰	+	ت ن	−	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-\infty,-۲]\cup(۰,۲)$ است.

۳۱۷- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x-\frac{۲}{x}-۱\geq ۰\Rightarrow \frac{x^۲-x-۲}{x}\geq ۰$$

به کمک تعیین علامت مجموعهٔ جواب‌های نامعادله را تعیین می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۱		۰		۲		$+\infty$
$\frac{x^۲-x-۲}{x}$		−	۰	+	ت ن	−	۰	+	

این مجموعه به‌صورت $[-۱,+\infty)-[۰,۲)$ است. پس $a=-۱$ و $b=۲$. در نتیجه $a+b=۱$.

۳۱۸- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$x-۱=x^۲-۴x+۴\Rightarrow x^۲-۵x+۵=۰$$

جواب‌های این معادله به‌صورت $x=\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ و $x=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$ هستند. ولی $\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند زیرا این عدد کوچک‌تر از ۲ است و در معادلهٔ $\sqrt{x-۱}=x-۲$ اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه سمت چپ معادله، نامنفی و سمت راست آن منفی است که قابل قبول نیست. بنابراین فقط $x=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله است.

۳۱۹- گزینهٔ ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x+۱}+۱=\sqrt{۲x+۳}$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$x+۱+۱+۲\sqrt{x+۱}=۲x+۳\Rightarrow ۲\sqrt{x+۱}=x+۱$$

دوباره طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴(x+۱)=(x+۱)^۲\Rightarrow ۴x+۴=x^۲+۲x+۱$$

$$x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow x=-۱\ ,\ x=۳$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس مجموع جواب‌ها برابر ۲ است.

۳۲۰- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را این‌طور می‌نویسیم:

$$x^۲+۵x+۲۸-۲۴-۵\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=۰$$

اکنون اگر فرض کنیم $\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=t$، این معادله می‌شود

$$t^۲-۲۴-۵t=۰\Rightarrow (t-۸)(t+۳)=۰\Rightarrow t=۸\ ,\ t=-۳$$

چون $t\geq ۰$، پس $t=۸$، یعنی

$$\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=۸\Rightarrow x^۲+۵x+۲۸=۶۴\Rightarrow x^۲+۵x-۳۶=۰$$

$$(x-۴)(x+۹)=۰\Rightarrow x=۴\ ,\ x=-۹$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -۳۶ است.

۳۲۱- گزینهٔ ۲ اگر این عدد را x فرض کنیم، آن‌گاه

$$x-\sqrt{x}=\frac{x}{۲}\Rightarrow \frac{x}{۲}=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}\frac{x^۲}{۴}=x\Rightarrow x^۲=۴x$$

$$x=۰,\ x=۴$$

چون هر دو عدد در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند، بنابراین دو عدد با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

۳۲۲- گزینهٔ ۱

$$\Big|۳+\big|۲-|۱+a|\big|\Big|=\Big|۳+\big|۲-(-(۱+a))\big|\Big| \qquad (\text{چون } ۱+a<۰)$$

$$=\big|۳+|۳+a|\big|=|۳-(۳+a)| \qquad (\text{چون } ۳+a<۰)$$

$$=|-a|=-a \qquad (\text{چون } a<۰)$$

۳۲۳- گزینهٔ ۴ چون a منفی است، پس $|a|=-a$، در نتیجه $\big||a|-b\big|=|-a-b|$. اکنون توجه کنید که

$$b<|a|=-a\Rightarrow a+b<۰$$

بنابراین $\big||a|-b\big|=|-a-b|=-a-b$. از طرف دیگر،

$$\big|b-|۲a|\big|=\big|b-۲|a|\big|=|b+۲a|$$

چون $b+۲a=\underbrace{b+a}_{<۰}+\underbrace{a}_{<۰}<۰$، در نتیجه $|b+۲a|=-b-۲a$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-a-b-(-b-۲a)=a$.

۳۲۴- گزینهٔ ③ چون $۱<x<۲$، پس

$$\frac{|x-۲|}{x-۲}=\frac{۲-x}{x-۲}=-۱,\quad \frac{x-۱}{|x-۱|}=\frac{x-۱}{x-۱}=۱,\quad \frac{|x|}{x}=۱$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-۱-۱+۱=-۱$.

۳۲۵- گزینهٔ ④ توجه کنید که

$$x^۲<x\Rightarrow x^۲-x=x(x-۱)<۰$$

در نتیجه $۰<x<۱$. بنابراین $|x+۱|=x+۱$، $|۱-x|=۱-x$ و $|x|=x$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $x+۱-(۱-x)+x=۳x$.

۳۲۶- گزینهٔ ④ معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$|x-۲|=۳\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۳\\ x-۲=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۵\\ x=-۱\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۴ است.

۳۲۷- گزینهٔ ① **راه‌حل اول** توجه کنید که $|x|=|-x|$ و $|۳x|=۳|x|$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$|x|+|x|+۳|x|=۱۵\Rightarrow ۵|x|=۱۵\Rightarrow |x|=۳\Rightarrow x=-۳\ ,\ x=۳$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر صفر است.

راه‌حل دوم توجه کنید که اگر x جواب معادلهٔ مورد نظر باشد، $-x$ هم جواب این معادله است. بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد صفر است.

۳۲۸- گزینهٔ ④ از تساوی $|۳x-x^۲|=|x-۱|$ تساوی‌های زیر نتیجه می‌شوند

$$۳x-x^۲=x-۱\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰\qquad (۱)$$

$$۳x-x^۲=-(x-۱)\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰\qquad (۲)$$

مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر ۲ و مجموع جواب‌های معادلهٔ (۲) برابر ۴ است. پس مجموع جواب‌های معادلهٔ اصلی برابر ۶ است (توجه کنید که معادله‌های به‌دست آمده، جواب مشترک ندارند).

۳۲۹- گزینهٔ ② نامعادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$-۳\le ۲x-a\le ۳\Rightarrow a-۳\le ۲x\le a+۳\Rightarrow \frac{a-۳}{۲}\le x\le\frac{a+۳}{۲}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، بازهٔ $[\frac{a-۳}{۲},\frac{a+۳}{۲}]$ است. پس

$$\frac{a-۳}{۲}=-a\Rightarrow a-۳=-۲a\Rightarrow a=۱\ ,\qquad \frac{a+۳}{۲}=b\Rightarrow b=۲$$

۳۳۰- گزینهٔ ② نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\big||x|-۲\big|<۶\Rightarrow -۶<|x|-۲<۶\Rightarrow -۴<|x|<۸$$

نابرابری $|x|>-۴$ همواره برقرار است، پس کافی است نامعادلهٔ $|x|<۸$ را حل کنیم:

$$|x|<۸\Rightarrow -۸<x<۸$$

بنابراین اعداد صحیح ۷− تا ۷ در نامعادله صدق می‌کنند که تعداد آن‌ها ۱۵ تا است.

۳۳۱- گزینهٔ ② ابتدا نامعادله را به‌صورت $|x-۲|<۲|x|$ می‌نویسیم.

اکنون دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$۴x^۲>(x-۲)^۲\Rightarrow (۲x)^۲-(x-۲)^۲>۰$$

در نتیجه $(۲x-(x-۲))(۲x+x-۲)>۰$ یا به طور معادل

$$(x+۲)(۳x-۲)>۰$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های مورد نظر برابر است با $(-\infty,-۲)\cup(\frac{۲}{۳},+\infty)$.

۳۳۲- گزینهٔ ④ توجه کنید که

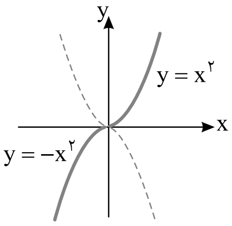
$$f(\sqrt{۳}-۱)+f(\sqrt{۵}-۲)=۵|۳(\sqrt{۳}-۱)-۲|-۳|۵(\sqrt{۳}-۱)-۲|$$

$$+۵|۳(\sqrt{۵}-۲)-۲|-۳|۵(\sqrt{۵}-۲)-۲|=۵|\underbrace{۳\sqrt{۳}-۵}_{+}|-۳|\underbrace{۵\sqrt{۳}-۷}_{+}|$$

$$+۵|\underbrace{۳\sqrt{۵}-۸}_{-}|-۳|\underbrace{۵\sqrt{۵}-۱۲}_{-}|=-۴+۴=۰$$

۳۳۳- گزینهٔ ③ ضابطهٔ تابع f به شکل $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x\le ۰\end{cases}$ است.

پس باید برای $x\ge ۰$ نمودار تابع $y=x^۲$ را رسم کنیم و برای $x\le ۰$ نمودار تابع $y=-x^۲$ را رسم کنیم.



۳۳۴- گزینهٔ ① توجه کنید که $\frac{|x-۱|}{x-۱}=\begin{cases}۱ & x>۱\\ -۱ & x<۱\end{cases}$. بنابراین $f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x>۱\\ x^۲-۱ & x<۱\end{cases}$. در نتیجه نمودار تابع f مانند گزینهٔ (۱) است.

۳۳۵- گزینهٔ ③ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-(x+۱)+x & x\le -۱\\ x+۱+x & -۱<x\le ۰\\ x+۱-x & x>۰\end{cases}=\begin{cases}-۱ & x\le -۱\\ ۲x+۱ & -۱<x\le ۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$$

در نتیجه نمودار تابع f مانند گزینهٔ (۳) است.

۳۳۶- گزینهٔ ① توجه کنید که

$$[\frac{۱}{۲}]=۰\ ,\ [\frac{۲}{۲}]=[\frac{۳}{۲}]=۱\ ,\ [\frac{۴}{۲}]=[\frac{۵}{۲}]=۲\ ,\ \cdots\ ,\ [\frac{۱۸}{۲}]=[\frac{۱۹}{۲}]=۹\ ,\ [\frac{۲۰}{۲}]=۱۰$$

از جمع تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

$$[\frac{۱}{۲}]+[\frac{۲}{۲}]+[\frac{۳}{۲}]+\cdots+[\frac{۲۰}{۲}]=۲(۱+۲+\cdots+۹)+۱۰=۹۰+۱۰=۱۰۰$$

۳۳۷- گزینهٔ ④ ابتدا با حل نامعادله، محدودهٔ x را می‌یابیم:

$$x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰$$

اگر عددی بین ۱− و صفر باشد و به توان هر عدد فردی برسد، در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد، عددی بین صفر و ۱ می‌شود، یعنی

$$-۱<x<۰\Rightarrow\begin{cases}۰<x^{۲k}<۱\Rightarrow [x^{۲k}]=۰\\ -۱<x^{۲k+۱}<۰\Rightarrow [x^{۲k+۱}]=-۱\end{cases}$$

$$[x]+[x^۲]+\cdots+[x^{۱۰}]=۵\times ۰+۵\times(-۱)=-۵$$

۳۳۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از نابرابری $n^۳<n^۳+۳n^۲<(n+۱)^۳$، نتیجه می‌گیریم $n<\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}<n+۱$، بنابراین $n=[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]$.

راه‌حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی n باید برقرار باشد، پس مثلاً به ازای $n=۲$ باید تساوی برقرار باشد. اگر $n=۲$، آن‌گاه $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]=[\sqrt[۳]{۲۰}]=۲$. از طرف دیگر فقط عبارت گزینهٔ (۱) به ازای $n=۲$ برابر ۲ می‌شود.

۳۳۹- گزینهٔ ۳ چون $[x]$ عدد صحیح است، معادله را به‌صورت $[x]+[x]=[x]-[x]-۲$ می‌نویسیم. بنابراین

$$[x]=-۱\Rightarrow -۱\leq x<۰$$

۳۴۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(-\frac{۱}{۲})=|[-\frac{۵}{۲}]+[-\frac{۷}{۲}]|=|-۳+(-۴)|=۷$$

۳۴۱- گزینهٔ ۱ به جای x در ضابطهٔ f قرار می‌دهیم $x+۱$، پس

$$f(x+۱)=۴(x+۱)-[x+۱]-[۳(x+۱)]=۴x+۴-[x]-۱-[۳x]-۳$$
$$=۴x-[x]-[۳x]=f(x)$$

۳۴۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که باید

$$[x]-۲\geq ۰\Rightarrow [x]\geq ۲\Rightarrow x\geq ۲$$

بنابراین $D_f=[۲,+\infty)$.

۳۴۳- گزینهٔ ۲ مقادیری از x که مخرج $f(x)$ را صفر می‌کنند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. اکنون توجه کنید که

$$[\frac{x}{۳}]-۲=۰\Rightarrow [\frac{x}{۳}]=۲\Rightarrow ۲\leq \frac{x}{۳}<۳\Rightarrow ۶\leq x<۹$$

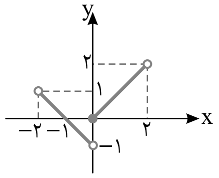
بنابراین $D_f=\mathbb{R}-[۶,۹)$. پس $a=۶$، $b=۹$ و در نتیجه $a+b=۱۵$.

۳۴۴- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است

$$-۲<x<۰\Rightarrow -۱<\frac{x}{۲}<۰\Rightarrow [\frac{x}{۲}]=-۱\Rightarrow f(x)=-x-۱$$

$$۰\leq x<۲\Rightarrow ۰\leq \frac{x}{۲}<۱\Rightarrow [\frac{x}{۲}]=۰\Rightarrow f(x)=x$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است



۳۴۵- گزینهٔ ۲ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(۰)=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴^a+b=-\frac{۳}{۴}$$

$$f(۱)=۰\Rightarrow ۴^{۱+a}+b=۰\Rightarrow ۴\times ۴^a+b=۰$$

اگر رابطهٔ اول را از رابطهٔ دوم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$۳\times ۴^a=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=-۱$$

$$۴^{-۱}+b=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow \frac{۱}{۴}+b=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow b=-۱$$

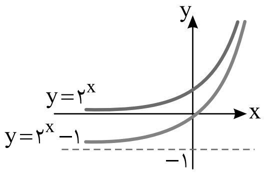
در نتیجه $a+b=-۲$.

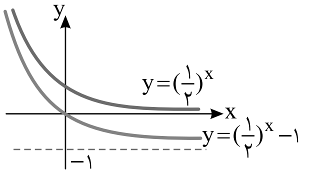
۳۴۶- گزینهٔ ۴ ابتدا $f(-x)$ را به‌دست می‌آوریم

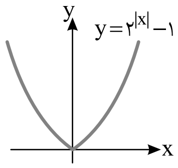
$$f(-x)=\frac{۲^{-x}-۱}{۲^{-x}+۱}=\frac{\frac{۱}{۲^x}-۱}{\frac{۱}{۲^x}+۱}=\frac{۱-۲^x}{۱+۲^x}$$

بنابراین $f(x)+f(-x)=\frac{۲^x-۱}{۱+۲^x}+\frac{۱-۲^x}{۱+۲^x}=\frac{۲^x-۱+۱-۲^x}{۱+۲^x}=۰$.

۳۴۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}۲^x-۱ & x\geq ۰\\ ۲^{-x}-۱ & x<۰\end{cases}$ یعنی $f(x)=\begin{cases}۲^x-۱ & x\geq ۰\\ (\frac{۱}{۲})^x-۱ & x<۰\end{cases}$. بنابراین نمودار تابع به شکل زیر رسم می‌شود.







۳۴۸- گزینهٔ ۱ اگر تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $a>۱$. بنابراین $۳k+۱>۱$، پس $k>۰$.

۳۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(\frac{۲}{۳})^{-۴}=(\frac{۳}{۲})^۴=\frac{۸۱}{۱۶}$، بنابراین

$$(\frac{۲}{۳})^{x+۲}=(\frac{۸۱}{۱۶})^{x-۱}\Rightarrow (\frac{۲}{۳})^{x+۲}=((\frac{۳}{۲})^۴)^{x-۱}=(\frac{۲}{۳})^{-۴(x-۱)}$$

در نتیجه $x+۲=-۴(x-۱)$، پس $x=\frac{۲}{۵}$.

۳۵۰- گزینهٔ ۱ با فاکتورگیری از ۵^x معادله را حل می‌کنیم

$$۵^x(۱+۳\times ۵^{-۲})=۱۴۰\Rightarrow ۵^x(۱+\frac{۳}{۲۵})=۱۴۰\Rightarrow ۵^x\times \frac{۲۸}{۲۵}=۱۴۰$$

$$۵^x=\frac{۲۵\times ۱۴۰}{۲۸}=۱۲۵=۵^۳\Rightarrow x=۳$$

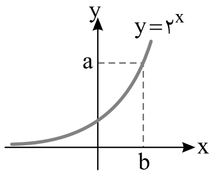
پس معادله یک جواب دارد.

۳۵۱- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار تابع $y=۲^x$، معادلهٔ $۲^x=a$ در صورتی که $a>۰$، دقیقاً یک جواب دارد $(x=b)$ و اگر $a\leq ۰$، جواب ندارد. بنابراین

$۲^x-۵=۰\Rightarrow$ یک جواب دارد. ، $۲^x-۶=۰\Rightarrow$ یک جواب دارد.

$۲^x+۶=۰\Rightarrow$ جواب ندارد. ، $۲^x+۵=۰\Rightarrow$ جواب ندارد.

چون تابع $y=۲^x$ یک‌به‌یک است، پس معادلهٔ اصلی دو جواب دارد.



۳۵۲- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=۳^x$ ، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$۳\times۹\times۹^x-۶\times۳^x-۱=۰\Rightarrow۲۷t^۲-۶t-۱=۰\Rightarrow t=-\frac{۱}{۹},\ t=\frac{۱}{۳}$$

چون $t>۰$ ، پس $t=\frac{۱}{۳}$ ، یعنی $۳^x=\frac{۱}{۳}=۳^{-۱}$ ، پس $x=-۱$. در نتیجه معادله یک جواب دارد.

۳۵۳- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر $۰<a<۱$ و $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ ، آن‌گاه $f(x)>g(x)$ و بالعکس. چون $۰<\frac{۱}{۲}<۱$ ، پس

$$۳-x>x-۳\Rightarrow x<۳$$

۳۵۴- گزینهٔ ۱ اگـر فرض کنیم $t=۵^x$ ، نامعادلهٔ داده شـده را می‌توان این‌طور نوشت

$$۲۵^x+۲۴\times۵^{x-۱}<۱\Rightarrow t^۲+۲۴\times\frac{t}{۵}<۱\Rightarrow۵t^۲+۲۴t<۵$$

$$۵t^۲+۲۴t-۵<۰\Rightarrow(t+۵)(t-\frac{۱}{۵})<۰$$

چون $t+۵>۰$ ، پس $t-\frac{۱}{۵}<۰$ ، یعنی $۵^x<\frac{۱}{۵}=۵^{-۱}$ ، در نتیجه $x<-۱$.

۳۵۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sqrt[۵]{۷\sqrt[۴]{۷}}=۷^{\frac{۱}{۵}}\times۷^{\frac{۱}{۵\times۴}}=۷^{\frac{۱}{۴}}$. اکنون اگر از ویژگی $\log_a x^n=n\log_a x$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید

$$\log_۷\sqrt[۵]{۷\sqrt[۴]{۷}}=\log_۷ ۷^{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۴}\log_۷ ۷=\frac{۱}{۴}$$

۳۵۶- گزینهٔ ۳ با استفاده از تساوی $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$ به‌دست می‌آید

$$\log_۴(\sqrt{۳}-۱)+\log_۴(\sqrt{۳}+۱)=\log_۴((\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱))=\log_۴ ۲=\frac{۱}{۲}$$

۳۵۷- گزینهٔ ۱ چون $\frac{۱}{\log_a x}=\log_x a$ ، پس

$$\frac{۱}{\log_۴ ۶}+\frac{۱}{\log_۹ ۶}=\log_۶ ۴+\log_۶ ۹=\log_۶(۴\times۹)$$

$$=\log_۶ ۳۶=\log_۶ ۶^۲=۲\log_۶ ۶=۲$$

۳۵۸- گزینهٔ ۳ به کمک تساوی $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ می‌توان نوشت

$$۳^{\log_۹ ۶}=۶^{\log_۹ ۳}=۶^{\log_{۳^۲} ۳}=۶^{\frac{۱}{۲}\log_۳ ۳}=۶^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۶}$$

۳۵۹- گزینهٔ ۲ از تساوی $\log ۴=a$ نتیجه می‌شود

$$\log ۲^۲=a\Rightarrow۲\log ۲=a\Rightarrow\log ۲=\frac{a}{۲}$$

بنابراین

$$\log ۱۲۵=\log ۵^۳=۳\log ۵=۳\log\frac{۱۰}{۲}=۳(\log ۱۰-\log ۲)$$

$$=۳(۱-\frac{a}{۲})=۳-\frac{۳a}{۲}$$

۳۶۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\log ۳۰=a\Rightarrow\log(۳\times۱۰)=a\Rightarrow\log ۳+\log ۱۰=a\Rightarrow\log ۳=a-۱$$

$$\log ۵۰=b\Rightarrow\log(۵\times۱۰)=b\Rightarrow\log ۵+\log ۱۰=b\Rightarrow\log ۵=b-۱$$

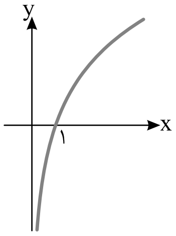
بنابراین $\log_۵ ۳=\frac{\log ۳}{\log ۵}=\frac{a-۱}{b-۱}$.

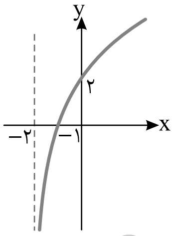
۳۶۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $۳^{x+۲}=۳^۲\times۳^x=۹\times۳^x=۴$. بنابراین

$$۳^x=\frac{۴}{۹}\Rightarrow x=\log_۳\frac{۴}{۹}$$

۳۶۲- گزینهٔ ۱ فـرض کنید کـه نمـودار f از روی نمودار $y=\log_a x$ به‌دسـت آمده باشد. معلوم اسـت که نمودار $y=\log_a x$ ، دو واحد به سمت چپ منتقل شـده اسـت تا نمودار f به‌دست آید. بنابراین ضابطهٔ تابع f می‌تواند $f(x)=\log_a(x+۲)$ باشـد. از طـرف دیگـر $f(۰)=۲$ ، پس $\log_a ۲=۲$ ، یعنی $a^۲=۲$. بنابراین $a=\sqrt{۲}$ (توجه کنید که $a>۰$). بنابراین

$$f(x)=\log_{\sqrt{۲}}(x+۲)$$





۳۶۳- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$f(x)=۴+\log(۲x-۴)=۶\Rightarrow\log(۲x-۴)=۲\Rightarrow۲x-۴=۱۰^۲\Rightarrow x=۵۲$$

بنابراین $f(۵۲)=۶$ ، پس $f^{-۱}(۶)=۵۲$.

۳۶۴- گزینهٔ ۲

۳۶۵- گزینهٔ ۲ لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود، پس

$$۹-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۹\Rightarrow-۳<x<۳\Rightarrow D_f=(-۳,۳)$$

بنابراین اعداد صحیح ±۲، ±۱ و صفر در دامنهٔ تابع هستند.

۳۶۶- گزینهٔ ۴ اگر $y=۳^{۵x-۱}$ ، آن‌گاه

$$\log_۳ y=۵x-۱\Rightarrow x=\frac{\log_۳ y+۱}{۵}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{\log_۳ x+۱}{۵}$.

۳۶۷- گزینهٔ ۲ ابتدا x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y=\log_۳(x-۲)\Rightarrow۳^y=x-۲\Rightarrow x=۳^y+۲$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=۳^x+۲$.

۳۶۸- گزینهٔ ۱ کافی است معادلهٔ $x^۲-۷x=x$ را حل کنیم:

$$x^۲-۸x=۰\Rightarrow x=۰,\ x=۸$$

واضح اسـت که $x=۰$ قابل قبول نیسـت چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۳۶۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_۲\sqrt{x}=\log_۲ x^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\log_۲ x$$

$$\log_۴(x-۶)=\log_{۲^۲}(x-۶)=\frac{۱}{۲}\log_۲(x-۶)$$

در نتیجه، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{۱}{۲}\log_۲ x+\frac{۱}{۲}\log_۲(x-۶)=۲\Rightarrow\log_۲ x+\log_۲(x-۶)=۴$$

$$\log_۲(x(x-۶))=۴\Rightarrow x(x-۶)=۲^۴\Rightarrow x^۲-۶x-۱۶=۰$$

$$(x-۸)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۸\ ,\quad x=-۲\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

دقت کنید که $x=-۲$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند، بنابراین غیرقابل قبول است.

۳۷۰- گزینهٔ ۴ با استفاده از تعریف لگاریتم معادله را به‌صورت $x=(۲x-۱)^{۲}$ می‌نویسیم. بنابراین

$$۴x^{۲}-۴x+۱=x\Rightarrow ۴x^{۲}-۵x+۱=۰$$

$$(۴x-۱)(x-۱)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}, x=۱$$

پایهٔ لگاریتم عبارت $۲x-۱$ است که به ازای $x=۱$ برابر ۱ و به ازای $x=\frac{۱}{۴}$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ می‌شود. ولی می‌دانیم که پایهٔ لگاریتم باید مثبت و مخالف ۱ باشد. پس هیچ‌کدام از مقدارهای به‌دست آمده قابل قبول نیستند و معادله جواب ندارد.

۳۷۱- گزینهٔ ۴ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\log_{۳}(۱۰-x)\le\log_{۳}۹$$

نتیجه می‌گیریم

$$۱۰-x\le ۹\Rightarrow x\ge ۱$$

از طرف دیگر عبارت $\log_{۳}(۱۰-x)$ وقتی معنادار است که $۱۰-x>۰$ و در نتیجه $x<۱۰$. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[۱,۱۰)$ است.

۳۷۲- گزینهٔ ۲ از نامعادلهٔ $\log(x+۲)>\log(۲x+۱)$ نتیجه می‌شود

$$x+۲>۲x+۱\Rightarrow x<۱$$

عبارت $\log(x+۲)$ برای $x>-۲$ و عبارت $\log(۲x+۱)$ برای $x>-\frac{۱}{۲}$ معنادار است. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\frac{۱}{۲},۱)$ است.

۳۷۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که باید $x-۲>۰$، یعنی $x>۲$. از طرف دیگر، باید

$$\log_{۰/۵}(x-۲)\ge ۰=\log_{۰/۵}۱$$

در نتیجه (چون $۰/۵<۱$)

$$x-۲\le ۱\Rightarrow x\le ۳$$

بنابراین $D_f=(۲,۳]$. به این ترتیب $a=۲$ و $b=۳$، پس $ab=۶$.

۳۷۴- گزینهٔ ۳

۳۷۵- گزینهٔ ۴ چون C روی نیمساز زاویهٔ AOB قرار دارد، پس $x=CA=CB=۶$. از طرف دیگر، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OAC و OBC همنهشت‌اند (وتر و یک زاویهٔ حاده). بنابراین $y=OA=OB=۱۲$، در نتیجه

$$x+y=۱۸$$

۳۷۶- گزینهٔ ۲ چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس $y=DH=DB=۳$. از طرف دیگر، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABD و AHD همنهشت‌اند (وتر و یک زاویهٔ حاده). بنابراین $x=AH=AB=۴$، در نتیجه

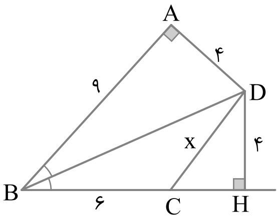
$$x+y=۷$$

۳۷۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید H پای عمود وارد از نقطهٔ D بر خط BC باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ ABH است، پس $DH=DA=۴$. از طرف دیگر، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BAD و BHD همنهشت‌اند (به حالت وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه). بنابراین

$$BH=BA=۹\Rightarrow BC+CH=۹\Rightarrow ۶+CH=۹\Rightarrow CH=۳$$

اکنون، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ CHD نتیجه می‌شود

$$CD^{۲}=CH^{۲}+DH^{۲}\Rightarrow x^{۲}=۳^{۲}+۴^{۲}=۲۵\Rightarrow x=۵$$



۳۷۸- گزینهٔ ۴ چون $EF\|BC$، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{۲}{۱}=\frac{x}{۲}\Rightarrow x=۲\times۲=۴$$

۳۷۹- گزینهٔ ۴ چون $EF\|BC$. بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{x}{x-۱}=\frac{۲x}{x+۲}\Rightarrow x^{۲}+۲x=۲x^{۲}-۲x$$

$$x^{۲}=۴x\Rightarrow x=۴$$

۳۸۰- گزینهٔ ۳ چون $ED\|BF$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABF،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DF}\Rightarrow\frac{۱۲}{۴}=\frac{۶}{x}\Rightarrow x=۲$$

همین‌طور، چون $EF\|BC$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{۱۲}{۴}=\frac{۸}{y}\Rightarrow y=\frac{۸}{۳}$$

بنابراین $xy=\frac{۱۶}{۳}$.

۳۸۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند. در نتیجه $DF=BE=۱۵$. چون BDFE متوازی‌الاضلاع است، پس $DF\|BE$، در نتیجه $DF\|BC$. بنابراین، از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DF}{BC}\Rightarrow\frac{x}{x+۸}=\frac{۱۵}{۱۵+۱۲}\Rightarrow ۲۷x=۱۵(x+۸)$$

$$۱۲x=۱۵\times۸\Rightarrow x=۱۰$$

راه‌حل دوم چون $EF\|BA$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث CAB،

$$\frac{CE}{EB}=\frac{CF}{FA}\Rightarrow\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{CF}{FA}\Rightarrow\frac{FA}{CF}=\frac{۵}{۴}\quad(۱)$$

از طرف دیگر چون $DF\|BC$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AF}{FC}\xrightarrow{(۱)}\frac{x}{۸}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow x=۱۰$$

۳۸۲- گزینهٔ ۴ بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{۸}{۴}=\frac{x}{۳}\Rightarrow x=۶$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{y}\Rightarrow y=۶$$

بنابراین $xy=۳۶$.

۳۸۳- گزینهٔ ۳ بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقه،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۹}{x}\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۶$$

۳۸۴- گزینهٔ ۴ در مثلث FBC ، چون نقطهٔ N وسط ضلع FC است و MN||BC ، پس بنابر قضیهٔ تالس نقطهٔ M هم وسط ضلع FB است. در نتیجه در مثلث FBC، پاره‌خط MN میان‌خط است و

$$MN=\frac{BC}{۲}\Rightarrow ۶=\frac{BC}{۲}\Rightarrow BC=۱۲$$

اکنون توجه کنید که چون EF||BC ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC ،

$$\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}\Rightarrow\frac{EF}{۱۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow EF=۴$$

۳۸۵- گزینهٔ ۲ مثلث‌های ABF و ACE دو زاویهٔ برابر دارند ($A\hat{E}C=A\hat{F}B$ و زاویهٔ A در آن‌ها مشترک است). بنابراین این مثلث‌ها متشابه‌اند (زز). در نتیجه

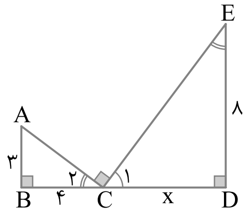
$$\frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AE}\Rightarrow\frac{۳+۱}{۲+x}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۲(۲+x)=۳\times۴\Rightarrow x=۴$$

۳۸۶- گزینهٔ ۳ مثلث‌های AEF و ACB دو زاویهٔ برابر دارند ($\hat{B}=A\hat{F}E$ و در زاویهٔ رأس A مشترک‌اند)، پس این دو مثلث متشابه‌اند (زز). بنابراین

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}\Rightarrow\frac{۴}{۶+۲}=\frac{۶}{۴+x}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{۴+x}\Rightarrow ۴+x=۱۲\Rightarrow x=۸$$

۳۸۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که زاویه‌های $C_۱$ و E متمم یکدیگرند، و زاویه‌های $C_۱$ و $C_۲$ نیز متمم یکدیگرند. بنابراین زاویه‌های E و $C_۲$ برابرند. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و CDE که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند متشابه‌اند (زز). در نتیجه

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{۴}{۸}=\frac{۳}{x}\Rightarrow x=۶$$



۳۸۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\frac{AB}{DB}=\frac{BD}{BC}=\frac{۱}{۲},\quad A\hat{B}D=D\hat{B}C$$

بنابراین مثلث‌های ABD و DBC متشابه‌اند (ض‌زض). در نتیجه

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AD}{DC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{x}{۸}\Rightarrow x=۴$$

۳۸۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین دو مثلث AEF و ACB دو ضلع متناسب دارند و زاویهٔ بین این دو ضلع متناسب در آن‌ها (یعنی $\hat{A}$) برابر است، پس این دو مثلث به حالت (ض ز ض) متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{AE}{AC}=\frac{EF}{CB}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۸}{x}\Rightarrow x=۱۶$$

۳۹۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید EB=x . چون EF||BC ، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند، پس

$$\frac{\text{مساحت}\,(AEF)}{\text{مساحت}\,(ABC)}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^۲\Rightarrow\frac{۱۸}{۱۸+۳۲}=\left(\frac{۳}{۳+x}\right)^۲$$

$$\frac{۹}{۲۵}=\left(\frac{۳}{۳+x}\right)^۲\Rightarrow(۳+x)^۲=۲۵\Rightarrow x=۲$$

۳۹۱- گزینهٔ ۲ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه، $AH^۲=HB\times HC=۵\times۴=۲۰$. پس $AH=۲\sqrt{۵}$.

۳۹۲- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AH^۲=HB\times HC\Rightarrow ۶^۲=۳\times x\Rightarrow x=۱۲$$

۳۹۳- گزینهٔ ۴ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD ،

$$BH^۲=HA\times HD=۴/۵\times۲=۹\Rightarrow BH=۳$$

همین‌طور، بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC ،

$$AH^۲=BH\times HC\Rightarrow(۴/۵)^۲=۳\times HC\Rightarrow HC=۶/۷۵$$

بنابراین $BC=۳+۶/۷۵=۹/۷۵$.

۳۹۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید HC=x . بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^۲=CH\times CB\Rightarrow ۲۴=x(x+۵)\Rightarrow x^۲+۵x-۲۴=۰$$

$$(x+۸)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۳$$

۳۹۵- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^۲=AH\times AC,\quad BC^۲=HC\times AC$$

اگر تساوی اول را بر تساوی دوم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{AB^۲}{BC^۲}=\frac{AH\times AC}{HC\times AC}=\frac{AH}{HC}=۳\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\sqrt{۳}$$

۳۹۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC ، $AC^۲=BA^۲+BC^۲=۱۲^۲+۵^۲=۱۶۹$. پس AC=۱۳ . از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB\times BC=BH\times AC\Rightarrow ۱۲\times۵=x\times۱۳\Rightarrow x=\frac{۶۰}{۱۳}$$

فصل دوم

پاسخ آزمون‌ها

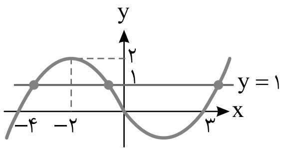
فصل اول

۱- گزینهٔ ۲ چون f فقط یک زوج مرتب دارد، پس تساوی‌های $۲a-b=۱$ ، $۲b+c=۲$ و $۲a=۲$ برقرار است که نتیجه می‌شود $a=۱$ ، $b=۱$ و $c=۰$ ، پس $a+b+c=۲$.

۲- گزینهٔ ۴ از عدد ۲ دو پیکان خارج شده است، پس دو عدد $a^۲$ و $a+۲$ باید یکسان باشند. پس $a^۲=a+۲$ که نتیجه می‌شود $a=-۱$ یا $a=۲$. اگر $a=۲$ ، باید داشته باشیم $b=a^۲=۴$ ، پس $a+b=۶$. اگر $a=-۱$ ، باید داشته باشیم $b=۲b+۱$ ، پس $b=-۱$ و در نتیجه $a+b=-۲$. پس حاصل $a+b$ برابر ۶ یا ۲− است.

۳- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع مجموعهٔ $\{۱,۳,۵\}$ است که ۳ عضو دارد. برد تابع مجموعهٔ $\{۳,۵,a^۲\}$ است که باید تعداد اعضای آن کمتر از ۳ باشد. یعنی یا باید $a^۲=۳$ یا باید $a^۲=۵$. بنابراین $a=\pm\sqrt{۵}$ یا $a=\pm\sqrt{۳}$ پس ۴ مقدار مختلف برای a وجود دارد.

۴- گزینهٔ ۴ تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۱$ برابر با تعداد نقطه‌های برخورد خط $y=۱$ با نمودار تابع f است. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که تعداد این نقطه‌ها سه تا است.



۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x+۲)=x^۲+۴x+۲=(x+۲)^۲-۲\Rightarrow f(t)=t^۲-۲$$

اکنون اگر به‌جای t قرار دهیم $\sqrt{۳}$ ، نتیجه می‌شود $f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲-۲=۱$.

۶- گزینهٔ ۴ در ضابطهٔ تابع به جای x ، مقدار $x-۱$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x-۱)=(x-۱)^۲-۲(x-۱)=x^۲-۴x+۳$$

در ضابطهٔ تابع به جای x مقدار $x+۱$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x+۱)=(x+۱)^۲-۲(x+۱)=x^۲-۱$$

بنابراین $f(x-۱)+f(x+۱)=۲x^۲-۴x+۲=۲(x^۲-۲x)+۲=۲f(x)+۲$.

۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(\frac{x^۲+۱}{x})=۳x+\frac{۳}{x}-۴\Rightarrow f(x+\frac{۱}{x})=۳(x+\frac{۱}{x})-۴$$

بنابراین، اگر x عددی باشد که $x+\frac{۱}{x}=۴$ (چنین عددی وجود دارد، زیرا معادلهٔ $x+\frac{۱}{x}=۴$ معادل است با $x^۲-۴x+۱=۰$ ، که دلتای آن مثبت است، پس جواب حقیقی دارد.) آن‌گاه $f(۴)=۳\times۴-۴=۸$.

۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $\frac{x+۱}{x-۲}=t$ و در نتیجه

$$tx-۲t=x+۱\Rightarrow tx-x=۲t+۱\Rightarrow(t-۱)x=۲t+۱\Rightarrow x=\frac{۲t+۱}{t-۱}, t\neq۱$$

در رابطهٔ داده شده به جای x قرار می‌دهیم $\frac{۲t+۱}{t-۱}$:

$$f(t)=۲(\frac{۲t+۱}{t-۱})-۱=\frac{۴t+۲-t+۱}{t-۱}=\frac{۳t+۳}{t-۱}$$

در نتیجه اگر $x\neq۱$ ، آن‌گاه $f(x)=\frac{۳x+۳}{x-۱}$.

راه‌حل دوم اگر در رابطهٔ داده شده قرار دهیم $x=-۱$ ، به‌دست می‌آید

$$f(۰)=-۳$$

اکنون در توابع داده شده در گزینه‌ها به جای x مقدار صفر را قرار می‌دهیم. تنها تابعی که در آن $f(۰)=-۳$ تابع گزینهٔ (۱) است.

۹- گزینهٔ ۳ برای $x=۲$ از ضابطهٔ اول به‌دست می‌آید $f(۲)=۴m-۲$ و از ضابطهٔ دوم $f(۲)=۸-m$.

برای اینکه رابطه، تابع باشد، باید فقط یک مقدار برای $f(۲)$ وجود داشته باشد. یعنی $۴m-۲=۸-m$ ، پس $m=۲$. بنابراین باید $f(۲)$ را محاسبه کنیم که برابر است با $f(۲)=۸-۲=۶$.

۱۰- گزینهٔ ۳ اگر $n\in\mathbb{N}$ آن‌گاه عدد $\sqrt[۴]{n}$ وقتی که n توان چهارم عددی طبیعی باشد، گویا خواهد بود. پس $\sqrt[۴]{۱۶}$ و $\sqrt[۴]{۸۱}$ ، اعدادی گویا هستند و بقیهٔ اعداد داده شده گنگ هستند. بنابراین

$$f(\sqrt[۴]{۲})+f(\sqrt[۴]{۳})+\cdots+f(\sqrt[۴]{۱۰۰})=۲\times۱+۹۷\times۰=۲$$

۱۱- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج‌های مرتب $(۲,۰)$ و $(۲,m^۳-m)$ نتیجه می‌شود:

$$m^۳-m=۰\Rightarrow m=۰,۱,-۱$$

اگر $m=۰$ ، $f=\{(۲,۰),(۰,۱),(۰,۲)\}$ و f تابع نیست.

اگر $m=۱$ ، $f=\{(۲,۰),(۱,۱),(۰,۲),(۲,۱)\}$ و f تابع نیست.

اگر $m=-۱$ ، $f=\{(۲,۰),(-۱,۱),(۰,۲),(-۲,۱)\}$ و f تابع است.

پس m فقط می‌تواند برابر ۱− باشد.

۱۲- گزینهٔ ۳ چون $f(۱)=۲$ و $f(۴)=۲$ ، پس $f(a)=۱$ یا $f(a)=۴$. از $f(a)=۱$ نتیجه می‌شود $a=۳$ و از $f(a)=۴$ نتیجه می‌شود $a=۵$. بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۸ است.

۱۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل، جواب نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت $[-۵,-۲]\cup[۴,۵]$ است. بنابراین ۶ عدد صحیح (۵− ، ۴− ، ۳− ، ۲− ، ۴ و ۵) در این نامعادله صدق می‌کنند.

۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا $x=۲$ را در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

$$f(۲)-۲f(۲)=۴-۶+۴\Rightarrow f(۲)=-۲$$

پس $f(x)=x^۲-۳x$ ، در نتیجه $f(-۲)=۱۰$.

۱۵- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=x^۲+۱$ ، آن‌گاه $x^۲=t-۱$ و $t\geq۱$ بنابراین

$$f(x^۲+۱)=(x^۲)^۲-x^۲\Rightarrow f(t)=(t-۱)^۲-(t-۱)=t^۲-۳t+۲$$

بنابراین اگر $x\geq۱$ ، آن‌گاه $f(x)=x^۲-۳x+۲$.

۱۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^۳+۶x^۲+۱۲x=(x+۲)^۳-۸$$

$$x^۳+۶x^۲+۱۲x+۱۰=(x+۲)^۳+۲$$

بنابراین $f(x+۲)=\frac{(x+۲)^۳-۸}{(x+۲)^۳+۲}$. اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $x-۲$ ، به‌دست می‌آید $f(x)=\frac{x^۳-۸}{x^۳+۲}$.

۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $۰<-x\le ۱$، آن‌گاه $-۱\le x<۰$، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{۱-(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{۱+x}}{-x}=-f(x)$$

و اگر $-۱\le -x<۰$، آن‌گاه $۰<x\le ۱$، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{۱+(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{۱-x}}{-x}=-f(x)$$

بنابراین همواره $f(-x)=-f(x)$.

۱۸- گزینهٔ ۲ چون

$$f(-۱)=a\times(-۱)+b=b-a,\quad f(۶)=a\times(۶)+۴b=۶a+۴b$$

پس

$$f(-۱)+f(۶)=-۱۰\Rightarrow b-a+۶a+۴b=-۱۰$$

$$۵(a+b)=-۱۰\Rightarrow a+b=-۲$$

در نتیجه $f(۱)=a+۴b=(a+b)+۳b=۳b-۲$.

۱۹- گزینهٔ ۱ برای ورودی‌های فرد، خروجی تابع f یک واحد از ورودی آن بیشتر است، یعنی

$$f(۱)=۱+۱=۲,\quad f(۳)=۳+۱=۴,\quad \ldots,\quad f(۱۹)=۱۹+۱=۲۰$$

برای ورودی‌های زوج، خروجی تابع f یک واحد از ورودی آن کمتر است، یعنی

$$f(۲)=۲-۱=۱,\quad f(۴)=۴-۱=۳,\quad \ldots,\quad f(۲۰)=۲۰-۱=۱۹$$

بنابراین

$$A=(۲+۴+\cdots+۲۰)+(۱+۳+\cdots+۱۹)$$

$$=۱+۲+۳+\cdots+۲۰=\frac{۲۰}{۲}(۱+۲۰)=۲۱۰$$

۲۰- گزینهٔ ۴ اگر ضابطهٔ داده شده، متعلق به یک تابع باشد باید در $x=۲$ مقدار $f(x)$ منحصربه‌فرد باشد. یعنی مقدار $f(۲)$ در ضابطهٔ اول با مقدار آن در ضابطهٔ دوم برابر باشد. اگر $f(x)=۲x^۲+a$، آن‌گاه $f(۲)=۸+a$. اگر $f(x)=ax^۳-۲$، آن‌گاه $f(۲)=۸a-۲$. بنابراین

$$۸+a=۸a-۲\Rightarrow ۷a=۱۰\Rightarrow a=\frac{۱۰}{۷}$$

و در نتیجه

$$۷f(۷a)=۷f(۱۰)=۷(۲\times۱۰^۲+\frac{۱۰}{۷})=۱۴۱۰$$

۲۱- گزینهٔ ۲ برد تابع ثابت، یک عضو دارد. بنابراین

$$m-۲=۴\Rightarrow m=۶$$

$$m+۲n=۴\xrightarrow{m=۶}۶+۲n=۴\Rightarrow n=-۱$$

$$mn+k=۴\xrightarrow{m=۶,\,n=-۱}-۶+k=۴\Rightarrow k=۱۰$$

۲۲- گزینهٔ ۲ اگر f تابعی ثابت باشد، باید ضرایب $x^۲$ و x برابر با صفر باشند:

$$۴-a=۰\Rightarrow a=۴,\ ۳+b=۰\Rightarrow b=-۳$$

در این صورت $f(x)=ab+۱۹=۴\times(-۳)+۱۹=۷$.

بنابراین

$$f(a+b)=f(۱)=۷$$

۲۳- گزینهٔ ۳ در تابع همانی، ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=x$ است. بنابراین

$$f(-۴)=m-۲n=-۴,\quad f(۶)=m+n=۶$$

$$\begin{cases}m-۲n=-۴\\ m+n=۶\end{cases}\Rightarrow m=\frac{۸}{۳},\quad n=\frac{۱۰}{۳}$$

از طرف دیگر $f(\frac{m}{n})=k=\frac{m}{n}$، بنابراین $k=\frac{m}{n}=\frac{۴}{۵}$.

۲۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x^۲-۴)+۲ax+۴a}{x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)+۲a(x+۲)}{x+۲}$$

$$=\frac{(x+۲)(x-۲+۲a)}{x+۲}=x-۲+۲a,\quad x\neq-۲$$

ضابطهٔ تابع همانی $f(x)=x$ است. بنابراین باید $۲a-۲=۰$ و در نتیجه $a=۱$، پس $f(-a)=f(-۱)=-۱$.

راه‌حل دوم چون تابع f همانی است، پس $f(۰)=۰$، بنابراین

$$\frac{۴a-۴}{۲}=۰\Rightarrow a=۱$$

در نتیجه $f(-a)=f(-۱)=-۱$.

۲۵- گزینهٔ ۱ چون f تابعی خطی است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$ است، بنابراین

$$f(۲)-۳f(-۲)=۲a+b-۳(-۲a+b)=۸a-۲b=۴۶$$

$$f(۳)-۳f(۱)=۳a+b-۳(a+b)=-۲b=۲۲$$

در نتیجه $a=۳$، $b=-۱۱$ و $f(x)=۳x-۱۱$. بنابراین $f(-۲)=-۱۷$.

۲۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f(x-۱)=a(x-۱)+b=ax-a+b$$

$$۲f(x+۲)=۲(a(x+۲)+b)=۲(ax+۲a+b)=۲ax+۴a+۲b$$

پس $f(x-۱)+۲f(x+۲)=۳ax+۳a+۳b=-۹x+۲۱$. بنابراین

$$\begin{cases}۳a=-۹\\ ۳a+۳b=۲۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\ b=۱۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=-۳x+۱۰$$

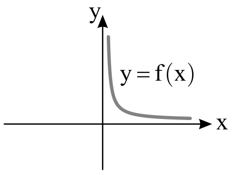
راه‌حل دوم تساوی داده شده به‌ازای هر x برقرار است، پس $x=۱$ را در این تساوی قرار می‌دهیم: $f(۰)+۲f(۳)=۱۲$. فقط در تابع گزینه (۳) این شرط برقرار است.

۲۷- گزینهٔ ۱ ابتدا $f(-۱)$ و $f(۲)$ را حساب می‌کنیم تا مقادیر a و b به‌دست آید:

$$\begin{cases}f(-۱)=a+b=۳\\ f(۲)=۴a-۲b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}$$

بنابراین $f(x)=x^۲-۲x$ و در نتیجه $f(۱)=-۱$.

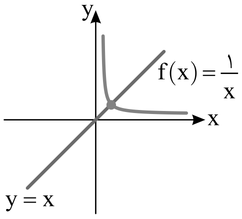
۲۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x>۰$، آن‌گاه $|x|=x$، پس $f(x)=\frac{۱}{x}$. همچنین اگر $x\le۰$، آن‌گاه $|x|=-x$ و $x+|x|=۰$. در نتیجه تابع به‌ازای $x\le۰$ تعریف نمی‌شود، بنابراین $D_f=(۰,+\infty)$. بنابراین نمودار این تابع به‌صورت مقابل خواهد بود:



۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=(۰,+\infty)$ و

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^۳}}=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{۱}{x}$$

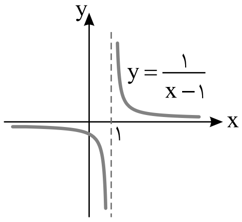
بنابراین نمـودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است و خط $y=x$ را در یک نقطه قطع می‌کند.

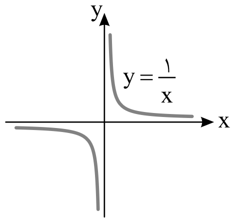


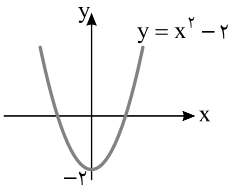
۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

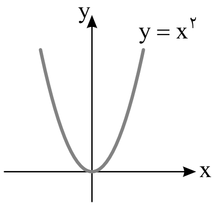
$$f(x)=\frac{x^۲+x+۱}{x^۳-۱}=\frac{x^۲+x+۱}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}=\frac{۱}{x-۱}$$

بنابراین اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع f به‌دست می‌آید. همچنین اگر نمودار تابـع $y=x^۲$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع g به‌دست می‌آید.

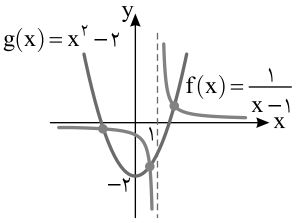








مطابق شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+x+۱}{x^۳-۱}=\frac{۱}{x-۱}$ در سه نقطه نمودار تابع $g(x)=x^۲-۲$ را قطع می‌کند.



۳۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ این تابع $f(x)=x$ است. پس $f(۲)=۲$. در نتیجه

$$۱۴-۲k=۲\Rightarrow ۲k=۱۲\Rightarrow k=۶$$

بنابراین باید $f(۱۴-۳\times۶)$ را حساب کنیم: $f(۱۴-۳\times۶)=f(-۴)=-۴$.

۳۲- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=kmx-kx^۲-۲m+۲x+۲x^۲=(۲-k)x^۲+(۲+km)x-۲m$$

در تابع ثابت، مقدار تابع به x بستگی ندارد. پس در ضابطه نباید x وجود داشته باشد. یعنی ضرایب x و $x^۲$ باید صفر باشند. پس

$$۲-k=۰\Rightarrow k=۲,\quad ۲+km=۰\xrightarrow{k=۲}۲+۲m=۰\Rightarrow m=-۱$$

بنابراین $k+m=۱$.

۳۳- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است. بنابراین

$$a-۲=۰,\quad b-۳=۱,\quad a+b-c=۰$$

در نتیجه $a=۲$، $b=۴$ و $c=a+b=۲+۴=۶$.

۳۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع ثابت به‌صورت $f(x)=k$ است. بنابراین

$$\frac{۲x+۱}{ax-۳}=k\Rightarrow ۲x+۱=kax-۳k$$

تساوی فوق یک اتحاد است. پس باید تساوی‌های $ka=۲$ و $-۳k=۱$ برقرار باشند. بنابراین $k=-\frac{۱}{۳}$ و $a=-۶$.

راه‌حل دوم با توجه به اینکه $f(۰)=-\frac{۱}{۳}$ و تابع ثابت است، پس $f(۱)=-\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه

$$f(۱)=\frac{۲+۱}{a-۳}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۹=-a+۳\Rightarrow a=-۶$$

۳۵- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=۲mx-mx^۲+x^۲-۴x-m=(۱-m)x^۲+(۲m-۴)x-m$$

ضابطهٔ توابع خطی به شکل $f(x)=ax+b$ است. یعنی یک چندجمله‌ای درجهٔ اول است. بنابراین باید $m=۱$ تا ضابطهٔ تابع یک چندجمله‌ای درجهٔ اول شود، یعنی

$$m=۱\Rightarrow f(x)=-۲x-۱$$

بنابراین $f(m)=f(۱)=-۳$.

۳۶- گزینهٔ ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطهٔ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطهٔ داده شده ساده شوند. یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها $x+۱$ است. یعنی

$$x^۲+mx+۲=(x+۱)(x+a)\Rightarrow x^۲+mx+۲=x^۲+(a+۱)x+a$$

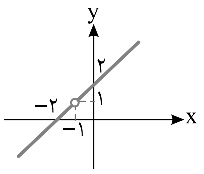
برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم

$$a=۲,\quad m=a+۱\xrightarrow{a=۲}m=۳$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(x+۱)(x+۲)}{x+۱}=x+۲,\quad x\neq-۱$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۳۷- گزینهٔ ۳ ضابطـهٔ تابـع را به‌صـورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$f(۱)=a+b\Rightarrow f(f(۱))=f(a+b)=a(a+b)+b=a^۲+ab+b=۱$$

$$f(-۱)=-a+b\Rightarrow f(f(-۱))=f(-a+b)=a(-a+b)+b=-a^۲+ab+b=-۷$$

اگر طرفین تساوی‌های اخیر را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^۲+ab+b-(-a^۲+ab+b)=۱-(-۷)\Rightarrow ۲a^۲=۸\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲$$

$$a^۲+ab+b=۱\Rightarrow\begin{cases}a=۲\Rightarrow ۴+۲b+b=۱\Rightarrow b=-۱\Rightarrow f(x)=۲x-۱\\ a=-۲\Rightarrow ۴-۲b+b=۱\Rightarrow b=۳\Rightarrow f(x)=-۲x+۳\end{cases}$$

بنابراین $f(۰)=-۱$ یا $f(۰)=۳$.

۳۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** در ضابطهٔ تابع به‌جای x مقدار $x-۱$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x-۱)=a(x-۱)^۲-b(x-۱)+۲=ax^۲-۲ax-bx+a+b+۲$$

بنابراین از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$f(x-۱)-f(x)=ax^۲-۲ax-bx+a+b+۲-ax^۲+bx-۲=۶x+۲$$

بنابراین $-۲ax+a+b=۶x+۲$. چون این رابطه به ازای هر x برقرار است، پس

$$\begin{cases}-۲a=۶\\ a+b=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\ b=۵\end{cases}\Rightarrow a-b=-۸$$

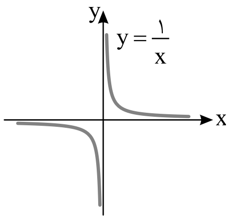
راه‌حل دوم چون رابطهٔ $f(x-۱)-f(x)=۶x+۲$ به ازای هر مقدار x برقرار است، پس به ازای $x=۱$ هم برقرار است:

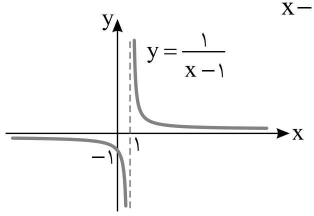
$$f(۰)-f(۱)=۸\Rightarrow ۲-(a-b+۲)=۸\Rightarrow ۲-a+b-۲=۸\Rightarrow a-b=-۸$$

۳۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

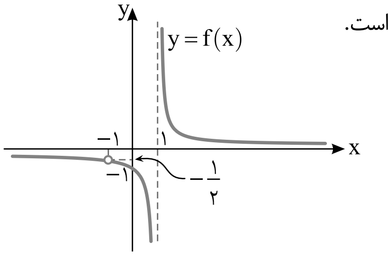
$$f(x)=\frac{x+۱}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{۱}{x-۱},\quad D_f=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$$

اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع $y=\frac{۱}{x-۱}$ به‌دست می‌آید.

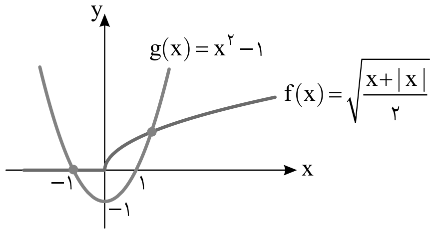




بنابراین نمودار تابع f به‌صورت شکل رسم شده است که خطوط $y=۰$ و $y=-\frac{۱}{۲}$ را قطع نمی‌کند. پس k فقط می‌تواند مقادیر ۰ و $-\frac{۱}{۲}$ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.



۴۰- گزینهٔ ۲ برای $x\geq ۰$ ، $|x|=x$ و $f(x)=\sqrt{x}$ و برای $x<۰$ ، $|x|=-x$ و $f(x)=۰$. نمودار تابع‌های f و g را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی این شکل معلوم می‌شود که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

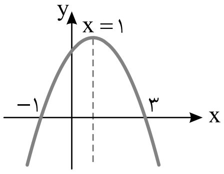


۴۱- گزینهٔ ۴ چون سهمی ماکزیمم دارد، باید ضریب $x^۲$ منفی باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. با توجه به شکل داده شده طول رأس سهمی عددی منفی است. در گزینهٔ (۳) طول رأس سهمی $x=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲$ و در گزینهٔ (۴) طول رأس سهمی $x=-\frac{-۴}{۲(-۱)}=-۲$ است. پس گزینهٔ (۴) درست است.

۴۲- گزینهٔ ۳ طول رأس سهمی $x=-\frac{-۲}{۲k}=\frac{۱}{k}$ است. عرض رأس سهمی را پیدا می‌کنیم: $y=k(\frac{۱}{k})^۲-۲(\frac{۱}{k})+۲=۲-\frac{۱}{k}$. چون رأس سهمی روی خط $y=-۲x$ است، پس $-۲(\frac{۱}{k})=۲-\frac{۱}{k}$ در نتیجه $k=\frac{-۱}{۲}$.

۴۳- گزینهٔ ۲ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=mx^۲+۲m^۲x+۳m$ خط $y=-\frac{۲m^۲}{۲m}=-m$ است. بنابراین $-m=۲$ ، یعنی $m=-۲$. به این ترتیب، معادلهٔ سهمی می‌شود $y=-۲x^۲+۸x-۶$ ، که عرض رأس آن برابر است با $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴\times(-۲)(-۶)-۸^۲}{۴(-۲)}=۲$.

۴۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** با توجه به شکل محور تقارن سهمی داده شده از وسط نقاط $(۳,۰)$ و $(-۱,۰)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن $x=\frac{۳-۱}{۲}=۱$ است. از طرف دیگر با توجه به معادلهٔ داده شده، طول رأس سهمی $x=\frac{b}{۲a}$ است. بنابراین $\frac{b}{۲a}=۱$. در نتیجه $\frac{b}{a}=۲$.



راه‌حل دوم سهمی از نقطهٔ $(-۱,۰)$ عبور کرده است، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$۰=a(-۱)^۲-b(-۱)+c\Rightarrow a+b+c=۰\qquad (۱)$$

همچنین سهمی از نقطهٔ $(۳,۰)$ عبور کرده است، پس

$$۹a-۳b+c=۰\qquad (۲)$$

دو طرف معادلهٔ (۱) را از دو طرف معادلهٔ (۲) کم می‌کنیم:

$$۹a-۳b+c-a-b-c=۰\Rightarrow ۸a-۴b=۰\Rightarrow ۸a=۴b\Rightarrow\frac{b}{a}=۲$$

راه‌حل سوم مجموع جواب‌های معادلهٔ $ax^۲-bx+c=۰$ برابر $\frac{b}{a}$ است. از طرف دیگر با توجه به شکل، جواب‌های این معادله $x=-۱$ و $x=۳$ هستند. بنابراین $\frac{b}{a}=۳+(-۱)=۲$.

۴۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با توجه به نمودار داده شده، c و $-۲c$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ هستند. بنابراین

$$\begin{cases}c-۲c=-\frac{b}{a}\\ c(-۲c)=\frac{c}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{b}{a}\Rightarrow b=ac\\ -۲c=\frac{۱}{a}\Rightarrow ac=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow ac+b=-۱$$

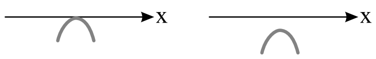
راه‌حل دوم با توجه به نمودار داده شده، c یکی از جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ است. بنابراین

$$ac^۲+bc+c=۰\xrightarrow{c\neq ۰}ac+b+۱=۰\Rightarrow ac+b=-۱$$

۴۶- گزینهٔ ۱ برای آنکه نمودار یک سهمی، محور x را در دو طرف مبدأ مختصات قطع کند، باید حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $y=۰$ منفی باشد. پس

$$\frac{m-۲}{m}<۰\Rightarrow ۰<m<۲$$

۴۷- گزینهٔ ۲ در حالت‌های زیر نمودار تابع درجهٔ دوم از ناحیه‌های اول و دوم صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند.



بنابراین معادلهٔ $f(x)=۰$ حداکثر یک جواب دارد و ضریب $x^۲$ در این معادله منفی است.

$$a=m-۱<۰\Rightarrow m<۱ \qquad (۱)$$

$$\Delta\leq ۰\Rightarrow ۱-۴(m-۱)^۲\leq ۰\Rightarrow (m-۱)^۲\geq\frac{۱}{۴}$$

$$\begin{cases} m-۱\geq\frac{۱}{۲}\Rightarrow m\geq\frac{۳}{۲} \\ \text{یا} \\ m-۱\leq-\frac{۱}{۲}\Rightarrow m\leq\frac{۱}{۲} \end{cases} \qquad (۲)$$

از اشتراک ناحیه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m\leq\frac{۱}{۲}$.

۴۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$-\frac{\Delta}{۴a}=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=۵\Rightarrow\frac{۴(۲m)-۳۶}{۴}=۵\Rightarrow ۲m-۹=۵\Rightarrow m=۷$$

۴۹- گزینهٔ ۳ مجموع طول نرده‌های استفاده شده برابر با $۳y+۴x=۲۰۰$ است. پس $۴x=۲۰۰-۳y$. همچنین مساحت کل زمین برابر است با $A=۲xy$. در نتیجه

$$A=۲xy=\frac{۱}{۲}\times ۴xy=\frac{۱}{۲}(۲۰۰-۳y)y=\frac{۱}{۲}(۲۰۰y-۳y^۲)$$

بنابراین

$$۲A=۲۰۰y-۳y^۲=-۳(y^۲-\frac{۲۰۰y}{۳})=-۳((y-\frac{۱۰۰}{۳})^۲-\frac{۱۰۰۰۰}{۹})$$

$$=\frac{۱۰۰۰۰}{۳}-۳(y-\frac{۱۰۰}{۳})^۲\leq\frac{۱۰۰۰۰}{۳}$$

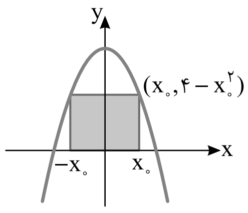
بنابراین $A\leq\frac{۵۰۰۰}{۳}$، یعنی حداکثر مساحت اصطبل برابر $\frac{۵۰۰۰}{۳}$ است.

۵۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر می‌توان نتیجه گرفت محیط مستطیل برابر است با

$$۲(۲x_۰+۴-x_۰^۲)=-۲x_۰^۲+۴x_۰+۸=-۲(x_۰^۲-۲x_۰+۱)+۱۰$$

$$=-۲(x_۰-۱)^۲+۱۰\leq ۱۰$$

در نتیجه بیشترین محیط مستطیل برابر است با ۱۰.



۵۱- گزینهٔ ۴ مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x=-\frac{-۲}{۲\times ۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=۳(\frac{۱}{۳})^۲-۲(\frac{۱}{۳})+۱=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ است و چون ضریب $x^۲$ عددی مثبت است، پس سهمی دارای پایین‌ترین نقطه است، یعنی گزینهٔ (۴) درست است.

۵۲- گزینهٔ ۳ رأس سهمی $y=ax^۲-۲ax+۲$ نقطهٔ $(۱,۲-a)$ است که روی سهمی $y=bx^۲+۲bx+۱$ قرار دارد. پس

$$۲-a=b+۲b+۱\Rightarrow a+۳b-۱=۰ \quad (۱)$$

رأس سهمی $y=bx^۲+۲bx+۱$ نقطهٔ $(-۱,۱-b)$ است که روی سهمی $y=ax^۲-۲ax+۲$ قرار دارد. پس

$$۱-b=a+۲a+۲\Rightarrow b=-۳a-۱ \quad (۲)$$

اگر در معادلهٔ (۱) مقدار b را از معادلهٔ (۲) قرار دهیم، آن‌گاه $a+۳(-۳a-۱)-۱=۰$ در نتیجه $a=-\frac{۱}{۲}$. بنابراین $b=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $a+b=۰$.

۵۳- گزینهٔ ۱ معادلهٔ محور تقارن سهمی $y=ax^۲+bx+c$ به‌صورت $x=-\frac{b}{۲a}$ است. در نتیجه

$$-\frac{m-۲}{۲(۳m-۴)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۳m-۴=-m+۲\Rightarrow ۴m=۶\Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$

۵۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که چون $OA<OB$، پس محور تقارن سهمی پاره‌خط OB را قطع می‌کند. در نتیجه، $-\frac{b}{۲a}>۰$، یعنی علامت a و b فرق می‌کند. از طرف دیگر، چون سهمی پایین‌ترین نقطه دارد، پس $a>۰$، در نتیجه $b<۰$. از طرف دیگر، عرض نقطهٔ تلاقی سهمی و محور y منفی است، پس $c<۰$. به این ترتیب، $bc>۰$.

۵۵- گزینهٔ ۲ سهمی از نقطهٔ $(۰,۰)$ عبور می‌کند، پس $c=۰$. طول رأس سهمی برابر $x=۱$ است. پس $-\frac{b}{۲a}=۱$ در نتیجه $b=-۲a$. عرض رأس سهمی برابر است با $y=-۱$، بنابراین

$$a\times ۱^۲+b\times ۱=-۱\xrightarrow{b=-۲a} a-۲a=-۱\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $b=-۲$.

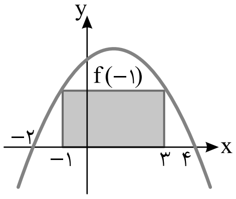
۵۶- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه سهمی محور طول‌ها را در $x=۴$ و $x=-۲$ قطع کرده است، معادلهٔ سهمی به شکل $f(x)=k(x+۲)(x-۴)$ است. از طرف دیگر مساحت مستطیل برابر $۴f(-۱)$ است. بنابراین

$$۴f(-۱)=۸\Rightarrow f(-۱)=۲$$

پس

$$k(-۱+۲)(-۱-۴)=۲\Rightarrow k=-\frac{۲}{۵}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل $f(x)=-\frac{۲}{۵}(x+۲)(x-۴)$ یا $f(x)=-\frac{۲}{۵}x^۲+\frac{۴}{۵}x+\frac{۱۶}{۵}$ است و در نتیجه $c=\frac{۱۶}{۵}$.

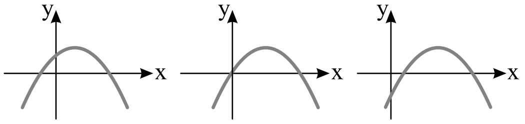


۵۷- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود ضریب $x^۲$ و عرض نقطهٔ تقاطع سهمی با محور y مثبت است. در نتیجه

$$m+۲>۰ , \quad m>۰ \quad (۱)$$

از طرف دیگر، چون مجموع ضرایب صفر است، بنابراین، جواب‌های معادلهٔ $y=۰$ اعداد $\frac{m}{m+۲}$ و ۱ هستند، که با توجه به شرط (۱) هر دو مثبت هستند. بنابراین حدود m بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.

۵۸- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجه کنید که نمودار تابع f یک سـهمی اسـت که ماکزیمـم دارد. بنابرایـن در حالت کلی باید به‌صورت‌های زیر باشـد تا از ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات عبور کند.



بنابراین باید معادلهٔ $f(x)=۰$ دو جواب داشـته باشد که هر دو منفی نباشند یا اینکه یکی صفر و دیگری منفی نباشـد. اگر یکی از جواب‌ها $x=۰$ باشد، آن‌گاه $m=۰$ و معادلـه بـه صورت $f(x)=-x^۲$ در می‌آید کـه از ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصـات عبـور نمی‌کنـد. پـس شـرط داشـتن دو جـواب منفـی $(\Delta>۰,-\frac{b}{a}<۰,\frac{c}{a}>۰)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta>۰\Rightarrow m^۲+۸m>۰\Rightarrow\begin{cases}m>۰\\ \text{یا}\\ m<-۸\end{cases},\quad\begin{cases}\frac{c}{a}>۰\Rightarrow -۲m>۰\Rightarrow m<۰\\ -\frac{b}{a}<۰\Rightarrow m<۰\end{cases}$$

پس $m<۰$، نباید برقرار باشد و در نتیجه $m>۰$.

۵۹- گزینهٔ ۱ جواب‌های معادله را با α و β نشـان می‌دهیم. در این صـورت طبـق فـرض مسـئله، $\alpha+\beta=۲\alpha\beta$، چـون $\alpha+\beta=-(k-۲)$ و $\alpha\beta=-k$، بنابراین $-k+۲=-۲k$ پس $k=-۲$. بنابراین

$$f(x)=-۲x^۲-۴x+۱=-۲(x^۲+۲x)+۱=-۲(x+۱)^۲+۳\leq۳$$

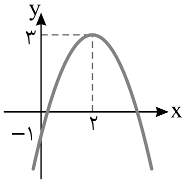
پس بیشترین مقدار $f(x)$ برابر ۳ است.

۶۰- گزینهٔ ۲ طـول اضـلاع قائمه را با b و c نشـان می‌دهیـم. در این صورت $b+c=۸$. از طرف دیگر،

$$S=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}b(۸-b)=\frac{۱}{۲}(۸b-b^۲)$$

بیشـترین مقدار عبارت $۸b-b^۲$ به ازای $b=\frac{-۸}{۲(-۱)}=۴$ به‌دست می‌آید. در نتیجه، بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{۱}{۲}(۸\times۴-۴^۲)=\frac{۱۶}{۲}=۸$.

۶۱- گزینهٔ ۲ سـهمی از نقطهٔ $(۰,-۱)$ عبور می‌کند، طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲(-۱)}=۲$ و عـرض آن $y=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(-۱)(-۱)-۱۶}{۴(-۱)}=۳$ اسـت، در نتیجـه رأس سـهمی نقطهٔ $(۲,۳)$ و نمودار آن به شـکل زیر اسـت. بنابراین این سهمی از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.



۶۲- گزینهٔ ۱ سـهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۲x$ دارای پایین‌ترین نقطه به مختصات $x=۱$ و $y=-۱$ است. پس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ از نقطهٔ $(۰,-۲)$ عبور می‌کند و رأس آن $(۱,-۱)$ است. بنابراین

$$-۲=۰+۰+c\Rightarrow c=-۲$$

$$\text{طول رأس سهمی}: x=-\frac{b}{۲a}=۱\Rightarrow b=-۲a$$

$$\text{عرض رأس سهمی}: y=a(۱)^۲+b(۱)-۲=-۱\Rightarrow a+b=۱$$

$$\xrightarrow{b=-۲a} a-۲a=۱\Rightarrow a=-۱,\ b=۲$$

بنابراین $abc=(-۱)(۲)(-۲)=۴$.

۶۳- گزینهٔ ۲ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۴x+۱$ خط $x=۲$ است و محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲-a^۳x$ خط $x=\frac{a^۲}{۲}$ است. پس

$$\frac{a^۲}{۲}=۲\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲$$

۶۴- گزینهٔ ۴ ابتـدا نابرابـری $\frac{b^۲}{۴a}>c$ را به‌صـورت $\frac{b^۲-۴ac}{۴a}>۰$ می‌نویسـیم. می‌دانیم عرض رأس سـهمی مورد نظر برابر $-\frac{b^۲-۴ac}{۴a}$ است، که منفی است. در نتیجه باید عرض رأس سهمی مورد نظر منفی باشد، بنابراین در بین گزینه‌های داده شده گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

۶۵- گزینهٔ ۴ معادلـهٔ سـهمی $y=ax^۲+bx+c$ اسـت. مختصات نقاط داده شده را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم:

$x=-۱,\ y=۰\Rightarrow ۰=a-b+c$ (۱)

$x=۱,\ y=۴\Rightarrow ۴=a+b+c$ (۲)

$x=۲,\ y=۹\Rightarrow ۹=۴a+۲b+c$ (۳)

اگر دو طرف معادلهٔ (۱) را از دو طرف معادلهٔ (۲) کم کنیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$۴-۰=a+b+c-(a-b+c)\Rightarrow ۴=۲b\Rightarrow b=۲$$

در معادله‌های (۱) و (۳) به جای b مقدار ۲ را قرار می‌دهیم و دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}a-۲+c=۰\\ ۴a+۴+c=۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=۲\\ ۴a+c=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ c=۱\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ سـهمی $y=x^۲+۲x+۱$ اسـت. این سـهمی از نقطهٔ $(-۲,۱)$ عبور می‌کند.

۶۶- گزینهٔ ۱ چون سهمی ماکزیمم دارد، پس

$$m+۱<۰\Rightarrow m<-۱$$

همچنین، سهمی محور x را قطع نمی‌کند، در نتیجه دلتای معادلهٔ آن منفی است:

$$\Delta=(m+۱)^۲+۱۶(m+۱)<۰$$

بنابراین به نامعادلهٔ $(m+۱)(m+۱۷)<۰$ می‌رسـیم. می‌دانیم $m+۱<۰$، در نتیجه $m+۱۷>۰$، پس $m>-۱۷$. بنابراین $m\in(-۱۷,-۱)$.

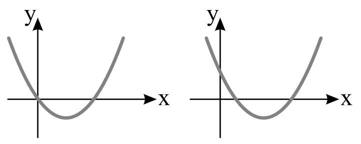
۶۷- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع f فقط از ناحیهٔ سـوم عبور نکند، آن‌گاه از ناحیه‌هـای اول، دوم و چهارم عبـور می‌کند. (توجه کنید که ضریب $x^۲$ مثبت اسـت و سـهمی کمترین مقـدار دارد.) پـس باید معادلـهٔ $f(x)=۰$ دو جواب داشته باشد که یا هر دو مثبت باشند یا یکی مثبت و دیگری صفر باشد. بنابراین

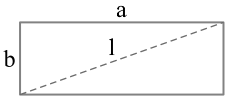
$\Delta>۰\Rightarrow m^۲+۴m>۰\Rightarrow m\in(-\infty,-۴)\cup(۰,+\infty)$ (۱)

$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow -m>۰\Rightarrow m\in(-\infty,۰)$ (۲)

$\frac{c}{a}\geq۰\Rightarrow -m\geq۰\Rightarrow m\in(-\infty,۰]$ (۳)

از اشتراک مجموعهٔ جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $m\in(-\infty,-۴)$.





۶۸- گزینهٔ ۳ از شکل روبه‌رو و فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$۲(a+b)=۲۴\Rightarrow a+b=۱۲\Rightarrow b=۱۲-a$$

اکنـون توجه کنید که $l^۲=a^۲+b^۲=a^۲+(۱۲-a)^۲=۲a^۲-۲۴a+۱۴۴$.

کمتریـن مقـدار $l^۲$ برابـر اسـت با $۷۲=-\frac{(-۲۴)^۲-۴\times۲\times۱۴۴}{۴\times۲}=-\frac{\Delta}{۴a}$.

بنابراین

$$l^۲\geq۷۲\Rightarrow l\geq۶\sqrt{۲}$$

۶۹- گزینهٔ ۳ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۰,-۲)$ گذشته است، پس

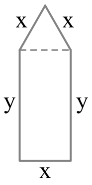
$$f(۰)=-۲\Rightarrow c=-۲$$

از طـرف دیگر، $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $-x^۲+bx+c=۰$ هسـتند، در نتیجه $x_۱+x_۲=b$ و $x_۱x_۲=-c=۲$. بنابراین

$$x_۱^۲+x_۲^۲-\frac{۳}{۲}x_۱x_۲=۴۲\Rightarrow(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲-\frac{۳}{۲}x_۱x_۲=۴۲$$

$$b^۲-\frac{۷}{۲}\times۲=۴۲\Rightarrow b^۲=۴۹$$

عرض رأس سـهمی برابر اسـت با $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$. در نتیجه بیشترین مقدار تابع f برابر است با $\frac{۴۱}{۴}=\frac{۴(-۱)(-۲)-۴۹}{۴(-۱)}$.



۷۰- گزینهٔ ۲ از فرض مسئله، معلوم می‌شود که

$$۳x+۲y=۴=\text{محیط شکل}$$

باید مسـاحت پنجره بیشـترین مقدار ممکن شـود. در نتیجه مساحت پنجره را حساب می‌کنیم:

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲+xy\Rightarrow۴S=\sqrt{۳}x^۲+۴xy$$

چون $۲y=۴-۳x$، پس

$$۴S=\sqrt{۳}x^۲+۲x\times۲y=\sqrt{۳}x^۲+۲x(۴-۳x)=(\sqrt{۳}-۶)x^۲+۸x$$

چـون $\sqrt{۳}-۶<۰$، بیشـترین مقـدار عبـارت فـوق بـه ازای $x=\frac{-۸}{۲(\sqrt{۳}-۶)}=\frac{۴}{۶-\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید.

۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱,\quad ۱-\frac{۱}{x+۱}=۰\Rightarrow\frac{x}{x+۱}=۰\Rightarrow x=۰$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{۰,-۱\}$.

۷۲- گزینهٔ ۳ ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۴-۳x^۲+۲=۰\Rightarrow(x^۲-۱)(x^۲-۲)=۰$$

$$x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱,\quad x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{\pm۱,\pm\sqrt{۲}\}$. پس چهار عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۷۳- گزینهٔ ۲ مخرج کسـر را مسـاوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$۲|x|-|x-۱|=۰\Rightarrow۲|x|=|x-۱|$$

$$۲x=x-۱\Rightarrow x=-۱,\quad ۲x=-x+۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,\frac{۱}{۳}\}$. بنابراین دو عدد -۱ و $\frac{۱}{۳}$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{۲}{۳}$ است.

۷۴- گزینهٔ ۱ برای اینکه $\mathbb{R}$ دامنهٔ تابع باشد، باید مخرج کسر ضابطهٔ تابع ریشه نداشته باشد. بنابراین

$$\Delta=m^۲-۱۶<۰\Rightarrow m^۲<۱۶\Rightarrow-۴<m<۴$$

۷۵- گزینهٔ ۲ باید نامعادلـهٔ $\frac{۹-x}{x+۲}\geq۰$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به‌صورت $-۲<x\leq۹$ است.

x	$-\infty$		-۲		۹		$+\infty$
$\frac{۹-x}{x+۲}$		$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	

پس $D_f=(-۲,۹]$. در نتیجه $a=-۲$، $b=۹$ و $a-b=-۱۱$.

۷۶- گزینهٔ ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنه وجود دارد:

$$x-۱\geq۰\Rightarrow x\geq۱,\quad ۷-x\geq۰\Rightarrow x\leq۷$$

$$\sqrt{x-۱}-\sqrt{۷-x}\neq۰\Rightarrow\sqrt{x-۱}\neq\sqrt{۷-x}\Rightarrow x-۱\neq۷-x\Rightarrow x\neq۴$$

بنابراین $D_f=[۱,۷]-\{۴\}$. پس عددهای صحیح ۱، ۲، ۳، ۵، ۶ و ۷ در دامنهٔ تابع قرار دارند.

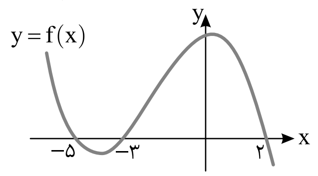
۷۷- گزینهٔ ۲ توجـه کنیـد که $D_f=\{x|x^۲+۲x+۲-m^۲\geq۰\}$.

برای اینکه همواره $x^۲+۲x+۲-m^۲\geq۰$، باید $\Delta\leq۰$،

$$\Delta=۲^۲-۴(۲-m^۲)\leq۰\Rightarrow۴-۸+۴m^۲\leq۰\Rightarrow m^۲\leq۱\Rightarrow-۱\leq m\leq۱$$

بنابراین کمترین مقدار ممکن m برابر -۱ و بیشترین مقدار آن برابر ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۲ است.

۷۸- گزینهٔ ۲ برای اینکه از نمـودار تابع $y=f(x-۲)$ به نمودار تابع $y=f(x)$ برسیم، کافی است آن را دو واحد به چپ منتقل کنیم.



بـرای به‌دسـت آوردن دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$، عبـارت $\frac{x}{f(x)}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۵		-۳		۰		۲		$+\infty$
f(x)		$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
x		$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$\frac{x}{f(x)}$		$-$	ت ن	$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	

بنابراین $D_g=(-۵,-۳)\cup[۰,۲)$، پس دامنهٔ تابع g شامل سه عدد صحیح است.

۷۹- گزینهٔ ۲ تساوی‌های زیر باید برقرار باشند:

$$(۱,۲a)=(۱,۸)\Rightarrow a=۴$$

$$(۲,۲a+b)=(۲,۵)\Rightarrow۲a+b=۵\xrightarrow{a=۴}۸+b=۵\Rightarrow b=-۳$$

$$(a+c,۳)=(۵,۳)\Rightarrow a+c=۵\xrightarrow{a=۴}۴+c=۵\Rightarrow c=۱$$

بنابراین $a+b+c=۲$.

۸۰- گزینهٔ ۲ تابع‌های $f(x)=\sqrt{۶x-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{۶-x}$ برابرند، زیرا

$$D_f=D_g=[۰,۶],\, f(x)=\sqrt{۶x-x^۲}=\sqrt{x(۶-x)}=\sqrt{x}\sqrt{۶-x}=g(x)$$

تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲-۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۳}$ و همین‌طور تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲+۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+۳}$ دامنهٔ یکسان ندارند، پس برابر نیستند. تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}$ و $g(x)=x-۳$ دامنهٔ یکسان دارند، اما ضابطهٔ برابر ندارند، زیرا

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}=\sqrt{(x-۳)^۲}=|x-۳|\neq g(x)$$

۸۱- گزینهٔ ۴ سه کسر در ضابطهٔ تابع وجود دارد. مخرج هر یک را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱,\quad x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

$$۱-\frac{۴}{x+۱}=۰\Rightarrow x+۱-۴=۰\Rightarrow x=۳$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۲,۳\}$. پس حاصل‌ضرب عددهایی که در دامنهٔ تابع قرار ندارند برابر -۶ است.

۸۲- گزینهٔ ۳ مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۳-۲x^۲-x+۲=۰\Rightarrow x^۳-x-۲x^۲+۲=۰$$

$$x(x^۲-۱)-۲(x^۲-۱)=۰\Rightarrow (x^۲-۱)(x-۲)=۰$$

$$(x-۱)(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱, x=-۱, x=۲$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۱,۲\}$. پس سه عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۸۳- گزینهٔ ۳ چون $x=۴$ در دامنهٔ تابع نیست، پس مخرج حداقل یکی از کسرهای ضابطهٔ تابع را صفر می‌کند. بنابراین

$$x-a=۰\xrightarrow{x=۴}۴-a=۰\Rightarrow a=۴$$

$$x-\frac{a+۱}{x-a}=۰\xrightarrow{x=۴}۴-\frac{a+۱}{۴-a}=۰\Rightarrow a=۳$$

پس حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای a برابر ۷ است.

۸۴- گزینهٔ ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس معادلهٔ $m^۲x^۲+x+۱=۰$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=۱-۴m^۲=۰\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

در این حالت $x=-۲$ ریشهٔ مخرج است، در نتیجه $n=-۲$.

حالت دوم مخرج عبارت درجهٔ اول باشد، یعنی ضریب $x^۲$ برابر صفر باشد. در این حالت $m=۰$ و $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است. در نتیجه $n=-۱$.
پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای n ، ۲ است.

۸۵- گزینهٔ ۱ باید $x=-۱$ و $x=۲$ جواب‌های معادلهٔ $a|x|-bx+۱=۰$ باشند، بنابراین

$$a|x|-bx+۱=۰\xrightarrow{x=-۱}a+b+۱=۰$$

$$a|x|-bx+۱=۰\xrightarrow{x=۲}۲a-۲b+۱=۰$$

بنابراین $a=-\frac{۳}{۴}$ و $b=-\frac{۱}{۴}$ و در نتیجه $ab=\frac{۳}{۱۶}$.

۸۶- گزینهٔ ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنهٔ تابع وجود دارند:

$$۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳,\quad x+۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲$$

$$\sqrt{x+۲}-۲\neq ۰\Rightarrow \sqrt{x+۲}\neq ۲\Rightarrow x+۲\neq ۴\Rightarrow x\neq ۲$$

بنابراین $D_f=[-۲,۳]-\{۲\}$ و عددهای صحیح ۲-، ۱-، ۰، ۱ و ۳ در دامنهٔ تابع قرار دارند.

۸۷- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-۳,۲]$ است. بنابراین عبارت $ax^۲+bx+۲a^۲$ باید روی این بازه نامنفی باشد و روی بازهٔ $\mathbb{R}-[-۳,۲]$ منفی باشد. پس $x=۲$ و $x=-۳$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+۲a^۲=۰$ هستند. یعنی اگر به جای x یک بار ۲ و بار دیگر ۳- قرار دهیم مقدار عبارت برابر صفر خواهد شد:

$$\begin{matrix}۳\times\\ ۲\times\end{matrix}\begin{cases}۴a+۲b+۲a^۲=۰ & \text{(I)}\\ ۹a-۳b+۲a^۲=۰\end{cases}\Rightarrow +\begin{cases}۱۲a+۶b+۶a^۲=۰\\ ۱۸a-۶b+۴a^۲=۰\end{cases}$$

$$۳۰a+۱۰a^۲=۰$$

$$۱۰a(۳+a)=۰\Rightarrow a=۰, a=-۳$$

اگر $a=۰$ از معادلهٔ (I) نتیجه می‌شود $b=۰$ و اگر $a=-۳$ از معادلهٔ (I) نتیجه می‌شود

$$-۱۲+۲b+۱۸=۰\Rightarrow b=-۳$$

اگر $a=b=۰$ آن‌گاه $f(x)=۰$ و $D_f=\mathbb{R}$. پس فقط $a=b=-۳$ قابل قبول است و در نتیجه $a+b=-۶$.

۸۸- گزینهٔ ۴ باید نامعادلهٔ $\frac{f(x)}{x^۲-x}\geq ۰$ را حل کنیم. مطابق جدول تعیین علامت زیر جواب نامعادله به‌صورت زیر است:

$$x=-۱ \text{ یا } ۰<x<۱ \text{ یا } ۱<x\leq ۲$$

بنابراین $D_g=\{-۱\}\cup(۰,۱)\cup(۱,۲]$.

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
$f(x)$		▨		−	۰	−	۰	−	۰	+		▨	
$x^۲-x$		+		+		+	۰	−	۰	+		+	
$\frac{f(x)}{x^۲-x}$		▨		−	۰	−	ت ن	+	ت ن	+		▨	

۸۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $g(x)=ax+b$ و تابع f با تابع g برابر باشد. در این صورت به ازای هر $x\neq ۳$ تساوی $\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}=ax+b$ برقرار است. پس

$$x^۲-mx+۳=۳ax+۳b-ax^۲-bx=-ax^۲+(۳a-b)x+۳b$$

تساوی بالا به ازای هر $x\neq ۳$ برقرار است. بنابراین

$$a=-۱,\quad ۳=۳b\Rightarrow b=۱$$

$$-m=۳a-b\xrightarrow[b=۱]{a=-۱}m=۴$$

بنابراین $g(x)=-x+۱$. همچنین باید تساوی $f(۳)=g(۳)$ درست باشد. پس

$$f(۳)=n,\quad g(۳)=-۳+۱=-۲\Rightarrow n=-۲$$

در نتیجه $m+n=۲$.

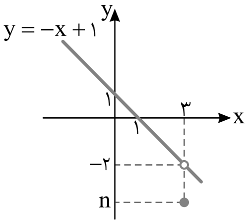
راه‌حل دوم برای اینکه تابع f خطی باشد، باید کسر $\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}$ ساده شود. یعنی باید صورت کسر عامل $x-۳$ داشته باشد. پس صورت کسر به ازای $x=۳$ صفر می‌شود.

$$۹-۳m+۳=۰\Rightarrow m=۴$$

$$\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}=\frac{x^۲-۴x+۳}{۳-x}=\frac{(x-۱)(x-۳)}{-(x-۳)}=-x+۱$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x\neq ۳\\ n & x=۳\end{cases}$$



واضح است که اگر $n\neq -۲$ آن‌گاه تابع f خطی نیست. پس $n=-۲$، بنابراین

$$m+n=۲$$

۹۰- گزینهٔ ③ ضابطهٔ دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{bx+۲}{۸x+b}=c\Rightarrow ۸cx+bc=bx+۲$$

$$\begin{cases}۸c=b\\ bc=۲\end{cases}\Rightarrow c\times ۸c=۲\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{۱}{۲}, b=۴\\ c=-\frac{۱}{۲}, b=-۴\end{cases}$$

اگر $b=۴$، آن‌گاه $f(x)=\frac{۴x+۲}{۸x+۴}$. بنابراین $x=-\frac{۱}{۲}$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد و در دامنهٔ تابع g نیز نباید قرار داشته باشد. پس $a=-\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $\frac{ab}{c}=-۴$. در حالت $b=-۴$، $f(x)=\frac{-۴x+۲}{۸x-۴}$ که نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{ab}{c}=۴$.

۹۱- گزینهٔ ① عددهایی که مخرج ضابطهٔ تابع را صفر می‌کنند، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس $x=۲$ جواب معادلهٔ $x^۳-(a+۱)x+a=۰$ است. پس

$$۸-۲(a+۱)+a=۰\Rightarrow a=۶$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{۱}{x^۳-۷x+۶}$ است. دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۳-۷x+۶=۰\Rightarrow(x-۲)(x^۲+۲x-۳)=۰\Rightarrow x=۲, x=۱, x=-۳$$

در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{۱,۲,-۳\}$.

۹۲- گزینهٔ ③ شرایط زیر برای تعیین دامنهٔ تابع وجود دارد:

$$۲x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq\frac{۱}{۲}$$

$$۴-\sqrt{۲x-۱}\geq ۰\Rightarrow\sqrt{۲x-۱}\leq ۴\Rightarrow ۲x-۱\leq ۱۶\Rightarrow x\leq\frac{۱۷}{۲}$$

بنابراین $D_f=[\frac{۱}{۲},\frac{۱۷}{۲}]$. پس $a=\frac{۱}{۲}$، $b=\frac{۱۷}{۲}$ و $a+b=۹$.

۹۳- گزینهٔ ③ هر دو عبارت رادیکالی باید بامعنی باشند. در نتیجه $\frac{۱۶-x^۲}{x}\geq ۰$ و $\frac{-x}{x+۵}\geq ۰$. با توجه به جدول‌های تعیین علامت زیر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول $(-\infty,-۴]\cup(۰,۴]$ و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم $(-۵,۰]$ است. بنابراین دامنهٔ تابع f برابر است با

$$((-\infty,-۴]\cup(۰,۴])\cap(-۵,۰]=(-۵,-۴]$$

x	$-\infty$		-۴		۰		۴		$+\infty$
$۱۶-x^۲$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
x		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$\frac{۱۶-x^۲}{x}$		$+$	۰	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	

x	$-\infty$		-۵		۰		$+\infty$
$\frac{-x}{x+۵}$		$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	

بنابراین $a=-۵$، $b=-۴$ و $a+b=-۹$.

۹۴- گزینهٔ ③ شرط تعیین دامنه به‌صورت زیر است

$$(a+۲)x^۲+ax+b\geq ۰$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق نمی‌تواند به‌صورت $(-\infty,۳]$ باشد، مگر اینکه عبارت $(a+۲)x^۲+ax+b$ درجهٔ اول باشد، یعنی $a+۲=۰$. در نتیجه $a=-۲$. پس نامعادله به‌صورت $-۲x+b\geq ۰$ درمی‌آید:

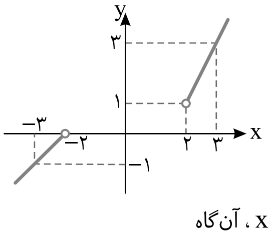
$$-۲x+b\geq ۰\Rightarrow x\leq\frac{b}{۲}\Rightarrow D_f=(-\infty,\frac{b}{۲}]$$

بنابراین $\frac{b}{۲}=۳$ و در نتیجه $b=۶$.

۹۵- گزینهٔ ③ دامنهٔ تابع g از حل نامعادلهٔ $-x^۳f(x)\geq ۰$ به‌دست می‌آید. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله $\{-۱,۰\}\cup[۱,۲]$ است که شامل چهار عدد صحیح است.

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
$-x^۳$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$		▨		$-$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$		▨	
$-x^۳f(x)$		▨		$-$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$		▨	

۹۶- گزینهٔ ① **راه‌حل اول** نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که برد تابع $\mathbb{R}-[۰,۱]$ است. پس $a=۰$ و $b=۱$. در نتیجه $a+b=۱$.



راه‌حل دوم اگر $x>۲$، آن‌گاه

$$۲x>۴\Rightarrow ۲x-۳>۱\Rightarrow f(x)>۱$$

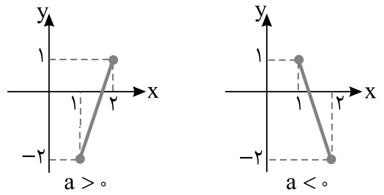
اگر $x<-۲$، آن‌گاه

$$x+۲<۰\Rightarrow f(x)<۰$$

پس $R_f=(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)=\mathbb{R}-[۰,۱]$. پس $a=۰$ و $b=۱$. در نتیجه

$$a+b=۱$$

۹۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $f(x)=ax+b$. نمودار تابع f در دو حالت $a>0$ و $a<0$ را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم.



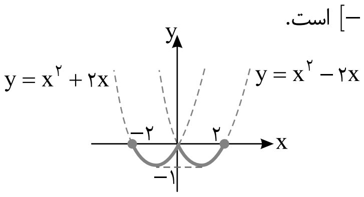
اگر $a>0$، آن‌گاه $f(1)=-2$ و $f(2)=1$. پس

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow f(x)=3x-5 \Rightarrow f(\frac{4}{3})=-1$$

اگر $a<0$، آن‌گاه $f(1)=1$ و $f(2)=-2$، پس

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-3x+4 \Rightarrow f(\frac{4}{3})=0$$

۹۸- گزینهٔ ۱ نمـودار تابع f به‌صورت زیر اسـت. واضح اسـت که برد تابع f بازهٔ $[-1,0]$ است.

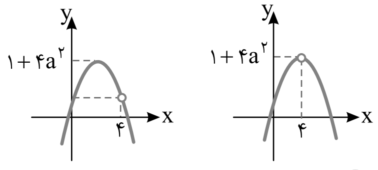


۹۹- گزینهٔ ۳ ابتـدا توجـه کنیـد کـه اگـر دامنـهٔ تابـع $f(x)=-x^2-4ax+1$ مجموعـهٔ اعـداد حقیقـی باشـد، بـرد آن بـازهٔ $(-\infty,1+4a^2]$ اسـت. در این حالت نمودار تابع f یک سهمی است و با حذف یـک عدد از دامنه مطابق شـکل زیر، عددی از برد حذف نمی‌شـود، مگر اینکه طول رأس سـهمی را حذف کنیم. بنابراین طول رأس سـهمی برابر ۴ و عرض آن برابر $1+4a^2$ است:

$$\text{طول رأس سهمی}=x=-\frac{-4a}{2(-1)}=4 \Rightarrow a=-2$$

$$\text{عرض رأس سهمی}=y=1+4a^2=1+16 \Rightarrow b=17$$

بنابراین $a+b=15$.



۱۰۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x\neq 1 \Rightarrow g(x)=\frac{x^4-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=x^3+x^2+x+1$$

$$g(x)=f(x) \Rightarrow a=1$$

از طرف دیگر،

$$x=1 \Rightarrow g(x)=g(1)=b\ , \quad f(1)=4\ , \quad g(1)=f(1) \Rightarrow b=4$$

بنابراین $a+b=5$.

راه‌حـل دوم با اسـتفاده از نقطه‌هـای $x=0$ و $x=1$ مقادیـر a و b به راحتی به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} f(0)=g(0) \Rightarrow a=1 \\ f(1)=g(1) \Rightarrow 3+a=b \xrightarrow{a=1} 4=b \end{cases} \Rightarrow a+b=5$$

۱۰۱- گزینهٔ ۴ طـول مسـتطیل را x و عـرض آن را $x-2$ در نظـر می‌گیریم، پس محیط آن برابر است با $P(x)=2(x+x-2)=4x-4$.

۱۰۲- گزینهٔ ۴ اگر r شعاع دایره باشد، $P=2\pi r$ و در نتیجه $r=\frac{P}{2\pi}$. از طرف دیگر $S=\pi r^2$. بنابراین

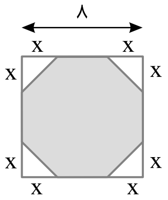
$$S=\pi(\frac{P}{2\pi})^2=\frac{\pi P^2}{4\pi^2} \Rightarrow S(P)=\frac{1}{4\pi}P^2$$

۱۰۳- گزینهٔ ۲ ابعـاد مسـتطیل x و $\frac{x}{2}-2$ هسـتند، پـس محیـط آن به‌صورت $P(x)=2(x+2-\frac{x}{2})=x+4$ به‌دست می‌آید.

۱۰۴- گزینهٔ ۲ با توجه به شـکل درمی‌یابیم که اندازهٔ شعاع ربع دایره و ضلع مربع برابر r اسـت. از طرف دیگر، اگر مسـاحت ربع دایره را از مسـاحت مربع کم کنیم، مساحت قسمت رنگی به‌دست می‌آید، بنابراین

$$S(r)=r^2-\frac{1}{4}\pi r^2=(\frac{4-\pi}{4})r^2$$

۱۰۵- گزینهٔ ۳ مقـدار x باید مثبت باشـد و مقدار بریده شـده یعنی $2x$ باید از ۸ کمتر باشـد. پـس $0<2x<8$ در نتیجـه $0<x<4$. بنابرایـن دامنهٔ این تابع بازهٔ $(0,4)$ است.



۱۰۶- گزینهٔ ۴ از روی شـکل معلـوم اسـت که نقطـهٔ A از یک طرف تا محـل برخـورد خـط بـا محـور x، یعنـی نقطـهٔ $(6,0)$، و از طـرف دیگـر تـا مبدأ مختصات می‌تواند حرکت کند. بنابراین، دامنهٔ این تابع بازهٔ $(0,6)$ است.

۱۰۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که حجم مخزن برابر است با

$$V=\text{حجم استوانه}+2\times\text{حجم نیم کره}$$

$$=\pi(r^2)(20)+2\times\frac{2}{3}\pi(r^3)=\frac{4\pi}{3}r^3+20\pi r^2$$

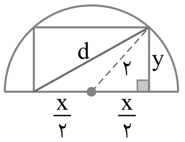
۱۰۸- گزینهٔ ۲ مطابق شکل زیر، با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس،

$$(\frac{x}{2})^2+y^2=2^2 \Rightarrow y^2=4-\frac{x^2}{4}$$

همچنین طول قطر مستطیل از رابطهٔ فیثاغورس قابل محاسبه است:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+4-\frac{x^2}{4}}$$

بنابراین $d(x)=\sqrt{\frac{3}{4}x^2+4}$ ضابطهٔ تابع مورد نظر است.



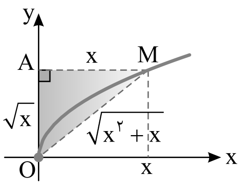
۱۰۹- گزینهٔ ۳ شـیب خطـی کـه از نقطه‌هـای $(2,3)$ و $(x,0)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{3-0}{2-x}$ است. شیب خطی که از نقطه‌های $(2,3)$ و $(0,y)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{y-3}{0-2}$ اسـت. چون نقطه‌های $(2,3)$، $(x,0)$ و $(0,y)$ روی یک خط واقع‌اند، پس برابری $\frac{y-3}{0-2}=\frac{3-0}{2-x}$ برقرار است. بنابراین

$$y-3=\frac{-6}{2-x} \Rightarrow y=3-\frac{6}{2-x} \Rightarrow y=\frac{3x}{x-2}$$

۱۱۰- گزینهٔ ۴ مطابق شکل زیر طول ضلع OM به کمک قضیهٔ فیثاغورس برابر است با $\sqrt{AM^۲+OA^۲}=\sqrt{x^۲+(\sqrt{x})^۲}=\sqrt{x^۲+x}$.

پس محیط مثلث OAM برابر است با

$$P(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt{x^۲+x}$$



۱۱۱- گزینهٔ ۲ اشتراک دامنه‌های f و g مجموعهٔ $\{۲,۳,۴\}$ است که دامنهٔ تابع $f+g$ است. پس این تابع به شکل $f+g=\{(۲,۲),(۳,۱۱),(۴,-۱)\}$ است. بنابراین $R_{f+g}=\{۲,۱۱,-۱\}$ و مجموع اعضای برد $f+g$ برابر ۱۲ است.

۱۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=\{۱,۳,۵,-۱\},\quad D_g=\{۱,۲,۵,۴\}$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{۱,۵\}$$

راه‌حل اول بنابراین a یکی از مقادیر ۱ یا ۵ است. از طرف دیگر،

$$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۲+۴=۶$$

$$(f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۲-۴=-۲$$

$$(f+g)(۵)=f(۵)+g(۵)=۶+۲=۸$$

$$(f-g)(۵)=f(۵)-g(۵)=۶-۲=۴$$

پس $(f+g)(۵)=۲(f-g)(۵)$ و در نتیجه $a=۵$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$(f+g)(a)=۲(f-g)(a)\Rightarrow f(a)+g(a)=۲f(a)-۲g(a)\Rightarrow f(a)=۳g(a)$$

$$f(۱)=۲,\ g(۱)=۴\Rightarrow f(۱)\neq ۳g(۱)$$

$$f(۵)=۶,\ g(۵)=۲\Rightarrow f(۵)=۳g(۵)\Rightarrow a=۵$$

۱۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=(-\infty,۰]\cup[۳,+\infty)$ و $D_g=\{-۱,۱,۰,۲,۴\}$. بنابراین $D_{۲g-f}=D_g\cap D_f=\{-۱,۰,۴\}$.

بنابراین a باید یکی از مقدارهای -۱ یا ۰ یا ۴ باشد:

$$(۲g-f)(-۱)=۲g(-۱)-f(-۱)=۴-۲=۲$$

$$(۲g-f)(۰)=۲g(۰)-f(۰)=۲-۰=۲$$

$$(۲g-f)(۴)=۲g(۴)-f(۴)=۶-۲=۴$$

پس $(۲g-f)(۴)=۴$. بنابراین $a=۴$ و در نتیجه $f(-a)=f(-۴)=\sqrt{۲۸}$.

۱۱۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}+\frac{x^۴-x^۲}{x^۲+۱}=\frac{x^۲-۱+x^۴-x^۲}{x^۲+۱}$$

$$=\frac{x^۴-۱}{x^۲+۱}=\frac{(x^۲-۱)(x^۲+۱)}{x^۲+۱}=x^۲-۱$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۰)=-۱$ و $g(۰)=۰$. پس $(f+g)(۰)=-۱$. با توجه به گزینه‌ها فقط در گزینهٔ (۳) به ازای $x=۰$ حاصل -۱ است.

۱۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow f(x)+g(x)=x^۲-۱$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow f(x)-g(x)=x-۳$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم

$$f(x)+g(x)+f(x)-g(x)=x^۲-۱+x-۳\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲+x-۴}{۲}$$

پس باید حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{x^۲+x-۴}{۲}=۲$ را به‌دست آوریم

$$x^۲+x-۴=۴\Rightarrow x^۲+x-۸=۰$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ بالا برابر $\frac{c}{a}=-۸$ است.

۱۱۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_g=\mathbb{R}-\{۳\}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$.

از طرف دیگر،

$$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x|f(x)=۰\}=(\mathbb{R}-\{۲,۳\})-\{x|\frac{x+۴}{x-۲}=۰\}$$
$$=\mathbb{R}-\{۲,۳,-۴\}$$

پس مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ قرار ندارند برابر ۱ است.

۱۱۷- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x)+g(x)=x^۲-۴x,\quad f(x)-g(x)=x^۲-۶x-۱۲$$

با جمع طرفین دو تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$۲f(x)=۲x^۲-۱۰x-۱۲\Rightarrow f(x)=x^۲-۵x-۶$$

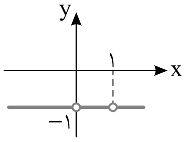
بنابراین

$$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x|f(x)=۰\}$$
$$=(\mathbb{R}\cap\mathbb{R})-\{x|x^۲-۵x-۶=۰\}=\mathbb{R}-\{-۱,۶\}$$

۱۱۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$، پس $D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$. از طرف دیگر،

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+۱}{x^۲-x}-\frac{x^۲+۱}{x^۲-x}=\frac{x-x^۲}{x^۲-x}=-۱$$

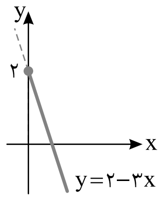
بنابراین باید نمودار تابع $y=-۱$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ رسم کنیم که به‌صورت مقابل است.



۱۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=D_g=[۰,+\infty)$، پس $D_{g-f}=D_f\cap D_g=[۰,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$(g-f)(x)=g(x)-f(x)=۲-\sqrt{x}-(۳x-\sqrt{x})=۲-۳x$$

پس نمودار تابع $g-f$ به‌صورت روبه‌رو است و برد آن بازهٔ $(-\infty,۲]$ است.



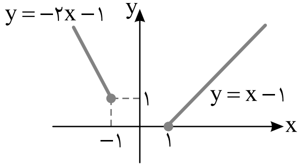
۱۲۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}۲x-(x+۱) & x\geq ۱\\ x-۱-۳x & x\leq -۱\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x-۱ & x\geq ۱\\ -۲x-۱ & x\leq -۱\end{cases}$$

اکنون برد تابع $f-g$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}x\geq ۱\Rightarrow x-۱\geq ۰\Rightarrow y\geq ۰\\ x\leq -۱\Rightarrow -۲x\geq ۲\Rightarrow -۲x-۱\geq ۱\Rightarrow y\geq ۱\end{cases}$$

بنابرایــن برد تابع $f-g$ بازهٔ $[۰,+\infty)$ اســت. از روی نمــودار تابع $f-g$ هم می‌توان برد آن را به‌دست آورد.



۱۲۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_{f-۲g}=D_f\cap D_g=\{۰,۱,۲\}$. بنابراین

$$(f-۲g)(۰)=f(۰)-۲g(۰)=۱-۲(-۱)=۳$$

$$(f-۲g)(۱)=f(۱)-۲g(۱)=۴-۲(-۲)=۸$$

$$(f-۲g)(۲)=f(۲)-۲g(۲)=-۶-۲(۳)=-۱۲$$

بنابراین مجموع مقدارهای تابع $f-۲g$ برابر -۱ است.

۱۲۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=۲x+۱\Rightarrow(f+g)(۲)=۲\times۲+۱=۵\Rightarrow f(۲)+g(۲)=۵\quad(۱)$$

$$(f-g)(x)=۱-x\Rightarrow(f-g)(۲)=۱-۲=-۱\Rightarrow f(۲)-g(۲)=-۱\quad(۲)$$

اگــر دســتگاه معادله‌هــای (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دســت می‌آید $f(۲)=۲$ و $g(۲)=۳$. بنابراین $(f\times g)(۲)=f(۲)\times g(۲)=۲\times۳=۶$.

۱۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$D_f=(-\infty,۴]-\{۰\},\quad D_g=\{-۲,-۱,۰,۳,۴,۵\}$$

بنابراین

$$D_{\frac{f}{g}}=(D_f\cap D_g)-\{x|g(x)=۰\}=\{-۲,-۱,۳,۴\}-\{-۱\}=\{-۲,۳,۴\}$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ سه زوج مرتب دارد.

۱۲۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=|x-۱|+|x|=\begin{cases}-۲x+۱ & x\le۰\\ ۱ & ۰\le x\le۱\\ ۲x-۱ & x\ge۱\end{cases}$$

در بازهٔ $[۰,۱]$ تابع $f+g$ ثابت است. در این بازه،

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=|\underbrace{x-۱}_{-}|-|\underbrace{x}_{+}|=-x+۱-x=-۲x+۱$$

۱۲۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f+۲g)(x)=f(x)+۲g(x)\Rightarrow f(x)+۲g(x)=۱-x$$

$$f(x)=۱-x-۲g(x)$$

$$(۲f-g)(x)=۲f(x)-g(x)\Rightarrow ۲f(x)-g(x)=x^۲$$

بنابراین

$$۲(۱-x-۲g(x))-g(x)=x^۲\Rightarrow-۵g(x)+۲-۲x=x^۲$$

$$g(x)=\frac{۱}{۵}(-x^۲-۲x+۲)$$

۱۲۶- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۵-x}{x-۱}\ge۰\Rightarrow۱<x\le۵\Rightarrow D_f=(۱,۵]$$

$$\frac{x-۱}{۴-x}\ge۰\Rightarrow۱\le x<۴\Rightarrow D_g=[۱,۴)$$

بنابراین

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(۱,۵]\cap[۱,۴)=(۱,۴)$$

۱۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{x}{(x+۱)^۲}\quad(۱)$$

$$(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=x\Rightarrow g(x)=xf(x)\quad(۲)$$

اگر به جای $g(x)$ در تســاوی (۱) معادل آن یعنی $xf(x)$ را از تســاوی (۲) قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$f(x)\times xf(x)=\frac{x}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f^۲(x)=\frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

بنابراین $g^۲(x)=x^۲f^۲(x)=\frac{x^۲}{(x+۱)^۲}$، در نتیجه

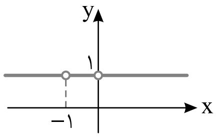
$$(f^۲-g^۲)(x)=f^۲(x)-g^۲(x)=\frac{۱}{(x+۱)^۲}-\frac{x^۲}{(x+۱)^۲}=\frac{۱-x}{۱+x}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x}+\frac{x}{x+۱}+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x+۱}+\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۱}{x+۱}=۱$$

پــس اگــر $x\neq-۱$ و $x\neq۰$، آن‌گاه $(f+g)(x)=۱$. بنابرایــن نمــودار تابــع $f+g$ به‌صورت مقابل است.



۱۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=D_g=[۴,+\infty)$$

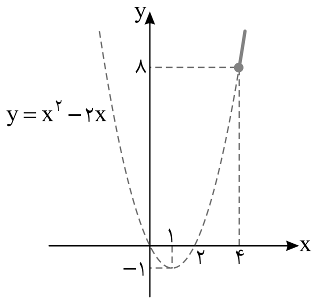
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^۲+\sqrt{x-۴}-۲x-\sqrt{x-۴}$$

$$=x^۲-۲x=(x-۱)^۲-۱$$

برای تعیین برد تابع $f-g$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$x\ge۴\Rightarrow x-۱\ge۳\Rightarrow(x-۱)^۲\ge۹\Rightarrow(x-۱)^۲-۱\ge۸\Rightarrow(f-g)(x)\ge۸$$

پس $R_{f-g}=[۸,+\infty)$. برد تابع $f-g$ از روی نمودار آن هم مشخص است.



۱۳۰- گزینهٔ ۴ اگر $x>۱$، آن‌گاه

$$f(x)=۱,g(x)=-۲\Rightarrow(f-g)(x)=۱-(-۲)=۳$$

اگر $۰<x\le۱$، آن‌گاه

$$f(x)=۱,g(x)=۲\Rightarrow(f-g)(x)=۱-۲=-۱$$

اگر $-۱\le x\le۰$، آن‌گاه

$$f(x)=-۱,\ g(x)=۲\Rightarrow(f-g)(x)=-۱-۲=-۳$$

اگر $x<-۱$، آن‌گاه

$$f(x)=-۱,g(x)=-۲\Rightarrow(f-g)(x)=-۱-(-۲)=۱$$

بنابراین $R_{f-g}=\{۳,-۱,-۳,۱\}$.

۱۳۱- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع g به شکل زیر است:

$$D_g=D_f-\{x|f(x)=۲\}=\{۱,۴,۳,۵\}-\{۴,۳\}=\{۱,۵\}$$

از طرف دیگر،

$$g(۱)=\frac{f(۱)}{۲-f(۱)}=\frac{-۱}{۲-(-۱)}=-\frac{۱}{۳}\ ,\quad g(۵)=\frac{f(۵)}{۲-f(۵)}=\frac{۱}{۲-۱}=۱$$

بنابراین $g=\{(۱,-\frac{۱}{۳}),(۵,۱)\}$.

۱۳۲- گزینهٔ ۱ ابتدا مقادیر $f(a)$ و $g(a)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f-g)(a)=۲\Rightarrow f(a)-g(a)=۲\Rightarrow f(a)=g(a)+۲\qquad (۱)$$

$$(f\times g)(a)=۸\Rightarrow f(a)g(a)=۸\xrightarrow{(۱)}(g(a)+۲)g(a)=۸$$

$$g^۲(a)+۲g(a)-۸=۰\Rightarrow(g(a)+۴)(g(a)-۲)=۰$$

$$\begin{cases}g(a)=-۴\xrightarrow{(۱)}f(a)=-۲\\ g(a)=۲\xrightarrow{(۱)}f(a)=۴\end{cases}$$

بنابراین

$$(\frac{f}{g})(a)=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{۴}{۲}=۲,\quad (\frac{f}{g})(a)=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{-۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۳۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=[-۳,۳]\ ,\quad D_g=\{۱,-۱,۳,-۳,-۴\}$$

$$f(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۹-x^۲}=۰\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=\pm۳$$

بنابراین

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=۰\}=\{۱,-۱,۳,-۳\}-\{۳,-۳\}=\{۱,-۱\}$$

از طرف دیگر،

$$(\frac{g}{f})(۱)=\frac{g(۱)}{f(۱)}=\frac{۲}{\sqrt{۸}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\quad (\frac{g}{f})(-۱)=\frac{g(-۱)}{f(-۱)}=\frac{۲}{\sqrt{۸}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین $\frac{g}{f}=\{(۱,\frac{\sqrt{۲}}{۲}),(-۱,\frac{\sqrt{۲}}{۲})\}$ و در نتیجه برد تابع $\frac{g}{f}$ فقط یک عضو دارد.

۱۳۴- گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع‌های f و g مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ است. پس

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$$

اکنون ضابطهٔ تابع $f-g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲-x}$$

$$=\frac{x+x-۱-۱}{x^۲-x}=\frac{۲(x-۱)}{x(x-۱)}=\frac{۲}{x}$$

۱۳۵- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}۴-x^۲\geq۰\Rightarrow-۲\leq x\leq۲\\ x+۴\geq۰\Rightarrow x\geq-۴\end{cases}\Rightarrow D_f=[-۲,۲]$$

$$\begin{cases}۴-x^۲\geq۰\Rightarrow-۲\leq x\leq۲\\ ۱-x\geq۰\Rightarrow x\leq۱\end{cases}\Rightarrow D_g=[-۲,۱]$$

بنابراین $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-۲,۱]$. پس $a=-۲$ ، $b=۱$ و در نتیجه

$$a+b=-۱$$

۱۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۱}{(ax+۲)^۲},\quad g(x)=\frac{۱}{(x+۱)(x+b)}$$

چون فقط $x=-۱$ در دامنهٔ تابع $f+g$ قرار ندارد، پس تنها $x=-۱$ می‌تواند ریشهٔ مخرج در تابع‌های f و g باشد. بنابراین باید $b=۱$. برای a دو حالت وجود دارد:

حالت اول اگر $x=-۱$ ریشهٔ مخرج $f(x)$ باشد، آن‌گاه $a=۲$.

حالت دوم اگر مخرج $f(x)$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه $a=۰$.

بنابراین $a+b$ می‌تواند ۱ یا ۳ باشد.

۱۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$ax-a+۱\geq۰\Rightarrow ax\geq a-۱$$

اگر $a>۰$ ، آن‌گاه $x\geq\frac{a-۱}{a}$. اگر $a<۰$ ، آن‌گاه $x\leq\frac{a-۱}{a}$. اگر $a=۰$ ، آن‌گاه $x\in\mathbb{R}$. بـا توجه به این موضوع و اینکه $D_{f\times g}=[۲,۵]$ و $D_g=[۲,+\infty)$ باید $D_f=(-\infty,\frac{a-۱}{a}]$ ، در نتیجه

$$\frac{a-۱}{a}=۵\Rightarrow a-۱=۵a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

پس $f(x)=\sqrt{-\frac{۱}{۴}x+\frac{۵}{۴}}$ و در نتیجه $f(۳)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۱۳۸- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع $(f+g)^۲$ را به‌دسـت می‌آوریم (توجه کنید که $x\geq۱$):

$$(f+g)^۲(x)=f^۲(x)+g^۲(x)+۲f(x)g(x)$$

$$=x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+۲\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}=۲x+۲\sqrt{x^۲-x}$$

با توجه به اینکه $f(x)$ و $g(x)$ عبارت‌هایی مثبت هستند، پس $(f+g)(x)$ هم مثبت اسـت. بنابرایـن $(f+g)(x)=\sqrt{۲x+۲\sqrt{x^۲-x}}$. پس $a=۲$ ، $b=۱$ و در نتیجه $a+b=۳$.

۱۳۹- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به‌صورت زیر است:

$$x-۲\geq۰\Rightarrow x\geq۲\Rightarrow D_f=[۲,+\infty)$$

$$a-x\geq۰\Rightarrow x\leq a\Rightarrow D_g=(-\infty,a]$$

چون $D_{f-g}=D_f\cap D_g=[۲,۴]$. پس $a=۴$. از طرف دیگر،

$$(f+g)(۳)=۵\Rightarrow f(۳)+g(۳)=\sqrt{۳-۲}+\sqrt{۴-۳}+b=۵$$

$$۲+b=۵\Rightarrow b=۳$$

در نتیجه $a+b=۷$.

۱۴۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}۲-x & x\leq۰\\ x+۲ & ۰<x<۱,\\ x+۲ & x\geq۱\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}۲x+۳ & x\leq۰\\ ۲x+۳ & ۰<x<۱\\ ۳x+۲ & x\geq۱\end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}-۳x-۱ & x\leq۰\\ -x-۱ & ۰<x<۱\\ -۲x & x\geq۱\end{cases}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۲)=۴$ و $g(۲)=۸$، پس

$$(f-g)(۲)=۴-۸=-۴$$

همچنین $f(\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۲}$ و $g(\frac{۱}{۲})=۴$، پس $(f-g)(\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۲}-۴=-\frac{۳}{۲}$.

همچنین $f(-۱)=۳$ و $g(-۱)=۱$، پس $(f-g)(-۱)=۳-۱=۲$.

همهٔ این شرایط فقط در تابع گزینهٔ (۲) وجود دارد.

۱۴۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۲)=۳$$

$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(-۳)=-۲$$

بنابراین $(fog)(-۲)-(gof)(-۱)=۳-(-۲)=۵$.

۱۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $(fog)(-۲)=f(g(-۲))$. از طرف دیگر، $g(-۲)=-۲+۶=۴$ و $f(g(-۲))=f(۴)=۴^۲+۲=۱۸$.

۱۴۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=۳g(x)-۲=۳(۴x+۳)-۲=۱۲x+۷$$

بنابراین $(fog)(x-۱)=۱۲(x-۱)+۷=۱۲x-۵$.

راه‌حل دوم دقت کنید که

$$(fog)(x-۱)=f(g(x-۱))=f(۴(x-۱)+۳)$$

$$=f(۴x-۱)=۳(۴x-۱)-۲=۱۲x-۵$$

۱۴۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))$.

بنابراین

$$(gof)(x)=g(\frac{۲x+۱}{x-۱})=\frac{۲(\frac{۲x+۱}{x-۱})-۲}{\frac{۲x+۱}{x-۱}+۲}=\frac{۴x+۲-۲x+۲}{۲x+۱+۲x-۲}=\frac{۲x+۴}{۴x-۱}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $(gof)(۰)=g(f(۰))=g(-۱)=-۴$. فقط در گزینهٔ (۴)، تساوی بالا برقرار است.

۱۴۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲-۶x+۱۵)=۵x^۲-۳x+۲$$

بنابراین $f((x-۳)^۲+۶)=۵x^۲-۳x+۲$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۳$، به‌دست می‌آید $f(۶)=۳۸$.

۱۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$D_{fof}=\{x|x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_f\}=\{۱\le x\le ۲\ ,\ ۱\le ۴-۲x\le ۲\}$$

از نامعادلهٔ $۱\le ۴-۲x\le ۲$ نتیجه می‌شود $-۳\le -۲x\le -۲$، پس $۱\le x\le \frac{۳}{۲}$.

بنابراین $D_{fof}=\{۱\le x\le ۲,۱\le x\le \frac{۳}{۲}\}=[۱,\frac{۳}{۲}]$.

۱۴۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $g(x)=x^۲$. تابع $f(x^۲)$، تابع fog است. بنابراین می‌توان نوشت

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x|\ x\in \mathbb{R}\ ,۱\le x^۲\le ۴\}$$

از نامعادله‌های $۱\le x^۲\le ۴$ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} x^۲\le ۴\Rightarrow -۲\le x\le ۲ \\ ۱\le x^۲\Rightarrow x\le -۱\ ,\ x\ge ۱ \end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۲\le x\le -۱\ ,۱\le x\le ۲$$

بنابراین $D_{f(x^۲)}=[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$.

۱۴۸- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع gof را با توجه به $D_f=[-۲,۲]$ و $D_g=\mathbb{R}$ به‌دست می‌آوریم

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{-۲\le x\le ۲\ ,\ \sqrt{۴-x^۲}\in \mathbb{R}\}=[-۲,۲]$$

اکنون ضابطهٔ تابع gof را مشخص می‌کنیم

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{۴-x^۲})=(\sqrt{۴-x^۲})^۲+۱=۵-x^۲$$

برای محاسبهٔ برد از دامنهٔ تابع کمک می‌گیریم

$$-۲\le x\le ۲\Rightarrow ۰\le x^۲\le ۴\Rightarrow -۴\le -x^۲\le ۰$$

$$۱\le ۵-x^۲\le ۵\Rightarrow ۱\le (gof)(x)\le ۵$$

بنابراین $R_{gof}=[۱,۵]$.

۱۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g , g(x)\in D_f\}=\{x|x\ge a\ , ۰\le |x-۱|\le ۳\}$$

$$=\{x|x\ge a\ ,-۳\le x-۱\le ۳\}=\{x|x\ge a\ ,-۲\le x\le ۴\}$$

بنابراین $D_{fog}=[a\ ,+\infty]\cap[-۲,۴]=[-۲,۴]$. برای اینکه این تساوی برقرار باشد، باید $a\le -۲$. یعنی حداکثر مقدار a برابر ۲- است.

۱۵۰- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases} ۲g(x)-۱ & g(x)<۰ \\ g(x)+۴ & g(x)\ge ۰ \end{cases}$$

$$=\begin{cases} ۲(۳x-۶)-۱ & ۳x-۶<۰ \\ ۳x-۶+۴ & ۳x-۶\ge ۰ \end{cases}=\begin{cases} ۶x-۱۳ & x<۲ \\ ۳x-۲ & x\ge ۲ \end{cases}$$

۱۵۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۳)=۷\ ,\quad (fog)(۱)=f(g(۱))=f(۲)=۵$$

$$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۰)=-۱\ ,\quad (fog)(۵)=f(g(۵))=f(۱)=۰$$

بنابراین $fog=\{(-۱,۷),(۱,۵),(۳,-۱),(۵,۰)\}$.

۱۵۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(۲)=۳$. در نتیجه

$$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۳m+۲=۸\Rightarrow m=۲$$

۱۵۳- گزینهٔ ۴ ابتدا $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x+۱)=\frac{۱}{۲x+۱-۱}=\frac{۱}{۲x}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{۱}{x-۱})=\frac{۲}{x-۱}+۱=\frac{x+۱}{x-۱}$$

بنابراین

$$(fog)(x)+(gof)(x)=\frac{۱}{۲x}+\frac{x+۱}{x-۱}=\frac{x-۱+۲x^۲+۲x}{۲x(x-۱)}=\frac{۲x^۲+۳x-۱}{۲x^۲-۲x}$$

۱۵۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(fof)(x)=f(f(x))=f^۲(x)+۳f(x)+۲$$

بنابراین

$$(fof)(x)=۶\Rightarrow f^۲(x)+۳f(x)+۲=۶$$

$$f^۲(x)+۳f(x)-۴=۰\Rightarrow (f(x)-۱)(f(x)+۴)=۰$$

$$\begin{cases} f(x)=۱\Rightarrow x^۲+۳x+۲=۱\Rightarrow x^۲+۳x+۱=۰ & (۱) \\ f(x)=-۴\Rightarrow x^۲+۳x+۲=-۴\Rightarrow x^۲+۳x+۶=۰ & (۲) \end{cases}$$

معادلهٔ (۲) جواب ندارد $(\Delta<۰)$. در معادلهٔ (۱) حاصل‌جمع جواب‌ها برابر ۳- است. پس حاصل‌جمع جواب‌های معادلهٔ $(fof)(x)=۶$ برابر ۳- است.

۱۵۵- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$g(x-۱)=\frac{x+۲}{۳}\xrightarrow{x\to x+۱}g(x)=\frac{(x+۱)+۲}{۳}=\frac{x+۳}{۳}$$

بنابراین

$$(fog)(x)=۶x+۵\Rightarrow f(g(x))=۶x+۵\Rightarrow f(\frac{x+۳}{۳})=۶x+۵$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۰$ ، به‌دست می‌آید $f(۱)=۵$.

۱۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$$

$$=\{-\sqrt{۳}\le x\le\sqrt{۳},\sqrt{۳-x^۲}\in\{-۳,۰,۱,۲\}\}$$

$$\sqrt{۳-x^۲}=-۳ \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$\sqrt{۳-x^۲}=۰\Rightarrow ۳-x^۲=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۳-x^۲}=۱\Rightarrow ۳-x^۲=۱\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۳-x^۲}=۲\Rightarrow ۳-x^۲=۴\Rightarrow x^۲=-۱ \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین

$$D_{gof}=\{-\sqrt{۳}\le x\le\sqrt{۳},x\in\{\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\}\}=\{\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\}$$

پس حاصل‌ضرب اعضای دامنهٔ تابع gof برابر ۶ است.

۱۵۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $g(x)=۲^x$ ، تابع $y=f(۲^x)$ ، تابع $y=(fog)(x)$ است. دامنهٔ تابع g، $\mathbb{R}$ است، پس

$$D_{fog}=\{x|\ x\in D_g,g(x)\in D_f\}=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ ,\ ۱\le ۲^x\le ۴\}$$

از نامعادله‌های $۱\le ۲^x\le ۴$ نتیجه می‌شود $۰\le x\le ۲$ ، پس $D_{f(۲^x)}=[۰,۲]$.

۱۵۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$ و

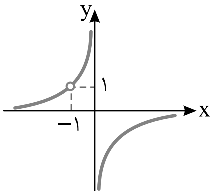
$$D_{fof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_f\}=\{x\neq -۱\ ,\ \frac{x-۱}{x+۱}\neq -۱\}$$

$$\frac{x-۱}{x+۱}=-۱\Rightarrow x-۱=-x-۱\Rightarrow x=۰$$

بنابراین $D_g=D_{fof}=\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$. اکنون ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=(fof)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)-۱}{f(x)+۱}=\frac{\frac{x-۱}{x+۱}-۱}{\frac{x-۱}{x+۱}+۱}=\frac{x-۱-x-۱}{x-۱+x+۱}=\frac{-۱}{x}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل مقابل است.



۱۵۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f,f(x)\in D_g\}=\{x|-۲\le x\le ۳,۱\le x^۲-۳\le ۱۳\}$$

از حل نامعادلهٔ $۱\le x^۲-۳\le ۱۳$ نتیجه می‌شود $۲\le x\le ۴$ یا $-۴\le x\le -۲$.
بنابراین $D_{gof}=[۲,۳]\cup\{-۲\}$.

۱۶۰- گزینهٔ ۴ تابع gof به شکل زیر است

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases}۳-f(x) & f(x)>۰\\ ۲-f(x) & f(x)<۰\end{cases}$$

کافی است نامعادله‌های $f(x)>۰$ و $f(x)<۰$ را حل کنیم.

حل $f(x)>۰$: اگر $x\ge ۰$ ، آن‌گاه

$$f(x)=x+۱>۰\Rightarrow x>-۱\Rightarrow x\ge ۰$$

اگر $x<۰$ ، آن‌گاه

$$f(x)=x-۱>۰\Rightarrow x>۱\Rightarrow x\in\varnothing$$

حل $f(x)<۰$: اگر $x\ge ۰$ ، آن‌گاه

$$f(x)=x+۱<۰\Rightarrow x<-۱\Rightarrow x\in\varnothing$$

اگر $x<۰$ ، آن‌گاه

$$f(x)=x-۱<۰\Rightarrow x<۱\Rightarrow x<۰$$

بنابراین $(gof)(x)=\begin{cases}۳-(x+۱) & x\ge ۰\\ ۲-(x-۱) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲-x & x\ge ۰\\ ۳-x & x<۰\end{cases}$.

۱۶۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۴)=۱\Rightarrow a=۱$$

$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱)=۲\Rightarrow b=۲$$

$$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۳)=۴\Rightarrow c=۴$$

$$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۲)=۳\Rightarrow d=۳$$

بنابراین $a-b+c-d=۰$.

۱۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدامقادیر $(fog)(۲)$ و $(gof)(a)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۲)=۴+a$$

$$(gof)(a)=g(f(a))=g(۳a)=۶-۶a$$

بنابراین باید معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$۴+a-(۶-۶a)=۳\Rightarrow ۷a=۵\Rightarrow a=\frac{۵}{۷}$$

۱۶۳- گزینهٔ ۴ باید $(fof)(x)$ را به‌دست آوریم

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)+۲}{f(x)-۲}=\frac{\frac{x+۲}{x-۲}+۲}{\frac{x+۲}{x-۲}-۲}=\frac{x+۲+۲x-۴}{x+۲-۲x+۴}$$

$$=\frac{۳x-۲}{-x+۶}$$

۱۶۴- گزینهٔ ۴ با توجه به ضابطهٔ تابع f ،

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)-۱}$$

بنابراین

$$\frac{g(x)}{g(x)-۱}=\frac{x}{۲x+۱}\Rightarrow ۲xg(x)+g(x)=xg(x)-x$$

$$(x+۱)g(x)=-x\Rightarrow g(x)=\frac{-x}{x+۱}$$

۱۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{۴f(x)-۱۹}$$

بنابراین

$$\sqrt{۴f(x)-۱۹}=\sqrt{۴g(x)+x}\Rightarrow ۴f(x)-۱۹=۴g(x)+x$$

$$f(x)-g(x)=\frac{x+۱۹}{۴}\Rightarrow (f-g)(x)=\frac{x+۱۹}{۴}$$

در نتیجه $(f-g)(۵)=\frac{۵+۱۹}{۴}=۶$.

۱۶۶- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به شکل زیر است:

$$D_f=[۱,+\infty)\,,\quad D_g=[۰,۳]$$

بنابراین $D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\geq ۱\,|\,۰\leq\sqrt{x-۱}\leq ۳\}$. از نامعادله‌های $۰\leq\sqrt{x-۱}\leq ۳$ نتیجه می‌شود

$$x-۱\leq ۹\Rightarrow x\leq ۱۰$$

بنابراین $D_{gof}=\{x\,|\,x\geq ۱,\,x\leq ۱۰\}=[۱,۱۰]$.

۱۶۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $g(x)=\frac{۱}{x}+۳$، آن‌گاه $D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$ و $h(x)=f(g(x))=(fog)(x)$. بنابراین

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\,|\,۲\leq\frac{۱}{x}+۳\leq ۴\}$$

باید نامعادله‌های $۲\leq\frac{۱}{x}+۳\leq ۴$ را حل کنیم:

$$-۱\leq\frac{۱}{x}\leq ۱\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{x}-۱\leq ۰\Rightarrow\frac{۱-x}{x}\leq ۰ & (۱)\\ \frac{۱}{x}+۱\geq ۰\Rightarrow\frac{۱+x}{x}\geq ۰ & (۲)\end{cases}$$

از حل نامعادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,۰)\cup[۱,+\infty)$ و از حل نامعادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,-۱]\cup(۰,+\infty)$. از اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده دامنهٔ تابع h مشخص می‌شود: $D_h=\mathbb{R}-(-۱,۱)$.

۱۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا دامنهٔ تابع gof را مشخص می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\geq ۱,\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\}=[۱,+\infty)$$

اکنون ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-۱})=(\sqrt{x-۱})^۲+۶=x-۱+۶=x+۵$$

اکنون با توجه به دامنهٔ تابع gof که شرط $x\geq ۱$ را دارد، برد آن را پیدا می‌کنیم:

$$x\geq ۱\Rightarrow x+۵\geq ۶\Rightarrow(gof)(x)\geq ۶\Rightarrow R_{gof}=[۶,+\infty)$$

راه‌حل دوم چون $f(x)=\sqrt{x-۱}$، پس $f(x)\geq ۰$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(f(x))=f^۲(x)+۶\geq ۶$$

بنابراین $R_{gof}=[۶,+\infty)$.

۱۶۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-۲\}$ و

$$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{x\neq -۲,\frac{۲x-۴}{x+۲}\neq -۲\}$$

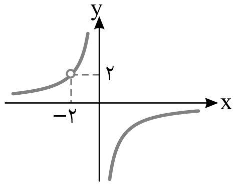
$$\frac{۲x-۴}{x+۲}\neq -۲\Rightarrow ۲x-۴\neq -۲x-۴\Rightarrow x\neq ۰$$

بنابراین $D_g=D_{fof}=\mathbb{R}-\{-۲,۰\}$. اکنون ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=(fof)(x)=f(f(x))=\frac{۲f(x)-۴}{f(x)+۲}$$

$$=\frac{۲(\frac{۲x-۴}{x+۲})-۴}{\frac{۲x-۴}{x+۲}+۲}=\frac{۴x-۸-۴x-۸}{۲x-۴+۲x+۴}=-\frac{۴}{x}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل زیر است و برد تابع g برابر است با $\mathbb{R}-\{۰,۲\}$.



۱۷۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=۳f(x)+۲=\begin{cases}۶x-۱ & x<۰\\ ۳x-۴ & x\geq ۰\end{cases}$$

۱۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(۱)=۴\,,\quad f(۲)=۳\,,\quad f(۳)=۲\,,\quad f(۴)=۱\,,\quad f(۵)=۵$$

$$f(g(۱))=۲\,,\ f(g(۲))=۵\,,\ f(g(۳))=۱\,,\ f(g(۴))=۴\,,\ f(g(۵))=۳$$

اکنون توجه کنید که

$$f(g(۱))=f(۳)\Rightarrow g(۱)=۳\,,\qquad f(g(۲))=f(۵)\Rightarrow g(۲)=۵$$

$$f(g(۳))=f(۴)\Rightarrow g(۳)=۴\,,\qquad f(g(۴))=f(۱)\Rightarrow g(۴)=۱$$

$$f(g(۵))=f(۲)\Rightarrow g(۵)=۲$$

بنابراین $g=\{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۱),(۵,۲)\}$.

۱۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$۵=(gof)(a)=g(f(a))=g(a+\sqrt{a})$$

از طرف دیگر $g(۶)=۵$، پس

$$a+\sqrt{a}=۶\Rightarrow a=۴\Rightarrow g(a)=g(۴)=۱$$

۱۷۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(-۵x+۲a)$$

$$=۲(-۵x+۲a)-a+۱=-۱۰x+۳a+۱$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x-a+۱)$$

$$=-۵(۲x-a+۱)+۲a=-۱۰x+۷a-۵$$

چون $(fog)(x)=(gof)(x)$ همواره برقرار است، پس

$$۷a-۵=۳a+۱\Rightarrow ۴a=۶\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

راه‌حل دوم تساوی داده شده به‌ازای $x=۰$ برقرار است. پس

$$(fog)(۰)=(gof)(۰)\Rightarrow f(g(۰))=g(f(۰))\Rightarrow f(۲a)=g(-a+۱)$$

$$۴a-a+۱=-۵(-a+۱)+۲a\Rightarrow ۳a+۱=۷a-۵\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

۱۷۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{x+۱}{x-۲})$.

بنابراین

$$g(\frac{x+۱}{x-۲})=\frac{۱}{x+۲}\qquad(*)$$

اگر فرض کنیم $t=\frac{x+۱}{x-۲}$، آن‌گاه

$$tx-۲t=x+۱\Rightarrow(t-۱)x=۲t+۱\Rightarrow x=\frac{۲t+۱}{t-۱}$$

در تساوی $(*)$ به جای x قرار می‌دهیم $\frac{۲t+۱}{t-۱}$ و نتیجه می‌شود

$$g(t)=\frac{۱}{\frac{۲t+۱}{t-۱}+۲}=\frac{t-۱}{۲t+۱+۲t-۲}=\frac{t-۱}{۴t-۱}\Rightarrow g(x)=\frac{x-۱}{۴x-۱}$$

۱۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(gof)(x)=x^۲+f(x)\Rightarrow g(f(x))=x^۲+f(x)$$

$$f^۲(x)-۳f(x)+۴=x^۲+f(x)$$

$$f^۲(x)-۴f(x)-x^۲+۴=۰\Rightarrow(f(x)-۲)^۲=x^۲$$

چون f تابعی چندجمله‌ای است، پس $f(x)-۲=-x$ یا $f(x)-۲=x$. پس

$$f(x)=-x+۲ \text{ یا } f(x)=x+۲$$

۱۷۶- گزینهٔ ۲ چون f خطی است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$ است. پس

$$(fof)(x)=f(f(x))=af(x)+b=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b$$

$$a^۲x+ab+b=۴x-۳\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۴\\ ab+b=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲, b=۳\\ a=۲, b=-۱\end{cases}$$

بنابراین $f(x)=-۲x+۳$ یا $f(x)=۲x-۱$ که نتیجه می‌شود $f(۰)=۳$ یا $f(۰)=-۱$.

۱۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $((fof)og)(x)=f(f(g(x)))$. از طرف دیگر، می‌توان نوشت $f(g(x))=f(|x|)=||x|+۲|-۴$. چون $|x|+۲>۰$، پس $f(g(x))=|x|+۲-۴=|x|-۲$ و

$$f(f(g(x)))=f(|x|-۲)=||x|-۲+۲|-۴=||x||-۴=|x|-۴$$

۱۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$۴x-x^۲\geq۰\Rightarrow x(۴-x)\geq۰\Rightarrow۰\leq x\leq۴\Rightarrow D_f=[۰,۴]$$

بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq۴|۰\leq\sqrt{۴x-x^۲}-۱\leq۴\}$$

پس

$$۱\leq\sqrt{۴x-x^۲}\leq۵\Rightarrow۱\leq۴x-x^۲\leq۲۵\Rightarrow-۳\leq۴x-x^۲-۴\leq۲۱$$

$$-۳\leq-(x-۲)^۲\leq۲۱\Rightarrow-۲۱\leq(x-۲)^۲\leq۳\Rightarrow|x-۲|\leq\sqrt{۳}$$

$$-\sqrt{۳}\leq x-۲\leq\sqrt{۳}\Rightarrow۲-\sqrt{۳}\leq x\leq۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین $D_{fof}=\{۰\leq x\leq۴, ۲-\sqrt{۳}\leq x\leq۲+\sqrt{۳}\}=[۲-\sqrt{۳},۲+\sqrt{۳}]$.

۱۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[k,+\infty)$ و $D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$.

بنابراین

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\neq۰|\frac{۱}{x}+۳\geq k\}$$

نامعادلهٔ $\frac{۱}{x}+۳\geq k$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x}+۳-k\geq۰\Rightarrow\frac{۱+(۳-k)x}{x}\geq۰$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق یا به‌صورت $(۰,\frac{۱}{k-۳}]$ یا به‌صورت $(-\infty,\frac{۱}{k-۳}]\cup(۰,+\infty)$ است. باتوجه به فرض مسئله

$$D_{fog}=(-\infty,-۱]\cup(۰,+\infty)$$

بنابراین

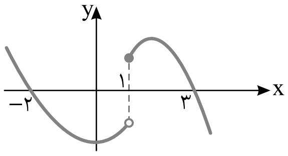
$$\frac{۱}{k-۳}=-۱\Rightarrow k-۳=-۱\Rightarrow k=۲$$

۱۸۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

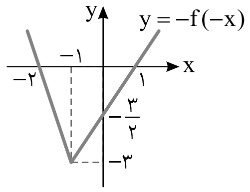
$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}g^۲(x)-۱ & g(x)<۰\\ ۳g(x)+۴ & ۰\leq g(x)<۲\\ ۵ & g(x)\geq۲\end{cases}$$

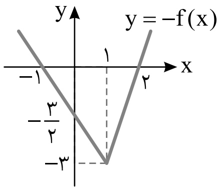
$$=\begin{cases}(x+۱)^۲-۱ & x+۱<۰\\ ۳(x+۱)+۴ & ۰\leq x+۱<۲\\ ۵ & x+۱\geq۲\end{cases}=\begin{cases}x^۲+۲x & x<-۱\\ ۳x+۷ & -۱\leq x<۱\\ ۵ & x\geq۱\end{cases}$$

۱۸۱- گزینهٔ ۱ برای رسم کردن نمودار تابع $-f$ باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.

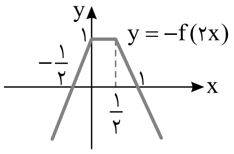


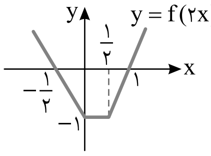
۱۸۲- گزینهٔ ۳ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x)$ به‌دست بیاید. سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست بیاید.



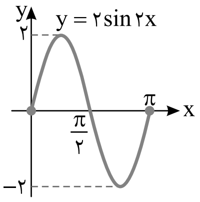


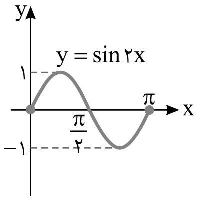
۱۸۳- گزینهٔ ۲ ابتدا طول نقاط روی نمودار f را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ به‌دست بیاید. اکنون قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۲x)$ به‌دست بیاید.

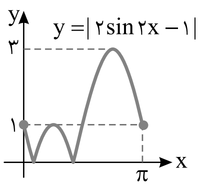


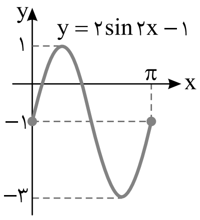


۱۸۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\sin ۲x$ را روی بازهٔ $[۰,\pi]$ رسم می‌کنیم. برای این کار، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم. سپس عرض هر نقطه روی نمودار به‌دست آمده را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\sin ۲x$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست بیاید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=۲\sin ۲x-۱$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست می‌آید. در آخر قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.









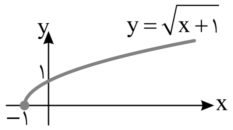
۱۸۵- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-a)$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را a واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f(x-a)+a$ به‌دست می‌آید. چون نمودار اخیر از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس $g(۰)=۰$. در نتیجه

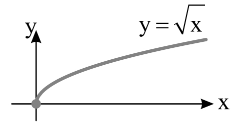
$$g(۰)=f(-a)+a=۰\Rightarrow a^۲-۷a+۹+a=۰$$

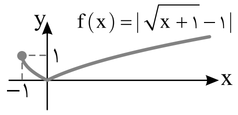
$$a^۲-۶a+۹=۰\Rightarrow (a-۳)^۲=۰\Rightarrow a=۳$$

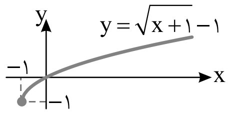
۱۸۶- گزینهٔ ۲ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x-۱}{۲})$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲})$ به‌دست می‌آید.

۱۸۷- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}$ به‌دست آید، سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}-۱$ به‌دست آید. اکنون قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f رسم شود.

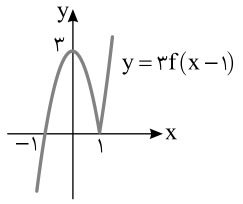


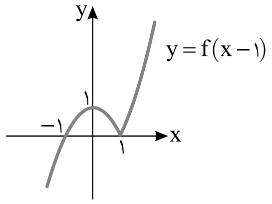






۱۸۸- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۳f(x-۱)$ به‌دست بیاید.

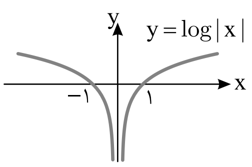


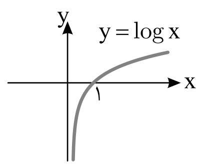


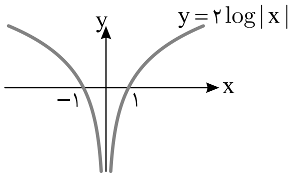
۱۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log x^۲=\log|x|^۲=۲\log|x|$$

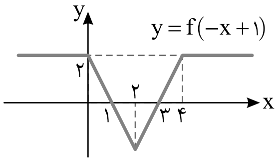
پس ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و قرینهٔ آن نسبت به محور عرض‌ها را به نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log|x|$ به‌دست آید. اکنون عرض نقاط این نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\log|x|$ به‌دست آید.

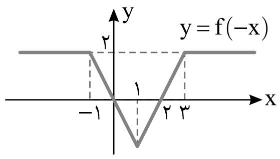




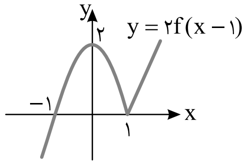


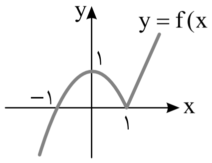
۱۹۰- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(-(x-۱))=f(-x+۱)$ به‌دست می‌آید.



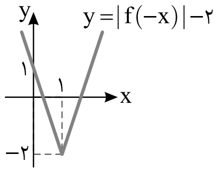


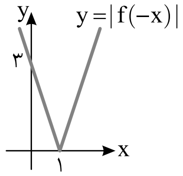
۱۹۱- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲f(x-۱)$ به‌دست بیاید.

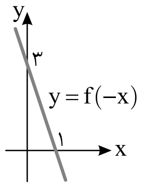




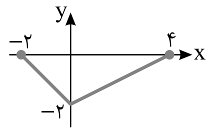
۱۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. سپس نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. در آخر، نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(-x)|-۲$ به‌دست بیاید.



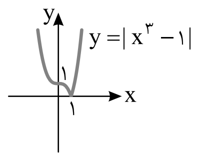


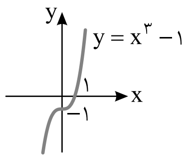


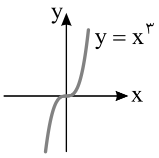
۱۹۳- گزینهٔ ۱ برای رسم نمودار تابع $y=۲f(\frac{x}{۲})$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم. همچنین باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.



۱۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=x^۳-۱$ به‌دست آید. اکنون قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم، سپس قسمتی را که پایین محور طول‌ها است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x^۳-۱|$ به‌دست آید.







۱۹۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-۱)+۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین باید جواب‌های معادلهٔ $f(x-۱)+۲=۰$ را به‌دست آوریم:

$$-(x-۱)^۲+(x-۱)-۲+۲=۰\Rightarrow -x^۲+۲x-۱+x-۱=۰$$

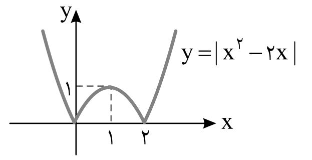
$$x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱,\ x=۲$$

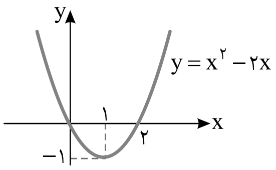
۱۹۶- گزینهٔ ۱ اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را سه برابر کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲x)$ رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲(x+۲))$ رسم می‌شود. پس اکنون نمودار تابع $y=۳f(۲x+۴)$ به‌دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=۳f(-۲x+۴)$ به‌دست می‌آید.

۱۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

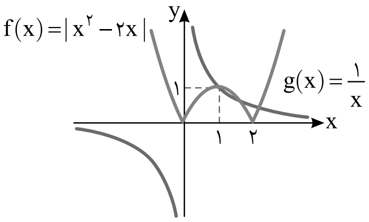
$$f(x)=|x||x-۲|=|x(x-۲)|=|x^۲-۲x|$$

بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y=x^۲-۲x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

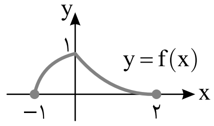


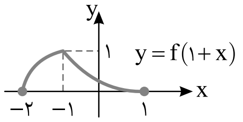


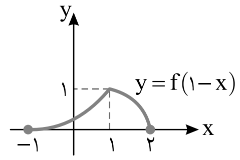
مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در سه نقطه متقاطع‌اند.

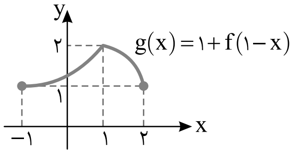


۱۹۸- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱+x)$ رسم شود. سپس نمودار این تابع را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱-x)$ رسم شود. در آخر نمودار حاصل را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $g(x)=۱+f(۱-x)$ رسم شود.

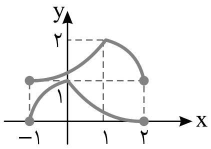




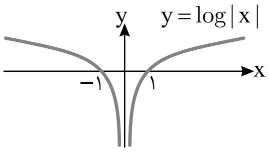


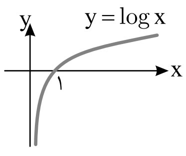


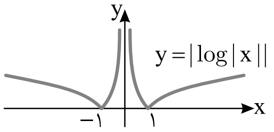
نمودار تابع‌های f و g را در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید که نقطهٔ مشترکی ندارند.



۱۹۹- گزینهٔ ۳ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم







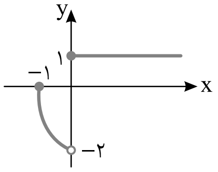
۲۰۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید $h(x)=x-|x|$. در این صورت دامنهٔ تابع g با دامنهٔ تابع foh برابر است:

$$D_{foh}=\{x\in D_h \mid h(x)\in D_f\}=\{x \mid -۲\le x-|x|\le ۲\}=[-۱,+\infty)$$

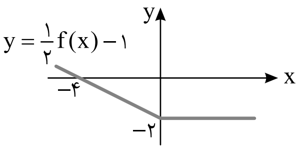
اکنون توجه کنید که

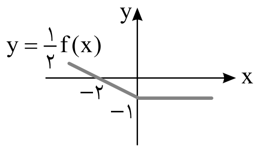
$$x\ge ۰\Rightarrow g(x)=-f(۰),\quad x<۰\Rightarrow g(x)=-f(۲x)$$

پس $g(x)=\begin{cases}۱ & x\ge ۰\\ -f(۲x) & -۱\le x<۰\end{cases}$. پس در بازهٔ $[۰,+\infty)$ باید نمودار تابع $y=۱$ را رسم کنیم و در بازهٔ $[-۱,۰)$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۲x)$ رسم شود.



۲۰۱- گزینهٔ ۳ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $\frac{۱}{۲}f$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)-۱$ به‌دست بیاید.

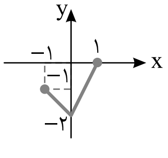




توجه کنید که اگر $x<۰$، نمودار f خطی است که از نقطه‌های $(۰,-۲)$ و $(-۲,۰)$ می‌گذرد، بنابراین اگر $x<۰$، ضابطهٔ f به صورت $f(x)=-x-۲$ است. در نتیجه اگر $x<۰$ و $\frac{۱}{۲}f(x)-۱=۰$، آن‌گاه $\frac{۱}{۲}(-x-۲)-۱=۰$، پس $x=-۴$. یعنی نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)-۱$ محور x را در نقطه‌ای به طول ۴- قطع می‌کند.

۲۰۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(-(x-۱))$ به‌دست می‌آید. پس نمودار نهایی نمودار تابع $y=f(-x+۱)$ است.

۲۰۳- گزینهٔ ۴ برای رسم نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}f(۲x)$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم و عرض نقاط را در $-\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم. بنابراین نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود و در راستای محور عرض‌ها علاوه‌بر اینکه منقبض می‌شود، نسبت به محور طول‌ها قرینه هم می‌شود.



۲۰۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-a)$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را a واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=f(x-a)+a$ به‌دست می‌آید. این نمودار باید از مبدأ مختصات عبور کند، پس $g(۰)=۰$ و در نتیجه $f(-a)+a=۰$. اگر $f(x)=-x^۲+۳x-۲$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=۰\Rightarrow -a^۲-۳a-۲+a=۰\Rightarrow a^۲+۲a+۲=۰$$

اگر $f(x)=x^۲+۱$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=۰\Rightarrow a^۲+۱+a=۰\Rightarrow a^۲+a+۱=۰$$

اگر $f(x)=-x^۲-۱$، آن‌گاه

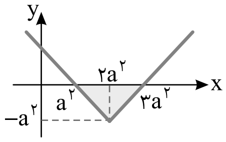
$$f(-a)+a=۰\Rightarrow -a^۲-۱+a=۰\Rightarrow a^۲-a+۱=۰$$

معادله‌های بالا جواب ندارند، پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) جواب نیستند. اگر $f(x)=x^۲+۵x+۴$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=۰\Rightarrow a^۲-۵a+۴+a=۰\Rightarrow a^۲-۴a+۴=۰$$

$$(a-۲)^۲=۰\Rightarrow a=۲$$

۲۰۵- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را $۲a^۲$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-۲a^۲|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را $a^۲$ واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=|x-۲a^۲|-a^۲$ به‌دست می‌آید. با توجه به نمودار این تابع مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با $S=\frac{۱}{۲}a^۲(۲a^۲)=a^۴$. بنابراین $a^۴=۴$، پس $a=\pm\sqrt{۲}$.

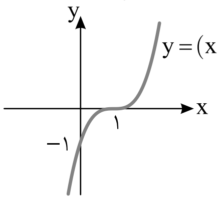


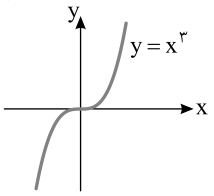
۲۰۶- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-۱-۲)=f(x-۳)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-۳)-۱$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(x-۳)+۱$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x-۳)+۱$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر طول نقاط روی نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=-f(-۲x-۳)+۱$ به‌دست می‌آید.

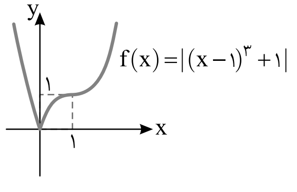
۲۰۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

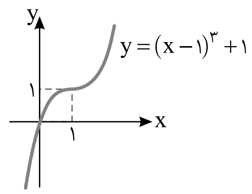
$$f(x)=|x^۳-۳x^۲+۳x|=|(x-۱)^۳+۱|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور قرینه کنیم و در آخر قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.







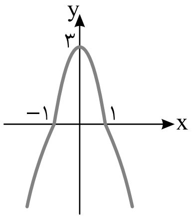


۲۰۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

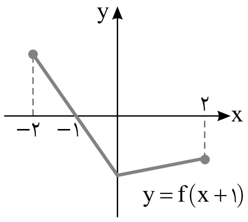
$$g(x)=-۲f(x)+|f(x)|=\begin{cases}-۲f(x)+f(x) & f(x)\geq ۰\\ -۲f(x)+(-f(x)) & f(x)<۰\end{cases}$$

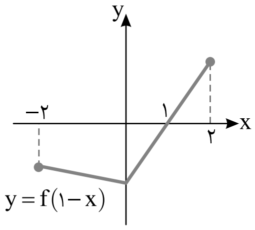
$$=\begin{cases}-f(x) & f(x)\geq ۰\\ -۳f(x) & f(x)<۰\end{cases}$$

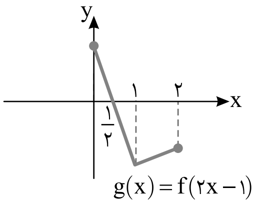
بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f منفی است، یعنی در بازهٔ $(-۱,۱)$، عرض نقاط روی نمودار f را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، در بقیهٔ جاها نمودار g قرینهٔ نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.

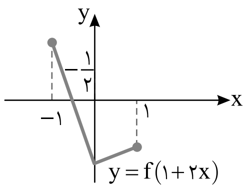


۲۰۹- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=f(۱-x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(۱+x)$ به‌دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(۱+۲x)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(۱+۲(x-۱))=f(۲x-۱)$ به‌دست می‌آید.

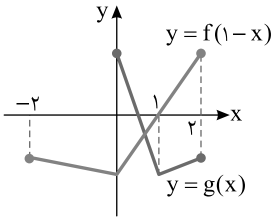








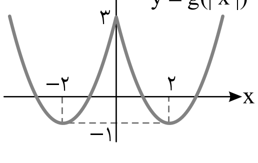
با توجه به شکل مقابل نمودار توابع $y=g(x)$ و $y=f(۱-x)$ یک نقطهٔ برخورد دارند.

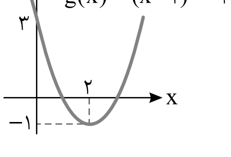


۲۱۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۴|x|+۳=|x|^۲-۴|x|+۳$$

پس اگر فرض کنیم $g(x)=x^۲-۴x+۳$، آن‌گاه $f(x)=g(|x|)$. به این ترتیب، کافی است نمودار $y=g(|x|)$ را رسم کنیم. برای این کار، ابتدا نمودار تابع g را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

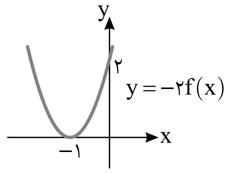


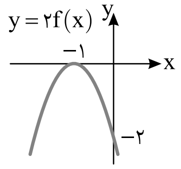


۲۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که همواره $f(x)\leq ۰$. بنابراین

$$y=|f(x)|-f(x)=-f(x)-f(x)=-۲f(x)$$

برای رسم کردن نمودار $y=-۲f(x)$، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲f(x)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-۲f(x)$ به‌دست بیاید.

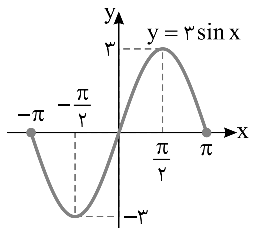


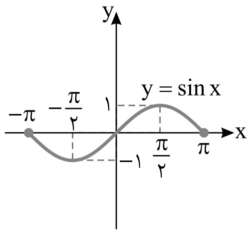


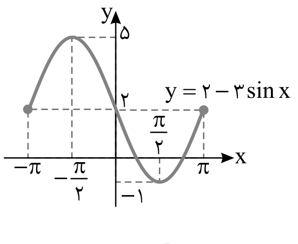
۲۱۲- گزینهٔ ۴ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x+۱}{۲})$ به‌دست می‌آید. پس نمودار مورد نظر متعلق به تابع $y=f(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲})$ است.

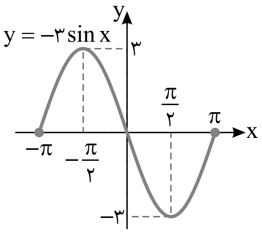
۲۱۳- گزینهٔ ۴ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازه $[-\pi,\pi]$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۳\sin x$ به‌دست بیاید.

سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-۳\sin x$ به‌دست بیاید. در آخر، نمودار تابع $y=-۳\sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۲-۳\sin x$ به‌دست بیاید.

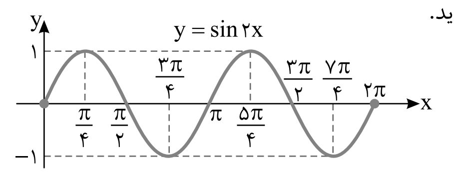


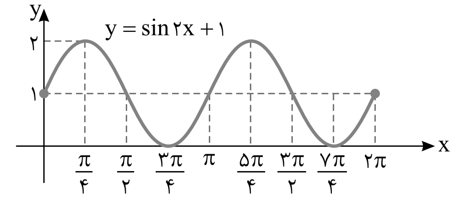






۲۱۴- گزینهٔ ۱ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[۰,۴\pi]$ را ضرب در $\frac{۱}{۲}$ می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sin ۲x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌دست بیاید. سپس، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.





۲۱۵- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که a عددی مثبت است. از طرف دیگر،

$$f(۰)=|a|-۲=a-۲,\quad f(a)=-۲$$

$$f(x)=۰\Rightarrow |x-a|-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x-a=۲\Rightarrow x=a+۲\\x-a=-۲\Rightarrow x=a-۲\end{cases}$$

بنابراین با توجه به شکل زیر

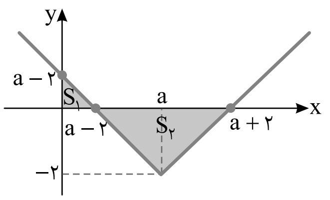
$$S_۱=\frac{(a-۲)^۲}{۲},\quad S_۲=\frac{۲(a+۲-(a-۲))}{۲}=۴$$

$$S_۱+S_۲=\frac{۹}{۲}\Rightarrow\frac{(a-۲)^۲}{۲}+۴=\frac{۹}{۲}\Rightarrow a^۲-۴a+۴+۸=۹$$

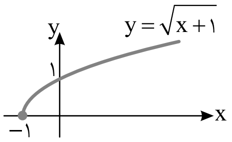
$$a^۲-۴a+۳=۰\Rightarrow(a-۳)(a-۱)=۰\Rightarrow a=۳,\ a=۱\ \text{(غ.ق.)}$$

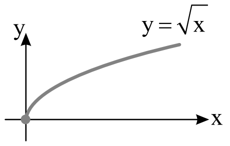
اگر $a=۱$، آن‌گاه $f(x)=۲-|x-۱|$ و در نتیجه $f(۰)=-۱$ ولی در نمودار رسم شده مقدار $f(۰)$ عددی مثبت است. پس $a=۱$ قابل قبول نیست. در نتیجه

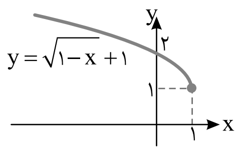
$$f(x)=|x-۳|-۲\Rightarrow f(\frac{۱}{a})=f(\frac{۱}{۳})=|\frac{۱}{۳}-۳|-۲=\frac{۲}{۳}$$

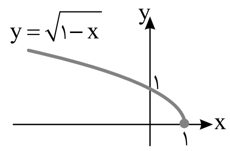


۲۱۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را به شکل زیر رسم می‌کنیم. بنابراین اگر نمودار نهایی را دو واحد به پایین ببریم، هر دو محور مختصات را قطع می‌کند.

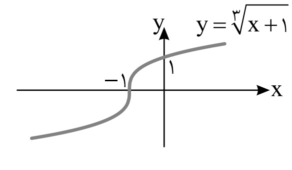


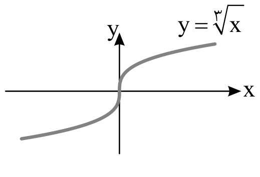


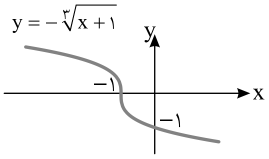




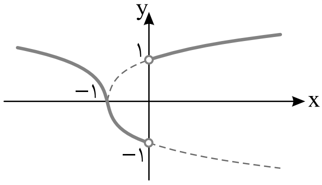
۲۱۷- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x+۱} & x>۰\\-\sqrt[۳]{x+۱} & x<۰\end{cases}$$
است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y=\sqrt[۳]{x+۱}$ و $y=-\sqrt[۳]{x+۱}$ به‌صورت زیر است:







بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است:



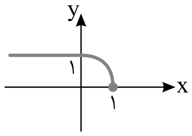
۲۱۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید $h(x)=x+|x|$. در این صورت دامنهٔ تابع g با دامنهٔ تابع foh برابر است:

$$D_{foh}=\{x\in D_h\,|\,h(x)\in D_f\}=\{x|-۲\le x+|x|\le ۲\}=(-\infty,۱]$$

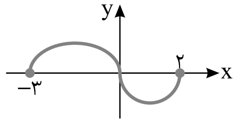
اکنون توجه کنید که

$$x\le ۰\Rightarrow g(x)=-f(x-x)=-f(۰)=۱$$
$$۰<x\le ۱\Rightarrow g(x)=-f(x+x)=-f(۲x)$$

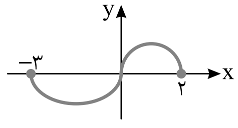
پس $g(x)=\begin{cases}۱ & x\le ۰\\ -f(۲x) & ۰<x\le ۱\end{cases}$. پس در بازهٔ $(-\infty,۰]$ باید نمودار تابع $y=۱$ را رسم کنیم و در بازهٔ $(۰,۱]$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f واقع در بازهٔ $(۰,۲]$ را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم.



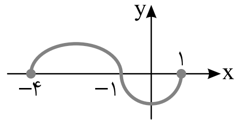
۲۱۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=-f(-(x+۱))$ به‌دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.



$y=-f(-x)$



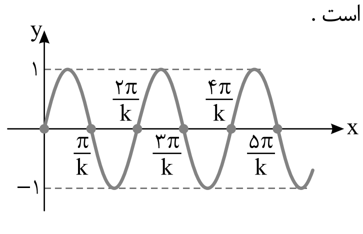
$y=f(-x)$



$y=-f(-x-۱)$

راه‌حل دوم در شکل (۲)، نقطهٔ $(-۴,۰)$ روی نمودار تابع است. در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به‌ازای $x=-۴$ مقادیر $f(۵)$ و $f(-۵)$ ظاهر می‌شوند اما با توجه به شکل (۱)، عددهای ۵ و ۵− در دامنهٔ تابع f نیستند، پس این سه گزینه رد می‌شوند.

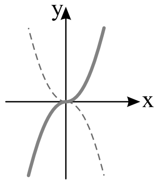
۲۲۰- گزینهٔ ۳ مطابق شکل باید $\frac{۴\pi}{k}\le\frac{\pi}{۲}<\frac{۵\pi}{k}$ تا نمودار تابع پنج بار محور طول‌ها را روی بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ قطع کند. بنابراین $۸\le k<۱۰$، پس حداقل مقدار k برابر ۸ است.



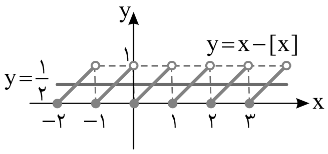
۲۲۱- گزینهٔ ۲ با توجه به دو زوج مرتب $(۲b,۳)$ و $(۲,۳)$ نتیجه می‌گیریم که $۲b=۲$ و در نتیجه $b=۱$. با توجه به دو زوج مرتب $(۲a,۱)$ و $(b,۱)$ نتیجه می‌گیریم $۲a=b$، پس $a=\frac{۱}{۲}$. بنابراین $a+b=\frac{۳}{۲}$.

۲۲۲- گزینهٔ ۳ توابع $y=x^۲$، $y=|x|$ و $y=[x]$ یک‌به‌یک نیستند، چون خطی موازی محور طول‌ها وجود دارد که نمودار آن‌ها را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. ولی نمودار تابع $y=x|x|$ به‌صورت زیر است و هر خط موازی محور طول‌ها آن را در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است.

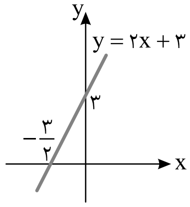
$$y=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x\le ۰\end{cases}$$

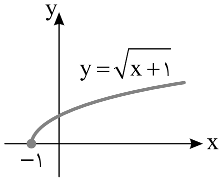


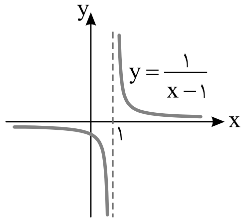
۲۲۳- گزینهٔ ۴ توابع $y=\sqrt{x+۱}$، $y=۲x+۳$ و $y=\frac{۱}{x-۱}$ یک‌به‌یک هستند چون هر خط موازی محور طول‌ها نمودار آن‌ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. تابع $y=x-[x]$ یک‌به‌یک نیست. چون مثلاً خط $y=\frac{۱}{۲}$ نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



نمودار سایر توابع به‌صورت زیر است:





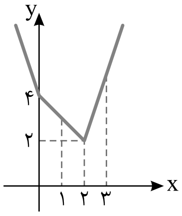


۲۲۴- گزینهٔ ۱ تابع $f(x)=x^۳-\sqrt{x}$ یک‌به‌یک نیست. زیرا

$$f(۰)=f(۱)=۰$$

۲۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۴ & x\ge ۲\\ -x+۴ & ۰\le x\le ۲\\ -۳x+۴ & x\le ۰\end{cases}$$

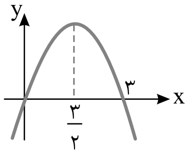


بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. این تابع روی بازه‌های $(-\infty,۲]$ و $[۲,+\infty)$ و $[۰,۲]$ یک‌به‌یک است ولی روی بازهٔ $[۱,۳]$ یک‌به‌یک نیست.

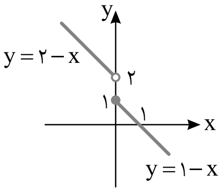
۲۲۶- گزینهٔ ۱ شرط یک‌به‌یک نبودن این تابع $-۲a-۳=۰$ است. پس $a=-\frac{۳}{۲}$. توجه کنید که در این صورت تابع f با یک تابع ثابت برابر است

$$f(x)=\frac{ax+۳}{x-۲}=\frac{-\frac{۳}{۲}x+۳}{x-۲}=\frac{-۳x+۶}{۲x-۴}=\frac{-۳(x-۲)}{۲(x-۲)}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(۳)=-\frac{۳}{۲}$$

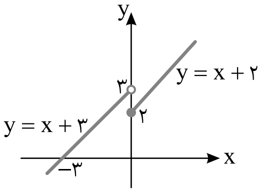
۲۲۷- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. از روی شکل معلوم است که تابع روی بازهٔ $(-\infty,\frac{۳}{۲}]$ یک‌به‌یک است. اما اگر $a>\frac{۳}{۲}$، خطی موازی با محور طول‌ها وجود دارد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{۳}{۲}$ است.



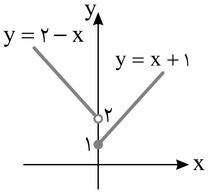
۲۲۸- گزینهٔ ۴ نمودار تابع گزینهٔ (۴) به‌صورت روبه‌رو است. هر خط موازی محور طول‌ها نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است. نمودار تابع‌های سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:



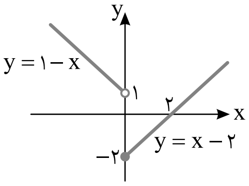
گزینهٔ (۱)



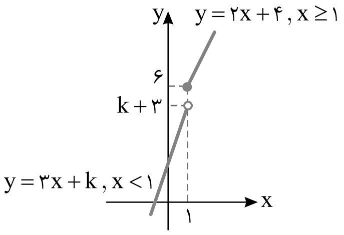
گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



۲۲۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** نمودار تابع f به‌صورت زیر است. مطابق شکل واضح است که با شرط $k+۳\le ۶$ تابع f یک‌به‌یک است. پس $k\le ۳$.



راه‌حل دوم اگر $x\ge ۱$، آن‌گاه تابع $g(x)=۲x+۴$ یک‌به‌یک است. همچنین اگر $x<۱$، تابع $h(x)=۳x+k$ یک‌به‌یک است. از طرف دیگر

$$x\ge ۱\Rightarrow ۲x\ge ۲\Rightarrow ۲x+۴\ge ۶\Rightarrow g(x)\ge ۶\Rightarrow R_g=[۶,+\infty)$$

$$x<۱\Rightarrow ۳x<۳\Rightarrow ۳x+k<k+۳\Rightarrow h(x)<k+۳\Rightarrow R_h=(-\infty,k+۳)$$

برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد، باید

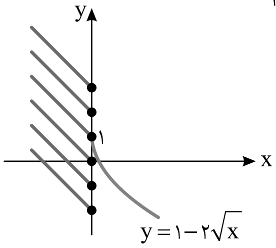
$$R_g\cap R_h=\varnothing\Rightarrow[۶,+\infty)\cap(-\infty,k+۳)=\varnothing\Rightarrow k+۳\le ۶\Rightarrow k\le ۳$$

پس حداکثر مقدار ممکن k برابر ۳ است.

۲۳۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نمودار تابع f به‌ازای مقدارهای مختلف k به شکل زیر است. برای اینکه تابع یک‌به‌یک باشد، باید کمترین مقدار عبارت $۴k-x$ به‌ازای $x\le ۰$ از ۱ کمتر نباشد:

$$x\le ۰\Rightarrow -x\ge ۰\Rightarrow ۴k-x\ge ۴k$$

یعنی $۴k\ge ۱$، پس $k\ge\frac{۱}{۴}$.



راه‌حل دوم اگر $x>۰$، آن‌گاه تابع $g(x)=۱-۲\sqrt{x}$ یک‌به‌یک است و اگر $x\le ۰$، آن‌گاه تابع $h(x)=۴k-x$ یک‌به‌یک است و

$$x>۰\Rightarrow\sqrt{x}>۰\Rightarrow -۲\sqrt{x}<۰\Rightarrow ۱-۲\sqrt{x}<۱\Rightarrow R_g=(-\infty,۱)$$

$$x\le ۰\Rightarrow -x\ge ۰\Rightarrow ۴k-x\ge ۴k\Rightarrow R_h=[۴k,+\infty)$$

برای اینکه تابع f یک‌به‌یک شود، باید $R_g\cap R_h=\varnothing$. پس

$$۴k\ge ۱\Rightarrow k\ge\frac{۱}{۴}$$

۲۳۱- گزینهٔ ۳ چون مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(۹,۱)$ و $(a^۲,۱)$ مساوی هستند، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم مساوی باشند:

$$a^۲=۹\Rightarrow a=\pm ۳$$

به همین ترتیب باید مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های $(۶,۲)$ و $(۳a+b,۲)$ نیز مساوی باشند، پس $۳a+b=۶$، بنابراین $b=۶-۳a$.

اگر $a=۳$، آن‌گاه $b=-۳$ و تابع به‌صورت زیر است:

$$f=\{(۹,۱),(۶,۲),(۳,۹)\}$$

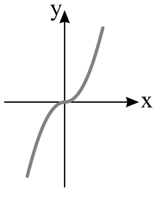
اگر $a=-۳$، آن‌گاه $b=۱۵$ و تابع به‌صورت زیر است:

$$f=\{(۹,۱),(۶,۲),(-۳,-۴۵)\}$$

پس $a-b=۶$ یا $a-b=-۱۸$.

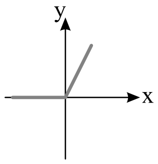
۲۳۲- گزینهٔ ۳ در گزینهٔ (۱)، $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$. پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینهٔ (۲)، $x\ne ۰$، $f(x)=|x|$. پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینهٔ (۴) مثلاً $f(۱)=f(-۱)$ پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینهٔ (۳) نمودار تابع به‌صورت زیر است و تابع یک‌به‌یک است.

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$$

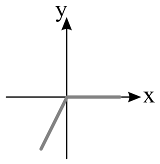


۲۳۳- گزینهٔ ۳ نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

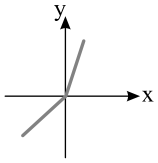
گزینهٔ (۱): $f(x)=x+|x|=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ ۲x & x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



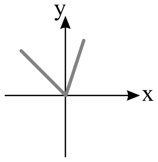
گزینهٔ (۲): $f(x)=x-|x|=\begin{cases} ۲x & x<۰ \\ ۰ & x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



گزینهٔ (۳): $f(x)=۲x+|x|=\begin{cases} x & x<۰ \\ ۳x & x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک است



گزینهٔ (۴): $f(x)=x+۲|x|=\begin{cases} -x & x<۰ \\ ۳x & x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



۲۳۴- گزینهٔ ۱ در تابع گزینهٔ (۲)، $f(۰)=f(۱)=f(-۱)=۰$.

در تابع گزینهٔ (۳)، اگر $x\leq ۰$، آن‌گاه $f(x)=۰$.

در تابع گزینهٔ (۴)، $f(۰)=f(۲)=۰$.

بنابرایـن گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) رد می‌شـوند. توجه کنید که می‌توانید ثابت کنید تابع گزینهٔ (۱) یک‌به‌یک است. اگر $(x_۱,f(x_۱))$ و $(x_۲,f(x_۲))$ دو زوج مرتب از تابع f باشند که $f(x_۱)=f(x_۲)$، آن‌گاه

$$x_۱^۳+x_۱+۱=x_۲^۳+x_۲+۱\Rightarrow x_۱^۳-x_۲^۳+x_۱-x_۲=۰$$

$$(x_۱-x_۲)(x_۱^۲+x_۱x_۲+x_۲^۲)+(x_۱-x_۲)=۰$$

$$(x_۱-x_۲)\underbrace{(x_۱^۲+x_۱x_۲+x_۲^۲+۱)}_{A}=۰ \qquad (۱)$$

اکنون توجه کنید که

$$A=(x_۱+\frac{۱}{۲}x_۲)^۲+\frac{۳}{۴}x_۲^۲+۱>۰$$

بنابرایـن از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شـود $x_۱-x_۲=۰$، پـس $x_۱=x_۲$ و تابع f یک‌به‌یک است.

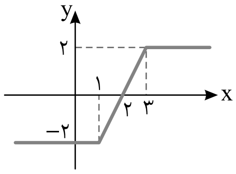
۲۳۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x\geq ۳\Rightarrow f(x)=x-۱-x+۳=۲$$

$$۱\leq x\leq ۳\Rightarrow f(x)=x-۱+x-۳=۲x-۴$$

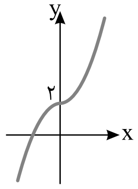
$$x\leq ۱\Rightarrow f(x)=-x+۱+x-۳=-۲$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر اسـت و این تابع روی بازهٔ $[۱,۳]$ یک‌به‌یک اسـت. توجه کنیـد کـه تابـع f روی هـر بـازهٔ $[c,d]$ کـه $c\geq ۱$ و $d\leq ۳$ نیز یک‌به‌یک است. پس حداکثر مقدار ممکن برای b برابر ۳ و حداقل مقدار ممکن برای a برابر ۱ است و در نتیجه حداکثر مقدار ممکن برای $b-a$ برابر ۲ است.



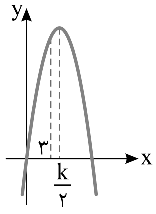
۲۳۶- گزینهٔ ۳ تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شـرط $ad-bc\neq ۰$ یک‌به‌یک اسـت و اگر $ad-bc=۰$، آن‌گاه تابع f برابر یک تابع ثابت است که یک‌به‌یک نیسـت. پس اگر $k^۳-۴k=۰$، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک نیست. از معادلهٔ اخیر به‌دسـت می‌آیـد $k=۰$ و $k=\pm ۲$. پـس به‌ازای سـه مقدار مختلـف k تابع f یک‌به‌یک نیست.

۲۳۷- گزینهٔ ۲ نمـودار تابـع $f(x)=\begin{cases} ۲-x^۲ & x<۰ \\ x^۲+۲ & x\geq ۰ \end{cases}$ بـه شـکل زیر اسـت. واضح اسـت که تابـع یک‌به‌یک اسـت. بقیهٔ گزینه‌هـا را می‌توانیـد با رسـم نمودار یـا آوردن مثال نقض، رد کنید.



۲۳۸- گزینهٔ ۳ نمـودار تابـع $y=-x^۲+kx$ به شـکل مقابل اسـت. اگر $x=۳$ قبـل از طول رأس سـهمی قـرار گیرد یا بر آن منطبق شـود، تابـع در بازهٔ $(-\infty,۳]$ یک‌به‌یک است. بنابراین

$$۳\leq \frac{k}{۲}\Rightarrow k\geq ۶$$



۲۳۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که اگر $f(x_۱)=f(x_۲)$، آن‌گاه

$$x_۱-k\sqrt{x_۱}=x_۲-k\sqrt{x_۲}\Rightarrow x_۱-x_۲-k(\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲})=۰$$

$$(\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲})(\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲})-k(\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲})=۰$$

$$(\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲})(\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}-k)=۰$$

اگر $k<۰$، آن‌گاه $\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}-k\neq ۰$ و در نتیجه

$$\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}=۰\Rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع یک‌به‌یک است.

به‌ازای $k=۰$ هم تابع به‌صورت $f(x)=x$ اسـت و یک‌به‌یک اسـت. اما اگر $k>۰$، آن‌گاه از $\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}-k=۰$ می‌تـوان مقـدار $x_۱$ را برحسـب $x_۲$ به‌دسـت آورد و از $f(x_۱)=f(x_۲)$ لزوماً $x_۱=x_۲$ نتیجه نمی‌شـود. پس در این حالت تابع یک‌به‌یک نیست.

راه‌حل دوم (این راه‌حل پس از مطالعهٔ فصل کاربرد مشتق قابل استفاده است.) تابع f روی بازهٔ $[۰,+\infty)$ پیوسته است. پس در صورتی که یک‌به‌یک باشد، اکیداً یکنواست. اکنون توجه کنید که $f'(x)=۱-\frac{k}{۲\sqrt{x}}=\frac{۲\sqrt{x}-k}{۲\sqrt{x}}$. اگر $k\le ۰$، آن‌گاه $f'(x)>۰$ و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی است و یک‌به‌یک است. اگر $k>۰$، آن‌گاه تابع f روی بازهٔ $[۰,\frac{k^۲}{۴}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[\frac{k^۲}{۴},+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازهٔ $[۰,+\infty)$ غیریکنواست.

۲۴۰- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $f(x^۳+۳)=f(x^۲+۱)$ می‌نویسیم. چون f تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$x^۳+۳=x^۲+۱\Rightarrow x^۳-x^۲+۲=۰$$

واضح است که $x=-۱$ یکی از جواب‌های معادله است، به کمک تقسیم عبارت $x^۳-x^۲+۲$ را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۳-x^۲+۲=(x+۱)(x^۲-۲x+۲)=۰$$

معادلهٔ $x^۲-۲x+۲=۰$ جواب ندارد. پس $x=-۱$ تنها جواب معادله است.

۲۴۱- گزینهٔ ۲ تابع گزینهٔ (۱) صعودی نیست، زیرا $۱<۲$، اما $f(۱)>f(۲)$.

تابع گزینهٔ (۲) صعودی است، زیرا $۲<۴<۵$ و $f(۲)=f(۴)<f(۵)$.

تابع گزینهٔ (۳) صعودی نیست، زیرا $۲<۳$، اما $f(۲)>f(۳)$.

تابع گزینهٔ (۴) هم صعودی نیست، زیرا $-۲<۳$، اما $f(-۲)>f(۳)$.

۲۴۲- گزینهٔ ۲ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$۱<۲<۳\Rightarrow f(۱)<f(۲)<f(۳)\Rightarrow a^۲-۱<a+۱<۳a-۱$$

$$a^۲-۱<a+۱\Rightarrow (a+۱)(a-۲)<۰\Rightarrow -۱<a<۲ \qquad (۱)$$

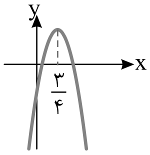
$$a+۱<۳a-۱\Rightarrow a>۱ \qquad (۲)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $۱<a<۲$.

۲۴۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل سؤال تابع f روی بازهٔ $[-۲,۳]$ و هر بازهٔ $[a,b]$ که $-۲\le a<b\le ۳$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۵ است.

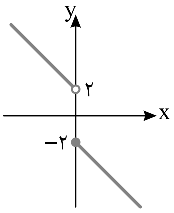
۲۴۴- گزینهٔ ۱ در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $a>۱$، آن‌گاه تابع صعودی است. بنابراین

$$k^۲-۳>۱\Rightarrow k^۲>۴\Rightarrow |k|>۲$$



۲۴۵- گزینهٔ ۱ طول رأس سهمی به معادلهٔ $f(x)=-۴x^۲+۶x-۱$ برابر است با $-\frac{b}{۲a}=\frac{۳}{۴}$.

از روی نمودار این سهمی معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(\frac{۳}{۴},+\infty)$ اکیداً نزولی است.



۲۴۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع گزینهٔ (۴) به‌صورت زیر است و این تابع نزولی است.

$$f(x)=\begin{cases}-x-۲ & x\ge ۰\\ -x+۲ & x<۰\end{cases}$$

با رسم نمودار توابع گزینه‌های دیگر می‌توانید نزولی بودن آن‌ها را رد کنید.

۲۴۷- گزینهٔ ۱ شرط صعودی بودن تابع f آن است که همهٔ مقادیر تابع $y_۲=۲x+۱$ کوچک‌تر از یا مساوی با کمترین مقدار تابع $y_۱=x+a$ باشد:

$$\begin{cases}x\ge ۱\Rightarrow x+a\ge ۱+a\Rightarrow y_۱\ge ۱+a\\ x<۱\Rightarrow ۲x+۱<۳\Rightarrow y_۲<۳\end{cases}$$

بنابراین $۳\le ۱+a$. پس $a\ge ۲$.

۲۴۸- گزینهٔ ۲ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$۲m-۱\ge m+۱\Rightarrow m\ge ۲$$

۲۴۹- گزینهٔ ۲ برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $f(x)\ge ۰$ را حل کنیم. چون $f(۰)=۰$ و اگر $x<۰$، آن‌گاه $f(x)<f(۰)$، پس باید نامعادلهٔ $f(x)\ge f(۰)$ را حل کنیم که با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x\ge ۰$. پس $D_g=[۰,+\infty)$.

۲۵۰- گزینهٔ ۱ مجموع دو تابع صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$، تابعی صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است. بنابراین مجموع دو تابع $f+g$ و $f-g$، یعنی تابع $۲f$ صعودی است، پس تابع f نیز صعودی است.

۲۵۱- گزینهٔ ۴ تابع f اکیداً صعودی، تابع g اکیداً نزولی، تابع h ثابت (هم صعودی و هم نزولی) و تابع k غیریکنواست.

۲۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$-۲<۰<۱\Rightarrow ۴x\le x^۲+۳\le ۷x-x^۲$$

$$۴x\le x^۲+۳\Rightarrow x^۲-۴x+۳\ge ۰\Rightarrow x\le ۱ \text{ یا } x\ge ۳ \qquad (۱)$$

$$x^۲+۳\le ۷x-x^۲\Rightarrow ۲x^۲-۷x+۳\le ۰$$

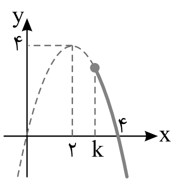
$$(۲x-۱)(x-۳)\le ۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}\le x\le ۳ \qquad (۲)$$

با توجه به شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود اگر $x=۳$ یا $\frac{۱}{۲}\le x\le ۱$، آن‌گاه تابع f صعودی است. پس به‌ازای مقادیر صحیح ۳ و ۱ تابع f صعودی است.

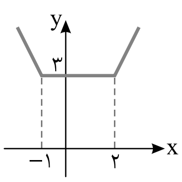
۲۵۳- گزینهٔ ۳ تابع $-f$ روی بازه‌هایی اکیداً صعودی است که تابع f روی آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع f روی بازهٔ $[-۳,۱]$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع $-f$ روی این بازه اکیداً صعودی است.

۲۵۴- گزینهٔ ۳ باید مبنای لگاریتم بین صفر و ۱ باشد. پس

$$۰<k-۱<۱\Rightarrow ۱<k<۲$$

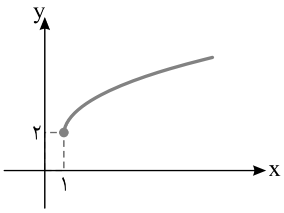


۲۵۵- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به شکل مقابل است. برای اینکه تابع نزولی باشد، باید دامنهٔ آن زیرمجموعهٔ بازهٔ $[۲,+\infty)$ باشد، بنابراین $k\ge ۲$.

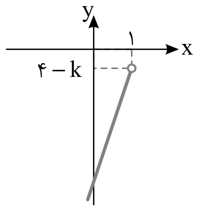


۲۵۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. چون تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ هم صعودی است هم نزولی، پس روی این بازه تابعی ثابت است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[-۱,۲]$ تابعی ثابت است، همین‌طور روی هر بازه‌ای مانند $[a,b]$ که $-۱\le a<b\le ۲$. بنابراین بیشترین مقدار ممکن $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a=-۱$ و $b=۲$، که در این صورت $b-a=۳$.

۲۵۷- گزینهٔ ۳ توابع $y=\sqrt{x-۱}+۲$ و $y=۴x-k$ صعودی هستند.



$y=\sqrt{x-۱}+۲$



$y=۴x-k, x<۱$

مطابق شکل‌های بالا کافی است $۴-k$ بیشتر از ۲ نباشد تا تابع f صعودی باشد. پس $۴-k\leq ۲$، در نتیجه $k\geq ۲$.

۲۵۸- گزینهٔ ۳ با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی،

$$a^{۲}-۳<۲a\Rightarrow a^{۲}-۲a-۳<۰\Rightarrow (a+۱)(a-۳)<۰\Rightarrow -۱<a<۳$$

۲۵۹- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع g از حل نامعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x-۲)-۲\geq ۰\Rightarrow f(x-۲)\geq ۲\Rightarrow f(x-۲)\geq f(۱)$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x-۲\leq ۱\Rightarrow x\leq ۳$

بنابراین $D_g=(-\infty,۳]$.

۲۶۰- گزینهٔ ۲ توابع $y=x$ و $y=f(x)$ صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها صعودی است. یعنی تابع $y=x+f(x)$ صعودی است.

۲۶۱- گزینهٔ ۳ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$۱<۲<۳\Rightarrow f(۱)\leq f(۲)\leq f(۳)\Rightarrow m-۱\leq ۲m\leq m+۳$$

$$m-۱\leq ۲m\Rightarrow m\geq -۱,\quad ۲m\leq m+۳\Rightarrow m\leq ۳$$

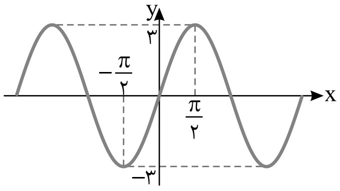
بنابراین $-۱\leq m\leq ۳$ و در نتیجه m می‌تواند پنج مقدار صحیح ۳، ۲، ۱، ۰ و ۱− را داشته باشد.

۲۶۲- گزینهٔ ۴ تابعی که هم صعودی است و هم نزولی، تابعی ثابت است. پس f تابع ثابت است. بنابراین

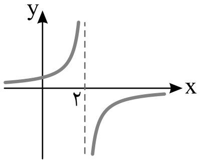
$$f(۱)=f(۲)=f(۳),\quad a-۲=۳a+۶=۴a-b,\quad a=-۴,\quad b=-۱۰$$

در نتیجه $a+b=-۱۴$.

۲۶۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم و عرض هر نقطهٔ آن را سه برابر کنیم، نمودار تابع $f(x)=۳\sin x$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ و هر بازهٔ دیگر به‌صورت $[-\frac{\pi}{۲},a]$ که $-\frac{\pi}{۲}\leq a\leq \frac{\pi}{۲}$ صعودی است. پس حداکثر مقدار a برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.



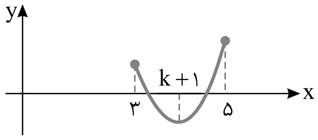
۲۶۴- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{۱}{-x}$ را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{۱}{-(x-۲)}=\frac{۱}{-x+۲}$ به‌دست بیاید.



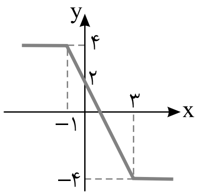
اکنون از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۲)$ و هر بازهٔ دیگری مانند $(-\infty,a)$ که $a\leq ۲$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۲۶۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع باید به شکل زیر باشد، یعنی اگر طول رأس سهمی که $x=k+۱$ است، در بازهٔ $(۳,۵)$ باشد، آن‌گاه تابع غیریکنوا می‌شود. پس

$$۳<k+۱<۵\Rightarrow ۲<k<۴$$



۲۶۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[-۱,۳]$ و هر بازه‌ای به صورت $[a,b]$ که $-۱\leq a<b\leq ۳$ اکیداً نزولی است. بنابراین، بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a=-۱$ و $b=۳$، که در این صورت $b-a=۴$.



۲۶۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=kx+|x-۱|=\begin{cases}(k+۱)x-۱ & x\geq ۱\\(k-۱)x+۱ & x<۱\end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید هر دو خط موجود در ضابطهٔ تابع صعودی باشند، یعنی شیب نامنفی داشته باشند. پس

$$\begin{cases}k+۱\geq ۰\\k-۱\geq ۰\end{cases}\Rightarrow k\geq ۱$$

۲۶۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$x>۶\Rightarrow f(x)>f(۶)\Rightarrow f(x)>۰$$

$$x<۶\Rightarrow f(x)<f(۶)\Rightarrow f(x)<۰$$

برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $\frac{۴-x^{۲}}{f(x)}\geq ۰$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به‌صورت زیر است:

$$x\in(-\infty,-۲]\cup[۲,۶)$$

بنابراین در دامنهٔ تابع g چهار عدد طبیعی قرار دارد.

x	$-\infty$		-۲		۲		۶		$+\infty$
$۴-x^{۲}$		−	۰	+	۰	−		−	
$f(x)$		−		−		−	۰	+	
$\frac{۴-x^{۲}}{f(x)}$		+	۰	−	۰	+	ت ن	−	

۲۶۹- گزینهٔ ۲ تابع $y=\sqrt{x}$ صعودی است، پس تابع $y=\sqrt{x}+۱$ نیز صعودی است. همچنین مقادیر تابع $y=\sqrt{x}+۱$ همواره مثبت هستند. بنابراین تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}$ نزولی است.

۲۷۰- گزینهٔ ۳ تابع‌های $y=x$ و $y=x^{۳}$ صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها یعنی $y=x^{۳}+x$ صعودی است. توابع سه گزینهٔ دیگر غیریکنوا هستند.

۲۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا از تساوی $(f^{-۱}og^{-۱})(a)=-۱$ مقدار a را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-۱}(g^{-۱}(a))=-۱\Rightarrow f(-۱)=g^{-۱}(a)$$

$$۴=g^{-۱}(a)\Rightarrow g(۴)=a\Rightarrow a=-۲$$

بنابراین مقدار $f^{-۱}(-۲)$ را می‌خواهیم که با توجه به تساوی $f(۳)=-۲$ نتیجه می‌گیریم $f^{-۱}(-۲)=۳$.

۲۷۲- گزینهٔ ۴ تابع $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-۱}=\{(۲,-۱),(۵,۳),(۳,-۲),(-۱,۵)\}$$

در نتیجه $gof^{-۱}=\{(۲,۴),(۵,۰)\}$.

۲۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $g(۳)=۲$، پس $g^{-۱}(۲)=۳$. بنابراین

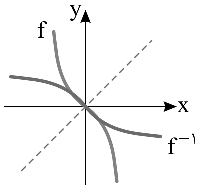
$$f^{-۱}(a)+g^{-۱}(۲)=۶\Rightarrow f^{-۱}(a)+۳=۶$$

$$f^{-۱}(a)=۳\Rightarrow f(۳)=a\Rightarrow a=۲$$

در نتیجه $g(a)=g(۲)=۴$.

۲۷۴- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۹,۱۱)$ عبور می‌کند، نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۱۱,۹)$ عبور می‌کند.

۲۷۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f^{-۱}$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است که به شکل زیر است:



۲۷۶- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ همان برد تابع f است. پس برد تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+۱)^۲-۱$$

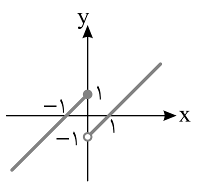
$$-۱\le x\le ۲\Rightarrow ۰\le x+۱\le ۳$$

$$۰\le (x+۱)^۲\le ۹\Rightarrow -۱\le (x+۱)^۲-۱\le ۸\Rightarrow -۱\le f(x)\le ۸$$

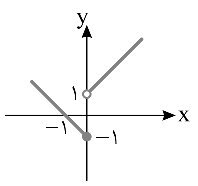
بنابراین $D_{f^{-۱}}=R_f=[-۱,۸]$.

۲۷۷- گزینهٔ ۴ نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

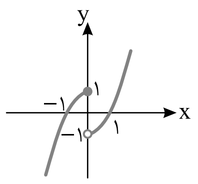
گزینهٔ (۱)



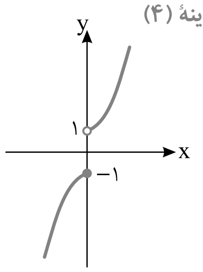
گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)



با توجه به نمودارها واضح است که تابع گزینهٔ (۴) وارون‌پذیر است.

۲۷۸- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم نمودار تابع $f^{-۱}$ به‌دست می‌آید. بنابراین باید تابع وارون تابع $f(x)=۳x-۴$ را به‌دست آوریم.

$$y=۳x-۴\Rightarrow y+۴=۳x\Rightarrow x=\frac{y+۴}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

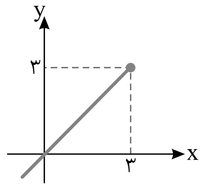
بنابراین معادلهٔ خط جدید $y=\frac{x+۴}{۳}$ است.

۲۷۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از تساوی $y=\sqrt{x-۱}+۲$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y-۲=\sqrt{x-۱}\Rightarrow (y-۲)^۲=x-۱\Rightarrow x=(y-۲)^۲+۱\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=x^۲-۴x+۵$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۱)=۲$، پس $f^{-۱}(۲)=۱$ که فقط در تابع گزینهٔ (۳) صدق می‌کند.



۲۸۰- گزینهٔ ۲ برای هر $x\in D_f$ تساوی $(f^{-۱}of)(x)=x$ برقرار است. پس تابع g به‌صورت $g(x)=x\,,\,x\le ۳$ است و نمودار آن به شکل روبه‌رو است.

۲۸۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=\{۱,۲,۳,۵\}$ و

$$f^{-۱}=\{(۳,۱),(۴,۲),(۲,۳),(۱,۵)\}\Rightarrow D_{f^{-۱}}=\{۳,۴,۲,۱\}$$

بنابراین

$$D_{f\times f^{-۱}}=D_f\cap D_{f^{-۱}}=\{۱,۲,۳\}$$

$$(f\times f^{-۱})(۱)=f(۱)\times f^{-۱}(۱)=۳\times ۵=۱۵$$

$$(f\times f^{-۱})(۲)=f(۲)\times f^{-۱}(۲)=۴\times ۳=۱۲$$

$$(f\times f^{-۱})(۳)=f(۳)\times f^{-۱}(۳)=۲\times ۱=۲$$

بنابراین تابع $f\times f^{-۱}$ به‌صورت زیر است

$$f\times f^{-۱}=\{(۱,۱۵),(۲,۱۲),(۳,۲)\}$$

۲۸۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید $f^{-۱}(۳)=a$. پس $f(a)=۳$ و در نتیجه

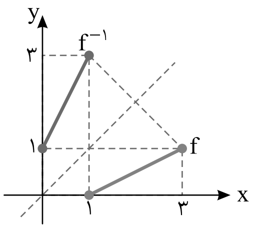
$$\frac{a}{a-۱}=۳\Rightarrow a=۳a-۳\Rightarrow ۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

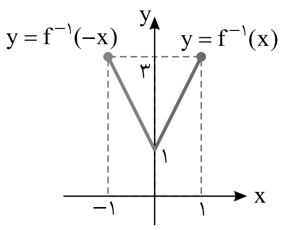
یعنی $f^{-۱}(۳)=\frac{۳}{۲}$.

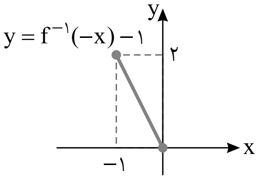
۲۸۳- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۸,۹)$ عبور می‌کند، نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۹,۸)$ عبور می‌کند:

$$f(۸)=۸+\sqrt[۳]{۸}-۱=۹\Rightarrow f^{-۱}(۹)=۸$$

۲۸۴- گزینهٔ ۴ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $f^{-۱}$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ نمودار تابع $f^{-۱}$ را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-۱}(-x)$ به‌دست بیاید. در آخر نمودار تابع $y=f^{-۱}(-x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-۱}(-x)-۱$ به‌دست بیاید.







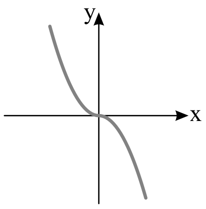
۲۸۵- گزینهٔ ۳ برد تابع $f^{-۱}$ برابر دامنهٔ تابع f است. پس دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$۴x-x^{۲}\geq ۰\Rightarrow x(۴-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۴\ ,\quad x-۱\neq ۰\Rightarrow x\neq ۱$$

پس $R_{f^{-۱}}=D_f=[۰,۱)\cup(۱,۴]$. بنابراین اعداد صحیح صفر، ۲، ۳ و ۴ در برد تابع $f^{-۱}$ قرار دارند.

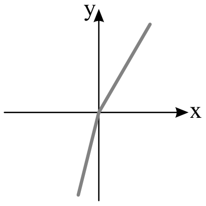
۲۸۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع‌های چهار گزینه به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱)



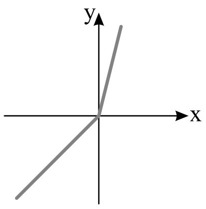
$$f(x)=-x|x|=\begin{cases} x^{۲} & x<۰ \\ -x^{۲} & x\geq ۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۲)



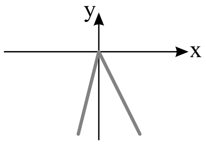
$$f(x)=۳x-|x|=\begin{cases} ۴x & x<۰ \\ ۲x & x\geq ۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۳)



$$f(x)=۲x+|x|=\begin{cases} x & x<۰ \\ ۳x & x\geq ۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۴)



$$f(x)=x-۳|x|=\begin{cases} ۴x & x<۰ \\ -۲x & x\geq ۰\end{cases}$$

با توجه به نمودارها، تابع $f(x)=x-۳|x|$ وارون‌پذیر نیست.

۲۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$y=a-۳x\Rightarrow ۳x=a-y\Rightarrow x=\frac{a-y}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{a-x}{۳}$$

بنابراین باید معادلهٔ $x^{۲}=\frac{a-x}{۳}$ فقط یک جواب داشته باشد

$$۳x^{۲}+x-a=۰\ ,\quad \Delta=۱+۱۲a=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۱۲}$$

۲۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=x^{۲}-۴x+۲=(x-۲)^{۲}-۲\ ,\ D_f=[۲,+\infty)$$

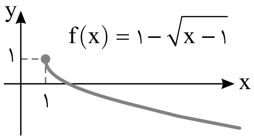
بنابراین f تابعی یک‌به‌یک است. توجه کنید که

$$y=(x-۲)^{۲}-۲\Rightarrow (x-۲)^{۲}=y+۲\Rightarrow |x-۲|=\sqrt{y+۲}$$

$$\xrightarrow{x\geq ۲} x-۲=\sqrt{y+۲}\Rightarrow x=\sqrt{y+۲}+۲$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۲}+۲$.

۲۸۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_{fof^{-۱}}=D_{f^{-۱}}=R_f$.



از طرف دیگر با توجه به نمودار تابع f، $R_f=(-\infty,۱]$، بنابراین دامنهٔ تابع $fof^{-۱}$ برابر $(-\infty,۱]$ است.

۲۹۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f^{-۱}og)^{-۱}(x)=\frac{x-۲}{۲}\Rightarrow (g^{-۱}of)(x)=\frac{x-۲}{۲}\Rightarrow g^{-۱}(f(x))=\frac{x-۲}{۲}$$

$$g^{-۱}(x-۱)=\frac{x-۲}{۲}\xrightarrow{(x\to x+۱)} g^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}\Rightarrow g(x)=۲x+۱$$

راه‌حل دوم اگر تابع‌های وارون دو طرف تساوی $(f^{-۱}og)^{-۱}(x)=\frac{x-۲}{۲}$ را پیدا کنیم به‌دست می‌آید

$$(f^{-۱}og)(x)=۲x+۲ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، $f^{-۱}(x)=x+۱$، پس از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f^{-۱}(g(x))=۲x+۲\Rightarrow g(x)+۱=۲x+۲\Rightarrow g(x)=۲x+۱$$

۲۹۱- گزینهٔ ۱ ابتدا $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,-۲),(۱,۴)\}$$

$$g^{-۱}=\{(۲,۲),(۱,۳),(-۱,۴),(-۲,۱)\}$$

اکنون $g^{-۱}of^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{ccccc} ۲ & \xrightarrow{f^{-۱}} & ۱ & \xrightarrow{g^{-۱}} & ۳ \\ ۳ & \longrightarrow & ۲ & \longrightarrow & ۲ \\ ۴ & \longrightarrow & -۲ & \longrightarrow & ۱ \\ ۱ & \longrightarrow & ۴ & \longrightarrow & \text{تعریف نشده} \end{array}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}=\{(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$$

توجه کنید که می‌توان ابتدا fog را حساب کرد، سپس با استفاده از تساوی $g^{-۱}of^{-۱}=(fog)^{-۱}$ مسئله را حل کرد.

۲۹۲- گزینهٔ ۱ اگر نقطه‌های $(۷,a)$ و $(-۱,b)$ روی نمودار تابع وارون تابع f باشند، نقطه‌های $(a,۷)$ و $(b,-۱)$ روی تابع f هستند. اما از طرف دیگر نمی‌دانیم a و b بزرگ‌تر از یک هستند یا کوچک‌تر از آن. پس با فرض $x<۱$ به‌دست می‌آید:

$$x+۳=۷\Rightarrow x=۴\ \text{(غ.ق.ق.)}\ ,\qquad x+۳=-۱\Rightarrow x=-۴\ \text{(ق.ق.)}$$

همچنین با فرض $x\geq ۱$،

$$۳x+۱=۷\Rightarrow x=۲\ \text{(ق.ق.)}\ ,\qquad ۳x+۱=-۱\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$f(-۴)=-۱\Rightarrow f^{-۱}(-۱)=-۴\ ,\quad f(۲)=۷\Rightarrow f^{-۱}(۷)=۲$$

بنابراین $f^{-۱}(۷)+f^{-۱}(-۱)=۲-۴=-۲$.

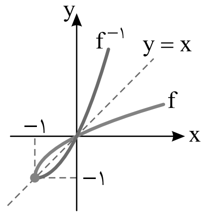
۲۹۳- گزینهٔ ۴ نمـودار تابـع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۳,۲)$ عبـور می‌کند، پس نمودار تابع f از نقطهٔ $(۲,۳)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(۲)=۳\Rightarrow ۸+۲+a=۳\Rightarrow a=-۷$$

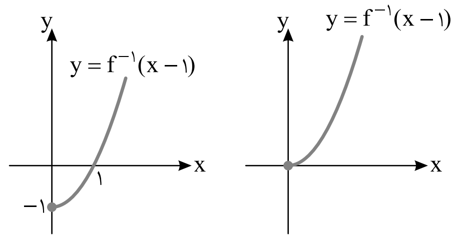
در نتیجه

$$f(x)=x^۳+x-۷\Rightarrow f(۳)=۲۷+۳-۷=۲۳$$

۲۹۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به خط $y=x$ است.



اگر نمودار $y=f^{-۱}(x)$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x-۱)+۱$ رسم می‌شود.



۲۹۵- گزینهٔ ۱ چـون نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(۱,۲)$ برخورد می‌کنند، پس

$$(۱,۲)\in f\Rightarrow f(۱)=۲\Rightarrow \sqrt{a+b}=۲$$

$$(۱,۲)\in f^{-۱}\Rightarrow (۲,۱)\in f\Rightarrow f(۲)=۱\Rightarrow \sqrt{۲a+b}=۱$$

در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=۴ \\ ۲a+b=۱ \end{cases}\Rightarrow a=-۳, b=۷$$

بنابراین $ab=-۲۱$.

۲۹۶- گزینهٔ ۲ چون f تابعی خطی است، فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f(۱)=۳\Rightarrow a+b=۳ \quad (۱)$$

$$f^{-۱}(۱۱)=۳\Rightarrow f(۳)=۱۱\Rightarrow ۳a+b=۱۱ \quad (۲)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دست می‌آید $a=۴$ و $b=-۱$. بنابراین $f(x)=۴x-۱$ و در نتیجه $f(-۳)=-۱۳$.

۲۹۷- گزینهٔ ۲ ابتـدا $f(x)$ را به‌دسـت می‌آوریـم کـه وارون تابـع $f^{-۱}(x)$ است:

$$y=۲x+k\Rightarrow ۲x=y-k\Rightarrow x=\frac{y-k}{۲}\Rightarrow f(x)=\frac{x-k}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ $x^۲=\frac{x-k}{۲}$ نباید جواب داشته باشد

$$۲x^۲=x-k\Rightarrow ۲x^۲-x+k=۰, \quad \Delta<۰\Rightarrow ۱-۸k<۰\Rightarrow k>\frac{۱}{۸}$$

۲۹۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x+۱)^۳-۱$. بنابراین تابع f یک‌به‌یک است. از طرف دیگر،

$$y=(x+۱)^۳-۱\Rightarrow (x+۱)^۳=y+۱\Rightarrow x+۱=\sqrt[۳]{y+۱}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y+۱}-۱$$

در نتیجه $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$.

۲۹۹- گزینهٔ ۱ توجـه کنیـد کـه $f^{-۱}(x)=\frac{x+a}{x-۲}$. بنابرایـن $f^{-۱}(۳)=\frac{۳+a}{۳-۲}=a+۳$. پس

$$(f^{-۱}of^{-۱})(۳)=\frac{۹}{۴}\Rightarrow f^{-۱}(f^{-۱}(۳))=\frac{۹}{۴}$$

$$f^{-۱}(a+۳)=\frac{۹}{۴}\Rightarrow \frac{(a+۳)+a}{a+۳-۲}=\frac{۹}{۴}$$

$$\frac{۲a+۳}{a+۱}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow ۸a+۱۲=۹a+۹\Rightarrow a=۳$$

۳۰۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_{f^{-۱}of}=D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$.

۳۰۱- گزینهٔ ۲ ابتدا به تابع‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ توجه کنید:

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,-۱),(-۲,۲),(۱,۴)\}$$

$$g^{-۱}=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۲),(۱,۱)\}$$

$$D_{f^{-۱}-g^{-۱}}=D_{f^{-۱}}\cap D_{g^{-۱}}=\{۲,۳,-۲,۱\}\cap\{۲,۳,۴,۱\}=\{۲,۳,۱\}$$

اکنون می‌توانیم تابع $f^{-۱}-g^{-۱}$ را به‌دست آوریم:

$$f^{-۱}-g^{-۱}=\{(۲,۱-۳),(۳,-۱-۴),(۱,۴-۱)\}$$
$$=\{(۲,-۲),(۳,-۵),(۱,۳)\}$$

مجموع عضوهای دامنه و برد تابع $f^{-۱}-g^{-۱}$ برابر است با

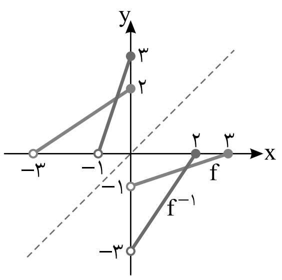
$$۲+(-۲)+۳+(-۵)+۱+۳=۲$$

۳۰۲- گزینهٔ ۴ توجـه کنیـد کـه $f(۹)=\sqrt[۳]{۹-۱}+۲=۲+۲=۴$. پـس $f^{-۱}(۴)=۹$ و در نتیجه $f(۹)+f^{-۱}(۴)=۱۳$.

۳۰۳- گزینهٔ ۴ چـون نمـودار تابـع f از نقطـهٔ $(۸,۱۳)$ عبـور می‌کند، نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۱۳,۸)$ می‌گذرد:

$$f(۸)=۲\times۸+\sqrt[۳]{۸}-۵=۱۳\Rightarrow f^{-۱}(۱۳)=۸$$

۳۰۴- گزینهٔ ۲ نمـودار تابع f را نسـبت بـه خـط $y=x$ قرینـه می‌کنیـم تـا نمودار تابع $f^{-۱}$ رسـم شود. بنابر شکل زیر، نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ در دو نقطه متقاطع‌اند.



۳۰۵- گزینهٔ ۳ چـون $(۱,۲)$ نقطـهٔ برخورد نمـودار تابع‌هـای f و $f^{-۱}$ است، پس $(۱,۲)\in f$ و $(۱,۲)\in f^{-۱}$، یعنی $(۲,۱)\in f$. بنابراین

$$\begin{cases} f(۱)=۲\Rightarrow a\sqrt{b-۳}=۲ \\ f(۲)=۱\Rightarrow a\sqrt{b-۶}=۱ \end{cases}\Rightarrow \sqrt{b-۳}=۲\sqrt{b-۶}\Rightarrow b-۳=۴b-۲۴\Rightarrow b=۷$$

پس $a=۱$ و در نتیجه $a+b=۸$.

۳۰۶- گزینهٔ ۳ در تساوی $f(۲x-۱)=g(۳x)-۱$ قرار می‌دهیم $x=۲$:

$$f(۳)=g(۶)-۱\Rightarrow g(۶)=f(۳)+۱$$

از طرف دیگر، $f^{-۱}(۲)=۳$ پس $f(۳)=۲$. در نتیجه $g(۶)=۲+۱=۳$.

۳۰۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $y=(\sqrt{x}+۱)^{۲}-۱$ می‌نویسیم. حالا x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y+۱=(\sqrt{x}+۱)^{۲}\Rightarrow\sqrt{y+۱}=\sqrt{x}+۱$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{y+۱}-۱\Rightarrow x=(\sqrt{y+۱}-۱)^{۲}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^{۲}=x+۱+۱-۲\sqrt{x+۱}=x+۲-۲\sqrt{x+۱}$.

راه‌حل دوم

$$f(۱)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۱$$

در بین گزینه‌های داده شده فقط اگر در عبارت داده شده در گزینهٔ (۲)، به جای x قرار دهیم ۳، حاصل ۱ می‌شود.

۳۰۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} x\ge ۱\Rightarrow f(x)=x+۲-x+۱-۲x=-۲x+۳ \\ -۲\le x\le ۱\Rightarrow f(x)=x+۲+x-۱-۲x=۱ \\ x\le -۲\Rightarrow f(x)=-x-۲+x-۱-۲x=-۲x-۳ \end{cases}$$

بنابراین تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}-[-۲,۱]$ وارون‌پذیر است. توجه کنید که تابع f روی $\mathbb{R}-[a,b]$ که در آن $a\le -۲$ و $b\ge ۱$ هم وارون‌پذیر است ولی برای اینکه $b-a$ کمترین مقدار باشد دامنه را $\mathbb{R}-[-۲,۱]$ در نظر می‌گیریم.

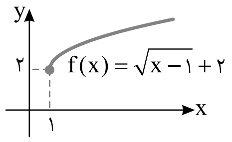
$$x>۱\Rightarrow y=-۲x+۳\Rightarrow x=\frac{۳-y}{۲}\Rightarrow\begin{cases} f^{-۱}(x)=\frac{۳-x}{۲} \\ \frac{۳-y}{۲}>۱\Rightarrow y<۱ \end{cases}$$

$$x<-۲\Rightarrow y=-۲x-۳\Rightarrow x=\frac{-y-۳}{۲}\Rightarrow\begin{cases} f^{-۱}(x)=\frac{-x-۳}{۲} \\ \frac{-y-۳}{۲}<-۲\Rightarrow y>۱ \end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \frac{۳-x}{۲} & x<۱ \\ \frac{-x-۳}{۲} & x>۱ \end{cases}$.

۳۰۹- گزینهٔ ۲ برای هر $x\in R_f$ تساوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار است. با توجه به نمودار تابع f، $R_f=[۲,+\infty)$. پس برای هر $x\ge ۲$، $g(x)=x+۳$. بنابراین

$$x\ge ۲\Rightarrow x+۳\ge ۵\Rightarrow g(x)\ge ۵\Rightarrow R_g=[۵,+\infty)$$



۳۱۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع وارون تابع‌های f و g را پیدا می‌کنیم که به‌صورت زیر هستند:

$$f^{-۱}(x)=(x-۱)^{۳}+۲,\quad g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}+۱$$

بنابراین

$$(f^{-۱}og^{-۱})(x)=f^{-۱}(g^{-۱}(x))=f^{-۱}(\sqrt[۳]{x}+۱)$$
$$=(\sqrt[۳]{x}+۱-۱)^{۳}+۲=x+۲$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=(gof)^{-۱}(x)$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(۱+\sqrt[۳]{x-۲})=(۱+\sqrt[۳]{x-۲}-۱)^{۳}=x-۲$$

و $(gof)^{-۱}(x)=x+۲$. بنابراین $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=x+۲$.

۳۱۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(fog^{-۱})(a)=a$.

بنابراین $f(g^{-۱}(a))=a$. چون $f(c)=a$، پس $g^{-۱}(a)=c$ و در نتیجه $g(c)=a$. به همین ترتیب

$$(fog^{-۱})(b)=c\Rightarrow f(g^{-۱}(b))=c\xrightarrow{f(b)=c}$$

$$g^{-۱}(b)=b\Rightarrow g(b)=b$$

$$(fog^{-۱})(c)=d\Rightarrow f(g^{-۱}(c))=d\xrightarrow{f(d)=d}$$

$$g^{-۱}(c)=d\Rightarrow g(d)=c$$

$$(fog^{-۱})(d)=b\Rightarrow f(g^{-۱}(d))=b\xrightarrow{f(a)=b}$$

$$g^{-۱}(d)=a\Rightarrow g(a)=d$$

پس $g=\{(a,d),(b,b),(c,a),(d,c)\}$.

۳۱۲- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۱)=a$، در این صورت

$$f(a)=۱\Rightarrow\sqrt{a+\sqrt{a+۲}+۲}=۱\Rightarrow a+\sqrt{a+۲}+۲=۱$$

$$\sqrt{a+۲}=-a-۱\quad(*)\Rightarrow a+۲=a^{۲}+۲a+۱$$

$$a^{۲}+a-۱=۰\Rightarrow a=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲},\ a=\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

از تساوی $(*)$ واضح است که $-a-۱\ge ۰$، پس $a\le -۱$. بنابراین $\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول نیست.

۳۱۳- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم طول نقطهٔ برخورد a باشد. در این صورت عرض آن $a+۱$ است. پس نقطهٔ $(a,a+۱)$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ است. در نتیجه نقطهٔ $(a+۱,a)$ روی نمودار تابع f است. پس

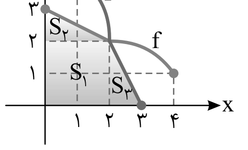
$$f(a+۱)=a\Rightarrow(a+۱)^{۳}+۲(a+۱)+۹=a$$

$$a^{۳}+۳a^{۲}+۴a+۱۲=۰\Rightarrow(a+۳)(a^{۲}+۴)=۰\Rightarrow a=-۳$$

پس عرض نقطهٔ برخورد $a+۱=-۲$ است.

۳۱۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f^{-۱}$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است که در شکل رسم شده است. بنابراین مساحت قسمت رنگی مورد نظر است که از دو مثلث و یک مربع تشکیل شده است:

$$S=S_{۱}+S_{۲}+S_{۳}\Rightarrow S=۲\times ۲+\frac{۱\times ۲}{۲}+\frac{۱\times ۲}{۲}=۶$$



۳۱۵- گزینهٔ ۲ اگر (m,n) نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ باشد، نتیجه می‌شود $f(m)=n$ و $f(n)=m$. بنابراین

$$f(-۱)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۱-a+b=\frac{۱}{۳},\quad f(\frac{۱}{۳})=-۱\Rightarrow -\frac{۱}{۲۷}+\frac{a}{۳}+b=-۱$$

در نتیجه

$$\begin{cases}-a+b=-\frac{۲}{۳}\\ a+۳b=-\frac{۲۶}{۹}\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{۲}{۹}\ ,\ b=-\frac{۸}{۹}$$

پس $a+b=-\frac{۱۰}{۹}$.

۳۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(g^{-۱}of)(-۱)=g^{-۱}(f(-۱))=g^{-۱}(۳)$$

اکنون فرض کنید $g^{-۱}(۳)=s$. در این صورت $g(s)=۳$ و اگر در تساوی $g(x)=۱-f(x+۱)$ قرار دهیم $x=s$، به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}g(s)=۱-f(s+۱)\\ g(s)=۳\end{cases}\Rightarrow f(s+۱)=-۲$$

بنابراین، چون تابع f یک‌به‌یک است، $s+۱=۴$، پس $s=۳$. یعنی

$$g^{-۱}(۳)=۳$$

۳۱۷- گزینهٔ ۳ از تساوی $y=\frac{۲x+a}{x+b}$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$yx+by=۲x+a\Rightarrow (y-۲)x=a-by\Rightarrow x=\frac{a-by}{y-۲}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{a-bx}{x-۲}$ و در نتیجه $a=-۴$، $b=-۳$ و $ab=۱۲$.

۳۱۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}۳x+(-(x-۱)) & x<۱\\ ۳x+(x-۱) & x\geq ۱\end{cases}=\begin{cases}۲x+۱ & x<۱\\ ۴x-۱ & x\geq ۱\end{cases}$$

فرض کنید برای $x<۱$، $g(x)=۲x+۱$ و برای $x\geq ۱$، $h(x)=۴x-۱$، بنابراین

$$x<۱\Rightarrow ۲x+۱<۳\Rightarrow g(x)<۳$$

$$g(x)=۲x+۱\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}$$

$$x\geq ۱\Rightarrow ۴x-۱\geq ۳\Rightarrow h(x)\geq ۳$$

$$h(x)=۴x-۱\Rightarrow h^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۴}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x-۱}{۲} & x<۳\\ \frac{x+۱}{۴} & x\geq ۳\end{cases}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۰)=۱$ و $f(۲)=۷$، پس $f^{-۱}(۱)=۰$ و $f^{-۱}(۷)=۲$. این شرایط فقط در تابع گزینهٔ (۱) وجود دارد.

۳۱۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون f و $f^{-۱}$ تابع‌هایی برابرند، پس دامنهٔ آن‌ها برابر است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(a+۱)x+۴}{۳x-۱}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۳x-(a+۱)}\Rightarrow D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}-\{\frac{a+۱}{۳}\}$$

بنابراین $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}=\mathbb{R}-\{\frac{a+۱}{۳}\}$. پس $\frac{a+۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$، در نتیجه $a=۰$.

توجه کنید که اگر $a=۰$، آن‌گاه $f(x)=f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۳x-۱}$.

راه‌حل دوم در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $f=f^{-۱}$، آن‌گاه $a=-d$. بنابراین در اینجا $a+۱=-(-۱)$، در نتیجه $a=۰$.

۳۲۰- گزینهٔ ۳ برای هر $x\in D_{f^{-۱}}=R_f$ تساوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار است. برد تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x-۱}\geq ۰\Rightarrow \sqrt{x-۱}+۲\geq ۲\Rightarrow f(x)\geq ۲\Rightarrow R_f=[۲,+\infty)$$

پس برای هر $x\geq ۲$، $g(x)=۲x$. بنابراین

$$x\geq ۲\Rightarrow ۲x\geq ۴\Rightarrow g(x)\geq ۴\Rightarrow R_g=[۴,+\infty)$$

۳۲۱- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج مرتب‌های $(۱,۰)$ و $(۱,۴m^۳-m)$ باید تساوی $۴m^۳-m=۰$ برقرار باشد. پس

$$m(۴m^۲-۱)=۰\Rightarrow m=۰,\ m=\pm\frac{۱}{۲}$$

به‌ازای $m=۰$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f=\{(۱,۰),(۰,۲),(۰,۴)\}$$

به‌ازای $m=\frac{۱}{۲}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f=\{(۱,۰),(۱,۲),(۰,۴),(۲,۲)\}$$

به‌ازای $m=-\frac{۱}{۲}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع است.

$$f=\{(۱,۰),(-۱,۲),(۰,۴),(-۲,۲)\}$$

پس فقط به‌ازای $m=-\frac{۱}{۲}$ رابطه تابع است.

۳۲۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر f تابع ثابت c باشد، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{(a+۲)x+۳}{۲x-۳}=c$$

بنابراین $(a+۲)x+۳=۲cx-۳c$. در نتیجه $a+۲=۲c$ و $-۳c=۳$. به این ترتیب $c=-۱$ و $a=۲c-۲=-۴$.

راه‌حل دوم f تابعی ثابت است، پس $f(۱)=f(۲)$. بنابراین

$$\frac{a+۲+۳}{۲-۳}=\frac{۲(a+۲)+۳}{۴-۳}\Rightarrow \frac{a+۵}{-۱}=۲a+۷\Rightarrow a=-۴$$

راه‌حل سوم مشتق تابع ثابت برابر صفر است. پس

$$f'(x)=\frac{(a+۲)(۲x-۳)-۲((a+۲)x+۳)}{(۲x-۳)^۲}=\frac{-۳(a+۲)-۶}{(۲x-۳)^۲}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰}-۳(a+۲)-۶=۰\Rightarrow a=-۴$$

۳۲۳- گزینهٔ ۱ اولاً توجه کنید که شرط $x\geq ۰$ برای دامنهٔ تابع وجود دارد. عددهای داده شده در گزینه‌ها بزرگ‌تر از صفر هستند. پس ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$x-۱-\sqrt{x}=۰\Rightarrow x-۱=\sqrt{x}\xrightarrow{(x-۱\geq ۰)}x^{۲}-۲x+۱=x$$

$$x^{۲}-۳x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\ ,\ \ x=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\ \ (\text{غ.ق.ق.})$$

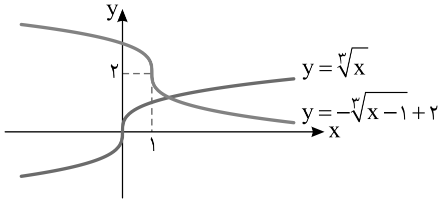
بنابراین دامنهٔ تابع $[۰,+\infty)-\{\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\}$ است.

۳۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=\{x|۱۶-|x^{۲}-۹|\geq ۰\}$، یعنی $D_f=\{x||x^{۲}-۹|\leq ۱۶\}$. در نتیجه

$$-۱۶\leq x^{۲}-۹\leq ۱۶\Rightarrow -۷\leq x^{۲}\leq ۲۵\Rightarrow ۰\leq x^{۲}\leq ۲۵\Rightarrow -۵\leq x\leq ۵$$

پس $D_f=[-۵,۵]$ و در نتیجه $a=-۵$، $b=۵$ و $b-a=۱۰$.

۳۲۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt[۳]{x-۱}-۲$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-\sqrt[۳]{x-۱}+۲$ به‌دست می‌آید. دو نمودار مطابق شکل زیر در یک نقطه متقاطع‌اند.



۳۲۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=\{x|x^{۲}-۴x\geq ۰\}$، یعنی $D_f=(-\infty,۰]\cup[۴,+\infty)$ و $D_g=\{-۱,۰,۱,۳,۴\}$. بنابراین

$$D_{۲g+f}=D_g\cap D_f=\{-۱,۰,۴\}$$

بنابراین a باید ۱− یا صفر یا ۴ باشد:

$$(۲g+f)(-۱)=۲g(-۱)+f(-۱)=۲\sqrt{۵}+\sqrt{۵}=۳\sqrt{۵}$$

$$(۲g+f)(۰)=۲g(۰)+f(۰)=۲+۰=۲$$

$$(۲g+f)(۴)=۲g(۴)+f(۴)=۶+۰=۶$$

بنابراین $a=۴$ و در نتیجه $f(-۴)=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$.

۳۲۷- گزینهٔ ۲ ابتدا $(fof)(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(fof)(x)=f(f(x))=a(ax^{۲}+b)^{۲}+b$$

$$=a(a^{۲}x^{۴}+۲abx^{۲}+b^{۲})+b$$

$$=a^{۳}x^{۴}+۲a^{۲}bx^{۲}+ab^{۲}+b$$

بنابراین تساوی زیر به‌ازای هر مقدار x برقرار است:

$$a^{۳}x^{۴}+۲a^{۲}bx^{۲}+ab^{۲}+b=۲۷x^{۴}-۱۸x^{۲}+۲$$

پس باید تساوی‌های زیر درست باشند:

$$a^{۳}=۲۷,\quad ۲a^{۲}b=-۱۸,\quad ab^{۲}+b=۲$$

از $a^{۳}=۲۷$ نتیجه می‌شود $a=۳$، در نتیجه از $۲a^{۲}b=-۱۸$، $۱۸b=-۱۸$ به‌دست می‌آید که یعنی $b=-۱$. مقادیر $a=۳$ و $b=-۱$ در تساوی $ab^{۲}+b=۲$ هم صدق می‌کنند. پس $a+b=۲$.

۳۲۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=۳x+|k||x|=\begin{cases}(۳+|k|)x & x\geq ۰\\ (۳-|k|)x & x<۰\end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید خطوط $y=(۳+|k|)x$ و $y=(۳-|k|)x$ شیب نامنفی داشته باشند. شیب خط $y=(۳+|k|)x$ همواره مثبت است، پس باید شیب خط $y=(۳-|k|)x$ همواره نامنفی باشد. یعنی

$$۳-|k|\geq ۰\Rightarrow |k|\leq ۳\Rightarrow -۳\leq k\leq ۳$$

۳۲۹- گزینهٔ ۳ اگر (m,n) نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ باشد، نتیجه می‌شود $f(m)=n$ و $f(n)=m$. بنابراین

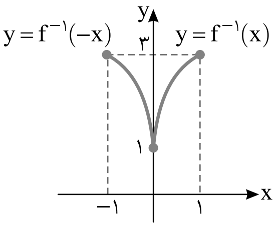
$$f(-۱)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow -a+\frac{۲}{۹}+b=\frac{۱}{۳},\quad f(\frac{۱}{۳})=-۱\Rightarrow \frac{a}{۲۷}-\frac{۲}{۲۷}+b=-۱$$

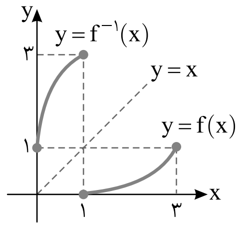
در نتیجه

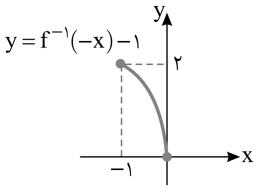
$$\begin{cases}-a+b=\frac{۱}{۹}\\ a+۲۷b=-۲۵\end{cases}\Rightarrow a=-۱,b=-\frac{۸}{۹}$$

پس $a+b=-\frac{۱۷}{۹}$.

۳۳۰- گزینهٔ ۴ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $f^{-۱}$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ نمودار تابع $f^{-۱}$ را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-۱}(-x)$ به‌دست بیاید. در آخر نمودار تابع $y=f^{-۱}(-x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-۱}(-x)-۱$ به‌دست بیاید.







۳۳۱- گزینهٔ ۲ اگر ضابطهٔ داده شده متعلق به یک تابع باشد، باید در $x=۲$ مقدار $f(x)$ منحصربه‌فرد باشد، یعنی مقدار $f(۲)$ در ضابطهٔ اول با مقدار آن در ضابطهٔ دوم برابر باشد. اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}+a$، آن‌گاه $f(۲)=۲+a$. اگر $f(x)=ax^{۳}+۱۶$، آن‌گاه $f(۲)=۸a+۱۶$. بنابراین

$$۲+a=۸a+۱۶\Rightarrow a=-۲$$

و در نتیجه $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۲}-۲ & x\geq ۲\\ -۲x^{۳}+۱۶ & x\leq ۲\end{cases}$. پس

$$f(a)=f(-۲)=-۲(-۲)^{۳}+۱۶=۳۲$$

۳۳۲- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=۲mx-mx^{۲}+x^{۲}+۴x+m=(۱-m)x^{۲}+(۲m+۴)x+m$$

ضابطهٔ توابع خطی به شکل $y=ax+b$ است، یعنی یک چندجمله‌ای درجهٔ اول است. بنابراین باید $m=۱$ تا ضابطهٔ تابع یک چندجمله‌ای درجهٔ اول شود، یعنی

$$m=۱\Rightarrow f(x)=۶x+۱$$

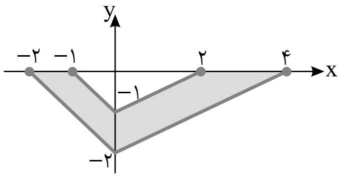
بنابراین $f(m)=f(۱)=۷$.

۳۳۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=[\frac{x+۱}{x}]+[-\frac{۱}{x}]=[۱+\frac{۱}{x}]+[-\frac{۱}{x}]=۱+[\frac{۱}{x}]+[-\frac{۱}{x}]$$

بنابراین $f(-x)=۱+[-\frac{۱}{x}]+[\frac{-۱}{-x}]=۱+[-\frac{۱}{x}]+[\frac{۱}{x}]=f(x)$.

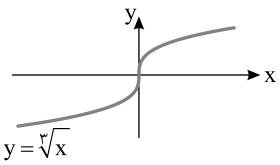
۳۳۴- گزینهٔ ۱ برای رسم نمودار تابع $y=۲f(\frac{x}{۲})$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به‌دست آید. همچنین در نمودار به‌دست آمده باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y=۲f(\frac{x}{۲})$ به‌دست آید. بنابراین مساحت قسمت رنگی در شکل زیر مورد سؤال است که برابر است با $\frac{۱}{۲}\times۶\times۲-\frac{۱}{۲}\times۳\times۱=\frac{۹}{۲}$.

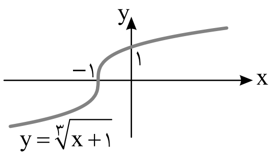


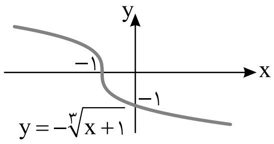
۳۳۵- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x+۱} & x>۰\\ -\sqrt[۳]{x+۱} & x<۰\end{cases}$$

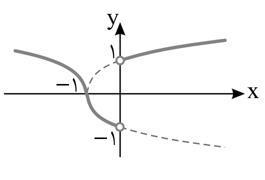
است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y=\sqrt[۳]{x+۱}$ و $y=-\sqrt[۳]{x+۱}$ به‌صورت زیر است:







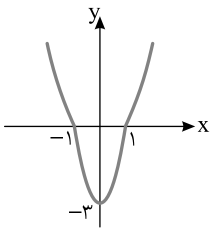
بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است:



۳۳۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$g(x)=-۲f(x)-|f(x)|=\begin{cases}-۲f(x)-f(x) & f(x)\geq۰\\ -۲f(x)-(-f(x)) & f(x)<۰\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-۳f(x) & f(x)\geq۰\\ -f(x) & f(x)<۰\end{cases}$$

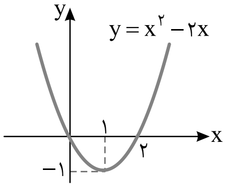


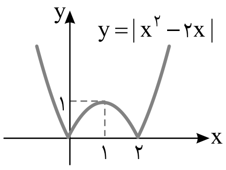
بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f نامنفی است، در بازهٔ $[-۱,۱]$، عرض نقاط روی نمودار f را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، در بقیهٔ جاها نمودار g قرینهٔ نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.

۳۳۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

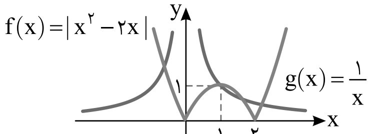
$$f(x)=|x||x-۲|=|x(x-۲)|=|x^{۲}-۲x|$$

بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y=x^{۲}-۲x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.





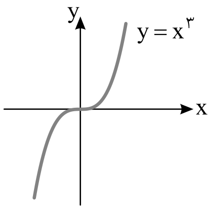
مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در چهار نقطه متقاطع‌اند.

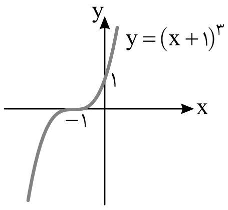


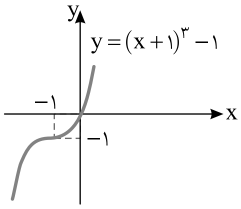
۳۳۸- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

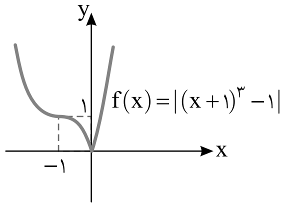
$$f(x)=|x^{۳}+۳x^{۲}+۳x|=|(x+۱)^{۳}-۱|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^{۳}$ را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم، سپس قرینهٔ قسمتی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.







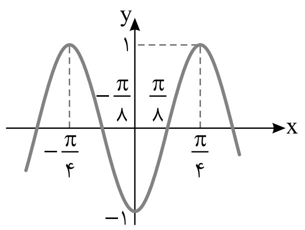


۳۳۹- گزینهٔ ۲ از تساوی $y=\sqrt[۳]{۲-۳x}$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y^۳=۲-۳x\Rightarrow x=\frac{۲-y^۳}{۳}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{-x^۳+۲}{۳}$ و در نتیجه $a=-۱$ ، $b=۲$ و $ab=-۲$.

۳۴۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(x)=-\cos ۴x$. اگر نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-\cos x$ به‌دست می‌آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را یک چهارم کنیم، نمودار تابع $y=-\cos ۴x$ به‌دست می‌آید با توجه به شکل، تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۴},۰]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{۴}$ است.

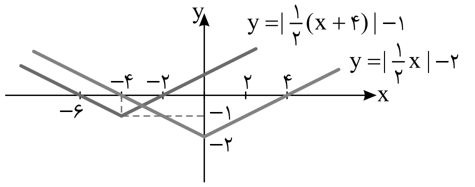


۳۴۱- گزینهٔ ۲ نمودار اولیه و نمودار انتقال یافته را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقطهٔ برخورد نمودارها جواب معادلهٔ زیر است:

$$|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۱=|\frac{۱}{۲}x|-۲ \qquad (۱)$$

توجه کنید که x منفی و x+۴ مثبت است. بنابراین معادلهٔ (۱) می‌شود

$$\frac{۱}{۲}(x+۴)-۱=-\frac{۱}{۲}x-۲\Rightarrow x=-۳$$



تجربی - ۹۳

۳۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(gof)(a)=g(f(a))=g(a+\sqrt{a})$$

از طرف دیگر $g(۶)=۵$ ، پس

$$a+\sqrt{a}=۶\Rightarrow a=۴$$

تجربی - ۹۱

۳۴۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{۲x-۱}{x+۱})=\frac{۲(\frac{۲x-۱}{x+۱})+۲}{۲-\frac{۲x-۱}{x+۱}}$$

$$=\frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}}=\frac{۶x}{۳}=۲x$$

تجربی - ۹۶

۳۴۴- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$g(f(x))=g(۲x+۳)=۸x^۲+۲۲x+۲۰$$

فرض می‌کنیم $۲x+۳=t$. در این صورت $x=\frac{t-۳}{۲}$ و

$$g(t)=۸(\frac{t-۳}{۲})^۲+۲۲(\frac{t-۳}{۲})+۲۰$$

$$=۲t^۲-۱۲t+۱۸+۱۱t-۳۳+۲۰=۲t^۲-t+۵$$

بنابراین $g(x)=۲x^۲-x+۵$ و

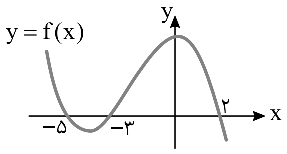
$$(fog)(x)=f(g(x))=۲g(x)+۳=۲(۲x^۲-x+۵)+۳=۴x^۲-۲x+۱۳$$

ریاضی - ۹۲

۳۴۵- گزینهٔ ۴ برای اینکه از نمودار $y=f(x-۲)$ به نمودار $y=f(x)$ برسیم، کافی است آن را مطابق شکل زیر دو واحد به چپ منتقل کنیم. برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ ، عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

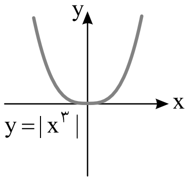
x	$-\infty$		-۵		-۳		۰		۲		$+\infty$
f(x)		+	۰	−	۰	+	|	+	۰	−	
x		−	|	−	|	−	۰	+	|	+	
xf(x)		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−	

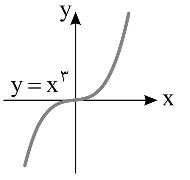
بنابراین $D_g=[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$.



خارج از کشور تجربی - ۹۴

۳۴۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** با توجه به نمودار تابع $y=|x^۳|$ معلوم می‌شود که این تابع یک‌به‌یک نیست، بنابراین وارون‌ناپذیر است.





راه‌حل دوم سه نقطهٔ $(۱,۱)$ ، $(-۱,۱)$ و $(۰,۰)$ روی نمودار این تابع هستند، پس این تابع صعودی، نزولی، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۳۴۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(f^{-۱}og)(a)=f^{-۱}(g(a))=۶$. بنابراین $g(a)=f(۶)=۱۲-۵=۷$. باتوجه به اینکه $g(۴)=۷$ نتیجه می‌شود

$$a=۴$$

ریاضی - ۹۳

۳۴۸- گزینهٔ ۳ اگر $x<۰$ ، آن‌گاه

$$y=-\sqrt{-x}\Rightarrow -x=y^۲\Rightarrow x=-y^۲\xrightarrow{y<۰}x=y|y|$$

و اگر $x\geq ۰$ ، آن‌گاه

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^۲\xrightarrow{y\geq ۰}x=y|y|$$

بنابراین در هر حالتی $x=y|y|$ و ضابطهٔ تابع وارون تابع f به‌صورت $f^{-۱}(x)=x|x|$ است.

تجربی - ۹۶

۳۴۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$y=\frac{x+4}{x-2}\Rightarrow xy-2y=x+4\Rightarrow x(y-1)=2y+4\Rightarrow x=\frac{2y+4}{y-1}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-1}$. اکنون با حل معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ نقطه‌های برخورد دو تابع را می‌یابیم:

$$\frac{x+4}{x-2}=\frac{2x+4}{x-1}\Rightarrow x^2+3x-4=2x^2-8$$

$$x^2-3x-4=0\Rightarrow(x+1)(x-4)=0\Rightarrow x=-1,x=4$$

راه‌حل دوم کافی است طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع f و خط $y=x$ را بیابیم:

$$\frac{x+4}{x-2}=x\Rightarrow x^2-2x=x+4\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=-1,x=4$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۵۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$ax+by=8\Rightarrow y=\frac{8-ax}{b},\quad 2x-3y=b\Rightarrow y=\frac{2x-b}{3}$$

چون خط‌های داده شده نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم قرینهٔ یکدیگر هستند، پس تابع‌های $y=\frac{8-ax}{b}$ و $y=\frac{2x-b}{3}$ وارون یکدیگرند. از طرف دیگر، وارون تابع $y=\frac{2x-b}{3}$ می‌شود $y=\frac{3x+b}{2}$. بنابراین $\frac{8}{b}=\frac{b}{2}$ و $\frac{-a}{b}=\frac{3}{2}$. در نتیجه $b^2=16$ ، یعنی $b=\pm4$. در نتیجه

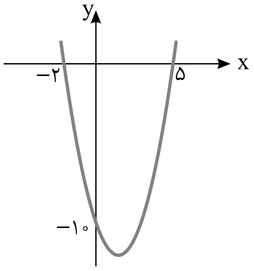
$$b=-4\Rightarrow\frac{-a}{-4}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=6\Rightarrow a+b=2$$

$$b=4\Rightarrow\frac{-a}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=-6\Rightarrow a+b=-2$$

بنابراین $a+b=\pm2$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۳۵۱- گزینهٔ ۳ طول نقاط تلاقی نمودار تابع مورد نظر با محور x جواب‌های معادلهٔ $x^2-3x-10=0$ هستند. جواب‌های این معادله $x=-2$ و $x=5$ هستند. بنابراین نمودار تابع مورد نظر به‌صورت مقابل است. از روی این شکل معلوم است که باید نمودار تابع را حداقل دو واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x غیرمنفی باشد.



خارج از کشور تجربی - ۹۳

۳۵۲- گزینهٔ ۳ ابتدا دقت کنید که

$$f(2x-3)=2x-3-[2x-3]=2x-3-[2x]+3=2x-[2x]$$

پس $g(x)=f(2x-3)-2f(x)=2x-[2x]-2x+2[x]=2[x]-[2x]$.

اکنون فرض می‌کنیم k عدد صحیح دلخواهی باشد. در این صورت اگر $k\le x<k+\frac{1}{2}$ ، آن‌گاه $[x]=k$ و

$$2k\le2x<2k+1\Rightarrow[2x]=2k$$

بنابراین $g(x)=2k-2k=0$. اگر $k+\frac{1}{2}\le x<k+1$ ، آن‌گاه $[x]=k$ و

$$2k+1\le2x<2k+2\Rightarrow[2x]=2k+1$$

بنابراین $g(x)=2k-2k-1=-1$. در نتیجه $R_g=\{-1,0\}$.

خارج از کشور ریاضی- ۹۲

۳۵۳- گزینهٔ ۲ ابتدا $(fog)(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+2)=(2x+4-3)^2=(2x+1)^2$$

اکنون معادلهٔ $(fog)(x)=f(x)$ را حل می‌کنیم:

$$(2x+1)^2=(2x-3)^2\Rightarrow4x^2+4x+1=4x^2-12x+9$$

$$16x=8\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

تجربی - ۹۲

۳۵۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{2x+3}{2-x})=\frac{1-3(\frac{2x+3}{2-x})}{\frac{2x+3}{2-x}+2}$$

$$=\frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}}=\frac{-7x-7}{7}=-x-1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۵۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_{gof}=\{x|x\in D_f,f(x)\in D_g\}$.

از طرف دیگر، $D_f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$ و $D_g=[0,1]$. در نتیجه

$$D_{gof}=\{x|x\neq\pm1\,,\ 0\le\frac{1+x^2}{1-x^2}\le1\}$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\le1\Rightarrow\frac{1+x^2}{1-x^2}-1=\frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2}\le0$$

$$\frac{2x^2}{1-x^2}\le0\Rightarrow x<-1\ \text{یا}\ x=0\ \text{یا}\ x>1$$

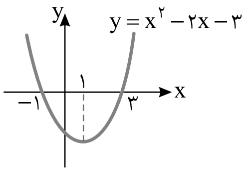
$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\ge0\Rightarrow1-x^2>0\Rightarrow-1<x<1$$

از اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده دامنهٔ تابع gof به‌دست می‌آید، بنابراین

$$D_{gof}=\{0\}$$

ریاضی - ۹۶

۳۵۶- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع از نامساوی $-2<x-1<2$ به‌دست می‌آید، پس $D_f=(-1,3)$. با توجه به نمودار تابع $y=x^2-2x-3$ ، در بازهٔ $(-1,3)$ مقدار تابع f همواره منفی است و این تابع نه صعودی است و نه نزولی.



ریاضی - ۹۱

۳۵۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از تساوی $(g^{-1}of^{-1})(a)=8$ نتیجه می‌شود

$$g^{-1}(f^{-1}(a))=8\Rightarrow g(8)=f^{-1}(a)$$

بنابراین

$$\sqrt{5\times8+9}=f^{-1}(a)\Rightarrow f^{-1}(a)=7$$

پس $a=f(7)$ ، یعنی $a=3$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $(g^{-۱}of^{-۱})(x)=(fog)^{-۱}(x)$. چون $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$، بنابراین $(fog)^{-۱}(a)=۸$. یعنی $(fog)(۸)=a$.

در نتیجه

$$f(g(۸))=a\Rightarrow f(۷)=a\Rightarrow a=۳$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۵۸- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=\begin{cases}۴x-۴ & x\leq ۲\\ ۴ & x>۲\end{cases}$ می‌نویسیم. تابع f در بازهٔ $(-\infty,۲]$ وارون‌پذیر است. فرض می‌کنیم $y=۴x-۴$، در این صورت $x=\frac{y+۴}{۴}$. از طرف دیگر،

$$x\leq ۲\Rightarrow ۴x-۴\leq ۴\Rightarrow y\leq ۴$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱\ ,\ x\leq ۴$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۵۹- گزینهٔ ۱ ابتدا برای $۰<x<۱$ ضابطهٔ تابع وارون تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^{۲}}=\frac{x}{x}\sqrt{۱-x^{۲}}=\sqrt{۱-x^{۲}}$$

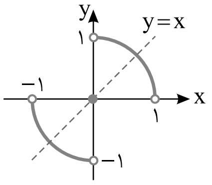
$$y^{۲}=۱-x^{۲}\Rightarrow x^{۲}=۱-y^{۲}\Rightarrow x=\sqrt{۱-y^{۲}}$$

$$f^{-۱}(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}=f(x)$$

به همین ترتیب برای $-۱<x<۰$:

$$y=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^{۲}}=\frac{-x}{x}\sqrt{۱-x^{۲}}=-\sqrt{۱-x^{۲}}\Rightarrow y^{۲}=۱-x^{۲}$$

$$x^{۲}=۱-y^{۲}\Rightarrow x=-\sqrt{۱-y^{۲}}\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{۱-x^{۲}}=f(x)$$



همچنین $f(۰)=۰$، در نتیجه $f^{-۱}(۰)=۰$. پس در هر صورت می‌توان نوشت $f^{-۱}(x)=f(x)$. توجه کنید که نمودار تابع به شکل مقابل است که از دو ربع دایره و یک نقطه تشکیل شده و نسبت به خط $y=x$ متقارن است، بنابراین وارون آن با خودش برابر است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۳۶۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(x+۱)^{۲}\Rightarrow x+۱=\sqrt{y}\Rightarrow x=\sqrt{y}-۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x}-۱$$

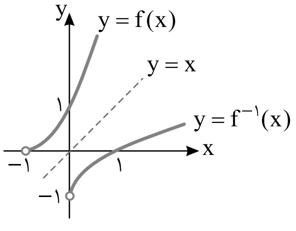
اکنون محل برخورد نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow (x+۱)^{۲}+۱=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{x\geq ۰}(x+۱)^{۴}+۲(x+۱)^{۲}+۱=x$$

$$(x+۱)^{۴}+۲x^{۲}+۳x+۳=۰$$

معادلهٔ بالا با توجه به اینکه مجموع چند مقدار نامنفی است، جواب ندارد.



راه‌حل دوم نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. با قرینه کردن نمودار نسبت به خط $y=x$، نمودار $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. واضح است که دو نمودار نقطهٔ برخوردی ندارند.

ریاضی - ۹۲

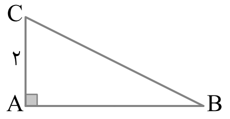
۳۶۱- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل زیر،

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}=\frac{۲}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BC=۶$$

اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس

$$BC^{۲}=AC^{۲}+AB^{۲}\Rightarrow ۶^{۲}=۲^{۲}+AB^{۲}\Rightarrow AB^{۲}=۳۲$$

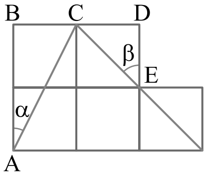
یعنی $AB=۴\sqrt{۲}$. بنابراین $\tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$.



۳۶۲- گزینهٔ ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل، $\sin\alpha=\frac{BC}{AC}$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $AC=\sqrt{۱^{۲}+۲^{۲}}=\sqrt{۵}$. بنابراین $\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$. همچنین $\cos\beta=\frac{DE}{CE}$.

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $CE=\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۲}$. بنابراین $\cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$. به این ترتیب

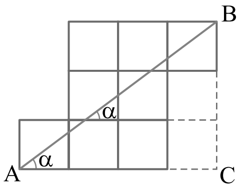
$$\sin\alpha-\cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۵}}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}}$$



۳۶۳- گزینهٔ ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=B\hat{A}C$، در نتیجه

$$\tan\alpha=\tan B\hat{A}C=\frac{BC}{AC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{۴}{۳}$$

پس $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۳}=\frac{۲۵}{۱۲}$.



۳۶۴- گزینهٔ ۱ مطابق شکل داده شده، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، چون $C\hat{A}B=۴۵^\circ$ پس این مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، $B\hat{A}D=۶۰^\circ$. پس

$$\tan ۶۰^\circ=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{x+y}{y}=\frac{x}{y}+۱\Rightarrow\frac{x}{y}=\sqrt{۳}-۱$$

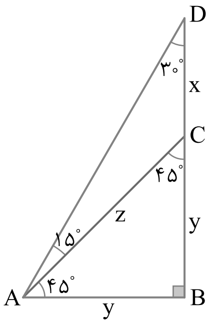
اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

$$AC^{۲}=AB^{۲}+BC^{۲}\Rightarrow z^{۲}=y^{۲}+y^{۲}$$

$$z=y\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$\frac{DC}{AC}=\frac{x}{\sqrt{۲}y}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$$



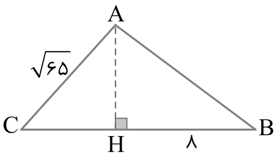
۳۶۵- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB، در مورد زاویهٔ B می‌دانیم

$$\tan\hat{B}=\frac{AH}{HB}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{AH}{۸}\Rightarrow AH=۶$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع CH را حساب کنیم:

$$AC^{۲}=CH^{۲}+AH^{۲}$$

$$۶۵=CH^{۲}+۳۶\Rightarrow CH=\sqrt{۲۹}$$



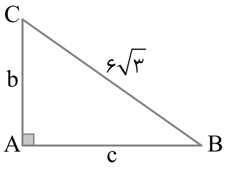
۳۶۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل $\cot\hat{B}=\frac{c}{b}=\sqrt{۲}$. بنابراین $c=b\sqrt{۲}$. از طرف دیگر طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$b^{۲}+c^{۲}=(۶\sqrt{۳})^{۲}\Rightarrow b^{۲}+(b\sqrt{۲})^{۲}=(۶\sqrt{۳})^{۲}$$

$$b^{۲}+۲b^{۲}=۳۶\times۳\Rightarrow b^{۲}=۳۶\Rightarrow b=۶$$

بنابراین $c=۶\sqrt{۲}$ و در نتیجه

$$S=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}\times۶\times۶\sqrt{۲}=۱۸\sqrt{۲}$$



۳۶۷- گزینهٔ ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC، $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$. همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH، $H\hat{O}C+\hat{C}=۹۰^\circ$. در نتیجه $\hat{B}=H\hat{O}C=\alpha$.
اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

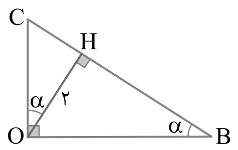
$$\sin\alpha=\sin\hat{B}=\frac{OH}{OB}=\frac{۲}{OB}\Rightarrow OB=\frac{۲}{\sin\alpha}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH،

$$\cos\alpha=\frac{OH}{OC}=\frac{۲}{OC}\Rightarrow OC=\frac{۲}{\cos\alpha}$$

بنابراین

$$OB+OC=\frac{۲}{\sin\alpha}+\frac{۲}{\cos\alpha}$$



۳۶۸- گزینهٔ ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، $\sin\alpha=\frac{y}{۴}$. بنابراین باید مقدار y را به‌دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH ، $x^۲+y^۲=۹$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ،

$$y^۲+(۶-x)^۲=۱۶\Rightarrow y^۲+x^۲-۱۲x+۳۶=۱۶$$

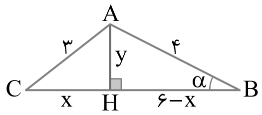
با جای‌گذاری $x^۲+y^۲=۹$ به‌دست می‌آید

$$۹-۱۲x+۳۶=۱۶\Rightarrow ۱۲x=۲۹\Rightarrow x=\frac{۲۹}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{x^۲+y^۲=۹}(\frac{۲۹}{۱۲})^۲+y^۲=۹\Rightarrow y^۲=\frac{۴۵۵}{۱۴۴}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۱۲}$$

و در نتیجه

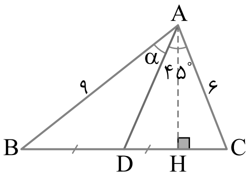
$$\sin\alpha=\frac{\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۱۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۴۸}$$



۳۶۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که چون مثلث‌های ABD و ACD در ارتفاع وارد از رأس A مشترک‌اند، پس $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BD}{\frac{۱}{۲}AH\times CD}=\frac{BD}{CD}=۱$. بنابراین

$$S_{ABD}=S_{ACD}\Rightarrow\frac{۱}{۲}AB\times AD\times\sin\alpha=\frac{۱}{۲}AC\times AD\times\sin ۴۵^\circ$$

$$AB\times\sin\alpha=AC\times\sin ۴۵^\circ\Rightarrow ۹\times\sin\alpha=۶\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

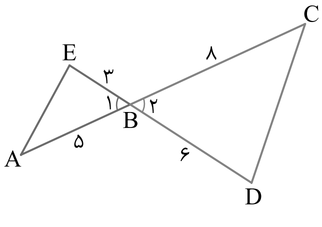


۳۷۰- گزینهٔ ۱ دقت کنید که در شکل زیر $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$. از طرف دیگر،

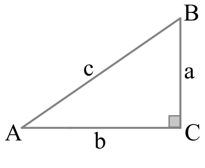
$$S_{ABE}=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۵\times\sin\hat{B}_۱\ ,\quad S_{BCD}=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۸\times\sin\hat{B}_۲$$

بنابراین

$$\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}=\frac{۵}{۱۶}$$



۳۷۱- گزینهٔ ۲ مطابق شکل،



$$\sin\hat{B}=\frac{b}{c}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow c=\frac{۵}{۴}b$$

از طرف دیگر $b+c=۷$. بنابراین

$$b+\frac{۵}{۴}b=۷\Rightarrow\frac{۹b}{۴}=۷\Rightarrow b=\frac{۲۸}{۹}, c=\frac{۵}{۴}\times\frac{۲۸}{۹}=\frac{۳۵}{۹}$$

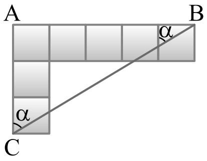
اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$c^۲=a^۲+b^۲\Rightarrow(\frac{۳۵}{۹})^۲=a^۲+(\frac{۲۸}{۹})^۲$$

$$a^۲=\frac{۳۵^۲-۲۸^۲}{۹^۲}=\frac{(۳۵-۲۸)(۳۵+۲۸)}{۹^۲}=\frac{۷\times ۶۳}{۹^۲}=\frac{۷\times ۷}{۹}=\frac{۴۹}{۹}\Rightarrow a=\frac{۷}{۳}$$

۳۷۲- گزینهٔ ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=A\hat{C}B$. در نتیجه

$$\tan\alpha=\tan A\hat{C}B=\frac{AB}{AC}=\frac{۵}{۳}$$



۳۷۳- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ،

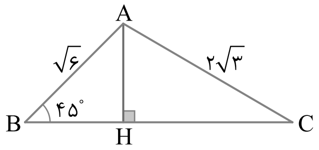
$$\sin\hat{B}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\sin ۴۵^\circ=\frac{AH}{\sqrt{۶}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{AH}{\sqrt{۶}}\Rightarrow AH=\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر چون $\tan\hat{B}=\tan ۴۵^\circ=\frac{AH}{BH}$ ، پس $\frac{\sqrt{۳}}{BH}=۱$ ، بنابراین $BH=\sqrt{۳}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC ، طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$AH^۲+HC^۲=AC^۲\Rightarrow(\sqrt{۳})^۲+HC^۲=(۲\sqrt{۳})^۲$$

$$HC^۲=۹\Rightarrow HC=۳$$

بنابراین $\frac{HC}{BH}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$.

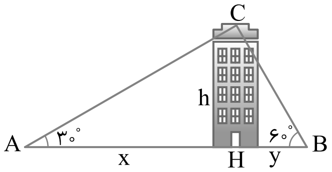


۳۷۴- گزینهٔ ۲ ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ACH و BCH ،

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{h}{x}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow x=\sqrt{۳}h\ ,\quad\tan ۶۰^\circ=\frac{h}{y}=\sqrt{۳}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}h$$

بنابراین $x+y=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}h$. از طرف دیگر $x+y=۲۴$ ، بنابراین

$$۲۴=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}h\Rightarrow h=۶\sqrt{۳}$$

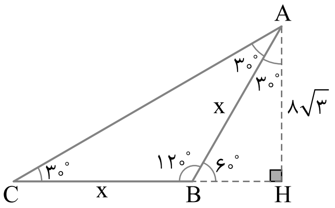


۳۷۵- گزینهٔ ۲ ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ،

$$\tan ۶۰^\circ=\frac{AH}{BH}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{۸\sqrt{۳}}{BH}\Rightarrow BH=۸$$

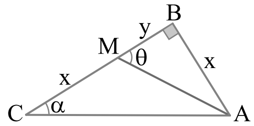
از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ،

$$\sin A\hat{B}H=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\sin ۶۰^\circ=\frac{۸\sqrt{۳}}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۸\sqrt{۳}}{x}\Rightarrow x=۱۶$$



۳۷۶- گزینهٔ ۱ فرض کنید $CM=AB=x$ و $MB=y$. طبق فرض $\tan\theta=۳\tan\alpha$، بنابراین $\frac{x}{y}=\frac{۳x}{x+y}$. پس $x+y=۳y$، در نتیجه $x=۲y$. از این‌رو $\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$ و $\tan\theta=۲$. بنابراین $\cot\alpha=\frac{۳}{۲}$ و $\cot\theta=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه

$$\cot\alpha+\cot\theta=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲$$



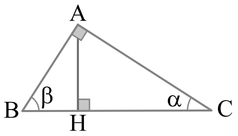
۳۷۷- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول در مثلث‌های قائم الزاویهٔ ABH و ACH،

$$\begin{cases}\cos\beta=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=\cos\beta\times AB\\ \cos\alpha=\frac{CH}{AC}\Rightarrow CH=\cos\alpha\times AC\end{cases}\Rightarrow\frac{BH}{HC}=\frac{AB\cos\beta}{AC\cos\alpha}$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویهٔ ABC،

$$\cos\beta=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{۴},\quad \cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{۴}$$

بنابراین $\frac{BH}{HC}=(\frac{AB}{AC})^{۲}=\tan^{۲}\alpha$.



راه‌حل دوم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$\sin\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{۴}\Rightarrow AB=۴\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{۴}\Rightarrow AC=۴\cos\alpha$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC،

$$\cos\alpha=\frac{HC}{AC}\Rightarrow HC=AC\cos\alpha=۴\cos^{۲}\alpha$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

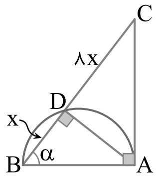
$$\cos\beta=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=AB\cos\beta=۴\sin\alpha\cos\beta$$

چون α و β متمم هستند، پس $\cos\beta=\sin\alpha$ و در نتیجه $BH=۴\sin^{۲}\alpha$. بنابراین $\frac{BH}{HC}=\frac{۴\sin^{۲}\alpha}{۴\cos^{۲}\alpha}=\tan^{۲}\alpha$.

۳۷۸- گزینهٔ ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، $\cos\alpha=\frac{BD}{AB}=\frac{x}{AB}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\cos\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{x+۸x}=\frac{AB}{۹x}$. بنابراین

$$\frac{x}{AB}=\frac{AB}{۹x}\Rightarrow AB^{۲}=۹x^{۲}\Rightarrow AB=۳x$$

در نتیجه $\cos\alpha=\frac{x}{AB}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$.



۳۷۹- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin۴۵^{\circ}=\frac{۱}{۲}\times۸\times BC\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}BC \qquad (۱)$$

همین‌طور،

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin۳۰^{\circ}=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}AB\times BC \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

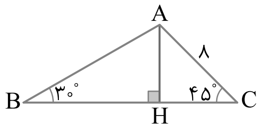
$$۲\sqrt{۲}BC=\frac{۱}{۴}AB\times BC\Rightarrow AB=۸\sqrt{۲}$$

راه‌حل دوم ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر در مثلث AHC،

$$\sin\hat{C}=\sin۴۵^{\circ}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{AH}{۸}\Rightarrow AH=۴\sqrt{۲}$$

در مثلث ABH،

$$\sin\hat{B}=\sin۳۰^{\circ}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۴\sqrt{۲}}{AB}\Rightarrow AB=۸\sqrt{۲}$$



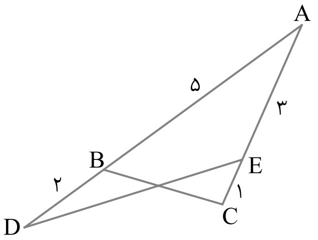
۳۸۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$S_{ADE}=\frac{۱}{۲}AD\times AE\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times۷\times۳\times\sin\hat{A}=\frac{۲۱}{۲}\sin\hat{A}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times۵\times۴\times\sin\hat{A}=۱۰\sin\hat{A}$$

بنابراین $S_{ADE}+S_{ABC}=(\frac{۲۱}{۲}+۱۰)\sin\hat{A}=\frac{۴۱}{۲}\sin\hat{A}$. پس

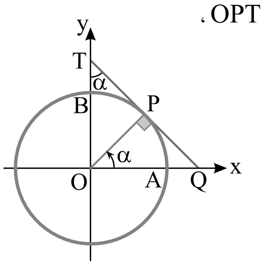
$$\frac{۴۱}{۲}\sin\hat{A}=\frac{۴۱}{۴}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{α حاده است.}}\hat{A}=۳۰^{\circ}$$



۳۸۱- گزینهٔ ۴ انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۲۳۰° در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin۲۳۰^{\circ}$ و $\cos۲۳۰^{\circ}$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۳۱۰° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin۳۱۰^{\circ}$ عددی منفی و $\cos۳۱۰^{\circ}$ عددی مثبت است.

۳۸۲- گزینهٔ ۳ با توجه به تساوی $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$، معلوم است که $\cos\alpha\leq۰$. با توجه به تساوی $|\sin\alpha|=-\sin\alpha$، معلوم است که $\sin\alpha\leq۰$. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع سوم مثلثاتی است.

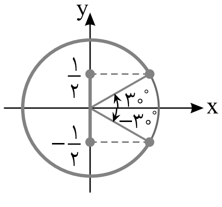
۳۸۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ POQ و OTQ در زاویهٔ حادهٔ رأس Q مشترک‌اند، پس زاویهٔ حادهٔ دیگر آن‌ها نیز برابر است، یعنی $O\hat{T}Q=P\hat{O}Q=\alpha$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPT ،



$$\sin\alpha=\frac{OP}{OT}=\frac{۱}{OB+BT}=\frac{۱}{۱+BT}$$

$$۱+BT=\frac{۱}{\sin\alpha}\Rightarrow BT=\frac{۱}{\sin\alpha}-۱$$

۳۸۴- گزینهٔ ۴ از $-۱۵^\circ\le\alpha\le۱۵^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-۳۰^\circ\le۲\alpha\le۳۰^\circ$. با توجه به شکل مقابل $-\frac{۱}{۲}\le\sin ۲\alpha\le\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $-\frac{۱}{۲}\le\frac{m}{۴}\le\frac{۱}{۲}$ ، یعنی $-۲\le m\le ۲$. بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ±۲، ±۱ و صفر باشد.



۳۸۵- گزینهٔ ۱ می‌دانیم حداکثر مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\beta$ برابر ۱ است. بنابراین از تساوی $۲\sin\alpha+۵\cos\beta=۷$ نتیجه می‌شود $\sin\alpha=۱$ و $\cos\beta=۱$. بنابراین $۳\sin\alpha-۴\cos\beta=۳-۴=-۱$.

۳۸۶- گزینهٔ ۳ از $۰^\circ\le\alpha\le۱۸۰^\circ$ نتیجه می‌شود $۰\le\sin\alpha\le۱$. بنابراین

$$۰\le۲\sin\alpha\le۲\Rightarrow۱\le۲\sin\alpha+۱\le۳$$

$$\frac{۱}{۳}\le\frac{۲\sin\alpha+۱}{۳}\le۱\Rightarrow۱\le\frac{۳}{۲\sin\alpha+۱}\le۳$$

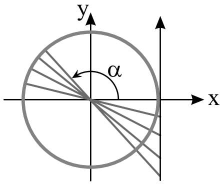
پس حداکثر مقدار عبارت برابر ۳ است.

۳۸۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید زاویهٔ بین این دو ضلع α باشد. چون $\sin\alpha\le۱$ ، پس

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\times\sqrt{۶}\sin\alpha=\sqrt{۳}\sin\alpha\le\sqrt{۳}$$

اگر زاویهٔ بین این دو ضلع ۹۰° باشد، مساحت مثلث برابر $\sqrt{۳}$ می‌شود. بنابراین بیشترین مقدار ممکن مساحت مثلث مورد نظر برابر $\sqrt{۳}$ است.

۳۸۸- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر $۹۰^\circ<\alpha\le۱۸۰^\circ$ ، آن‌گاه $\tan\alpha\le۰$. بنابراین



$$۲m+۱\le۰\Rightarrow m\le-\frac{۱}{۲}$$

۳۸۹- گزینهٔ ۳ چون خط از نقطهٔ $(۰,۲)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کنند:

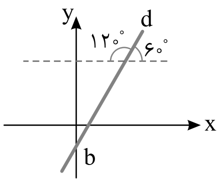
$$۳\times۰-a\times۲+۲\sqrt{۳}=۰\Rightarrow a=\sqrt{۳}$$

بنابراین معادلهٔ خط به‌صورت $۳x-\sqrt{۳}y+۲\sqrt{۳}=۰$ یا همان $y=\sqrt{۳}x+۲$ است که شیب آن $\sqrt{۳}$ است. پس $\tan\alpha=\sqrt{۳}$. بنابراین

$$\alpha=۶۰^\circ\Rightarrow\sin\alpha=\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۹۰- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل رسم شده شیب خط برابر $\tan۶۰^\circ$ است و عرض از مبدأ آن برابر b است. از طرف دیگر در خط به معادلهٔ $y=ax-۲a+\sqrt{۳}$ شیب خط برابر a و عرض از مبدأ آن برابر $-۲a+\sqrt{۳}$ است. بنابراین

$$a=\tan۶۰^\circ=\sqrt{۳}\ ,\quad b=-۲a+\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}+\sqrt{۳}=-\sqrt{۳}$$



۳۹۱- گزینهٔ ۱ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های ۷۰°، ۱۷۰°، ۱۹۰° و ۲۶۰° به‌ترتیب در ناحیه‌های اول، دوم، سوم و سوم مثلثاتی است. پس $\tan۱۷۰^\circ$ عددی منفی است و $\tan۱۹۰^\circ$ ، $\cot۷۰^\circ$ و $\cot۲۶۰^\circ$ اعدادی مثبت هستند.

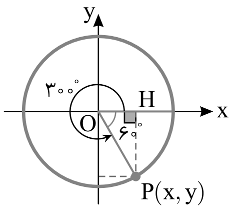
۳۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در مثلث OPH،

$$\sin۶۰^\circ=\frac{PH}{OP}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{PH}{۱}\Rightarrow PH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos۶۰^\circ=\frac{OH}{OP}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{OH}{۱}\Rightarrow OH=\frac{۱}{۲}$$

از طرف دیگر $x=OH$ و $y=-PH$. بنابراین

$$x=\frac{۱}{۲}\ ,\ y=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{y}{x-۱}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}-۱}=\sqrt{۳}$$

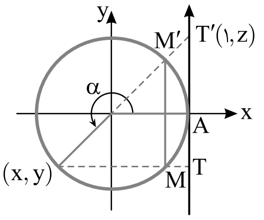


۳۹۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر واضح است که $\sin\alpha=y$ و $\tan\alpha=z$. بنابراین طول پاره‌خط TT' برابر است با

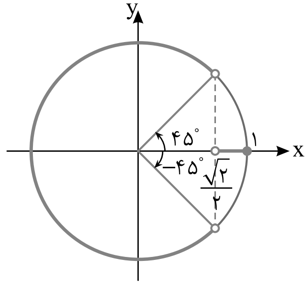
$$TT'=AT+AT'=|y|+|z|=-y+z=-\sin\alpha+\tan\alpha$$

از طرف دیگر، $MM'=۲|y|=-۲y=-۲\sin\alpha$. بنابراین

$$TT'-MM'=\tan\alpha-\sin\alpha-(-۲\sin\alpha)=\tan\alpha+\sin\alpha$$



۳۹۴- گزینهٔ ۳ وقتی $-۹۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ$ ، $-۴۵^\circ<\frac{\alpha}{۲}<۴۵^\circ$ و مطابق شکل زیر، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\cos\frac{\alpha}{۲}\le۱$. در نتیجه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\frac{m}{۴}\le۱$ ، یعنی $۲\sqrt{۲}<m\le۴$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۳ یا ۴ باشد که مجموع آن‌ها برابر ۷ است.



۳۹۵- گزینهٔ ۳ به جای $\cos^{۲} x$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^{۲} x$. پس عبارت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A=۴(۱-\sin^{۲} x)-۲\sin x=-۴\sin^{۲} x-۲\sin x+۴$$

$$=-(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۱۷}{۴}$$

اکنون دو راه‌حل ارائه می‌کنیم.

راه‌حل اول چون $-۱\le\sin x\le ۱$، پس

$$-۲\le ۲\sin x\le ۲\Rightarrow -\frac{۳}{۲}\le ۲\sin x+\frac{۱}{۲}\le\frac{۵}{۲}$$

$$۰\le(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^{۲}\le\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow -\frac{۲۵}{۴}\le-(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^{۲}\le ۰$$

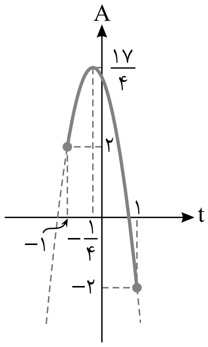
$$-۲\le\frac{۱۷}{۴}-(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^{۲}\le\frac{۱۷}{۴}\Rightarrow -۲\le A\le\frac{۱۷}{۴}$$

پس اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر $\frac{۱۷}{۴}-(-۲)=\frac{۲۵}{۴}$ است.

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم $t=\sin x$، آن‌گاه

$$A=-(۲t+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۱۷}{۴},\quad -۱\le t\le ۱$$

نمودار A برحسب t به‌صورت زیر است. واضح است که $-۲\le A\le\frac{۱۷}{۴}$.



۳۹۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{۳\cos\alpha+۱}{\cos\alpha+۳}=\frac{۳\cos\alpha+۹}{\cos\alpha+۳}-\frac{۸}{\cos\alpha+۳}=۳-\frac{۸}{\cos\alpha+۳}$$

از $-۱\le\cos\alpha\le ۱$ نتیجه می‌شود

$$۲\le\cos\alpha+۳\le ۴\Rightarrow\frac{۱}{۴}\le\frac{۱}{\cos\alpha+۳}\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۴\le\frac{-۸}{\cos\alpha+۳}\le -۲$$

$$-۱\le ۳-\frac{۸}{\cos\alpha+۳}\le ۱\Rightarrow -۱\le A\le ۱$$

بنابراین A نمی‌تواند برابر $\frac{۹}{۸}$ شود.

راه‌حل دوم اگر قرار دهیم $A=\frac{۹}{۸}$، آن‌گاه

$$\frac{۳\cos\alpha+۱}{\cos\alpha+۳}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow ۲۴\cos\alpha+۸=۹\cos\alpha+۲۷$$

$$۱۵\cos\alpha=۱۹\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۱۹}{۱۵}$$

چون مقدار $\cos\alpha$ نمی‌تواند برابر $\frac{۱۹}{۱۵}$ باشد، پس مقدار A هم نمی‌تواند برابر $\frac{۹}{۸}$ باشد.

۳۹۷- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر $۰^\circ<\alpha<۴۵^\circ$ آن‌گاه $\sin\alpha<\cos\alpha$ و اگر $۴۵^\circ<\alpha<۹۰^\circ$، آن‌گاه $\sin\alpha>\cos\alpha$. بنابراین $\sin ۲۰^\circ<\cos ۲۰^\circ$ و $\sin ۷۰^\circ>\cos ۷۰^\circ$. در نتیجه

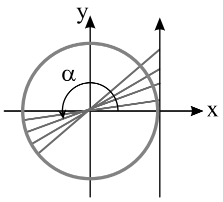
$$A=|\underbrace{\sin ۲۰^\circ-\cos ۲۰^\circ}_{-}|-|\underbrace{\sin ۷۰^\circ-\cos ۷۰^\circ}_{+}|$$

$$=-\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ-(\sin ۷۰^\circ-\cos ۷۰^\circ)$$

$$=-\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ-\sin ۷۰^\circ+\cos ۷۰^\circ$$

چون زاویه‌های ۲۰° و ۷۰° متمم یکدیگرند، پس $\sin ۲۰^\circ=\cos ۷۰^\circ$ و $\cos ۲۰^\circ=\sin ۷۰^\circ$ و در نتیجه $A=۰$.

۳۹۸- گزینهٔ ۳ از $۱۸۰^\circ\le\alpha<۲۷۰^\circ$ نتیجه می‌شود $\tan\alpha\ge ۰$ و در نتیجه $m^{۳}+m^{۲}\ge ۰$، یعنی $m^{۲}(m+۱)\ge ۰$. چون $m^{۲}\ge ۰$ همواره درست است، پس کافی است $m+۱\ge ۰$ که در نتیجه $m\ge -۱$.



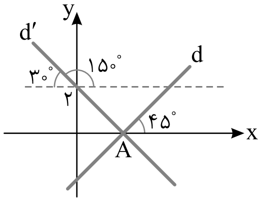
۳۹۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که شیب خط d' برابر $\tan ۱۵۰^\circ$ و عرض از مبدأ آن برابر ۲ است. پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}x+۲$ است. بنابراین طول نقطهٔ A که محل برخورد خط d' با محور x است، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۰=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}x_A+۲\Rightarrow x_A=۲\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر شیب خط d برابر $\tan ۴۵^\circ$ است و این خط از نقطهٔ A می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت $y=x+b$ است و اگر مختصات نقطهٔ A را در معادلهٔ این خط قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$۰=۲\sqrt{۳}+b\Rightarrow b=-۲\sqrt{۳}$$

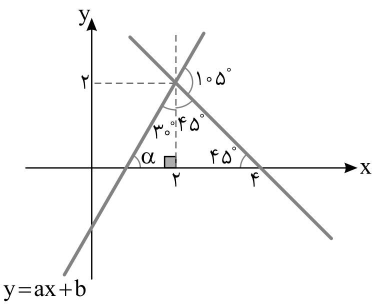
پس معادلهٔ خط d به‌صورت $y=x-۲\sqrt{۳}$ است.



۴۰۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر، واضح است که $\alpha=۶۰^\circ$ و در نتیجه $a=\tan\alpha=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$، یعنی معادلهٔ خط $y=\sqrt{۳}x+b$ است و چون نقطهٔ $(۲,۲)$ روی خط قرار دارد، پس

$$۲=\sqrt{۳}\times ۲+b\Rightarrow b=۲-۲\sqrt{۳}$$

بنابراین $a+b=\sqrt{۳}+۲-۲\sqrt{۳}=۲-\sqrt{۳}$.



۴۰۱- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ مقدار $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\frac{۱}{۵}}=۵\Rightarrow\tan^۲\alpha=۴\Rightarrow\tan\alpha=\pm۲$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم است، پس $\tan\alpha<۰$، در نتیجه $\tan\alpha=-۲$. بنابراین $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-\frac{۱}{۲}$، پس

$$\tan\alpha-\cot\alpha=-۲+\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

۴۰۲- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲m}(m+۳)=۱\Rightarrow m+۳=۲m\Rightarrow m=۳$$

بنابراین $\cot\alpha=۶$ و به کمک اتحاد $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$ مقدار $\sin^۲\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+۶^۲=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow\sin^۲\alpha=\frac{۱}{۳۷}$$

۴۰۳- گزینهٔ ۴ مخرج مشترک می‌گیریم و عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱+\sin۱۰^\circ}+\frac{۱}{۱-\sin۱۰^\circ}=\frac{۱-\sin۱۰^\circ+۱+\sin۱۰^\circ}{(۱+\sin۱۰^\circ)(۱-\sin۱۰^\circ)}$$

$$=\frac{۲}{۱-\sin^۲۱۰^\circ}=\frac{۲}{\cos^۲۱۰^\circ}$$

۴۰۴- گزینهٔ ۳ در صورت کسر از $\sin۱۵^\circ$ و در مخرج کسر از $\cos۱۵^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{\sin۱۵^\circ(۱-\sin^۲۱۵^\circ)}{\cos۱۵^\circ(۱-\cos^۲۱۵^\circ)}=\frac{\sin۱۵^\circ\times\cos^۲۱۵^\circ}{\cos۱۵^\circ\times\sin^۲۱۵^\circ}=\frac{\cos۱۵^\circ}{\sin۱۵^\circ}=\cot۱۵^\circ$$

۴۰۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** در تساوی $۳\sin^۲x=۱+۴\cos^۲x$ به جای $\sin^۲x$ قرار می‌دهیم $۱-\cos^۲x$ و مقدار $\cos^۲x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۳(۱-\cos^۲x)=۱+۴\cos^۲x\Rightarrow۳-۳\cos^۲x=۱+۴\cos^۲x$$

$$۷\cos^۲x=۲\Rightarrow\cos^۲x=\frac{۲}{۷}$$

اکنون به کمک اتحاد $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$ مقدار $\tan^۲x$ را حساب می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\frac{۲}{۷}}\Rightarrow\tan^۲x=\frac{۵}{۲}$$

راه‌حل دوم ابتدا دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $\cos^۲x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۳\sin^۲x=۱+۴\cos^۲x\Rightarrow۳\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}+۴$$

چون $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$، پس

$$۳\tan^۲x=۱+\tan^۲x+۴\Rightarrow۲\tan^۲x=۵\Rightarrow\tan^۲x=\frac{۵}{۲}$$

۴۰۶- گزینهٔ ۴ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}=\frac{\sin\alpha(۱+\frac{۱}{\cos\alpha})}{\cos\alpha(۱+\frac{۱}{\sin\alpha})}$$

$$=\tan\alpha(\frac{\frac{۱+\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{۱+\sin\alpha}{\sin\alpha}})=\tan^۲\alpha(\frac{۱+\cos\alpha}{۱+\sin\alpha})$$

واضح است که عبارت‌های $۱+\cos\alpha$، $۱+\sin\alpha$ و $\tan^۲\alpha$ همگی همواره نامنفی هستند. پس در هر چهار ناحیه، عبارت فوق نامنفی است.

۴۰۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin^۲\alpha-\cos\alpha(۱-\cos\alpha)}{(۱-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha-\cos\alpha+\cos^۲\alpha}{(۱-\cos\alpha)\sin\alpha}$$

$$=\frac{۱-\cos\alpha}{(۱-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{۱}{\sin\alpha}$$

۴۰۸- گزینهٔ ۲ عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A=\cot^۲x+\underbrace{\cot^۲x\tan^۲x}_{۱}+\tan^۲x+\underbrace{\tan^۲x\cot^۲x}_{۱}$$

$$=\tan^۲x+\cot^۲x+۲=(\tan x+\cot x)^۲$$

بنابراین $\sqrt{A}=\sqrt{(\tan x+\cot x)^۲}=|\tan x+\cot x|$. چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\tan x<۰$ و $\cot x<۰$. در نتیجه $\tan x+\cot x<۰$. بنابراین

$$\sqrt{A}=-\tan x-\cot x$$

۴۰۹- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$۱-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۳}{۸}$$

بنابراین

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲(\sin\alpha\cos\alpha)^۲=۱-۲(\frac{۳}{۸})^۲=\frac{۲۳}{۳۲}$$

۴۱۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$

پس

$$\frac{۲}{۳}=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha\Rightarrow\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۶}$$

$$(\sin\alpha\cos\alpha)^۲=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع دوم است، پس $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha<۰$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha<۰$. پس $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{-\sqrt{۶}}{۶}$.

۴۱۱- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ مقدار $\sin x$ را حساب می‌کنیم:

$$۱+(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow\sin^۲ x=\frac{۹}{۱۳}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

چـون انتهـای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ سـوم اسـت، پس $\sin x<۰$، بنابراین $\sin x=-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$. اکنون با استفاده از اتحاد $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ مقدار $\cos x$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۲}{۳}=\frac{\cos x}{-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}}\Rightarrow\cos x=-\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

بنابراین $۲\cos x-\sin x=-\frac{۴}{\sqrt{۱۳}}-(-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}})=-\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$.

۴۱۲- گزینهٔ ۱ از اتحاد $\sin^۲ \alpha+\cos^۲ \alpha=۱$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sqrt{k-۱})^۲+(\sqrt{۲k-۳})^۲=۱\Rightarrow k-۱+۲k-۳=۱\Rightarrow ۳k=۵\Rightarrow k=\frac{۵}{۳}$$

بنابراین $\sin\alpha=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$، $\cos\alpha=\sqrt{\frac{۱}{۳}}$ و در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{\frac{۲}{۳}}}{\sqrt{\frac{۱}{۳}}}=\sqrt{۲}$$

۴۱۳- گزینهٔ ۴

$$\frac{(۱+\tan ۲۰^\circ)(۱-\cot ۲۰^\circ)}{(۱+\cot ۲۰^\circ)(۱-\tan ۲۰^\circ)}=\frac{۱-\cot ۲۰^\circ+\tan ۲۰^\circ-\tan ۲۰^\circ\cot ۲۰^\circ}{۱-\tan ۲۰^\circ+\cot ۲۰^\circ-\tan ۲۰\cot ۲۰^\circ}$$

$$=\frac{۱-\cot ۲۰^\circ+\tan ۲۰^\circ-۱}{۱-\tan ۲۰^\circ+\cot ۲۰^\circ-۱}=\frac{\tan ۲۰^\circ-\cot ۲۰^\circ}{\cot ۲۰^\circ-\tan ۲۰^\circ}=-۱$$

۴۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\cot x=\frac{۱}{\tan x}$. بنابراین

$$\frac{۱+\cot^۲ x}{\cot x}=\frac{۱+\frac{۱}{\tan^۲ x}}{\frac{۱}{\tan x}}=\frac{\tan^۲ x+۱}{\tan x}$$

در نتیجه $\frac{\tan x}{۱+\tan^۲ x}\times\frac{۱+\cot^۲ x}{\cot x}=\frac{\tan x}{۱+\tan^۲ x}\times\frac{\tan^۲ x+۱}{\tan x}=۱$.

۴۱۵- گزینهٔ ۱ تسـاوی داده شـده را بـه‌صـورت $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sin\alpha$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\cos\alpha=\sin^۲ \alpha \quad (*)$$

بـا اسـتفاده از اتحـاد $\sin^۲ \alpha=۱-\cos^۲ \alpha$ تسـاوی داده شـده به‌صـورت $\cos\alpha=۱-\cos^۲ \alpha$ درمی‌آید. پس

$$\cos^۲ \alpha+\cos\alpha-۱=۰\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

از تساوی $(*)$ مشخص است که $\cos\alpha$ عددی مثبت است، پس

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

۴۱۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر دو طرف تسـاوی فرض مسئله را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۹}=(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$. اکنون توجه کنید که

$$\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $\frac{۹}{۴}$ است.

۴۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^۲+(\sin x+\cos x)^۲=۲(\sin^۲ x+\cos^۲ x)=۲$$

در نتیجه $(\frac{۳}{۴})^۲+(\sin x+\cos x)^۲=۲$. بنابراین $(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۲۳}{۱۶}$.

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x>۰$ و $\sin x>۰$. بنابراین

$$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۲۳}}{۴}$$

۴۱۸- گزینهٔ ۳ دوطرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x+\cot x)^۲=(\sqrt{۵})^۲\Rightarrow\tan^۲ x+\cot^۲ x+۲\underbrace{\tan x\cot x}_{۱}=۵$$

$$\tan^۲ x+\cot^۲ x+۲=۵$$

پس $\tan^۲ x+\cot^۲ x=۳$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan^۲ x+\cot^۲ x)^۲=۳^۲\Rightarrow\tan^۴ x+\cot^۴ x+۲\underbrace{\tan^۲ x\cot^۲ x}_{۱}=۹$$

$$\tan^۴ x+\cot^۴ x+۲=۹$$

پس $\tan^۴ x+\cot^۴ x=۷$.

۴۱۹- گزینهٔ ۳ عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\cos\alpha-\sqrt{\tan^۲ \alpha(۱-\cos^۲ \alpha)}$$

$$=\cos\alpha-\sqrt{\tan^۲ \alpha\sin^۲ \alpha}=\cos\alpha-|\tan\alpha\sin\alpha|$$

چـون $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$، پـس $\sin\alpha<۰$ و $\tan\alpha>۰$، در نتیجـه $\sin\alpha\tan\alpha<۰$. بنابراین

$$A=\cos\alpha+\tan\alpha\sin\alpha=\cos\alpha+\frac{\sin^۲ \alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos^۲ \alpha+\sin^۲ \alpha}{\cos\alpha}=\frac{۱}{\cos\alpha}$$

۴۲۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt{۱+۲\sqrt{\cos^۲ \alpha-\cos^۴ \alpha}}=\sqrt{۱+۲\sqrt{\cos^۲ \alpha(۱-\cos^۲ \alpha)}}$$

$$=\sqrt{۱+۲\sqrt{\cos^۲ \alpha\sin^۲ \alpha}}=\sqrt{۱+۲|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چـون $۳۱۵^\circ<\alpha<۳۶۰^\circ$، پـس $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$. بنابرایـن $\sin\alpha\cos\alpha<۰$، پس

$$A=\sqrt{۱-۲\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^۲ \alpha+\cos^۲ \alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲}=|\sin\alpha-\cos\alpha|$$

چون $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$، پس $\sin\alpha-\cos\alpha<۰$ و در نتیجه

$$A=-\sin\alpha+\cos\alpha$$

۴۲۱- گزینهٔ ۳ از تساوی $\frac{۵\sin x}{۲\sin x+\cos x}=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود $۱۰\sin x=۲\sin x+\cos x$. بنابراین $۸\sin x=\cos x$ و در نتیجه $\frac{\cos x}{\sin x}=۸$، پس $\cot x=۸$.

۴۲۲- گزینهٔ ۱ از اتحاد $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ نتیجه می‌شود

$$۱+(\sqrt{\frac{m+۲}{۲m+۵}})^۲=\frac{۱}{(\sqrt{\frac{m+۲}{۳m+۷}})^۲}$$

$$۱+\frac{m+۲}{۲m+۵}=\frac{۳m+۷}{m+۲}\Rightarrow\frac{۲m+۵+m+۲}{۲m+۵}=\frac{۳m+۷}{m+۲}$$

$$\frac{۳m+۷}{۲m+۵}=\frac{۳m+۷}{m+۲}\Rightarrow ۲m+۵=m+۲\Rightarrow m=-۳$$

(توجه کنید که $۳m+۷$ نمی‌تواند صفر باشد). بنابراین

$$\tan x=\sqrt{\frac{-۳+۲}{۲(-۳)+۵}}=۱$$

۴۲۳- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ و مخرج مشترک‌گیری به‌دست می‌آید

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}=\frac{۱}{\sin\alpha}$$

۴۲۴- گزینهٔ ۴ چون $\sin^۲ ۱۵^\circ+\cos^۲ ۱۵^\circ=۱$، می‌توان نوشت

$$\frac{\sin^۲ ۱۵^\circ}{۱+\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos^۲ ۱۵^\circ}{۱+\sin ۱۵^\circ}+\cos ۱۵^\circ=\frac{۱-\cos^۲ ۱۵^\circ}{۱+\cos ۱۵^\circ}-\frac{۱-\sin^۲ ۱۵^\circ}{۱+\sin ۱۵^\circ}+\cos ۱۵^\circ$$

$$=\frac{(۱-\cos ۱۵^\circ)(۱+\cos ۱۵^\circ)}{۱+\cos ۱۵^\circ}-\frac{(۱-\sin ۱۵^\circ)(۱+\sin ۱۵^\circ)}{۱+\sin ۱۵^\circ}+\cos ۱۵^\circ$$

$$=۱-\cos ۱۵^\circ-(۱-\sin ۱۵^\circ)+\cos ۱۵^\circ=\sin ۱۵^\circ$$

۴۲۵- گزینهٔ ۲ صورت و مخرج کسر A را بر $\cos^۳ x$ تقسیم می‌کنیم و از اتحادهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{\sin^۳ x}{\cos^۳ x}-\frac{۲\cos x}{\cos^۳ x}}{\frac{۴\sin x}{\cos^۳ x}-\frac{\cos^۳ x}{\cos^۳ x}}=\frac{\tan^۳ x-\frac{۲}{\cos^۲ x}}{\frac{۴\tan x}{\cos^۲ x}-۱}$$

$$=\frac{\tan^۳ x-۲(۱+\tan^۲ x)}{۴\tan x(۱+\tan^۲ x)-۱}=\frac{۳^۳-۲(۱+۳^۲)}{۴\times۳(۱+۳^۲)-۱}=\frac{۷}{۱۱۹}=\frac{۱}{۱۷}$$

۴۲۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x=(\sin x-\cos x)(\sin^۲ x+\sin x\cos x+\cos^۲ x)$$

$$=(\sin x-\cos x)(۱+\sin x\cos x)$$

بنابراین باید حاصل $\sin x\cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۵}{۱۸}$. در این صورت حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $\sin^۳ x-\cos^۳ x=(\frac{۲}{۳})(۱+\frac{۵}{۱۸})=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۳}{۱۸}=\frac{۲۳}{۲۷}$.

راه‌حل دوم طرفین تساوی $\sin x-\cos x=\frac{۲}{۳}$ را به توان سه می‌رسانیم

$$(\sin x-\cos x)^۳=(\frac{۲}{۳})^۳$$

$$\sin^۳ x-۳\sin^۲ x\cos x+۳\sin x\cos^۲ x-\cos^۳ x=\frac{۸}{۲۷}$$

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x-۳\sin x\cos x(\sin x-\cos)=\frac{۸}{۲۷}$$

بنابراین باید حاصل $\sin x\cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۵}{۱۸}$، در نتیجه

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x-۳\times\frac{۵}{۱۸}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۲۷}\Rightarrow\sin^۳ x-\cos^۳ x=\frac{۲۳}{۲۷}$$

۴۲۷- گزینهٔ ۴ از اتحاد $a^۳-b^۳=(a-b)^۳+۳ab(a-b)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^۳ x-\cot^۳ x=(\tan x-\cot x)^۳$$
$$+۳\tan x\cot x(\tan x-\cot x)$$

چون $\tan x\cot x=۱$ و $\tan x-\cot x=۳$، پس

$$\tan^۳ x-\cot^۳ x=۳^۳+۳\times۱\times۳=۳۶$$

۴۲۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\tan\alpha$، آن‌گاه $\cot\alpha=\frac{۱}{t}$ و معادلهٔ داده شده به‌صورت $t-\frac{۲}{t}=\sqrt{۲}$ درمی‌آید. دو طرف این معادله را در t ضرب کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$t^۲-۲=\sqrt{۲}t\Rightarrow t^۲-\sqrt{۲}t-۲=۰\Rightarrow t=\frac{\sqrt{۲}\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ربع اول است، پس $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۱۰}}{۲}<۰$ قابل قبول نیست، در نتیجه $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}}{۲}$.

بنابراین $\tan\alpha=\sqrt{۲}(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})$، در نتیجه

$$\tan^۲\alpha=\frac{(۱+\sqrt{۵})^۲}{۲}=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۲}=۳+\sqrt{۵}$$

۴۲۹- گزینهٔ ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر دوم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$۱-۲\sin^۲ x=\sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin^۲ x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$$

$$\cos^۲ x(۱-\tan^۲ x)=\cos^۲ x(۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x})=\cos^۲ x-\sin^۲ x$$

در نتیجه دومین کسر برابر با ۱ است. بنابراین حاصل عبارت برابر است با

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+۱=\frac{۲\sin x}{\sin x-\cos x}$$

با تقسیم صورت و مخرج این کسر بر $\cos x$ معلوم می‌شود که کسر برابر است با $\frac{۲\tan x}{\tan x-۱}$.

۴۳۰- گزینهٔ ۳ به جای $\cos^{۲} x$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^{۲} x$. عبارت به شکل زیر است:

$$A=۱-\sin^{۲} x-۲\sin x=۱-(\sin^{۲} x+۲\sin x+۱-۱)$$

$$=۱-(\sin x+۱)^{۲}+۱=۲-(\sin x+۱)^{۲}$$

چون $-۱\le \sin x\le ۱$، پس

$$۰\le \sin x+۱\le ۲\Rightarrow ۰\le (\sin x+۱)^{۲}\le ۴\Rightarrow -۴\le -(\sin x+۱)^{۲}\le ۰$$

$$-۲\le ۲-(\sin x+۱)^{۲}\le ۲\Rightarrow -۲\le A\le ۲$$

بنابراین اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر ۴ واحد است.

۴۳۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از تساوی $\tan x=\frac{۱}{۳}$ نتیجه می‌شود $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۳}$، یعنی $\cos x=۳\sin x$. در عبارت A به جای $\cos x$ قرار می‌دهیم $۳\sin x$. در این صورت $A=\frac{۲\sin x+۳\sin x}{\sin x+۹\sin x}=\frac{۵\sin x}{۱۰\sin x}=\frac{۱}{۲}$.

راه‌حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم تا A برحسب $\tan x$ نوشته شود:

$$A=\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{۳\cos x}{\cos x}}=\frac{۲\tan x+۱}{\tan x+۳}$$

اکنون با قرار دادن $\frac{۱}{۳}$ به جای $\tan x$ در عبارت فوق، مقدار A به‌دست می‌آید $A=\frac{\frac{۲}{۳}+۱}{\frac{۱}{۳}+۳}=\frac{۱}{۲}$.

۴۳۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که $\tan ۱۵^{\circ}=\frac{\sin ۱۵^{\circ}}{\cos ۱۵^{\circ}}$ و $\cot ۱۵^{\circ}=\frac{\cos ۱۵^{\circ}}{\sin ۱۵^{\circ}}$. بنابراین

$$A=\frac{\cot^{۲} ۱۵^{\circ}-\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}{\tan^{۲} ۱۵^{\circ}-\sin^{۲} ۱۵^{\circ}}=\frac{\frac{\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}{\sin^{۲} ۱۵^{\circ}}-\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}{\frac{\sin^{۲} ۱۵^{\circ}}{\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}-\sin^{۲} ۱۵^{\circ}}$$

$$=\frac{\frac{\cos^{۲} ۱۵^{\circ}-\cos^{۲} ۱۵^{\circ}\sin^{۲} ۱۵^{\circ}}{\sin^{۲} ۱۵^{\circ}}}{\frac{\sin^{۲} ۱۵^{\circ}-\sin^{۲} ۱۵^{\circ}\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}{\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}}=\frac{\frac{\cos^{۲} ۱۵^{\circ}(۱-\sin^{۲} ۱۵^{\circ})}{\sin^{۲} ۱۵^{\circ}}}{\frac{\sin^{۲} ۱۵^{\circ}(۱-\cos^{۲} ۱۵^{\circ})}{\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}}$$

$$=\frac{\frac{\cos^{۴} ۱۵^{\circ}}{\sin^{۲} ۱۵^{\circ}}}{\frac{\sin^{۴} ۱۵^{\circ}}{\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}}=\frac{\cos^{۶} ۱۵^{\circ}}{\sin^{۶} ۱۵^{\circ}}=\cot^{۶} ۱۵^{\circ}$$

راه‌حل دوم کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{\cot^{۲} ۱۵^{\circ}-\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}{\tan^{۲} ۱۵^{\circ}-\sin^{۲} ۱۵^{\circ}}=\frac{\cot^{۲} ۱۵^{\circ}(۱-\sin^{۲} ۱۵^{\circ})}{\tan^{۲} ۱۵^{\circ}(۱-\cos^{۲} ۱۵^{\circ})}$$

$$=\frac{\cot^{۲} ۱۵^{\circ}\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}{\frac{۱}{\cot^{۲} ۱۵^{\circ}}(\sin^{۲} ۱۵^{\circ})}=\cot^{۴} ۱۵^{\circ}(\frac{\cos^{۲} ۱۵^{\circ}}{\sin^{۲} ۱۵^{\circ}})$$

$$=\cot^{۴} ۱۵^{\circ}\cot^{۲} ۱۵^{\circ}=\cot^{۶} ۱۵^{\circ}$$

۴۳۳- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$(\frac{۱}{\cos ۲۰^{\circ}}+\tan ۲۰^{\circ})(۱-\sin ۲۰^{\circ})=(\frac{۱}{\cos ۲۰^{\circ}}+\frac{\sin ۲۰^{\circ}}{\cos ۲۰^{\circ}})(۱-\sin ۲۰^{\circ})$$

$$=\frac{۱}{\cos ۲۰^{\circ}}(۱+\sin ۲۰^{\circ})(۱-\sin ۲۰^{\circ})=\frac{۱}{\cos ۲۰^{\circ}}(۱-\sin^{۲} ۲۰^{\circ})$$

$$=\frac{۱}{\cos ۲۰^{\circ}}(\cos^{۲} ۲۰^{\circ})=\cos ۲۰^{\circ}$$

۴۳۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید

$$B=\sqrt{۱+\cos ۳۶^{\circ}}+\sqrt{۱-\cos ۳۶^{\circ}}$$

در نتیجه

$$B^{۲}=۱+\cos ۳۶^{\circ}+۱-\cos ۳۶^{\circ}+۲\sqrt{(۱-\cos ۳۶^{\circ})(۱+\cos ۳۶^{\circ})}$$

$$=۲+۲\sqrt{۱-\cos^{۲} ۳۶^{\circ}}=۲+۲\sqrt{\sin^{۲} ۳۶^{\circ}}=۲+۲\sin ۳۶^{\circ}$$

چون $B>۰$، پس $B=\sqrt{۲(۱+\sin ۳۶^{\circ})}$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با $\sqrt{۲}$ است.

راه‌حل دوم می‌دانیم (درس ششم این فصل را ببینید)

$$۱+\cos ۲x=۲\cos^{۲} x,\quad ۱-\cos ۲x=۲\sin^{۲} x$$

$$\sin ۲x=۲\sin x\cos x$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{۱+\cos ۳۶^{\circ}}+\sqrt{۱-\cos ۳۶^{\circ}}}{\sqrt{۱+\sin ۳۶^{\circ}}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲\cos^{۲} ۱۸^{\circ}}+\sqrt{۲\sin^{۲} ۱۸^{\circ}}}{\sqrt{\sin^{۲} ۱۸^{\circ}+\cos^{۲} ۱۸^{\circ}+۲\sin ۱۸^{\circ}\cos ۱۸^{\circ}}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}(\cos ۱۸^{\circ}+\sin ۱۸^{\circ})}{\sqrt{(\sin ۱۸^{\circ}+\cos ۱۸^{\circ})^{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}(\cos ۱۸^{\circ}+\sin ۱۸^{\circ})}{\sin ۱۸^{\circ}+\cos ۱۸^{\circ}}=\sqrt{۲}$$

۴۳۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۳(۱-\cos^{۲}\alpha)-۵\cos\alpha+۵=۰\Rightarrow ۳\cos^{۲}\alpha+۵\cos\alpha-۸=۰$$

اگر فرض کنیم $t=\cos\alpha$، می‌توانیم معادله را به شکل $۳t^{۲}+۵t-۸=۰$ بنویسیم که چون مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $t=۱$ و دیگری $t=\frac{-۸}{۳}$ است. چون $\cos\alpha=-\frac{۸}{۳}$ قابل قبول نیست، پس $\cos\alpha=۱$ و در نتیجه $\cos^{۶}\alpha=۱$.

راه‌حل دوم $\alpha=۰$ در معادله صدق می‌کند، پس کافی است مقدار $\cos^{۶}\alpha$ را به ازای $\alpha=۰$ حساب کنیم، که برابر ۱ می‌شود.

۴۳۶- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x+\cot x)^{۲}=(\sqrt{۵})^{۲}\Rightarrow \tan^{۲} x+\cot^{۲} x+۲\underbrace{\tan x\cot x}_{۱}=۵$$

$$\tan^{۲} x+\cot^{۲} x+۲=۵$$

پس $\tan^{۲} x+\cot^{۲} x=۳$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان سه می‌رسانیم:

$$(\tan^{۲} x+\cot^{۲} x)^{۳}=۳^{۳}$$

$$\tan^{۶} x+۳\tan^{۴} x\cot^{۲} x+۳\tan^{۲} x\cot^{۴} x+\cot^{۶} x=۲۷$$

$$\tan^{۶} x+\cot^{۶} x+۳\tan^{۲} x\cot^{۲} x(\tan^{۲} x+\cot^{۲} x)=۲۷$$

با توجه به اینکه $\tan^{۲} x\cot^{۲} x=۱$ و $\tan^{۲} x+\cot^{۲} x=۳$ نتیجه می‌شود

$$\tan^{۶} x+\cot^{۶} x+۹=۲۷\Rightarrow \tan^{۶} x+\cot^{۶} x=۱۸$$

۴۳۷- گزینهٔ ۲ دو طرف تساوی داده شده را بر $\cos^{۲} x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}+\frac{۳\cos^{۲} x}{\cos^{۲} x}-\frac{۲\sin x\cos x}{\cos^{۲} x}=\frac{۲}{\cos^{۲} x}$$

با توجه به اتحادهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $۱+\tan^{۲} x=\frac{۱}{\cos^{۲} x}$، تساوی قبلی را طوری می‌نویسیم که در آن فقط $\tan x$ وجود داشته باشد:

$$\tan^{۲} x+۳-۲\tan x=۲(۱+\tan^{۲} x)\Rightarrow \tan^{۲} x+۲\tan x-۱=۰$$

بنابراین $\tan x=-۱\pm\sqrt{۲}$.

۴۳۸- گزینهٔ ۲ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^{۲}\alpha(۱-\sin^{۲}\alpha)}}=\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha}}$$

$$=\sqrt{۱-۲\sqrt{(\sin\alpha\cos\alpha)^{۲}}}=\sqrt{۱-۲|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چون $\alpha=۲۰۰^{\circ}$، پس $\sin\alpha<۰$، $\cos\alpha<۰$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha>۰$.
بنابراین عبارت A به شکل زیر درمی‌آید:

$$A=\sqrt{۱-۲\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^{۲}}=|\sin\alpha-\cos\alpha|=|\sin ۲۰۰^{\circ}-\cos ۲۰۰^{\circ}|$$

توجه کنید که $\sin ۲۰۰^{\circ}-\cos ۲۰۰^{\circ}>۰$. بنابراین $A=\sin ۲۰۰^{\circ}-\cos ۲۰۰^{\circ}$.

۴۳۹- گزینهٔ ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

صورت کسر

$$\sin^{۳} ۴۰^{\circ}-\cos^{۳} ۴۰^{\circ}$$

$$=(\sin ۴۰^{\circ}-\cos ۴۰^{\circ})(\sin^{۲} ۴۰^{\circ}+\sin ۴۰^{\circ}\cos ۴۰^{\circ}+\cos^{۲} ۴۰^{\circ})$$

$$=(\sin ۴۰^{\circ}-\cos ۴۰^{\circ})(۱+\sin ۴۰^{\circ}\cos ۴۰^{\circ})$$

مخرج کسر

$$\cos ۴۰^{\circ}+\cos^{۲} ۴۰^{\circ}\sin ۴۰^{\circ}=\cos ۴۰^{\circ}(۱+\cos ۴۰^{\circ}\sin ۴۰^{\circ})$$

بنابراین حاصل کسر برابر است با

$$\frac{\sin ۴۰^{\circ}-\cos ۴۰^{\circ}}{\cos ۴۰^{\circ}}=\frac{\sin ۴۰^{\circ}}{\cos ۴۰^{\circ}}-۱=\tan ۴۰^{\circ}-۱$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر $\tan ۴۰^{\circ}$ است.

۴۴۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{\tan^{۳} x-\cot^{۳} x}{\tan x-\cot x}$$

$$=\frac{(\tan x-\cot x)(\tan^{۲} x+\tan x\cot x+\cot^{۲} x)}{\tan x-\cot x}$$

$$=\tan^{۲} x+۱+\cot^{۲} x=۷$$

بنابراین $\tan^{۲} x+\cot^{۲} x=۶$. در نتیجه

$$\frac{۱}{\sin^{۲} x}+\frac{۱}{\cos^{۲} x}=۱+\cot^{۲} x+۱+\tan^{۲} x$$

$$=۲+\tan^{۲} x+\cot^{۲} x=۲+۶=۸$$

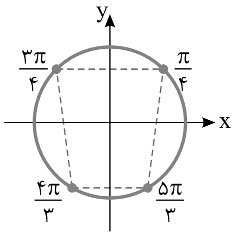
۴۴۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که ۳۶° برابر با $\frac{۳۶^{\circ}}{۱۸۰^{\circ}}\pi=\frac{\pi}{۵}$ رادیان است. بنابراین اندازهٔ زاویهٔ سوم مثلث برابر است با $\pi-(\frac{\pi}{۵}+\frac{۳\pi}{۱۰})=\frac{\pi}{۲}$ که این زاویه از بقیه بزرگ‌تر است.

۴۴۲- گزینهٔ ۴ اگر اندازهٔ زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه $D\times R=\frac{۵\pi}{۴}$، بنابراین $R=\frac{۵\pi}{۴D}$.
از طرف دیگر، $\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰^{\circ}}$. بنابراین

$$\frac{D}{۱۸۰^{\circ}}=\frac{\frac{۵\pi}{۴D}}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰^{\circ}}=\frac{۵}{۴D}\Rightarrow D^{۲}=\frac{۹۰۰^{\circ}}{۴}\Rightarrow D=۱۵^{\circ}$$

بنابراین اندازهٔ این زاویه برابر ۱۵° است.

۴۴۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل زیر، چهارضلعی حاصل ذوزنقه است.



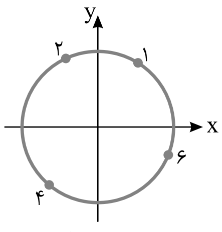
۴۴۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر به زاویه‌ای مضرب‌های زوج π را اضافه یا از آن کم کنیم، زاویهٔ جدید، با زاویهٔ اولیه هم‌انتها است. اکنون توجه کنید که

$$-۵۶۰^{\circ}+۴\pi=-۵۶۰^{\circ}+۷۲۰^{\circ}=۱۶۰^{\circ}$$

از طرف دیگر، چون اختلاف -۵۶۰° با هیچ‌یک از زاویه‌های داده شدهٔ دیگر مضربی زوج از π نیست، پس با هیچ‌یک از آن‌ها هم‌انتها نیست.

۴۴۵- گزینهٔ ۴ زاویهٔ بین هر دو کابین متوالی $\frac{\pi}{۱۰}=\frac{۲\pi}{۲۰}$ رادیان است. از طرف دیگر، $\frac{۴۸\pi}{۵}=۸\pi+\frac{۸\pi}{۵}=۸\pi+۱۶\times\frac{\pi}{۱۰}$. وقتی چرخ‌وفلک ۴ دور کامل می‌زند، یعنی ۸π رادیان می‌چرخد، هر کابین در جای اولیهٔ خود قرار می‌گیرد. سپس چرخ‌وفلک به اندازهٔ $۱۶\times\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان دیگر دوران می‌کند که کابین شمارهٔ یک به مکان فعلی ۱۶ کابین جلوتر، یعنی کابین هفدهم منتقل می‌شود.

۴۴۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، واضح است که عرض نقطه‌ای که انتهای کمان نظیر زاویهٔ ۴ رادیان است، کوچک‌تر از عرض بقیهٔ نقاط است، پس $\sin ۴$ از بقیه کوچک‌تر است.



۴۴۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** در هر ساعت عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{۱}{۱۲}$ دور می‌چرخد که معادل $\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۱۲}$ رادیان است. بنابراین

$$\frac{۶۰}{x}=\frac{\frac{\pi}{۶}}{\frac{۵\pi}{۸}}\Rightarrow x=۲۲۵ \text{ دقیقه}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم در هر دقیقه، عقربهٔ ساعت‌شمار $(۰/۵)^{\circ}$ یا $\frac{\pi}{۳۶۰}$ رادیان طی می‌کند، پس $\frac{\frac{\pi}{۳۶۰}}{\frac{۵\pi}{۸}}=\frac{۱}{x}$، بنابراین $x=\frac{\frac{۵\pi}{۸}}{\frac{\pi}{۳۶۰}}=۲۲۵$ دقیقه.

۴۴۸- گزینهٔ ۲ طول کمان AB برابر است با $۴\pi\alpha$. از طرف دیگر طول کمان ACB برابر است با محیط دایره منهای طول کمان AB یعنی $۸\pi^۲-۴\pi\alpha$. بنابراین

$$۸\pi^۲-۴\pi\alpha=۴\pi\alpha+\pi\Rightarrow ۸\alpha=۸\pi-۱\Rightarrow\alpha=\pi-\frac{۱}{۸}$$

۴۴۹- گزینهٔ ۱ ۱۶ کابین در این چرخ‌و فلک وجود دارد. پس زاویهٔ بین دو کابین متوالی برابر $\frac{۲\pi}{۱۶}=\frac{\pi}{۸}$ است. بنابراین زاویهٔ متناظر به کمان $P_۰P_۱$ برابر $\frac{۷\pi}{۸}$ است. بنابراین

$$\overset{\frown}{P_۰P_۱}=r\theta=۴۰\times\frac{۷\pi}{۸}=۳۵\pi\text{ متر}$$

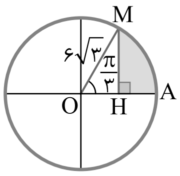
۴۵۰- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر،

$$MH=۶\sqrt{۳}\sin\frac{\pi}{۳}=۹\,,\qquad \overset{\frown}{AM}=۶\sqrt{۳}\times\frac{\pi}{۳}=۲\sqrt{۳}\pi$$

$$OH=۶\sqrt{۳}\cos\frac{\pi}{۳}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow AH=۶\sqrt{۳}-۳\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}$$

بنابراین اندازهٔ محیط قسمت رنگی برابر است با

$$۹+۳\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}\pi=۹+\sqrt{۳}(۳+۲\pi)$$



۴۵۱- گزینهٔ ۱ ابتدا ۴۰۰° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۴۰۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۲۰\pi}{۹}$$

بنابراین اگر اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر برحسب رادیان برابر x و اندازهٔ زاویهٔ کوچک‌تر برحسب رادیان برابر y باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases}x+y=\frac{۲۰\pi}{۹}\\ x-y=\frac{۴\pi}{۹}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۴\pi}{۳}\\ y=\frac{۸\pi}{۹}\end{cases}$$

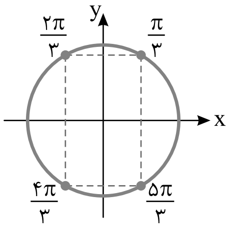
پس اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر برحسب رادیان $\frac{۴\pi}{۳}$ است.

۴۵۲- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم اندازهٔ زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $R=\frac{\pi}{۸۰}D-\frac{۵\pi}{۳۶}$. از طرف دیگر، $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$، بنابراین

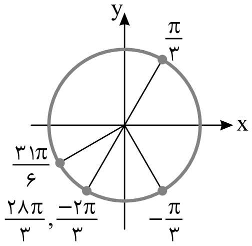
$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{\pi}{۸۰}D-\frac{۵\pi}{۳۶}}{\pi}\Rightarrow D=\frac{۱۸۰^\circ}{۸۰}D-\frac{۵\times۱۸۰^\circ}{۳۶}$$

$$\frac{۵}{۴}D=۲۵^\circ\Rightarrow D=۲۰^\circ$$

۴۵۳- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل، چهارضلعی حاصل مستطیل است.



۴۵۴- گزینهٔ ۳ اگر به زاویه‌ای مضربی زوج از π را اضافه یا از آن کم کنیم، زاویهٔ جدید با زاویهٔ اولیه هم‌انتها است. اکنون توجه کنید که $\frac{۲۸\pi}{۳}=۹\pi+\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۳۱\pi}{۶}=۵\pi+\frac{\pi}{۶}$. بنابراین انتهای کمان‌های نظیر زاویه‌های داده شده مانند شکل روبه‌رو است. از روی شکل معلوم است که انتهای کمان نظیر زاویه‌های $\frac{۲۸\pi}{۳}$ و $\frac{-۲\pi}{۳}$ یکسان است.



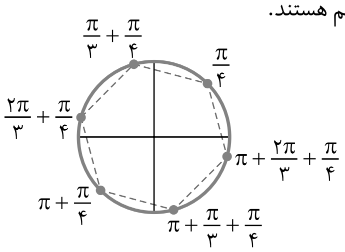
۴۵۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$k=۳s\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{۳s\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}=s\pi+\frac{\pi}{۴}$$

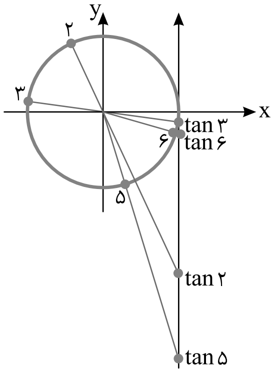
$$k=۳s+۱\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{(۳s+۱)\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}=s\pi+\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$$

$$k=۳s+۲\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{(۳s+۲)\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}=s\pi+\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین انتهای کمان نظیر زاویه‌های مورد نظر مطابق شکل زیر رأس‌های یک شش‌ضلعی منتظم هستند.



۴۵۶- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر $\tan ۳$ بزرگ‌تر از اعداد دیگر است.



۴۵۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** چون عقربهٔ ساعت‌شمار در هر ساعت $\frac{۱}{۱۲}$ دایره را طی می‌کند، پس در هر ساعت $\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$ رادیان را طی می‌کند. بنابراین در هر ۲۰ دقیقه، $\frac{۲۰}{۶۰}\times\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۱۸}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی از ساعت ۹ تا ساعت $۱۰:۲۰'$ که یک ساعت و ۲۰ دقیقه زمان گذشته است، عقربهٔ ساعت‌شمار زاویه‌ای به اندازهٔ $\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۱۸}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی زاویه‌ای به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۹}$ رادیان.

راه‌حل دوم می‌دانیم عقربهٔ ساعت‌شمار در هر دقیقه $(۰/۵)^\circ$ یا $\frac{\pi}{۳۶۰}$ رادیان طی می‌کند. از طرف دیگر از ساعت ۹ تا ساعت $۱۰:۲۰'$ برابر ۸۰ دقیقه است، پس

$$\frac{۱}{۸۰}=\frac{\frac{\pi}{۳۶۰}}{x}\Rightarrow x=۸۰\times\frac{\pi}{۳۶۰}=\frac{۲\pi}{۹}\text{rad}$$

۴۵۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{۲۵^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۵\pi}{۳۶}\text{rad}$$

بنابراین $\widehat{AB}=۶\times\frac{۵\pi}{۳۶}$ و $\widehat{CD}=۹\times\frac{۵\pi}{۳۶}$. پس

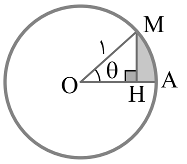
$$\widehat{CD}-\widehat{AB}=\frac{۴۵\pi}{۳۶}-\frac{۳۰\pi}{۳۶}=\frac{۱۵\pi}{۳۶}=\frac{۵\pi}{۱۲}$$

۴۵۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** با توجه به شکل،

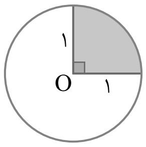
$$MH=\sin\theta,\quad \widehat{AM}=r\theta=\theta$$

$$OH=\cos\theta\Rightarrow AH=OA-OH=۱-\cos\theta$$

بنابراین محیط قسمت رنگی برابر است با $P=\sin\theta+\theta+۱-\cos\theta$.



راه‌حل دوم فرض کنید $\theta=\frac{\pi}{۲}$. در این‌صورت ناحیهٔ رنگی مورد نظر $\frac{۱}{۴}$ دایره‌ای به شعاع ۱ است و محیط آن برابر $۱+۱+\frac{\pi}{۲}=۲+\frac{\pi}{۲}$ است.



اکنون مقدار گزینه‌ها را به ازای $\theta=\frac{\pi}{۲}$ به‌دست می‌آوریم:

گزینهٔ (۱) $۱+\sin\theta+\cos\theta=۲$

گزینهٔ (۲) $۱+\sin\theta-\cos\theta=۲$

گزینهٔ (۳) $۱-\theta+\sin\theta+\cos\theta=۲-\frac{\pi}{۲}$

گزینهٔ (۴) $۱+\theta+\sin\theta-\cos\theta=۲+\frac{\pi}{۲}$

۴۶۰- گزینهٔ ۴ با جابه‌جایی نقطهٔ A به اندازهٔ ۲۰° یا $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، ریسمان به اندازهٔ $l=r\theta=۸\times\frac{\pi}{۹}=\frac{۸\pi}{۹}$ سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود. در نتیجه اگر فرض کنیم چرخ کوچک به اندازهٔ α رادیان جابه‌جا شده است، معلوم می‌شود

$$\frac{۸\pi}{۹}=۶\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{۴\pi}{۲۷}$$

بنابراین اندازه‌ای که چرخ کوچک‌تر جابه‌جا شده است برحسب درجه برابر است با

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow D=۱۸۰^\circ\times\frac{R}{\pi}=۱۸۰^\circ\times\frac{۴}{۲۷}=\frac{۸۰^\circ}{۳}$$

۴۶۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha,\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

بنابراین

$$A=-\tan\alpha\cot\alpha+(-\sin\alpha)^{۲}+\cos^{۲}\alpha$$

$$=-\tan\alpha\cot\alpha+\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=-۱+۱=۰$$

۴۶۲- گزینهٔ ۲ چون $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، پس

$$\cos(x-۹۰^\circ)=\cos(۹۰^\circ-x)=\sin x$$

همچنین، $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$، پس

$$\cot(-x-۱۸۰^\circ)=-\cot(۱۸۰^\circ+x)=-\cot x$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sin x(-\cot x)=-\cos x$$

۴۶۳- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$A=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)+\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)+\sin(۳\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cot\theta$$

بنابراین $A=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\tan\theta}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\times۰/۴}=-\frac{۳}{۴}$.

۴۶۴- گزینهٔ ۲ چون $x+۳y=\frac{\pi}{۲}$، در نتیجه $۲x+۳y=\frac{\pi}{۲}+x$. پس

$$\tan(۲x+۳y)=\tan(\frac{\pi}{۲}+x)=-\cot x$$

۴۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\sin x$ و $\sin(\frac{۵\pi}{۲}+x)=\cos x$. در نتیجه

$$-\sin x=۲\cos x\Rightarrow\tan x=-۲$$

۴۶۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\cos۵۱۰^\circ=\cos(۳۶۰^\circ+۱۵۰^\circ)=\cos۱۵۰^\circ$$

$$=\cos(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=-\cos۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴۶۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos\frac{۴۳\pi}{۶}=\cos(۷\pi+\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴۶۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{۲۳\pi}{۶}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۶\pi}{۳}=\cos(۵\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۳۵\pi}{۴}=\tan(۹\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\cot(-\frac{۴۳\pi}{۴})=-\cot\frac{۴۳\pi}{۴}=-\cot(۱۱\pi-\frac{\pi}{۴})=-(-\cot\frac{\pi}{۴})=۱$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۱}{۲})(-۱)(۱)=-\frac{۱}{۴}$.

۴۶۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\pi$ ، آن‌گاه $\sin\alpha=\sin\beta$.

بنابراین

$$\frac{\pi}{۵}+\frac{۴\pi}{۵}=\pi\Rightarrow\sin\frac{۴\pi}{۵}=\sin\frac{\pi}{۵}\ ,\quad \frac{۲\pi}{۵}+\frac{۳\pi}{۵}=\pi\Rightarrow\sin\frac{۳\pi}{۵}=\sin\frac{۲\pi}{۵}$$

در نتیجه $A=\dfrac{\sin\frac{\pi}{۵}-\sin\frac{۲\pi}{۵}}{\sin\frac{۲\pi}{۵}-\sin\frac{\pi}{۵}}=-۱$.

۴۷۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\pi$ ، آن‌گاه $\cos\beta=-\cos\alpha$ ، در نتیجه $\cos\alpha+\cos\beta=۰$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{\pi}{۵}+\frac{۴\pi}{۵}=\pi\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۵}+\cos\frac{۴\pi}{۵}=۰$$

$$\frac{۲\pi}{۵}+\frac{۳\pi}{۵}=\pi\Rightarrow\cos\frac{۲\pi}{۵}+\cos\frac{۳\pi}{۵}=۰$$

پس $A=۰$.

۴۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin(۳\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \sin(۴\pi+\alpha)=\sin\alpha\ ,\sin(۵\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

بنابراین $A=۳\sin\alpha+۴\sin\alpha-۵\sin\alpha=۲\sin\alpha$.

۴۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha\ ,\qquad \cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha\ ,\quad \cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

بنابراین $A=\dfrac{۳\cot\alpha-\cot\alpha}{۲\tan\alpha-\tan\alpha}=\dfrac{۲\cot\alpha}{\tan\alpha}=۲\cot^{۲}\alpha$.

۴۷۳- گزینهٔ ۴ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+۲\sin(۲\pi-\alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)-۲\cos(۳\pi+\alpha)}=۳\Rightarrow\frac{\cos\alpha-۲\sin\alpha}{-\sin\alpha+۲\cos\alpha}=۳$$

$$\cos\alpha-۲\sin\alpha=-۳\sin\alpha+۶\cos\alpha$$

$$\sin\alpha=۵\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=۵$$

بنابراین $\tan(\alpha-\frac{۵\pi}{۲})=-\tan(\frac{۵\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha=-\frac{۱}{۵}$.

۴۷۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\alpha=\frac{۳\pi}{۲}+\beta\Rightarrow\cot\alpha=\cot(\frac{۳\pi}{۲}+\beta)=-\tan\beta$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۱-\cot\alpha}+\frac{۱}{۱+\cot\beta}=\frac{۱}{۱+\tan\beta}+\frac{۱}{۱+\cot\beta}=\frac{۱+\cot\beta+۱+\tan\beta}{(۱+\tan\beta)(۱+\cot\beta)}$$

$$=\frac{۲+\tan\beta+\cot\beta}{۱+\cot\beta+\tan\beta+\tan\beta\cot\beta}=\frac{۲+\tan\beta+\cot\beta}{۲+\tan\beta+\cot\beta}=۱$$

۴۷۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cos\alpha$. در نتیجه از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\cos\alpha=-\frac{۱۲}{۱۳}$. اکنون توجه کنید که

$$۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}=\frac{۱۶۹}{۱۴۴}\Rightarrow\tan^{۲}\alpha=\frac{۲۵}{۱۴۴}$$

چون α در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\tan\alpha<۰$. بنابراین $\tan\alpha=-\frac{۵}{۱۲}$.

۴۷۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos(-۶۰۰^\circ)=\cos۶۰۰^\circ=\cos(۲\times۳۶۰^\circ-۱۲۰^\circ)$$

$$=\cos۱۲۰^\circ=-\cos۶۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cot۶۷۵^\circ=\cot(۲\times۳۶۰^\circ-۴۵^\circ)=-\cot۴۵^\circ=-۱$$

$$\tan۹۴۵^\circ=\tan(۳\times۳۶۰^\circ-۱۳۵^\circ)=-\tan۱۳۵^\circ=\tan۴۵^\circ=۱$$

$$\sin(-۳۳۰^\circ)=-\sin۳۳۰^\circ=-\sin(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)=\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین حاصل کسر مورد نظر برابر است با $\dfrac{-\frac{۱}{۲}-۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=-۳$.

۴۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan۷۵^\circ=\tan(۹۰^\circ-۱۵^\circ)=\cot۱۵^\circ=\frac{۱}{a}$$

$$\tan۱۰۵^\circ=\tan(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=-\cot۱۵^\circ=-\frac{۱}{a}$$

$$\tan۱۶۵^\circ=\tan(۱۸۰^\circ-۱۵^\circ)=-\tan۱۵^\circ=-a$$

$$\tan۲۵۵^\circ=\tan(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)=\cot۱۵^\circ=\frac{۱}{a}$$

بنابراین $A=\dfrac{۲(\frac{۱}{a})-\frac{۱}{a}}{۳(-a)-\frac{۱}{a}}=\dfrac{\frac{۱}{a}}{\frac{-۳a^{۲}-۱}{a}}=\dfrac{۱}{-۳a^{۲}-۱}=\dfrac{-۱}{۳a^{۲}+۱}$.

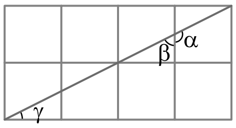
۴۷۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\frac{۱۰۱\pi}{۳}=\sin(\frac{۱۰۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})=\sin(۳۴\pi-\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۹۸\pi}{۳}=\cos(\frac{۹۹\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})=\cos(۳۳\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $A=۴(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}-۲(-\frac{۱}{۲})=۳+۱=۴$.

۴۷۹- گزینهٔ ۳ از نماد گذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که



$$\tan\alpha=\tan(۱۸۰^\circ-\beta)=-\tan\beta$$

از طرف دیگر $\beta+\gamma=۹۰^\circ$ ، پس $\tan\beta=\cot\gamma$. اکنون توجه کنید که $\cot\gamma=\frac{۴}{۲}=۲$. بنابراین $\tan\alpha=-۲$.

۴۸۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$ ، آن‌گاه $\tan\beta=\cot\alpha$ و در نتیجه $\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha\times\cot\alpha=۱$.

بنابراین

$$\frac{\pi}{۱۴}+\frac{۶\pi}{۱۴}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\tan\frac{\pi}{۱۴}\tan\frac{۶\pi}{۱۴}=۱$$

$$\frac{۲\pi}{۱۴}+\frac{۵\pi}{۱۴}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\tan\frac{۲\pi}{۱۴}\tan\frac{۵\pi}{۱۴}=۱$$

$$\frac{۳\pi}{۱۴}+\frac{۴\pi}{۱۴}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\tan\frac{۳\pi}{۱۴}\tan\frac{۴\pi}{۱۴}=۱$$

پس $A=۱$.

۴۸۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\,,\quad \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\tan(۲\pi-\alpha)=-\tan\alpha\,,\quad \tan(۲\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

بنابراین $A=\frac{-\tan\alpha+۳\tan\alpha}{-\tan\alpha-\tan\alpha}=\frac{۲\tan\alpha}{-۲\tan\alpha}=-۱$.

۴۸۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin(\frac{۵\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}\,,\qquad \tan(\frac{۵\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳})=\cot\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}\,,\quad \cot(\frac{۷\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین $A=\frac{۴(\frac{۱}{۲})-۲(\frac{۱}{۲})}{۳(\frac{\sqrt{۳}}{۳})-۶(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})}=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$.

۴۸۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ یکی از زوایا ۹۰° است. مثلاً فرض کنید $\hat{A}=۹۰^\circ$. پس $\sin\hat{A}=۱$ و $\cos\hat{A}=۰$. در این صورت زاویه‌های B و C متمم یکدیگرند، پس $\sin^۲\hat{C}=\cos^۲\hat{B}$ ، بنابراین ساده شدهٔ عبارت به شکل زیر است:

$$\frac{\cos^۲\hat{A}+\cos^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{C}}{\sin^۲\hat{A}+\sin^۲\hat{B}+\sin^۲\hat{C}}=\frac{۰+\sin^۲\hat{C}+\cos^۲\hat{C}}{۱+\sin^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{B}}=\frac{۰+۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم مثلث ABC را با زاویه‌های زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{A}=۹۰^\circ\,,\quad \hat{B}=۴۵^\circ\,,\quad \hat{C}=۴۵^\circ$$

در این صورت $\frac{\cos^۲\hat{A}+\cos^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{C}}{\sin^۲\hat{A}+\sin^۲\hat{B}+\sin^۲\hat{C}}=\frac{۰+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}$.

۴۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin a=\sin(\frac{۵\pi}{۲}-b)=\cos b\,,\quad \tan a=\tan(\frac{۵\pi}{۲}-b)=\cot b$$

بنابراین

$$\frac{\sin a+\tan a\tan b-۱}{\sin b-\cos^۲ a-\cos^۲ b+۱}=\frac{\cos b+\cot b\tan b-۱}{\sin b-\cos^۲ a-\sin^۲ a+۱}$$
$$=\frac{\cos b+۱-۱}{\sin b-۱+۱}=\frac{\cos b}{\sin b}=\cot b$$

۴۸۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$۳a+۲b=\pi\Rightarrow a+۲(a+b)=\pi\Rightarrow\frac{a}{۲}+(a+b)=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{a}{۲}=\frac{\pi}{۲}-(a+b)$$

بنابراین $\sin\frac{a}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۲}-(a+b))=\cos(a+b)=\frac{۳}{۵}$.

۴۸۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin ۴۱۰^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۵۰^\circ)=\sin ۵۰^\circ=\sin(۹۰^\circ-۴۰^\circ)=\cos ۴۰^\circ$$

$$\sin ۴۰۰^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۴۰^\circ)=\sin ۴۰^\circ$$

بنابراین

$$\sin^۲ ۴۱۰^\circ+\sin^۲ ۴۰۰^\circ=\cos^۲ ۴۰^\circ+\sin^۲ ۴۰^\circ=۱$$

همچنین $\tan ۷۳۱^\circ=\tan(۲\times۳۶۰^\circ+۱۱^\circ)=\tan ۱۱^\circ$. بنابراین

$$\tan ۷۳۱^\circ\times\cot ۱۱^\circ=\tan ۱۱^\circ\times\cot ۱۱^\circ=۱$$

بنابراین مقدار کسر مورد نظر برابر است با ۱.

۴۸۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\cos ۱۱۵^\circ=\cos(۹۰^\circ+۲۵^\circ)=-\sin ۲۵^\circ$$

$$\cos ۱۵۵^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۲۵^\circ)=-\cos ۲۵^\circ$$

$$\cos ۲۹۵^\circ=\cos(۲۷۰^\circ+۲۵^\circ)=\sin ۲۵^\circ$$

$$\cos ۳۳۵^\circ=\cos(۳۶۰^\circ-۲۵^\circ)=\cos ۲۵^\circ$$

بنابراین $A=\frac{-\sin ۲۵^\circ+۳\cos ۲۵^\circ}{۳\sin ۲۵^\circ+\cos ۲۵^\circ}$. صورت و مخرج کسر A را بر $\sin ۲۵^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{-\frac{\sin ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}+\frac{۳\cos ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}}{\frac{۳\sin ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}+\frac{\cos ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}}=\frac{-۱+۳\cot ۲۵^\circ}{۳+\cot ۲۵^\circ}=\frac{-۱+۳a}{۳+a}=\frac{۳a-۱}{a+۳}$$

۴۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{۱۱\pi}{۶}=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۴}=\tan(\pi+\frac{\pi}{۴})=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$\cot\frac{۹\pi}{۴}=\cot(۲\pi+\frac{\pi}{۴})=\cot\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۳}=\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $A=-\frac{۱}{۲}\times۱-۱\times\frac{۱}{۲}=-۱$.

۴۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$ ، آن‌گاه $\sin\beta=\cos\alpha$. بنابراین

$$\frac{\pi}{۱۶}+\frac{۷\pi}{۱۶}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\cos\frac{۷\pi}{۱۶}=\sin\frac{\pi}{۱۶}$$
$$\frac{۳\pi}{۱۶}+\frac{۵\pi}{۱۶}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\cos\frac{۵\pi}{۱۶}=\sin\frac{۳\pi}{۱۶}$$

پس

$$A=\cos^۲\frac{\pi}{۱۶}+\cos^۲\frac{۳\pi}{۱۶}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۱۶}+\sin^۲\frac{\pi}{۱۶}$$
$$=(\sin^۲\frac{\pi}{۱۶}+\cos^۲\frac{\pi}{۱۶})+(\sin^۲\frac{۳\pi}{۱۶}+\cos^۲\frac{۳\pi}{۱۶})=۱+۱=۲$$

۴۹۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$ ، آن‌گاه $\cos\beta=-\cos\alpha$. بنابراین

$$\cos ۱۷۹^\circ=-\cos ۱^\circ\,,\quad \cos ۱۷۸^\circ=-\cos ۲^\circ\,,\ \dots\ ,$$

$$\cos ۹۲^\circ=-\cos ۸۸^\circ\,,\quad \cos ۹۱^\circ=-\cos ۸۹^\circ$$

پس $A=\frac{\cos ۱^\circ+\cos ۲^\circ+\cdots+\cos ۸۹^\circ}{-\cos ۱^\circ-\cos ۲^\circ-\cdots-\cos ۸۹^\circ}=-۱$.

۴۹۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$. بنابراین

$$\frac{\cos ۲x}{۱-\tan^۲ x}=\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}=\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}=\cos^۲ x$$

۴۹۲- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\cos^{۴}\frac{\pi}{۸}-\sin^{۴}\frac{\pi}{۸}=(\cos^{۲}\frac{\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{\pi}{۸})(\cos^{۲}\frac{\pi}{۸}-\sin^{۲}\frac{\pi}{۸})$$

$$=۱\times\cos(۲\times\frac{\pi}{۸})=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۹۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $۱۵^\circ+۷۵^\circ=۹۰^\circ$، بنابراین $\cos ۱۵^\circ=\sin ۷۵^\circ$، در نتیجه

$$\cos ۱۵^\circ\sin ۷۵^\circ=\cos ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ=\cos^{۲}۱۵^\circ$$

از طرف دیگر، $\cos ۲x=۲\cos^{۲}x-۱$، پس

$$\cos ۳۰^\circ=۲\cos^{۲}۱۵^\circ-۱\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\cos^{۲}۱۵^\circ-۱$$

پس $\cos^{۲}۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}$. در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}$.

۴۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱\Rightarrow\frac{۱۶}{۲۵}+\cos^{۲}\theta=۱$$

$$\cos^{۲}\theta=\frac{۹}{۲۵}\xrightarrow{\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi}\cos\theta=-\frac{۳}{۵}$$

بنابراین

$$\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta=۲\times\frac{۴}{۵}\times(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۲۴}{۲۵}$$

۴۹۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحادهای $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ نتیجه می‌شود

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}}=۸$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\frac{۱}{۴}}=۸$$

۴۹۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $۱+\cos ۲x=۲\cos^{۲}x$، پس

$$A=\frac{\sin ۲x}{۱+\cos ۲x}=\frac{۲\sin x\cos x}{۲\cos^{۲}x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=\frac{۱}{\cot x}=\frac{۱}{۳}$$

۴۹۷- گزینهٔ ۳ از اتحاد $۱-\cos ۲\alpha=۲\sin^{۲}\alpha$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\frac{۱-\cos ۴۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ}=\frac{۲\sin^{۲}۲۰^\circ}{۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ}=\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}=\tan ۲۰^\circ$$

۴۹۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha$، بنابراین

$$\frac{\cos ۸۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ-\sin ۴۰^\circ}-\sin ۴۰^\circ=\frac{\cos(۲\times ۴۰^\circ)}{\cos ۴۰^\circ-\sin ۴۰^\circ}-\sin ۴۰^\circ$$

$$=\frac{\cos^{۲}۴۰^\circ-\sin^{۲}۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ-\sin ۴۰^\circ}-\sin ۴۰^\circ=(\cos ۴۰^\circ+\sin ۴۰^\circ)-\sin ۴۰^\circ$$

$$=\cos ۴۰^\circ$$

۴۹۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A=\sin^{۴}x+\cos^{۴}x=۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲x$$

بنابراین $A=۱-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۳})^{۲}=۱-\frac{۱}{۱۸}=\frac{۱۷}{۱۸}$.

۵۰۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$، بنابراین

$$\frac{\sin^{۳}x}{۲\sin x-\sin ۲x}=\frac{\sin^{۳}x}{۲\sin x-۲\sin x\cos x}=\frac{\sin^{۲}x}{۲(۱-\cos x)}$$

$$=\frac{۱-\cos^{۲}x}{۲(۱-\cos x)}=\frac{۱+\cos x}{۲}$$

بنابراین $\frac{۲}{۳}=\frac{۱+\cos x}{۲}$ پس $\cos x=\frac{۴}{۳}-۱=\frac{۱}{۳}$. در نتیجه

$$\cos ۲x=۲\cos^{۲}x-۱=\frac{۲}{۹}-۱=-\frac{۷}{۹}$$

۵۰۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحاد $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ نتیجه می‌شود

$$\sin ۲\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)=۲\sin\alpha\cos\alpha(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})$$

$$=۲\sin^{۲}\alpha+۲\cos^{۲}\alpha=۲(\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha)=۲$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$، پس

$$\sin ۲\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)=۲$$

۵۰۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $۲\cos^{۲}x-۱=\cos ۲x$ و $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$. بنابراین

$$\sin\frac{\pi}{۱۲}(۲\cos^{۲}\frac{\pi}{۲۴}-۱)=\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{۲\pi}{۲۴}$$

$$=\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

۵۰۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sin\frac{۳\pi}{۸}=\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸})=\cos\frac{\pi}{۸}$. بنابراین $\cos\frac{\pi}{۸}\sin\frac{۳\pi}{۸}=\cos^{۲}\frac{\pi}{۸}$.

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos^{۲}x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$. پس

$$\cos^{۲}\frac{\pi}{۸}=\frac{۱+\cos(۲\times\frac{\pi}{۸})}{۲}=\frac{۱+\cos\frac{\pi}{۴}}{۲}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$$

۵۰۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x},\quad \cos ۲x=\frac{۱-\tan^{۲}x}{۱+\tan^{۲}x}$$

بنابراین $\frac{۷}{۵}=\frac{۲(\frac{۱}{۳})+۱-\frac{۱}{۹}}{۱+\frac{۱}{۹}}=\frac{۲\tan x+۱-\tan^{۲}x}{۱+\tan^{۲}x}=\sin ۲x+\cos ۲x$.

۵۰۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$۹\cos\theta+\frac{۱}{\cos\theta}=۱۰\Rightarrow ۹\cos^{۲}\theta+۱=۱۰\cos\theta$$

$۹\cos^{۲}\theta-۱۰\cos\theta+۱=۰\Rightarrow\cos\theta=۱$ (غ.ق.ق.) یا $\cos\theta=\frac{۱}{۹}$

بنابراین $-\frac{۷۹}{۸۱}=-۱-۲(\frac{۱}{۹})^{۲}=۲\cos^{۲}\theta-۱=\cos ۲\theta$.

۵۰۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ و

$$\sin ۸۴^\circ=\sin(۹۰^\circ-۶^\circ)=\cos ۶^\circ=\cos(۲\times۳^\circ)=۲\cos^۲ ۳^\circ-۱=۲a^۲-۱$$

۵۰۷- گزینهٔ ۱ تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha=\frac{۲}{۳}$$

$$\sin^۲ ۲\alpha=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \sin ۲\alpha=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\pm\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

با توجه به اینکه $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع چهارم است، پس $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$، در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha<۰$. یعنی $\sin ۲\alpha<۰$. پس $\sin ۲\alpha=-\frac{\sqrt{۶}}{۳}$.

۵۰۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sin ۵۰^\circ=\sin(۹۰^\circ-۴۰^\circ)=\cos ۴۰^\circ$ و $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$. بنابراین

$$\frac{\sin ۵۰^\circ \sin ۴۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{\cos ۴۰^\circ\sin ۴۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۸۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sin(۹۰^\circ-۱۰^\circ)}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\cos ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{۱}{۲}$$

۵۰۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $x=\frac{\pi}{۲۴}$، آن‌گاه

$$۱۰x+۲x=۱۲x=\frac{\pi}{۲}$$

پس $\cos ۱۰x=\cos(\frac{\pi}{۲}-۲x)=\sin ۲x$، در نتیجه

$$\cos ۱۰x\cos ۲x=\sin ۲x\cos ۲x=\frac{۱}{۲}\sin ۴x$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin(۴\times\frac{\pi}{۲۴})=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$$

۵۱۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\tan ۵۰^\circ=\tan(۹۰^\circ-۴۰^\circ)=\cot ۴۰^\circ$$

بنابراین

$$\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ=\cot ۴۰^\circ-\tan ۴۰^\circ=\frac{\cos ۴۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ}-\frac{\sin ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}$$

$$=\frac{\cos^۲ ۴۰^\circ-\sin^۲ ۴۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ\cos ۴۰^\circ}=\frac{\cos(۲\times۴۰^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\times۴۰^\circ)}=\frac{۲\cos ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}$$

$$=۲\cot ۸۰^\circ=۲\cot(۹۰^\circ-۱۰^\circ)=۲\tan ۱۰^\circ$$

بنابراین $\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۲}=\tan ۱۰^\circ$.

راه‌حل دوم از اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot ۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۲}=\frac{\cot ۴۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۲}=\frac{۲\cot ۸۰^\circ}{۲}=\tan ۱۰^\circ$$

۵۱۱- گزینهٔ ۱ از عبارت $\sin x\cos x$ فاکتور می‌گیریم

$$A=\sin x\cos x(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x=\frac{۱}{۴}\sin ۴x$$

۵۱۲- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$$

$$۱+\sin ۲x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin ۲x=-\frac{۳}{۴}$$

۵۱۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}\quad(\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi)$$

به این ترتیب

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(\frac{۴}{۵})(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲\times\frac{۹}{۲۵}-۱=-\frac{۷}{۲۵}$$

بنابراین $\tan ۲\alpha=\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha}=\frac{۲۴}{۷}$.

۵۱۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** بنابر فرض $\sin x=\frac{۵}{۲}\cos x$. دو طرف این تساوی را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin^۲ x=\frac{۵}{۲}\cos x\sin x\quad(۱)$$

همچنین، بنابر فرض، $\cos x=\frac{۲}{۵}\sin x$. دو طرف این تساوی را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$\cos^۲ x=\frac{۲}{۵}\sin x\cos x\quad(۲)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$۱=\frac{۵}{۲}\sin x\cos x+\frac{۲}{۵}\sin x\cos x\Rightarrow ۱=\frac{۲۹}{۱۰}\sin x\cos x$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۱۰}{۲۹}$ و در نتیجه $\sin ۲x=\frac{۲۰}{۲۹}$.

راه‌حل دوم دو طرف تساوی $۲\sin x=۵\cos x$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴\sin^۲ x=۲۵\cos^۲ x$$

با توجه به $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ نتیجه می‌شود

$$۴\sin^۲ x=۲۵(۱-\sin^۲ x)\Rightarrow ۲۹\sin^۲ x=۲۵\Rightarrow\sin^۲ x=\frac{۲۵}{۲۹}$$

$$\cos^۲ x=۱-\frac{۲۵}{۲۹}=\frac{۴}{۲۹}\Rightarrow\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۱۰۰}{۲۹^۲}$$

$$\sin x\cos x=\frac{۱۰}{۲۹}\Rightarrow\sin ۲x=\frac{۲۰}{۲۹}$$

توجه کنید که با توجه به فرض مسئله $\sin x$ و $\cos x$ هم‌علامت هستند و $\sin x\cos x$ مقداری مثبت دارد.

راه‌حل سوم از $۲\sin x=۵\cos x$ نتیجه می‌شود $\tan x=\frac{۵}{۲}$، پس

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۲\times\frac{۵}{۲}}{۱+\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۲۰}{۲۹}$$

۵۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{\sin ۲x}{\sin ۲y}=\frac{۲\sin x\cos x}{۲\sin y\cos y}=\frac{\sin x}{\sin y}\times\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{۴\sin y}{\sin y}\times\frac{\cos x}{۳\cos x}=\frac{۴}{۳}$$

۵۱۶- گزینهٔ ۲ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x-\cos x)^{۲}=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow \sin^{۲} x+\cos^{۲} x-۲\sin x\cos x=\frac{۱۶}{۹}$$

$$-۲\sin x\cos x=\frac{۷}{۹}\Rightarrow \sin x\cos x=-\frac{۷}{۱۸}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$A=\frac{\cos^{۳} x+\sin^{۳} x}{\cos^{۲} x-\sin^{۲} x}$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos^{۲} x+\sin^{۲} x-\sin x\cos x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$=\frac{۱-\sin x\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{۱+\frac{۷}{۱۸}}{-\frac{۴}{۳}}=-\frac{۲۵}{۲۴}$$

۵۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin ۱۱۰^{\circ}=\sin(۹۰^{\circ}+۲۰^{\circ})=\cos ۲۰^{\circ}$ و $\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha=\cos ۲\alpha$، بنابراین

$$\frac{\sin^{۲} ۱۱۰^{\circ}-\sin^{۲} ۲۰^{\circ}}{\sin ۵۰^{\circ}}=\frac{\cos^{۲} ۲۰^{\circ}-\sin^{۲} ۲۰^{\circ}}{\sin ۵۰^{\circ}}=\frac{\cos(۲\times ۲۰^{\circ})}{\sin ۵۰^{\circ}}=\frac{\cos ۴۰^{\circ}}{\sin ۵۰^{\circ}}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos ۴۰^{\circ}=\cos(۹۰^{\circ}-۵۰^{\circ})=\sin ۵۰^{\circ}$. بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۱ است.

۵۱۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $۱+\cos ۲x=۲\cos^{۲} x$، بنابراین $۱+\cos ۴۰^{\circ}=۲\cos^{۲} ۲۰^{\circ}$. از طرف دیگر، $۵۵^{\circ}+۳۵^{\circ}=۹۰^{\circ}$، پس $\cos ۵۵^{\circ}=\sin ۳۵^{\circ}$. به این ترتیب

$$\frac{۱+\cos ۴۰^{\circ}}{\cos ۵۵^{\circ}\cos ۳۵^{\circ}}=\frac{۲\cos^{۲} ۲۰^{\circ}}{\sin ۳۵^{\circ}\cos ۳۵^{\circ}}=\frac{۲\cos^{۲} ۲۰^{\circ}}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\times ۳۵^{\circ})}=\frac{۴\cos^{۲} ۲۰^{\circ}}{\sin ۷۰^{\circ}}$$

اکنون توجه کنید که $۹۰^{\circ}=۷۰^{\circ}+۲۰^{\circ}$، پس $\cos ۲۰^{\circ}=\sin ۷۰^{\circ}$. در نتیجه کسر مورد نظر برابر است با $\frac{۴\cos^{۲} ۲۰^{\circ}}{\cos ۲۰^{\circ}}=۴\cos ۲۰^{\circ}$.

۵۱۹- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\cos a\cos ۲a=\frac{۱}{۱۶\sin a}\Rightarrow ۲\sin a\cos a\cos ۲a=\frac{۱}{۸}$$

$$\sin ۲a\cos ۲a=\frac{۱}{۸}\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۴a=\frac{۱}{۸}\Rightarrow \sin ۴a=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه $\cos ۸a=۱-۲\sin^{۲} ۴a=۱-۲(\frac{۱}{۴})^{۲}=\frac{۷}{۸}$.

۵۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^{۶} x+\cos^{۶} x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^{۲} ۲x$$

$$\frac{۴}{۵}=۱-\frac{۳}{۴}\sin^{۲} ۲x\Rightarrow \sin^{۲} ۲x=\frac{۴}{۱۵}$$

بنابراین $\cos^{۲} ۲x=۱-\sin^{۲} ۲x=۱-\frac{۴}{۱۵}=\frac{۱۱}{۱۵}$.

۵۲۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A=\frac{\cos ۲x}{\sqrt{۲}\cos x-۱}-\frac{\sqrt{۲}\cos x-۱}{\sqrt{۲}\cos x-۱}=\frac{\cos ۲x}{\sqrt{۲}\cos x-۱}-۱$$

بنابراین از اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^{۲} x-۱$ نتیجه می‌شود

$$A=\frac{۲\cos^{۲} x-۱}{\sqrt{۲}\cos x-۱}-۱=\frac{(\sqrt{۲}\cos x-۱)(\sqrt{۲}\cos x+۱)}{\sqrt{۲}\cos x-۱}-۱$$

$$=\sqrt{۲}\cos x+۱-۱=\sqrt{۲}\cos x$$

۵۲۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $۱-\cos ۲x=۲\sin^{۲} x$ و $۱+\cos ۲x=۲\cos^{۲} x$. بنابراین

$$\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}=۲\Rightarrow \frac{۲\sin^{۲} x}{۲\cos^{۲} x}=۲\Rightarrow \tan^{۲} x=۲\Rightarrow \tan x=\pm\sqrt{۲}$$

چون $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$، مقدار $\sqrt{۲}$ قابل قبول نیست. پس

$$\tan x=-\sqrt{۲}\Rightarrow \cot x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

در نتیجه $\tan x+۲\cot x=-\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=-۲\sqrt{۲}$.

۵۲۳- گزینهٔ ۲ اگر در اتحاد $۱+\cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha$ قرار دهیم $\alpha=\frac{x}{۲}$، اتحاد $۱+\cos x=۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}$ به‌دست می‌آید. پس

$$A=\sqrt{۲+\sqrt{۲+۲\cos\frac{\pi}{۸}}}=\sqrt{۲+\sqrt{۲(۱+\cos\frac{\pi}{۸})}}=\sqrt{۲+\sqrt{۲\times ۲\cos^{۲}\frac{\frac{\pi}{۸}}{۲}}}$$

$$=\sqrt{۲+۲|\cos\frac{\pi}{۱۶}|}=\sqrt{۲+۲\cos\frac{\pi}{۱۶}}=\sqrt{۲(۱+\cos\frac{\pi}{۱۶})}$$

$$=\sqrt{۲\times ۲\cos^{۲}\frac{\pi}{۳۲}}=۲|\cos\frac{\pi}{۳۲}|=۲\cos\frac{\pi}{۳۲}$$

۵۲۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sin^{۴}\frac{\pi}{۱۲}+\cos^{۴}\frac{\pi}{۱۲}=۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}\frac{۲\pi}{۱۲}$$

$$=۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}\frac{\pi}{۶}=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

۵۲۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\tan^{۲} x+\cot^{۲} x=(\tan x+\cot x)^{۲}-۲\tan x\cot x$$

$$=(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^{۲}-۲=(\frac{\sin^{۲} x+\cos^{۲} x}{\cos x\sin x})^{۲}-۲$$

$$=(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x})^{۲}-۲=\frac{۴}{\sin^{۲} ۲x}-۲$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=\frac{\pi}{۸}$، به‌دست می‌آید

$$\tan^{۲}\frac{\pi}{۸}+\cot^{۲}\frac{\pi}{۸}=\frac{۴}{\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}}-۲=\frac{۴}{\frac{۱}{۲}}-۲=۶$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^{۲}\frac{\pi}{۸}+\cot^{۲}\frac{\pi}{۸}=(\tan\frac{\pi}{۸}+\cot\frac{\pi}{۸})^{۲}-۲=(\frac{۲}{\sin\frac{۲\pi}{۸}})^{۲}-۲$$

$$=\frac{۴}{\frac{۱}{۲}}-۲=۸-۲=۶$$

۵۲۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot ۲\alpha,\quad \cot\alpha+\tan\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

بنابراین، اگر اتحادهای فوق را برای $\alpha=\frac{x}{۲}$ استفاده کنیم، می‌توان نوشت

$$A=\tan^{۲}\frac{x}{۲}-\cot^{۲}\frac{x}{۲}=(\tan\frac{x}{۲}+\cot\frac{x}{۲})(\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲})$$

$$=\frac{۲}{\sin x}\times(-۲\cot x)=-\frac{۴\cot x}{\sin x}$$

از طرف دیگر،

$$۱+\cot^{۲}x=\frac{۱}{\sin^{۲}x}\xrightarrow{\cot x=\frac{۱}{\tan x}=\frac{۳}{۴}}۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱}{\sin^{۲}x}$$

$$\sin^{۲}x=\frac{۱۶}{۲۵}\xrightarrow{۰<x<\frac{\pi}{۲}}\sin x=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین $A=\frac{-۴\times\frac{۳}{۴}}{\frac{۴}{۵}}=-\frac{۱۵}{۴}$.

۵۲۷- گزینهٔ ۳ از اتحاد $\cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos ۲۰^\circ}{\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ+۱}+۱=\frac{۲\cos^{۲}۱۰^\circ-۱}{\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ+۱}+۱$$

$$=\frac{(\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ+۱)(\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ-۱)}{\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ+۱}+۱=\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ-۱+۱$$

$$=\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ=\sqrt{۲}\cos(۹۰^\circ-۸۰^\circ)=\sqrt{۲}\sin ۸۰^\circ$$

۵۲۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $۲m-۱$ است. بنابراین

$$\tan\alpha\cot\alpha=۲m-۱\Rightarrow ۱=۲m-۱\Rightarrow m=۱$$

اکنون توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $m+۳$ است. پس

$$\tan\alpha+\cot\alpha=m+۳=۴\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=۴$$

$$\frac{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=۴\Rightarrow\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha}=۴\Rightarrow\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم برای تعیین $\sin ۲\alpha$ می‌توانیم از اتحاد زیر استفاده کنیم:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

بنابراین

$$\tan\alpha+\cot\alpha=m+۳=۴\Rightarrow\frac{۲}{\sin ۲\alpha}=۴\Rightarrow\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۲}$$

۵۲۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** تساوی داده شده را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^{۲}x+\cot^{۲}x=۵\Rightarrow(\tan x+\cot x)^{۲}-۲\tan x\cot x=۵$$

$$(\tan x+\cot x)^{۲}=۷\Rightarrow(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^{۲}=۷$$

$$(\frac{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x}{\sin x\cos x})^{۲}=۷\Rightarrow(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x})^{۲}=۷$$

$$\frac{۴}{\sin^{۲}۲x}=۷\Rightarrow\sin^{۲}۲x=\frac{۴}{۷}$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^{۲}x+\cot^{۲}x=۵\Rightarrow(\tan x+\cot x)^{۲}-۲=۵$$

$$(\frac{۲}{\sin ۲x})^{۲}-۲=۵\Rightarrow\frac{۴}{\sin^{۲}۲x}=۷\Rightarrow\sin^{۲}۲x=\frac{۴}{۷}$$

۵۳۰- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای

$$\begin{cases}\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha\\ \cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱\end{cases}$$

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$$

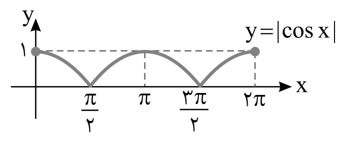
نتیجه می‌شود

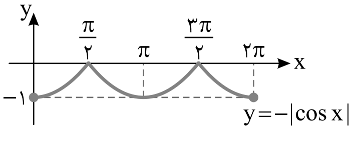
$$\frac{۱+\sin ۴۰^\circ-\cos ۴۰^\circ}{۱+\sin ۴۰^\circ+\cos ۴۰^\circ}=\frac{۱+۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ-(۱-۲\sin^{۲}۲۰^\circ)}{۱+۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ+۲\cos^{۲}۲۰^\circ-۱}$$

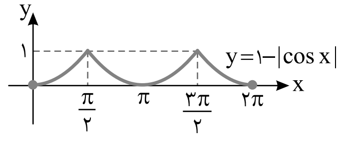
$$=\frac{۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ+۲\sin^{۲}۲۰^\circ}{۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ+۲\cos^{۲}۲۰^\circ}=\frac{۲\sin ۲۰^\circ(\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ)}{۲\cos ۲۰^\circ(\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ)}$$

$$=\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}=\tan ۲۰^\circ$$

۵۳۱- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم و قرینهٔ قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به محور طول‌ها رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارند حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\cos x|$ به‌دست آید. نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-|\cos x|$ به‌دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.







۵۳۲- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع از نقاط $(\frac{\pi}{۴},\sqrt{۲}-۱)$ و $(\frac{\pi}{۳},۰)$ می‌گذرد، پس

$$f(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow a\cos\frac{\pi}{۴}-b=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow\frac{a\sqrt{۲}}{۲}-b=\sqrt{۲}-۱$$

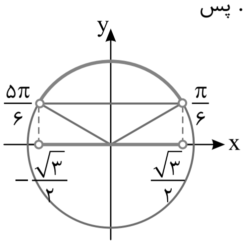
$$f(\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow a\cos\frac{\pi}{۳}-b=۰\Rightarrow\frac{a}{۲}=b$$

در نتیجه

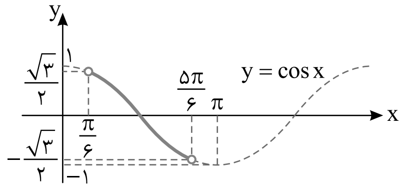
$$\frac{a\sqrt{۲}}{۲}-b=b\sqrt{۲}-b=b(\sqrt{۲}-۱)=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow b=۱$$

بنابراین $a=۲b=۲$. پس مقدار ab برابر ۲ است.

۵۳۳- گزینهٔ ۴ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر $\frac{\pi}{۶}<x<\frac{۵\pi}{۶}$، آن‌گاه $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}<\cos x<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. پس



$$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}<\sqrt{۳}m<\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow-\frac{۱}{۲}<m<\frac{۱}{۲}$$



۵۳۴- گزینهٔ ۲ چون $-۱\le\sin x\le۱$، پس

$$۰\le\sin^۲ x\le۱\Rightarrow۰\le۵\sin^۲ x\le۵$$

$$-۳\le۵\sin^۲ x-۳\le۲\Rightarrow-۳\le f(x)\le۲$$

بنابراین کمترین و بیشترین مقدار تابع به ترتیب ۳- و ۲ هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها ۶- است. توجه کنید که $f(۰)=-۳$ و $f(\frac{\pi}{۲})=۲$.

۵۳۵- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{۲\pi}{|k|}$، بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|k|}=\frac{\pi}{۲k+۱}\Rightarrow|k|=۴k+۲$$

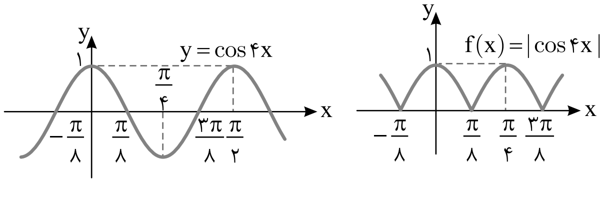
اگر $k>۰$، آن‌گاه

$$k=۴k+۲\Rightarrow k=-\frac{۲}{۳}\quad\text{(غ.ق.ق.)}$$

اگر $k<۰$، آن‌گاه

$$-k=۴k+۲\Rightarrow k=-\frac{۲}{۵}$$

۵۳۶- گزینهٔ ۳ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم است که دورهٔ تناوب آن برابر است با $\frac{\pi}{۸}-(-\frac{\pi}{۸})=\frac{\pi}{۴}$.



۵۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $a-۲$ است که با توجه به نمودار تابع برابر ۱- است. پس

$$a-۲=-۱\Rightarrow a=۱$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۴۵}{۸}-\frac{۵}{۸}=۵$ است. پس

$$T=\frac{۲\pi}{|\frac{۲\pi}{b}|}=۵\Rightarrow|b|=۵\Rightarrow b=\pm۵$$

اگر $b=-۵$، آن‌گاه $f(x)=۱+۲\sin(-\frac{۲\pi}{۵}x+\frac{\pi}{۴})$ که در این صورت تابع باید در همسایگی راست $x=۰$ نزولی باشد که این‌طور نیست. پس $b=۵$ و در نتیجه $b-a=۴$.

توجه کنید که اگر $b=-۵$، آن‌گاه $f(x)=۱+۲\sin(-\frac{۲\pi}{۵}x+\frac{\pi}{۴})$ و $f(\frac{۵}{۸})=۱$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

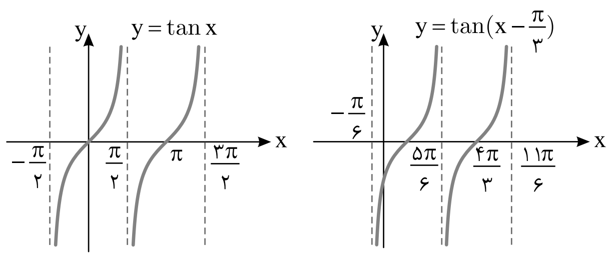
۵۳۸- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع از نامساوی $\{\frac{\pi x}{۲}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$ به‌دست می‌آید. پس $D_f=\{x\in\mathbb{R}|x\neq۲k+۱\,,k\in\mathbb{Z}\}$.

۵۳۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{۳}\le x<\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $\tan x\ge\tan(-\frac{\pi}{۳})$ و در نتیجه $\tan x\ge-\sqrt{۳}$. بنابراین

$$\frac{۲-m}{\sqrt{۳}}\ge-\sqrt{۳}\Rightarrow۲-m\ge-۳\Rightarrow m\le۵$$

پس حداکثر مقدار m برابر ۵ است.

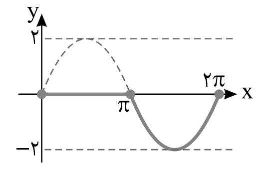
۵۴۰- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=\tan x$ را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=\tan(x-\frac{\pi}{۳})$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶})$ اکیداً صعودی است و حداقل مقدار a برابر $\frac{۵\pi}{۶}$ است.



۵۴۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\sin x & ۰\le x\le\pi\\ \sin x+\sin x & \pi<x\le۲\pi\end{cases}=\begin{cases}۰ & ۰\le x\le\pi\\ ۲\sin x & \pi<x\le۲\pi\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. توجه کنید که در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ نمودار تابع از دو برابر کردن عرض نقاط روی نمودار تابع $y=\sin x$ به‌دست آمده است.



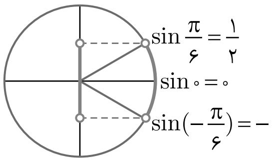
۵۴۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل $f(۰)=۲$ و کمترین مقدار تابع برابر ۱ است. بنابراین $f(۰)=۲a-b=۲$ و $f_{min}=۲a-b-|a+b|$. با توجه به شکل ضریب $\sin x$ مثبت است، پس مینیمم تابع برابر است با $۲a-b-a-b=a-۲b$. از حل دستگاه معادله‌های $\begin{cases}۲a-b=۲\\a-۲b=۱\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=۱$ و $b=۰$. بنابراین $f(x)=\sin x+۲$ که بیشترین مقدار آن برابر ۳ است.

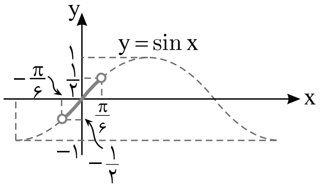
۵۴۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل‌های زیر، اگر $-\frac{\pi}{۶}<x<\frac{\pi}{۶}$، آن‌گاه $-\frac{۱}{۲}<\sin x<\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$-\frac{۱}{۲}<\frac{m+۱}{۲m}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۱<\frac{m+۱}{m}<۱\Rightarrow \left|\frac{m+۱}{m}\right|<۱$$
$$|m+۱|<|m|,\quad m\neq ۰$$

در نتیجه

$$m^۲+۲m+۱<m^۲\Rightarrow m<-\frac{۱}{۲}$$





۵۴۴- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\cos^۲ x=۱+۲\cos^۲ x$$

چون $-۱\le\cos x\le ۱$، پس

$$۰\le\cos^۲ x\le ۱\Rightarrow ۰\le ۲\cos^۲ x\le ۲\Rightarrow ۱\le ۱+۲\cos^۲ x\le ۳\Rightarrow ۱\le f(x)\le ۳$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[۱,۳]$ است.

۵۴۵- گزینهٔ ۱ کمترین مقدار تابع f برابر $۳a-a^۲$ است که وقتی $\cos ax=-۱$ اتفاق می‌افتد. بنابراین

$$۳a-a^۲=۲\Rightarrow a^۲-۳a+۲=۰\Rightarrow a=۱, a=۲$$

دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|a|}$ است. پس اگر $a=۱$، آن‌گاه دورهٔ تناوب این تابع برابر ۲π است و اگر $a=۲$، آن‌گاه دورهٔ تناوب آن برابر π است.

۵۴۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که از اتحاد $\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

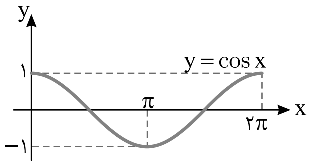
$$f(x)=\cos ۴x+\frac{۱+\cos ۴x}{۲}=\frac{۳\cos ۴x+۱}{۲}$$

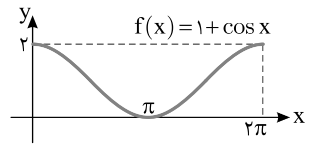
در نتیجه، دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$.

۵۴۷- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است. توجه کنید که از اتحاد $\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$ استفاده می‌کنیم.

$$f(x)=۲\sin^۲(\frac{\pi}{۲}+\frac{x}{۲})=۲\cos^۲\frac{x}{۲}=۲(\frac{۱+\cos x}{۲})=۱+\cos x$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ یک واحد به بالا انتقال دهیم.





۵۴۸- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است. این مقدار زمانی به‌دست می‌آید که $\cos(\frac{\pi}{۲}-bx)=۱$، پس

$$a+۲=۱\Rightarrow a=-۱$$

در نتیجه

$$f(x)=-۱+۲\sin bx$$

با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر با $\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۲\pi}{۳}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow b=\pm ۳$$

برای $x>۰$ نمودار تابع $f(x)=-۱+۲\sin bx$ به‌صورت صعودی شروع می‌شود، پس $b=۳$ قابل قبول است، یعنی $f(x)=-۱+۲\sin ۳x$ و مقدار $b-a$ برابر است با ۴. توجه کنید که اگر $b=-۳$، آن‌گاه $f(x)=-۱+۲\sin(-۳x)$ و $f(\frac{\pi}{۱۸})=-۲$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

۵۴۹- گزینهٔ ۳ تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۴}]$ اکیداً صعودی است، پس

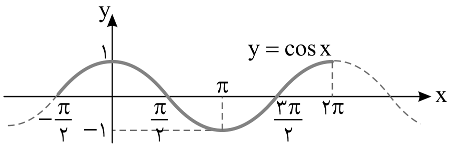
$$۰\le x\le\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \tan ۰\le\tan x\le\tan\frac{\pi}{۴}$$
$$۰\le\tan x\le ۱\Rightarrow -۱\le -\tan x\le ۰\Rightarrow ۱\le\frac{۳-\tan x}{۲}\le\frac{۳}{۲}$$

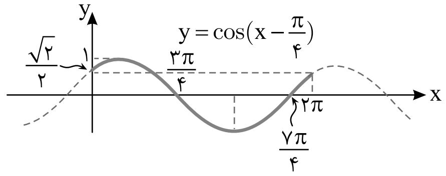
بنابراین $R_f=[۱,\frac{۳}{۲}]$.

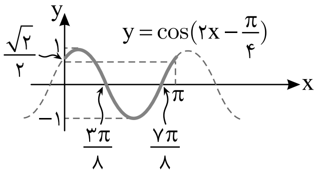
۵۵۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $\tan x>۱$ و اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۴}$، آن‌گاه $\tan x<-۱$. بنابراین

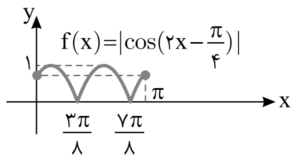
$$\frac{m-۱}{۲}>۱\Rightarrow m-۱>۲\Rightarrow m>۳$$
$$\frac{m-۱}{۲}<-۱\Rightarrow m-۱<-۲\Rightarrow m<-۱$$

۵۵۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ به‌دست آید. سپس طول نقاط روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})$ به‌دست آید. در آخر قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار به‌دست آمده را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=|\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})|$ به‌دست آید.









۵۵۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,۲)$ عبور می‌کند، یعنی $f(۰)=۲$.

بنابراین

$$f(۰)=a-۲b\sin ۰=a\Rightarrow a=۲$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=۲-۲b\sin x$ است. بیشترین مقدار تابع برابر ۶ است که یا به ازای $\sin x=۱$ به‌دست می‌آید یا به ازای $\sin x=-۱$ (بستگی به علامت b دارد). اگر $b>۰$، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x=-۱$ به‌دست می‌آید که برابر است با $۲+۲b$.

بنابراین

$$۲+۲b=۶\Rightarrow b=۲$$

و در نتیجه $f(x)=۲-۴\sin x$. اگر $b<۰$، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x=۱$ به‌دست می‌آید که برابر است با $۲-۲b$.

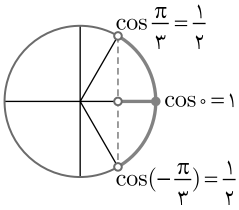
بنابراین

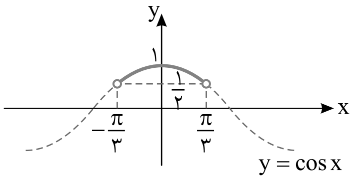
$$۲-۲b=۶\Rightarrow b=-۲$$

و در نتیجه $f(x)=۲+۴\sin x$. با توجه به اینکه برای xهایی که کمی بزرگ‌تر از صفر هستند، مقدار تابع کمتر از ۲ است، ضابطهٔ $f(x)=۲+۴\sin x$ قابل قبول نیست. بنابراین $b=۲$ و در نتیجه $ab=۴$.

۵۵۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل‌های زیر اگر $-\frac{\pi}{۳}<x<\frac{\pi}{۳}$، آن‌گاه $\frac{۱}{۲}<\cos x\leq ۱$. بنابراین

$$\frac{۱}{۲}<\frac{m^۲+۱}{۴}\leq ۱\Rightarrow ۲<m^۲+۱\leq ۴\Rightarrow ۱<m^۲\leq ۳\Rightarrow ۱<|m|\leq\sqrt{۳}$$





۵۵۴- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به شکل $f(x)=(\sin^۲ x+۱)^۲-۱$ می‌نویسیم. چون $-۱\leq\sin x\leq ۱$، پس

$$۰\leq\sin^۲ x\leq ۱\Rightarrow ۱\leq\sin^۲ x+۱\leq ۲\Rightarrow ۱\leq(\sin^۲ x+۱)^۲\leq ۴$$

$$۰\leq(\sin^۲ x+۱)^۲-۱\leq ۳\Rightarrow ۰\leq f(x)\leq ۳$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[۰,۳]$ است.

۵۵۵- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|a\pi|}=۴\Rightarrow |a|=\frac{۱}{۲}$$

کمترین مقدار تابع f برابر $|a|-|b|$ است. بنابراین

$$|a|-|b|=-۳\Rightarrow\frac{۱}{۲}-|b|=-۳\Rightarrow |b|=\frac{۷}{۲}$$

بیشترین مقدار تابع f برابر $|a|+|b|$ است که برابر است با $\frac{۱}{۲}+\frac{۷}{۲}=۴$.

۵۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\cos^۲ ax(۱-\cos^۲ ax)=\cos^۲ ax\sin^۲ ax=(\cos ax\sin ax)^۲$$

$$=(\frac{۱}{۲}\sin ۲ax)^۲=\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲ax=\frac{۱}{۴}(\frac{۱-\cos ۴ax}{۲})$$

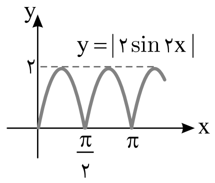
بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|۴a|}$ است. پس

$$\frac{۲\pi}{|۴a|}=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow |a|=۲\Rightarrow a=\pm ۲$$

۵۵۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=۴|\sin x\cos x|=۴|\frac{۱}{۲}\sin ۲x|=|۲\sin ۲x|$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\sin ۲x$ به‌دست آید. سپس قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم.



اکنـون کافی اسـت نمودار تابع را فقط در یـک دورهٔ تناوب مثلاً در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ رسم کنیم.

۵۵۸- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجـه کنید کـه کمترین مقدار تابـع برابر $۱-|a|$ است که با توجه به نمودار تابع، برابر -۱ است:

$$۱-|a|=-۱\Rightarrow|a|=۲\Rightarrow a=\pm۲$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار مقدار $f(۰)$ مثبت است:

$$f(۰)>۰\Rightarrow۱+a\sin\frac{\pi}{۴}>۰\Rightarrow\frac{a\sqrt{۲}}{۲}+۱>۰\Rightarrow a>-\sqrt{۲}$$

بنابراین فقط $a=۲$ قابل قبول اسـت. با توجه به نمودار تابع، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۹}{۲}-\frac{۱}{۲}=۴$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{b}|}=۴\Rightarrow|b|=۲\Rightarrow b=\pm۲$$

بـا توجـه به اینکه تابـع $f(x)=۱+۲\sin(\frac{\pi}{b}x+\frac{\pi}{۴})$ در یک همسـایگی صفر صعودی است، فقط مقدار $b=۲$ قابل قبول است. پس $a+b=۴$. توجه کنید کـه اگـر $b=-۲$، آن‌گاه $f(x)=۱+۲\sin(-\frac{\pi}{۲}x+\frac{\pi}{۴})$ و $f(\frac{۱}{۲})=۱$ کـه با توجه به شکل این‌طور نیست.

۵۵۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

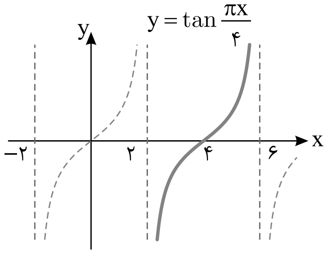
$$۰\le x\le۲\Rightarrow۰\le\frac{\pi x}{۴}\le\frac{\pi}{۲}\Rightarrow-\frac{\pi}{۳}\le\frac{\pi x}{۴}-\frac{\pi}{۳}\le\frac{\pi}{۶}$$

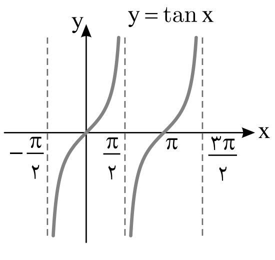
از طرف دیگر تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۶}]$ اکیداً صعودی است، پس تابع f روی این بازه اکیداً نزولی است. بنابراین

$$-\tan\frac{\pi}{۶}\le-\tan(\frac{\pi x}{۴}-\frac{\pi}{۳})\le-\tan(-\frac{\pi}{۳})\Rightarrow-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\le f(x)\le\sqrt{۳}$$

پس $R_f=[-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\sqrt{۳}]$.

۵۶۰- گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=\tan x$ را رسـم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{۴}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. پس حداکثـر مقـدار a بـرای اینکه تابـع f روی دامنـه‌اش یعنی بـازهٔ $(۲,a)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۶ است.





۵۶۱- گزینهٔ ۱ جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند

$$۳x=۲k\pi+۲x\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۳x=۲k\pi-۲x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۵}$ شامل جواب‌های به‌صورت $۲k\pi$ هم هستند (مثلاً اگـر در $\frac{۲k\pi}{۵}$ قرار دهید $k=۵$، آن‌گاه جواب ۲π به‌دسـت می‌آید که از قرار دادن $k=۱$ در $۲k\pi$ حاصل می‌شـود). پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۵}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

۵۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin\frac{x}{۴}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\sin\frac{\pi}{۴}$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۸k\pi+\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۸k\pi+۳\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۶۳- گزینهٔ ۳ اگـر نمـودار تابع f محور طول‌هـا را در نقطه‌ای با طول x قطع کند، $f(x)=۰$. پس

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow۲x-\frac{\pi}{۳}=k\pi$$

$$۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{(۳k+۱)\pi}{۶},\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-\frac{\pi}{۲}<\frac{(۳k+۱)\pi}{۶}<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow-۳<۳k+۱<۹\Rightarrow-\frac{۴}{۳}<k<\frac{۸}{۳}$$

بنابراین به ازای $k=-۱$، $k=۰$، $k=۱$ و $k=۲$ چهار مقدار برای x به‌دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها هستند.

۵۶۴- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{۵})=-\sin x\Rightarrow\cos(x+\frac{\pi}{۵})=\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+\frac{\pi}{۵}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+x\Rightarrow۲k\pi=-\frac{۳\pi}{۱۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$x+\frac{\pi}{۵}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-x\Rightarrow x=k\pi-\frac{۷\pi}{۲۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۶۵- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin۲x(\cos۲x-۱)=۰\Rightarrow\sin۲x=۰\ \text{یا}\ \cos۲x=۱$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲},\ k\in\mathbb{Z},\quad ۲x=۲k\pi\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های معادلهٔ دوم جزء جواب‌های معادلهٔ اول هسـتند، بنابراین جواب‌های معادلهٔ اصلی $x=\frac{k\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ است.

۵۶۶- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=\sin ۲x$، آن‌گاه معادله به‌صورت $۲t^۲-۷t+۵=۰$ درمی‌آید و از حل این معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود $t=۱$ و $t=\frac{۵}{۲}$. بنابراین

$$\sin ۲x=۱\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin ۲x=\frac{۵}{۲}\quad (\text{غ.ق.ق.})$$

۵۶۷- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲\sin ۲x\cos ۲x=\sqrt{۲}\sin ۲x\Rightarrow ۲\sin ۲x(\cos ۲x-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos ۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۸}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{۷\pi}{۸},\frac{\pi}{۸},\pi,\frac{\pi}{۲},۰$. پس معادله پنج جواب در این بازه دارد.

۵۶۸- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۲\cos^۲ x-۱=\cos x-۱\Rightarrow \cos x(۲\cos x-۱)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\quad \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}$$

۵۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos ۲x+۲\sin^۲ x=\sin ۲x\Rightarrow ۱-۲\sin^۲ x+۲\sin^۲ x=\sin ۲x$$

$$\sin ۲x=۱$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۷۰- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x(۱-\sin^۲ x)-\cos x(۱-\cos^۲ x)=۰$$

$$\sin x\cos^۲ x-\cos x\sin^۲ x=۰$$

$$\sin x\cos x(\cos x-\sin x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sin ۲x(\cos x-\sin x)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند از صفر، $\frac{\pi}{۲}$، π، $\frac{۳\pi}{۲}$، ۲π، $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۵\pi}{۴}$ که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{۱۳\pi}{۲}$.

۵۷۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۵x=۲k\pi+۴x\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۵x=۲k\pi-۴x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۹},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۹}$ شامل جواب‌های به‌صورت $۲k\pi$ هم هستند (مثلاً اگر در $\frac{۲k\pi}{۹}$ قرار دهید $k=۹$، آن‌گاه جواب ۲π به‌دست می‌آید که از قرار دادن $k=۱$ در $۲k\pi$ حاصل می‌شود). پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۹},\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

راه‌حل دوم $x=۰$ جواب معادله است، پس گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند (به ازای هیچ مقدار صحیح k، $x=۰$ به‌دست نمی‌آید). اگر $k=۹$، آن‌گاه $\frac{k\pi}{۹}=\pi$، اما $x=\pi$ جواب معادله نیست، پس گزینهٔ (۳) هم رد می‌شود.

۵۷۲- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲\sin x=-\sqrt{۳}\Rightarrow\sin x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\sin x=\sin(-\frac{\pi}{۳})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\ ,\ x=۲k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\ ,\ x=۲k\pi+\frac{۴\pi}{۳}$$

۵۷۳- گزینهٔ ۳ در نقاطی که $\sin ۳x=۱$، نمودار تابع f حداکثر مقدار خود را دارد. پس

$$۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{(۴k+۱)\pi}{۶},k\in\mathbb{Z}$$

k	-۱	۰	۱	۲
x	$-\frac{\pi}{۲}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	$\frac{۳\pi}{۲}$

بنابراین نمودار تابع در بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$، چهار بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد. برای پیدا کردن نقاطی که نمودار تابع در آن‌ها حداکثر می‌شود، می‌توانیم به شکل زیر نیز عمل کنیم:

$$-\pi\leq\frac{(۴k+۱)\pi}{۶}\leq ۲\pi\Rightarrow -۶\leq ۴k+۱\leq ۱۲\Rightarrow -۷\leq ۴k\leq ۱۱$$

$$-\frac{۷}{۴}\leq k\leq\frac{۱۱}{۴}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-۱,۰,۱,۲\}$$

۵۷۴- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin\frac{x}{۲}=\cos\frac{۲x}{۳}\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲})=\cos\frac{۲x}{۳}$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند

$$\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲}=۲k\pi+\frac{۲x}{۳}\Rightarrow x=\frac{(-۱۲k+۳)\pi}{۷}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲}=۲k\pi-\frac{۲x}{۳}\Rightarrow x=۱۲k\pi-۳\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ را مشخص می‌کنیم. واضح است که هیچ‌یک از جواب‌های به‌صورت $x=۱۲k\pi-۳\pi$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ قرار ندارند. پس جواب‌های به‌صورت $x=\frac{(-۱۲k+۳)\pi}{۷}$ را بررسی می‌کنیم

k	۰	۱	-۱
x	$\frac{۳\pi}{۷}$	$\frac{-۹\pi}{۷}$ (غ.ق.ق.)	$\frac{۱۵\pi}{۷}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله فقط یک جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۵۷۵- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{۲}\sin^{۲}x-\sin x=۰\Rightarrow \sin x(\sqrt{۲}\sin x-۱)=۰$$

$$\sin x=۰ \text{ یا } \sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از π، $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ که مجموع آن‌ها برابر ۲π است.

۵۷۶- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(۱-\sin^{۲}x)-۳\sin x-۳=۰\Rightarrow ۲\sin^{۲}x+۳\sin x+۱=۰$$

اگر فرض کنیم $t=\sin x$، معادله به‌صورت $۲t^{۲}+۳t+۱=۰$ درمی‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود $t=-۱$ و $t=-\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$\sin x=-۱\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۲}\ ,\qquad \sin x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۶},-\frac{۵\pi}{۶}$$

توجه کنید که فقط جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,۰)$ را مشخص کرده‌ایم که تعداد آن‌ها سه‌تاست.

۵۷۷- گزینهٔ ۱ چون $\sin ۴x\neq ۰$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱}{\cos ۲x}=\frac{۱}{\sin ۴x}\Rightarrow \sin ۴x=\cos ۲x\Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x=\cos ۲x$$

$$۲\sin ۲x\cos ۲x-\cos ۲x=۰\Rightarrow \cos ۲x(۲\sin ۲x-۱)=۰$$

$\cos ۲x=۰$ (غ.ق.ق.)

$$\sin ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$، که مجموع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

۵۷۸- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=\frac{۳\sin x}{\cos x}\Rightarrow \sin ۲x\cos x=۳\sin x\cos ۲x$$

اکنون از اتحادهای $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $\cos ۲x=۲\cos^{۲}x-۱$ استفاده می‌کنیم

$$۲\sin x\cos^{۲}x-۳\sin x(۲\cos^{۲}x-۱)=۰$$

$$\sin x(۲\cos^{۲}x-۶\cos^{۲}x+۳)=۰\Rightarrow \sin x(۳-۴\cos^{۲}x)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=۰\Rightarrow x=\pi$$

$$\cos^{۲}x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶},\frac{۷\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر است با ۵π.

۵۷۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\cos^{۲}x+\sin^{۲}x}{\sin^{۲}x\cos^{۲}x}=\frac{۱۶}{۳}$$

$$۱۶\sin^{۲}x\cos^{۲}x=۳\Rightarrow ۴(۲\sin x\cos x)^{۲}=۳$$

$$۴\sin^{۲}۲x=۳\Rightarrow \sin^{۲}۲x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \sin ۲x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}\ ,\qquad ۲x=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}$$

$$۲x=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳}\ ,\qquad ۲x=\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۶}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ برابر است با ۲π.

۵۸۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+\frac{\pi}{۹}-(x-\frac{۷\pi}{۱۸})=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x-\frac{۷\pi}{۱۸}=(x+\frac{\pi}{۹})-\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})+۲\sin^{۲}(-\frac{\pi}{۲}+(x+\frac{\pi}{۹}))=۲$$

$$\sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})+۲\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})=۲$$

$$۱-\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})+۲\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})=۲$$

$$\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})=۱\Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{۹})=\pm ۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۹})=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر است:

$$x+\frac{\pi}{۹}=k\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۹}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۸۱- گزینهٔ ۳ جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۵x=۲k\pi+۳x\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۵x=۲k\pi+\pi-۳x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸},\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۸۲- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos\frac{x}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos\frac{x}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{۲}=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۴k\pi\pm\frac{۴\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\pi,۲\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	-۱
$x=۴k\pi-\frac{۴\pi}{۳}$	$-\frac{۴\pi}{۳}$ (غ.ق.ق.)	$۴\pi-\frac{۴\pi}{۳}$ (غ.ق.ق.)	$-۴\pi-\frac{۴\pi}{۳}$ (غ.ق.ق.)

k	۰	۱	-۱
$x=۴k\pi+\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$۴\pi+\frac{۴\pi}{۳}$ (غ.ق.ق.)	$-۴\pi+\frac{۴\pi}{۳}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادلهٔ فوق یک جواب در بازهٔ $(-\pi,۲\pi)$ دارد.

۵۸۳- گزینهٔ ۳ در نقاطی کـه $\cos ۴x=۱$، تابع f به حداقل مقدار خود می‌رسد. پس

$$۴x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

k	-۱	۰	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$

بنابراین در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ نمودار تابع ۵ بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۵۸۴- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت $\cos(۲x-\frac{\pi}{۹})=\cos(\frac{\pi}{۲}+۲x)$ می‌نویسیم. پس جواب کلی معادله به‌صورت زیر است

$$۲x-\frac{\pi}{۹}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۲x\Rightarrow ۲k\pi=-\frac{۱۱\pi}{۱۸},\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$۲x-\frac{\pi}{۹}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{۷\pi}{۷۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۸۵- گزینهٔ ۲ جواب‌های معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۲\cos^۳ x-\cos x=۰\Rightarrow\cos x(۲\cos^۲ x-۱)=۰$$

$$\cos x=۰, \quad \cos x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

چون جواب‌های معادله را در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ می‌خواهیم، پس این جواب‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

بنابراین معادله شش جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۵۸۶- گزینهٔ ۳ با توجه به $\sin(\pi+x)=-\sin x$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۲ x-\sin x-۲=۰\Rightarrow(\sin x+۱)(\sin x-۲)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x-۲=۰\Rightarrow\sin x=۲\quad\text{(غ.ق.ق.)}$$

$$\sin x+۱=۰\Rightarrow\sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۸۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\cos ۲x=۱-\sin^۲ x\Rightarrow\cos ۲x=\cos^۲ x$$

اکنون از اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ استفاده می‌کنیم:

$$۲\cos^۲ x-۱=\cos^۲ x\Rightarrow\cos^۲ x=۱\Rightarrow\cos x=\pm۱$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x=۲k\pi\ \text{یا}\ x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند از صفر، π و ۲π.

راه‌حل دوم از اتحاد $۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۱-\cos ۲x=\sin^۲ x\Rightarrow ۲\sin^۲ x=\sin^۲ x\Rightarrow\sin^۲ x=۰\Rightarrow\sin x=۰$$

$$x=k\pi, k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]}x=۰, x=\pi, x=۲\pi$$

۵۸۸- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم، سپس از اتحاد $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ استفاده می‌کنیم.

$$۱+\cos\frac{x}{۲}=-\cos x\xrightarrow{\cos x=۲\cos^۲\frac{x}{۲}-۱}$$

$$۱+\cos\frac{x}{۲}=-۲\cos^۲\frac{x}{۲}+۱\Rightarrow\cos\frac{x}{۲}(۲\cos\frac{x}{۲}+۱)=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است

$$\cos\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos\frac{x}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۲}=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۴k\pi\pm\frac{۴\pi}{۳},\ k\in\mathbb{Z}$$

از جواب‌های $x=۴k\pi-\frac{۴\pi}{۳}$ هیچ یک در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ قرار ندارند، ولی از جواب‌های $x=۲k\pi+\pi$ و $x=۴k\pi+\frac{۴\pi}{۳}$ جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ به‌ازای $k=۰$ به‌دست می‌آیند که π و $\frac{۴\pi}{۳}$ هستند و مجموع آن‌ها $\frac{۷\pi}{۳}$ است.

۵۸۹- گزینهٔ ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۲\frac{x}{۲}+\cos^۲\frac{x}{۲}-۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}=۱$$

$$\xrightarrow{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}=\sin x}۱-\sin x=۱\Rightarrow\sin x=۰$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارتند از $x=۰$، $x=\pi$ و $x=۲\pi$. ولی توجه کنید که جواب $x=۰$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند و قابل قبول نیست. این جواب به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده است. بنابراین معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارد.

۵۹۰- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که از اتحادهای چاق و لاغر و $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$(\cos x-\sin x)(\cos^۲ x+\sin x\cos x+\sin^۲ x)=\cos^۲ x-\sin^۲ x$$

$$(\cos x-\sin x)(۱+\sin x\cos x)-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=۰$$

$$(\cos x-\sin x)(۱+\sin x\cos x-\sin x-\cos x)=۰$$

$$(\cos x-\sin x)(۱-\sin x)(۱-\cos x)=۰$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

$$\sin x=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}, \quad \cos x=۱\Rightarrow x=۰,۲\pi$$

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۵۹۱- گزینهٔ ۳ جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۳x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+x-\frac{\pi}{۹}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۹},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۳x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\pi-x+\frac{\pi}{۹}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{۱۳\pi}{۳۶},\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۰<k\pi+\frac{\pi}{۹}<۲\pi\Rightarrow-\frac{۱}{۹}<k<\frac{۱۷}{۹}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{۰,۱\}$$

$$۰<\frac{k\pi}{۲}+\frac{۱۳\pi}{۳۶}<۲\pi\Rightarrow\frac{-۱۳}{۱۸}<k<\frac{۵۹}{۱۸}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{۰,۱,۲,۳\}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ شش جواب دارد.

۵۹۲- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos ۳x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos ۳x=\cos\frac{\pi}{۳}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۳x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\pm\frac{\pi}{۹}=\frac{(۶k\pm۱)\pi}{۹}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ را معین می‌کنیم

k	۰	۱	۲
$x=(۶k+۱)\frac{\pi}{۹}$	$\frac{\pi}{۹}$	$\frac{۷\pi}{۹}$	$\frac{۱۳\pi}{۹}$
			(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x=(۶k-۱)\frac{\pi}{۹}$	$-\frac{\pi}{۹}$	$\frac{۵\pi}{۹}$	$\frac{۱۱\pi}{۹}$
	(غ.ق.ق.)		(غ.ق.ق.)

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ برابر است با

$$\frac{\pi}{۹}+\frac{۷\pi}{۹}+\frac{۵\pi}{۹}=\frac{۱۳\pi}{۹}$$

۵۹۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد $۲\cos^۲\alpha-۱=\cos ۲\alpha$ ، معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(۳x-\frac{\pi}{۲})=۰\Rightarrow \sin ۳x=۰$$

$$۳x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

۵۹۴- گزینهٔ ۲ چون $\cos(x-\frac{\pi}{۶})\neq۰$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{۶})=-\sin ۳x\Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{۶})=\cos(\frac{\pi}{۲}+۳x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۳x\Rightarrow x=-k\pi-\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{x\in(۰,\pi)}$$

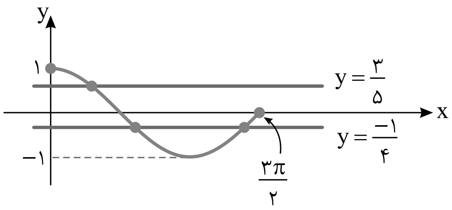
$$۰<-k\pi-\frac{\pi}{۳}<\pi\Rightarrow\frac{۱}{۳}<-k<\frac{۴}{۳}\Rightarrow-\frac{۴}{۳}<k<-\frac{۱}{۳}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-۱\}$$

$$x-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۳x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲}\xrightarrow{x\in(۰,\pi)}$$

$$۰<\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲}<\pi\Rightarrow\frac{۲}{۱۲}<k<\frac{۲۶}{۱۲}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{۱,۲\}$$

پس جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۵\pi}{۱۲}$ و $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ که $\frac{۲\pi}{۳}$ قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج در معادلهٔ اصلی می‌شود (توجه کنید که این جواب در اثر ضرب کردن طرفین معادله در $\cos(x-\frac{\pi}{۶})$ به وجود آمده است). بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(۰,\pi)$ دارد.

۵۹۵- گزینهٔ ۳ جواب‌های معادله به‌صورت $\cos x=-\frac{۱}{۴}$ یا $\cos x=\frac{۳}{۵}$ هستند. پس با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ و خطوط $y=-\frac{۱}{۴}$ و $y=\frac{۳}{۵}$ ، معادلهٔ $\cos x=\frac{۳}{۵}$ در بازهٔ $[۰,\frac{۳\pi}{۲}]$ یک جواب و معادلهٔ $\cos x=-\frac{۱}{۴}$ در این بازه دو جواب دارد. پس معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ فوق سه جواب دارد.



۵۹۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=۲\Rightarrow\frac{\sin^۲x+\cos^۲x}{\sin x\cos x}=۲$$

$$\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=۲\Rightarrow\sin ۲x=۱$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

راه‌حل دوم معادله را به کمک اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۲}{\sin ۲x}=۲\Rightarrow\sin ۲x=۱\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۵۹۷- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد $\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱-\cos ۲x}{۲}+\frac{۱-\cos ۸x}{۲}=۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۲x+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۸x=۱$$

$$\cos ۸x=-\cos ۲x\Rightarrow\cos ۸x=\cos(\pi-۲x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۸x=۲k\pi+\pi-۲x\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۱۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۸x=۲k\pi-\pi+۲x\Rightarrow x=(۲k-۱)\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
$x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۱۰}$	$\frac{\pi}{۱۰}$	$\frac{۳\pi}{۱۰}$	$\frac{\pi}{۲}$
			(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x=(۲k-۱)\frac{\pi}{۶}$	$-\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۲}$
	(غ.ق.ق.)		(غ.ق.ق.)

پس جواب‌های معادله که در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ قرار دارند عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۰}$، $\frac{۳\pi}{۱۰}$ و $\frac{\pi}{۶}$.

۵۹۸- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos^۴x-\sin^۴x=۱\Rightarrow(\cos^۲x+\sin^۲x)(\cos^۲x-\sin^۲x)=۱$$

$$\cos ۲x=۱$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۳\pi)$ به ازای $k=۱,۲$ به‌دست می‌آیند که عبارت‌اند از π و ۲π و مجموع آن‌ها برابر ۳π است.

۵۹۹- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\cos x$ ، آن‌گاه $\sin^2 x=1-t^2$ و معادله به‌صورت $(2-\sqrt{2})(1-t^2)+t-1=0$ در می‌آید. بنابراین

$$(2-\sqrt{2})(1-t)(1+t)-(1-t)=0$$

$$(1-t)((2-\sqrt{2})(1+t)-1)=0$$

$$(1-t)(2-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})t-1)=0$$

$$t=1\,,\quad t=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=1\Rightarrow x=0\,,\qquad \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ، سه است.

۶۰۰- گزینهٔ ۲ دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم و از اتحاد $2\sin x\cos x=\sin 2x$ استفاده می‌کنیم.

$$2(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)=3\Rightarrow 2(1+\sin 2x)=3$$

$$\sin 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,\pi)$ به ازای $k=0$ ، $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ است، پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

۶۰۱- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})=\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

بنابراین جواب‌های آن به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2k\pi=-\frac{7\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{13\pi}{24},k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	0	1	2	-1	-2
x	$\frac{13\pi}{24}$	$\frac{37\pi}{24}$	$\frac{61\pi}{24}$	$-\frac{11\pi}{24}$	$-\frac{35\pi}{24}$
			(غ.ق.ق.)		(غ.ق.ق.)

پس معادله سه جواب در بازهٔ فوق دارد.

۶۰۲- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(x+\frac{5\pi}{36})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x+\frac{5\pi}{36}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{2\pi}{18}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x+\frac{5\pi}{36}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{11\pi}{18}$$

پس i می‌تواند برابر ۲ یا ۱۱ باشد.

۶۰۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

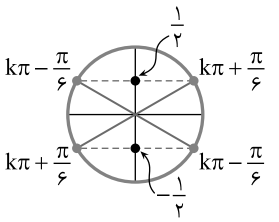
$$\sin^2(5x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin(5x-\frac{\pi}{3})=\pm\frac{1}{2}$$

با توجه به شکل زیر جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$5x-\frac{\pi}{3}=k\pi\pm\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$5x=k\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}=\frac{k\pi}{5}+\frac{3\pi}{30}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$5x=k\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{30}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$



بنابراین i می‌تواند مقادیر ۳ و ۱ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر ۴ است.

۶۰۴- گزینهٔ ۱ چون $\cos 2x\neq 0$ ، طرفین معادله را در $\cos 2x$ ضرب می‌کنیم

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\cos 2x\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{2}-2x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}-2x\Rightarrow x=\frac{(8k+1)\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+2x\Rightarrow x=-\frac{(8k+1)\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

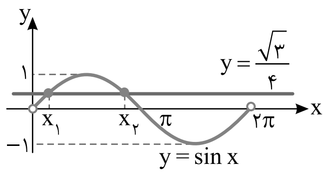
اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	0	1	2
$x=\frac{(8k+1)\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{12}$
			(غ.ق.ق.)

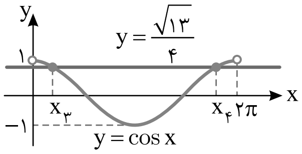
k	0	1	-1
$x=-\frac{(8k+1)\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{9\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)

جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{3\pi}{4}$ ولی $\frac{3\pi}{4}$ قابل قبول نیست، زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادلهٔ اصلی می‌شود (توجه کنید که $x=\frac{3\pi}{4}$ در اثر ضرب کردن معادله در $\cos 2x$ به وجود آمده است).
پس تعداد جواب‌ها در بازهٔ $(0,\pi)$ برابر یک است.

۶۰۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ یا $\cos x=\frac{\sqrt{13}}{4}$. با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ و خط $y=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، معادلهٔ $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ دو جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.



همچنین با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$، معادلهٔ $\cos x=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$ دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



ولی توجه کنید که یکی از این جواب‌ها $(x_۳)$ همان جواب معادلهٔ $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ است $(x_۱)$، زیرا $(\frac{\sqrt{۳}}{۴})^۲+(\frac{\sqrt{۱۳}}{۴})^۲=۱$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر مسئله سه جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۶۰۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که $\cos^۲ x-\sin^۲ x=\cos ۲x$.

$$-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=-\cos x\Rightarrow \cos ۲x=\cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} ۲x=۲k\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ ۲x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

واضح است که جواب‌های $\frac{۲k\pi}{۳}$ شامل جواب‌های $۲k\pi$ نیز می‌شوند، پس جواب‌های کلی به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

راه‌حل دوم $x=۰$ جواب معادله است، پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. به ازای $k=۳$، گزینهٔ (۱) برابر π می‌شود، اما $x=\pi$ جواب معادله نیست:

$$\sin^۲\pi-\cos^۲\pi=-۱\ ,\qquad \sin(\frac{۳\pi}{۲}-\pi)=\sin\frac{\pi}{۲}=۱$$

بنابراین گزینهٔ (۱) هم رد می‌شود.

۶۰۷- گزینهٔ ۴ از اتحاد مثلثاتی $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$ کمک می‌گیریم و معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\cos^۲ x-\sin^۲ x$$

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

طرفین معادله را در $\cos x+\sin x$ ضرب می‌کنیم

$$\cos x-\sin x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^۲$$

$$\begin{cases}\cos x-\sin x=۰ & (۱)\\ (\cos x+\sin x)^۲=۱ & (۲)\end{cases}$$

از معادلهٔ (۱) جواب‌های زیر در بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست می‌آید:

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴}$$

از معادلهٔ (۲) جواب‌های زیر در بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست می‌آید:

$$\cos^۲ x+\sin^۲ x+۲\underbrace{\sin x\cos x}_{\sin ۲x}=۱\Rightarrow \sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi$$

$$x=\frac{k\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[۰,\pi]}x=۰\ ,\ x=\frac{\pi}{۲}\ ,\ x=\pi$$

پس مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ برابر $\frac{۷\pi}{۴}$ است.

۶۰۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin x+\cos x)(\sin^۲ x-\sin x\cos x+\cos^۲ x)=\sin x$$

$$(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)=\sin x$$

$$\sin x-\sin^۲ x\cos x+\cos x-\sin x\cos^۲ x=\sin x$$

$$\cos x(-\sin^۲ x+۱-\sin x\cos x)=۰$$

$$\cos x(\cos^۲ x-\sin x\cos x)=۰\Rightarrow\cos^۲ x(\cos x-\sin x)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\qquad \cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

پس معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=\sin x\Rightarrow\sin x-\sin^۳ x-\cos^۳ x=۰$$

$$\sin x(۱-\sin^۲ x)-\cos^۳ x=۰\Rightarrow\sin x\cos^۲ x-\cos^۳ x=۰$$

$$\cos^۲ x(\sin x-\cos x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\\ \sin x=\cos x\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چهار جواب دارد.

۶۰۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^۲ x=۲-۲\sin^۲ x\Rightarrow\tan^۲ x=۲(۱-\sin^۲ x)$$

$$\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}=۲\cos^۲ x\xrightarrow{\cos x\neq۰}\sin^۲ x=۲\cos^۴ x$$

$$۱-\cos^۲ x=۲\cos^۴ x\Rightarrow۲\cos^۴ x+\cos^۲ x-۱=۰$$

$$(\cos^۲ x+۱)(۲\cos^۲ x-۱)=۰$$

چون $\cos^۲ x+۱\neq۰$، بنابراین

$$۲\cos^۲ x=۱\Rightarrow\cos^۲ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۴},\ \ k\in\mathbb{Z}$$

۶۱۰- گزینهٔ ۲ از $\cos(۲\pi\sin x)=-۱$ نتیجه می‌شود

$$۲\pi\sin x=۲k\pi+\pi\Rightarrow\sin x=k+\frac{۱}{۲},k\in\mathbb{Z}$$

با توجه به $-۱\leq\sin x\leq۱$ نتیجه می‌شود که k می‌تواند مقادیر صفر و -۱ را داشته باشد. بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$k=۰\Rightarrow\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},x=\frac{۵\pi}{۶}$$

$$k=-۱\Rightarrow\sin x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۶},x=\frac{۱۱\pi}{۶}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با ۴π.

۶۱۱- گزینهٔ ۳ در صورت کسر از $\sin ۲۵^\circ$ و در مخرج کسر از $\cos ۲۵^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{\sin ۲۵^\circ(۱-\sin^۲ ۲۵^\circ)}{\cos ۲۵^\circ(۱-\cos^۲ ۲۵^\circ)}=\frac{\sin ۲۵^\circ\times\cos^۲ ۲۵^\circ}{\cos ۲۵^\circ\times\sin^۲ ۲۵^\circ}=\frac{\cos ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}=\cot ۲۵^\circ$$

۶۱۲- گزینهٔ ۱ دو طرف تساوی $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۱}{۳}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۹}$$

$$۱+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۹}\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{۸}{۹}$$

اگر فرض کنیم $A=\sin\alpha-\cos\alpha$ ، آن‌گاه

$$A^۲=(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=۱-(-\frac{۸}{۹})=\frac{۱۷}{۹}\Rightarrow A=\pm\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم قرار دارد، $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$. پس مقدار $\sin\alpha-\cos\alpha$ منفی است و در نتیجه $A=-\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$.

۶۱۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم اندازهٔ این زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $D=\frac{۲۰۰}{\pi}R-۵$. از تساوی $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$ به‌دست می‌آید

$$\frac{\frac{۲۰۰}{\pi}R-۵}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow ۱۸۰R=۲۰۰R-۵\pi\Rightarrow ۲۰R=۵\pi\Rightarrow R=\frac{\pi}{۴}$$

۶۱۴- گزینهٔ ۳ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دورهٔ تناوب برابر ۶ است، پس دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin(b\pi x)$ برابر ۲ است:

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۲\Rightarrow\frac{۱}{|b|}=۱\Rightarrow b=\pm۱$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است. پس $۴=|a|$. در نتیجه $a=\pm۴$.

با توجه به نمودار که در شروع به‌صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases}a=۴\\ b=-۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=۴\sin(-\pi x)\ ,\quad \begin{cases}a=-۴\\ b=۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=-۴\sin(\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر ۴- است.

۶۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cot۳۸۰^\circ=\cot(۲۷۰^\circ+۱۱۰^\circ)=-\tan۱۱۰^\circ$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۱-\cot۳۸۰^\circ}+\frac{۱}{۱+\cot۱۱۰^\circ}=\frac{۱}{۱+\tan۱۱۰^\circ}+\frac{۱}{۱+\cot۱۱۰^\circ}$$

$$=\frac{۱+\cot۱۱۰^\circ+۱+\tan۱۱۰^\circ}{(۱+\tan۱۱۰^\circ)(۱+\cot۱۱۰^\circ)}$$

$$=\frac{۲+\tan۱۱۰^\circ+\cot۱۱۰^\circ}{۱+\cot۱۱۰^\circ+\tan۱۱۰^\circ+\tan۱۱۰^\circ\cot۱۱۰^\circ}$$

$$=\frac{۲+\tan۱۱۰^\circ+\cot۱۱۰^\circ}{۲+\tan۱۱۰^\circ+\cot۱۱۰^\circ}=۱$$

۶۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$۷a+۹a=\frac{۷\pi}{۳۲}+\frac{۹\pi}{۳۲}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۹a=\frac{\pi}{۲}-۷a\Rightarrow\cos۹a=\sin۷a$$

به همین ترتیب

$$۲۱a+۲۷a=\frac{۲۱\pi}{۳۲}+\frac{۲۷\pi}{۳۲}=\frac{۴۸\pi}{۳۲}=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow ۲۷a=\frac{۳\pi}{۲}-۲۱a$$

$$\cos۲۷a=-\sin۲۱a$$

بنابراین $\frac{\sin۷a\cos۲۷a}{\sin۲۱a\cos۹a}=-\frac{\sin۷a\sin۲۱a}{\sin۲۱a\sin۷a}=-۱$.

۶۱۷- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم و از اتحادهای $\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$$

$$۱+\sin۲x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin۲x=-\frac{۳}{۴}$$

بنابراین $\cos۴x=۱-۲\sin^۲۲x=۱-۲(-\frac{۳}{۴})^۲=-\frac{۱}{۸}$.

۶۱۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\cos۴x$$

بنابراین $A=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۶}$.

۶۱۹- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $\cos۲x=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌ها به‌صورت زیر هستند: $(k\in\mathbb{Z})$

$$۲x=۲k\pi+x+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\quad ۲x=۲k\pi-x-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۲}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۱۲}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۵\pi}{۶}$ است.

۶۲۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$۱+\sin۲x=(\cos x+\sin x)^۲$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$(\cos x+\sin x)^۲=\cos x+\sin x$$

$$(\cos x+\sin x)(\cos x+\sin x-۱)=۰$$

اگر $\cos x+\sin x=۰$ ، آن‌گاه $x=k\pi-\frac{\pi}{۴}$. اگر $\cos x+\sin x=۱$ ، آن‌گاه

$$۱-\cos x=\sin x$$

از اتحادهای $۱-\cos۲\alpha=۲\sin^۲\alpha$ و $\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ به ازای $\alpha=\frac{x}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$۲\sin^۲\frac{x}{۲}=۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}$$

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi\Rightarrow x=۲k\pi\\ \sin\frac{x}{۲}=\cos\frac{x}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۲}$ ، $\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$.

۶۲۱- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $\tan\alpha\cot\alpha=۱$. بنابراین

$$A=\frac{۱-\tan\frac{\pi}{۵}+\cot\frac{\pi}{۵}-\tan\frac{\pi}{۵}\cot\frac{\pi}{۵}}{۱+\tan\frac{\pi}{۵}-\cot\frac{\pi}{۵}-\tan\frac{\pi}{۵}\cot\frac{\pi}{۵}}$$

$$=\frac{۱-\tan\frac{\pi}{۵}+\cot\frac{\pi}{۵}-۱}{۱+\tan\frac{\pi}{۵}-\cot\frac{\pi}{۵}-۱}=\frac{-(\tan\frac{\pi}{۵}-\cot\frac{\pi}{۵})}{\tan\frac{\pi}{۵}-\cot\frac{\pi}{۵}}=-۱$$

۶۲۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\cot x=\frac{۱}{\tan x}$. بنابراین از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$\frac{\tan x-\frac{۱}{\tan x}}{\tan x+\frac{۱}{\tan x}}=\frac{۷}{۲۵}\Rightarrow\frac{\tan^۲ x-۱}{\tan^۲ x+۱}=\frac{۷}{۲۵}$$

$$۲۵\tan^۲ x-۲۵=۷\tan^۲ x+۷\Rightarrow\tan^۲ x=\frac{۱۶}{۹}$$

از اتحاد $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\cos^۲ x=\frac{۱}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۱}{۱+\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۹}{۲۵}$$

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x>۰$، در نتیجه $\cos x=\frac{۳}{۵}$.

۶۲۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $\sin x+\cos x=y$. در نتیجه

$$y^۲=(\sin x+\cos x)^۲=۱+۲\sin x\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{y^۲-۱}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{y^۲-۱}{۲}=y\Rightarrow y^۲-۲y-۱=۰$$

پس $y=۱\pm\sqrt{۲}$. ولی چون $۱+\sqrt{۲}>۲$، پس $\sin x+\cos x$ نمی‌تواند با این عدد برابر باشد و در نتیجه $\sin x+\cos x=۱-\sqrt{۲}$.

۶۲۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\cos^۲ ۱۷۹^\circ=\cos^۲(۱۸۰^\circ-۱^\circ)=\cos^۲ ۱^\circ$$
$$\cos^۲ ۱۷۸^\circ=\cos^۲(۱۸۰^\circ-۲^\circ)=\cos^۲ ۲^\circ$$
$$\vdots$$
$$\cos^۲ ۹۱^\circ=\cos^۲(۱۸۰^\circ-۸۹^\circ)=\cos^۲ ۸۹^\circ$$

بنابراین

$$A=۲(\cos^۲ ۱^\circ+\cos^۲ ۲^\circ+\cdots+\cos^۲ ۸۹^\circ)+\cos^۲ ۹۰^\circ+\cos^۲ ۱۸۰^\circ$$

از طرف دیگر $\cos^۲ ۹۰^\circ=۰$ و همچنین

$$\cos^۲ ۸۹^\circ=\sin^۲ ۱^\circ,\ \cos^۲ ۸۸^\circ=\sin^۲ ۲^\circ,\ \ldots,\ \cos^۲ ۴۶^\circ=\sin^۲ ۴۴^\circ$$

بنابراین

$$A=۲(\sin^۲ ۱^\circ+\cos^۲ ۱^\circ+\sin^۲ ۲^\circ+\cos^۲ ۲^\circ+\cdots+\sin^۲ ۴۴^\circ+\cos^۲ ۴۴^\circ+\cos^۲ ۴۵^\circ)+\cos^۲ ۱۸۰^\circ$$

$$\xrightarrow[\cos^۲ ۱۸۰^\circ=۱]{\cos^۲ ۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}}A=۲(\underbrace{۱+۱+\cdots+۱}_{۴۴\text{تا}}+\frac{۱}{۲})+۱=۹۰$$

۶۲۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{۳}\le x<\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $\tan x\ge\tan(-\frac{\pi}{۳})$، زیرا تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است و در نتیجه $\tan x\ge-\sqrt{۳}$. بنابراین

$$m+۲\sqrt{۳}\ge-\sqrt{۳}\Rightarrow m\ge-۳\sqrt{۳}$$

پس حداقل مقدار m برابر $-۳\sqrt{۳}$ است.

۶۲۶- گزینهٔ ۴ بیشترین و کمترین مقدار تابع به‌ترتیب برابر ۲ و ۲- هستند. پس $|a|=۲$. نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{۴}{۳},۰)$ عبور می‌کند، بنابراین

$$f(\frac{۴}{۳})=۰\Rightarrow a\sin(\pi(b-\frac{۴}{۳}))=۰\Rightarrow\sin(\pi(b-\frac{۴}{۳}))=۰$$
$$\pi(b-\frac{۴}{۳})=k\pi\Rightarrow b=k+\frac{۴}{۳}$$

چون $۲<b<۳$، پس $b=\frac{۷}{۳}$. بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=۲\sin(\frac{۷\pi}{۳}-\pi x)$ یا $f(x)=-۲\sin(\frac{۷\pi}{۳}-\pi x)$ است. چون $f(۰)>۰$، پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=۲\sin(\frac{۷\pi}{۳}-\pi x)$ است. در نتیجه $a=۲$، $b=\frac{۷}{۳}$ و $a+b=\frac{۱۳}{۳}$.

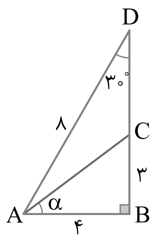
۶۲۷- گزینهٔ ۲ از اتحادهای $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ و $\cos^۲\alpha=\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$ استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{۱+\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}=\frac{\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\frac{\cos^۲ x+\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}$$
$$=\cos^۲ x-\sin^۲ x=\cos ۲x$$

بنابراین $A=(\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x})^۲=\cos^۲ ۲x=\frac{۱+\cos ۴x}{۲}$. اکنون به ازای $x=\frac{\pi}{۱۶}$ مقدار عبارت A را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱+\cos ۴(\frac{\pi}{۱۶})}{۲}=\frac{۱+\cos\frac{\pi}{۴}}{۲}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$$

۶۲۸- گزینهٔ ۲ چون $\sin\hat{D}=\sin ۳۰^\circ=\frac{AB}{۸}=\frac{۱}{۲}$، پس $AB=۴$. بنابراین با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، $AC=۵$. در نتیجه $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$ و $\cos\alpha=\frac{۴}{۵}$. بنابراین $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵})=\frac{۲۴}{۲۵}$.



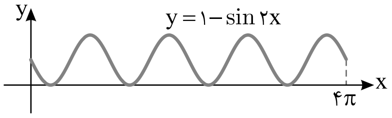
۶۲۹- گزینهٔ ۴ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم می‌شود که وقتی نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس می‌شود، $f(x)=۰$ ، پس

$$۱-\sin(۲x)=۰\Rightarrow\sin(۲x)=۱$$

$$۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}$$

$$۰<x<۴\pi\Rightarrow۰<k\pi+\frac{\pi}{۴}<۴\pi\Rightarrow۰<k+\frac{۱}{۴}<۴\Rightarrow-\frac{۱}{۴}<k<\frac{۱۵}{۴}$$

پس به ازای $k=۰$ ، $k=۱$ ، $k=۲$ و $k=۳$ چهار مقدار برای x به‌دست می‌آید که طول نقاط تماس نمودار تابع با محور طول‌هاست.



۶۳۰- گزینهٔ ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{۲}=\frac{۳\pi}{۸}+\frac{\pi}{۸}$. در ادامه معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(\frac{۳\pi}{۸}-x)=-۱$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۸}))=-۱$$

$$۲\sin(x+\frac{\pi}{۸})=-۱\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۸})=-\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases}x+\frac{\pi}{۸}=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\x+\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi-\frac{۷\pi}{۲۴}\\x=۲k\pi+\frac{۲۵\pi}{۲۴}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{۴۱\pi}{۲۴}$ و $\frac{۲۵\pi}{۲۴}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۱۱\pi}{۴}$ است.

۶۳۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cot\theta$$

بنابراین $A=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\tan\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\times۰/۲}=۳$.

ریاضی - ۹۱

۶۳۲- گزینهٔ ۴ از اتحادهای $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ و $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم و عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\cos^۲\theta}\times\frac{۱}{\sin^۲\theta}}{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\sin^۲\theta\cos^۲\theta}}{\cos^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}$$

اکنون از اتحاد $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sin^۴\theta\cos^۴\theta}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}\sin^۴ ۲\theta}=\frac{۱۶}{\sin^۴ ۲\theta}=۱۶\sin^{-۴}۲\theta$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۶۳۳- گزینهٔ ۱ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دورهٔ تناوب، برابر ۳ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=a\sin(b\pi x)$ برابر ۱ است:

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۱\Rightarrow\frac{۲}{|b|}=۱\Rightarrow b=\pm۲$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است. پس

$$|a|=۳\Rightarrow a=\pm۳$$

با توجه به نمودار که در شروع به صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases}a=۳\\b=-۲\end{cases}\Rightarrow\ y=۳\sin(-۲\pi x)$$

$$\begin{cases}a=-۳\\b=۲\end{cases}\Rightarrow\ y=-۳\sin(۲\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر ۶- است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۶۳۴- گزینهٔ ۲ از اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot۲\alpha$ استفاده می‌کنیم. اگر $\alpha=\frac{x}{۲}$ ، آن‌گاه

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=-۲\cot x=-\frac{۲}{\tan x}=\frac{-۲}{\frac{۴}{۳}}=-\frac{۳}{۲}$$

تجربی - ۹۶

۶۳۵- گزینهٔ ۴ کافی است صورت و مخرج برابر باشند به شرطی که مخرج صفر نباشد:

$$\sin ۳x=\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)\Rightarrow\sin ۳x=\sin x$$

$$\begin{cases}۳x=۲k\pi+x\Rightarrow x=k\pi & (\text{غ.ق.ق.})\\۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

به‌ازای $x=k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس این جواب غیرقابل قبول است و جواب $x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۶۳۶- گزینهٔ ۱ معادله‌رابه‌صورت $\cos ۳x=-\cos x=\cos(\pi-x)$ نوشته و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}۳x=۲k\pi+\pi-x\\۳x=۲k\pi-\pi+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\\۲x=۲k\pi-\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

با توجه به $\cos x\neq۰$ ، جواب $x=k\pi-\frac{\pi}{۲}$ غیرقابل قبول است. پس جواب کلی $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{۸}+\frac{۳\pi}{۸}=\frac{\pi}{۲}$. در ادامه معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۸}))=۱$$

$$۲\sin(x+\frac{\pi}{۸})=۱\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۸})=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\x+\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به صورت زیر هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ است:

$$x_۱=\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۸},\quad x_۲=\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۸}\Rightarrow x_۱+x_۲=\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۶۳۸- گزینهٔ ۴ زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}-x$، متمم زاویهٔ x است، پس

$$\sin۲x+\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=۰\Rightarrow\sin۲x+\sin x=۰$$

$$\sin۲x=-\sin x\Rightarrow\sin۲x=\sin(-x)$$

$$۲x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳},\quad ۲x=۲k\pi+\pi+x\Rightarrow x=(۲k+۱)\pi$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰\,,۲\pi]$ عبارت‌اند از ۰، $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۴\pi}{۳}$، ۲π و π . مجموع این جواب‌ها برابر ۵π است.

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۶۳۹- گزینهٔ ۱ معادلهٔ داده شده را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، بازنویسی کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$۲\sin^۲x+۳\cos x=۰\Rightarrow۲(۱-\cos^۲x)+۳\cos x=۰$$

$$-۲\cos^۲x+۳\cos x+۲=۰\Rightarrow\cos x=\frac{-۳\pm\sqrt{۹+۱۶}}{-۴}$$

$$\begin{cases}\cos x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\\\cos x=۲\ \text{(غ.ق.ق.)}\end{cases}$$

تجربی - ۹۵

۶۴۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** با توجه به اتحاد $۲\cos^۲x=\cos۲x+۱$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos۲x+۲\cos^۲x=۰\Rightarrow\cos۲x+\cos۲x+۱=۰$$

$$\cos۲x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos۲x=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

$$۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

راه‌حل دوم با توجه به اتحاد $\cos۲x=۲\cos^۲x-۱$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos۲x+۲\cos^۲x=۰\Rightarrow۲\cos^۲x-۱+۲\cos^۲x=۰\Rightarrow۴\cos^۲x=۱$$

$$\cos x=\pm\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\cos\frac{\pi}{۳}\\\cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\\x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

این جواب‌ها همان $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ هستند.

تجربی - ۹۶

۶۴۱- گزینهٔ ۱ از اتحاد $\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم. ابتدا دو طرف عبارت داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$۱-\sin۲\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$

چون $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin۲\alpha$، بنابراین $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\frac{۳}{۴}$.

تجربی - ۹۵

۶۴۲- گزینهٔ ۳ عبارت را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۰° می‌نویسیم:

$$A=\frac{\sin(۲۷۰^\circ-۲۰^\circ)+\sin(۷۲۰^\circ-۲۰^\circ)}{\cos(۵۴۰^\circ+۲۰^\circ)-\cos(۹۰^\circ+۲۰^\circ)}=\frac{-\cos۲۰^\circ-\sin۲۰^\circ}{-\cos۲۰^\circ+\sin۲۰^\circ}$$

سپس صورت و مخرج را بر $\cos۲۰^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{-\cos۲۰^\circ-\sin۲۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}}{\frac{-\cos۲۰^\circ+\sin۲۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}}=\frac{-۱-\tan۲۰^\circ}{-۱+\tan۲۰^\circ}=\frac{-۱-\frac{۲}{۵}}{-۱+\frac{۲}{۵}}=\frac{\frac{-۷}{۵}}{\frac{-۳}{۵}}=\frac{۷}{۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۴۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است، این مقدار زمانی به‌دست می‌آید که $\cos(bx+\frac{\pi}{۲})=-۱$، پس

$$a+۲=۱\Rightarrow a=-۱$$

در نتیجه $y=-۱-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})=-۱+۲\sin(bx)$. با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر با $\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۲\pi}{۳}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow b=\pm۳$$

برای $x>\frac{\pi}{۱۸}$ نمودار تابع $y=-۱+۲\sin(bx)$ به صورت صعودی شروع می‌شود، پس $b=۳$ قابل قبول است، یعنی $y=-۱+۲\sin(۳x)$ و مقدار $a+b$ برابر است با $-۱+۳=۲$.

ریاضی - ۹۵

۶۴۴- گزینهٔ ۴ با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد $\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^۲x-\cos^۲x)(\sin^۲x+\cos^۲x)=\sin^۲(\pi+\frac{\pi}{۴})$$

$$\sin^۲x-\cos^۲x=\sin^۲\frac{\pi}{۴}\Rightarrow-\cos۲x=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos۲x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos۲x=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

تجربی - ۹۲

۶۴۵- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$۲\cos ۲x=\frac{\cos x}{\sin x}(۴\sin x+\frac{\sin x}{\cos x})=۴\cos x+۱$$
$$۲(۲\cos^۲ x-۱)=۴\cos x+۱\Rightarrow ۴\cos^۲ x-۴\cos x-۳=۰$$
$$(۲\cos x+۱)(۲\cos x-۳)=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\cos x=\frac{۳}{۲}\ (\text{غ.ق.ق.}),\quad \cos x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۶۴۶- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=-\cos x\Rightarrow \cos ۲x=\cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi\\ ۲x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{۲k\pi}{۳}$ شامل جواب $۲k\pi$ نیز می‌شود، پس جواب‌های کلی به صورت $\frac{۲k\pi}{۳}$ هستند.

تجربی - ۹۱

۶۴۷- گزینهٔ ۱ از اتحادهای $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ و $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم. ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۲\cos^۲ x-۱)+۲\sin x\cos x=۰\Rightarrow \cos ۲x+\sin ۲x=۰$$
$$\cos ۲x=-\sin ۲x\Rightarrow \cos ۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}+۲x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۲x\Rightarrow k=-\frac{۱}{۴}\ (\text{غ.ق.ق.})\\ ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}\end{cases}$$

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos ۲x=-\sin ۲x$ به کمک دایرهٔ مثلثاتی متوجه می‌شویم:

$$۲x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$$

تجربی - ۹۴

۶۴۸- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

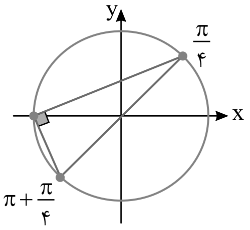
$$\frac{\sin x\cos x}{۱-\cos x}=۱+\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=۱-\cos^۲ x$$
$$\sin x\cos x=\sin^۲ x\Rightarrow \sin x(\cos x-\sin x)=۰$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi,\quad \cos x-\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

دقت کنید که به‌ازای $x=۲k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود. پس جواب‌های معادله $x=(۲k+۱)\pi$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$ هستند که روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل زیر مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱



۶۴۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که برای تعریف شدن عبارت سمت چپ معادله لازم است که

$$۱+\cos x\neq ۰\Rightarrow \cos x\neq -۱\Rightarrow x\neq ۲k\pi+\pi$$

با شرط فوق معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin ۳x+\sin ۲x=۰\Rightarrow \sin ۳x=-\sin ۲x\Rightarrow \sin ۳x=\sin(-۲x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases}۳x=۲k\pi-۲x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵},k\in\mathbb{Z}\\ ۳x=۲k\pi+\pi+۲x\Rightarrow x=۲k\pi+\pi\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۶۵۰- گزینهٔ ۳ از اتحادهای

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$$

و اتحاد مزدوج برای ساده کردن معادله استفاده می‌کنیم:

$$۲\sin ۲x\cos ۲x=(\sin^۲ x-\cos^۲ x)(\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱})$$
$$۲\sin ۲x\cos ۲x=-\cos ۲x\Rightarrow \cos ۲x(۲\sin ۲x+۱)=۰$$
$$\begin{cases}\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\\ \sin ۲x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\\ x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\end{cases}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ و $\frac{۷\pi}{۱۲}$ که مجموعشان برابر $\frac{۳۰\pi}{۱۲}=\frac{۵\pi}{۲}$ است.

ریاضی - ۹۵

فصل سوم

۶۵۱- گزینهٔ ۴ کافی است $x=۲$ عضو بازهٔ $(a-۲,۲a)$ باشد. یعنی

$$a-۲<۲\Rightarrow a<۴,\quad ۲a>۲\Rightarrow a>۱$$

بنابراین $۱<a<۴$.

۶۵۲- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع از شرط $[x]\neq ۲$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است:

$$D_f=(-\infty,۲)\cup[۳,+\infty)$$

بنابراین تابع در همسایگی چپ نقطهٔ $x=۳$ تعریف نشده است.

۶۵۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۴$ و $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=۳$،

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۶۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۰$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰} f(x+۱)=\lim_{y\to ۱} f(y)=۰$$

از طرف دیگر، اگر $x\to ۹^+$، آن‌گاه $\frac{x}{۳}\to ۳^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۹^+} f(\frac{x}{۳})=\lim_{t\to ۳^+} f(t)=۱$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۱ است.

۶۵۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ ۱، $[x]=۰$.

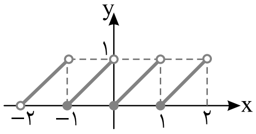
بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x[x])=\lim\limits_{x\to ۱^-} f(۰)=\lim\limits_{x\to ۱^-} ۲=۲$.

۶۵۶- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار،

$$x\to(-۱)^-\Rightarrow f(x)\to ۲^+$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to ۲^+} f(t)=-۲$.

۶۵۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که تابع در نقطه‌های $x=-۱$، $x=۰$ و $x=۱$ از بازهٔ $(-۲,۲)$ حد ندارد.



۶۵۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۵^-} f(x)=۲a(۵)-۳=۱۰a-۳$$

$$\lim_{x\to ۵^+} f(x)=۵^۲-a(۵)+b=۲۵-۵a+b$$

اکنون توجه کنید که چون $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۱۷$، پس هر یک از حدهای بالا برابر ۱۷ است:

$$\begin{cases}۱۰a-۳=۱۷\\ ۲۵-۵a+b=۱۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=۲\end{cases}\Rightarrow ab=۴$$

۶۵۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ وجود دارد.

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x+۴}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(x+۴)}{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)}=\frac{۷}{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)}=\frac{۷}{۶}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۶$. همچنین $\lim\limits_{x\to ۱} f(۲x+۱)=\lim\limits_{t\to ۳} f(t)=۶$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(۲x+۱)}{x+۲}=\frac{۶}{۱+۲}=۲$$

۶۶۰- گزینهٔ ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۶x^۲-x^۳)=۲۴-۸=۱۶$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳x^۲-x^۳)=۱۲-۸=۴$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ برابر ۲۰ است.

۶۶۱- گزینهٔ ۴ ابتدا نامعادله را حل می‌کنیم

$$|x-۱|<۲\Rightarrow -۲<x-۱<۲\Rightarrow -۱<x<۳$$

پس بازهٔ $(-۱,۳)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است که همسایگی نقطهٔ $x=-۲$ نیست.

۶۶۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=۲a,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=a-۲,\quad f(a)=a$$

بنابراین

$$۲a-(a-۲)=۳a+۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۶۶۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to ۱^+$، آن‌گاه $(۱-x^۲)\to ۰^-$ و اگر $x\to ۱^-$، آن‌گاه $(۱-x^۲)\to ۰^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^+} f(۱-x^۲)-\lim_{x\to ۱^-} f(۱-x^۲)=\lim_{t\to ۰^-} f(t)-\lim_{t\to ۰^+} f(t)=۳-۱=۲$$

۶۶۴- گزینهٔ ۳ در سمت راست نقطهٔ ۱−، $[x]=-۱$ و $|x|=-x$.

بنابراین $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(\frac{|x|}{[x]})=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(\frac{-x}{-۱})=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=-۱$.

۶۶۵- گزینهٔ ۴ چون

$$x\to ۱^+\Rightarrow f(x)\to(-۱)^+,\quad x\to(-۱)^-\Rightarrow f(x)\to ۱^-$$

می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۱^+}(fof)(x)=\lim_{t\to(-۱)^+} f(t)=-۱$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}(fof)(x)=\lim_{t\to ۱^-} f(t)=۱$$

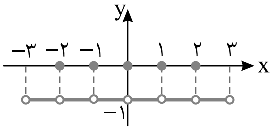
بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱^+}(fof)(x)-\lim\limits_{x\to(-۱)^-}(fof)(x)=-۱-۱=-۲$.

۶۶۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]\Rightarrow f(x)=۰$$

$$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]-۱\Rightarrow f(x)=-۱$$

بنابراین نمودار تابع f در بازهٔ $(-۳,۳)$ به شکل زیر است. با توجه به نمودار، تابع f در تمام نقاط این بازه حد دارد و حد آن برابر -۱ است.



۶۶۷- گزینهٔ ۱ این تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد، پس در $x=۲$ و $x=-۲$ نیز حد دارد. بنابراین باید حد چپ و حد راست تابع در هر یک از این نقاط برابر باشند:

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(ax^۳+x^۲)=۸a+۴$$

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x+b)=۲+b$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(ax^۳+x^۲)=-۸a+۴$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}(x+b)=-۲+b$$

بنابراین

$$\begin{cases}۸a+۴=۲+b\\-۸a+۴=-۲+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=۸a+۲\\b=-۸a+۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ab=۱\\b=۴\end{cases}$$

۶۶۸- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $\lim_{x\to۲}f(x)=L$، طبق قضایای حد

$$\lim_{x\to۲}\frac{۲f(x)}{f(x)+۱}=۳\Rightarrow\frac{۲L}{L+۱}=۳\Rightarrow۲L=۳L+۳\Rightarrow L=-۳$$

در نتیجه $\lim_{x\to۲}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)}=\frac{۲\times(-۳)-۱}{-۳}=\frac{۷}{۳}$.

۶۶۹- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=-۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}(ax[۳x]+x)=\lim_{x\to(-۲)^-}(-۷ax+x)$$
$$=۱۴a-۲$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(ax[۳x]+x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(-۶ax+x)$$
$$=۱۲a-۲$$

بنابراین

$$۱۴a-۲+۱۲a-۲=۱۱\Rightarrow۲۶a=۱۵\Rightarrow a=\frac{۱۵}{۲۶}$$

۶۷۰- گزینهٔ ۲ ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطهٔ $x=۱$ حساب می‌کنیم. اگر $x\to۱^+$، آن‌گاه $-x\to(-۱)^-$ و $۲x\to۲^+$ و اگر $x\to۱^-$، آن‌گاه $-x\to(-۱)^+$ و $۲x\to۲^-$. در نتیجه

$$\lim_{x\to۱^-}f(x)=\lim_{x\to۱^-}[۲x]+(m+۱)\lim_{x\to۱^-}[-x]=۱+(m+۱)(-۱)=-m$$

$$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^+}[۲x]+(m+۱)\lim_{x\to۱^+}[-x]=۲+(m+۱)(-۲)=-۲m$$

در نتیجه

$$-۲m=-m\Rightarrow m=۰$$

۶۷۱- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$۴-x^۲\ge۰\Rightarrow x^۲\le۴\Rightarrow-۲\le x\le۲$$

$$x-[x]\neq۰\Rightarrow x\neq[x]\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f=(-۲,-۱)\cup(-۱,۰)\cup(۰,۱)\cup(۱,۲)$ است، پس نقاط $x=\pm۱$ و $x=۰$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند ولی همسایگی محذوف آن‌ها در دامنهٔ تابع قرار دارد.

۶۷۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید اگر $x\to۳^-$، آن‌گاه $t=(x-۱)\to۲^-$. بنابراین $\lim_{x\to۳^-}f(x-۱)=\lim_{t\to۲^-}f(t)=-۱$. همچنین اگر $x\to۰^+$، آن‌گاه $t=(x+۱)\to۱^+$. بنابراین $\lim_{x\to۰^+}f(x+۱)=\lim_{t\to۱^+}f(t)=-۲$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر -۳ است.

۶۷۳- گزینهٔ ۴ در یک همسایگی راست $x=۰$ مقدارهای تابع f نزدیک ۲ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to۲^-$ و $[f(x)]=۱$. بنابراین $\lim_{x\to۰^+}[f(x)]=۱$. همچنین در یک همسایگی چپ $x=۰$ مقدارهای تابع f نزدیک -۱ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to(-۱)^-$ و $[f(x)]=-۲$.

بنابراین $\lim_{x\to۰^-}[f(x)]=-۲$، در نتیجه

$$۲\lim_{x\to۰^+}[f(x)]-\lim_{x\to۰^-}[f(x)]=۲-(-۲)=۴$$

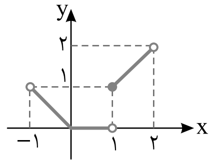
۶۷۴- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$-۱<x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow f(x)=-x$$

$$۰\le x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

$$۱\le x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow f(x)=x$$

پس نمودار تابع به شکل روبه‌رو است و تابع فقط در نقطهٔ $x=۱$ از بازهٔ $(-۱,۲)$ حد ندارد.



۶۷۵- گزینهٔ ۴ اگر x در یک همسایگی راست ۱ باشد، $x>۱$، پس $۲-x<۱$. در نتیجه $\lim_{x\to۱^+}f(۲-x)=\lim_{y\to۱^-}f(y)=۲a$. همچنین $\lim_{x\to۱^+}f(x)=a$. در نتیجه $\lim_{x\to۱^+}\frac{f(۲-x)}{f(x)}=\frac{۲a}{a}=۲$.

۶۷۶- گزینهٔ ۱ چون تابع‌های f و g در $x=a$ حد دارند، پس

$$\lim_{x\to a}(f(x)-۲g(x))=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}۲g(x)$$
$$=\lim_{x\to a}f(x)-۲\lim_{x\to a}g(x)=۲$$

همچنین

$$\lim_{x\to a}(۲f(x)-۳g(x))=\lim_{x\to a}۲f(x)-\lim_{x\to a}۳g(x)$$
$$=۲\lim_{x\to a}f(x)-۳\lim_{x\to a}g(x)=۶$$

بنابراین اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L_۱$ و $\lim_{x\to a}g(x)=L_۲$، آن‌گاه

$$\begin{cases}L_۱-۲L_۲=۲\\۲L_۱-۳L_۲=۶\end{cases}\Rightarrow L_۱=۶\ ,\ L_۲=۲$$

بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)=L_۱\times L_۲=۱۲$.

۶۷۷- گزینهٔ ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع f در نقطهٔ $x=۲$ را به‌دست می‌آوریم:

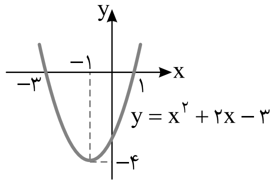
$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x[x]+۲a)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x+۲a)=۴+۲a$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(b[-x]+۳x)=\lim_{x\to ۲^-}(-۲b+۳x)=-۲b+۶$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد، در نتیجه حد چپ و حد راست تابع f در این نقطه برابرند:

$$۴+۲a=-۲b+۶\Rightarrow ۲a+۲b=۲\Rightarrow a+b=۱$$

۶۷۸- گزینهٔ ۱ در شکل زیر نمودار تابع $y=x^۲+۲x-۳$ رسم شده است. توجه کنید $\lim\limits_{x\to -۳}(x^۲+۲x-۳)=۰$. اما در سمت چپ $x=-۳$، مقدارهای تابع مثبت هستند. در نتیجه در سمت چپ $x=-۳$، $[x^۲+۲x-۳]=۰$. در نتیجه حاصل حد نیز صفر می‌شود.



۶۷۹- گزینهٔ ۳ مطابق قضیه‌های محاسبهٔ حد، اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{۱+f^۲(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{۱+(\lim\limits_{x\to a} f(x))^۲}=\frac{L}{۱+L^۲}$$

در بقیهٔ گزینه‌ها ممکن است حد مخرج کسر تابع برابر صفر و حد صورت کسر برابر صفر نباشد و در نتیجه تابع حد نداشته باشد.

۶۸۰- گزینهٔ ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $۲x$ عددی صحیح نشود، تابع $y=[۲x]$ حد دارد. در نقطه‌هایی که مقدار $۲x$ عددی صحیح شود، تابع $y=[۲x]$ حد ندارد. این نقطه‌ها را به‌دست می‌آوریم

$$۲x=k\ ,\quad k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{k}{۲}$$

$$۰<\frac{k}{۲}<۳\Rightarrow ۰<k<۶\Rightarrow k\in\{۱,۲,۳,۴,۵\}$$

پس تابع در پنج نقطه از بازهٔ $(۰,۳)$ حد ندارد.

۶۸۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to ۱^+$، آن‌گاه $(۱-x^۳)\to ۰^-$ و اگر $x\to ۱^-$، آن‌گاه $(۱-x^۳)\to ۰^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^+} f(۱-x^۳)+\lim_{x\to ۱^-} f(۱-x^۳)=\lim_{t\to ۰^-} f(t)+\lim_{t\to ۰^+} f(t)=۴+۲=۶$$

۶۸۲- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار واضح است که $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۳$. بنابراین $[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)]=[۳]=۳$. از طرف دیگر در یک همسایگی محذوف $x=۱$ مقادیر تابع f نزدیک ۳ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to ۳^-$. بنابراین در این بازه $[f(x)]=۲$، پس $\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]=\lim\limits_{x\to ۱} ۲=۲$. بنابراین

$$\frac{\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]}{[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)]}=\frac{۲}{۳}$$

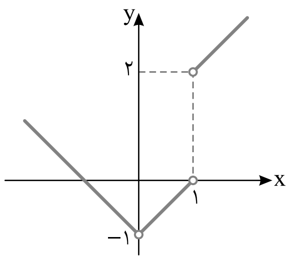
۶۸۳- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$x<۰\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲}{-x}+\frac{-(x-۱)}{x-۱}=-x-۱$$

$$۰<x<۱\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲}{x}+\frac{-(x-۱)}{x-۱}=x-۱$$

$$x>۱\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲}{x}+\frac{x-۱}{x-۱}=x+۱$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. پس تابع فقط در نقطهٔ $x=۱$ حد ندارد.



۶۸۴- گزینهٔ ۱ تابع f فقط در $x=۲$ و $x=-۲$ ممکن است حد نداشته باشد. حد چپ و حد راست تابع را در این نقاط حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} x^۲=۴,\qquad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^۳-۲x)=۴$$

$$\lim_{x\to (-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^+}(x^۳-۲x)=-۴$$

$$\lim_{x\to (-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^-} x^۲=۴$$

پس تابع در $x=۲$ حد دارد ولی در $x=-۲$ حد ندارد.

۶۸۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x^۳-x=x(x^۲-۱)$. در نتیجه اگر x از سمت چپ به صفر نزدیک شود، آن‌گاه $x^۳-x>۰$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x^۳-x)=\lim_{t\to ۰^+} f(t)=\lim_{t\to ۰^+}(\sqrt{t+۹})=۳$$

۶۸۶- گزینهٔ ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax^۲+۳)=۴a+۳$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲+۳a)=۴+۳a$$

باید حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ برابر باشند، یعنی

$$۴+۳a=۴a+۳\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲+۳a)=\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲+۳)=۱۲$.

۶۸۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{۳f(x)}{۴f(x)+۲}=۱\Rightarrow\frac{۳\lim\limits_{x\to a} f(x)}{۴\lim\limits_{x\to a} f(x)+۲}=۱\Rightarrow\frac{۳L}{۴L+۲}=۱$$

$$۴L+۲=۳L\Rightarrow L=-۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x)-۳}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} f(x)-۳}=\frac{L}{L-۳}=\frac{-۲}{-۲-۳}=\frac{۲}{۵}$$

۶۸۸- گزینهٔ ۲ تابع $y=x$ در تمام نقاط حد دارد. تابع $y=x-[x]$ در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد. پس ضرب این دو تابع یعنی $f(x)=x(x-[x])$ در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد.

در نقاط صحیح غیر صفر حد چپ و حد راست تابع $y=x-[x]$ یکسان نیستند پس تابع f نیز در این نقاط حد ندارد. ولی در $x=۰$ چون حد تابع $y=x$ برابر صفر است، پس حد تابع f هم برابر صفر است. بنابراین تابع f در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ از بازهٔ $(-۲,۲)$ حد ندارد.

۶۸۹- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\left(\frac{۴a}{x^۲}+x^۲\right)=\frac{۴a}{۴}+۴=a+۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{۳a}{x^۲}+x^۲\right)=\frac{۳a}{۴}+۴$$

بنابراین

$$a+۴+\frac{۳a}{۴}+۴=۱۰\Rightarrow\frac{۷a}{۴}=۲\Rightarrow a=\frac{۸}{۷}$$

۶۹۰- گزینهٔ ۴ اگر تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد، آن‌گاه تفاضل این تابع و تابع $y=|x|$ باید در $x=a$ حد داشته باشد. تفاضل این دو تابع همان تابع $y=f(x)$ است که باید در $x=a$ حد داشته باشد و این خلاف فرض مسئله است. پس تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

برای رد گزینه‌های (۱) و (۳)، تابع $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

این تابع در $x=۰$ حد ندارد، ولی

$$\lim_{x\to ۰}|f(x)|=\lim_{x\to ۰}۱=۱,\quad \lim_{x\to ۰}\frac{|x|}{f(x)}=۰$$

برای رد گزینهٔ (۲)، تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳} & x<۰\\ \frac{۱}{۲} & x\geq ۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید که در $x=۰$ حد ندارد ولی $\lim\limits_{x\to ۰}[f(x)]=\lim\limits_{x\to ۰}۰=۰$.

۶۹۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۴)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x+۴}{x+۱}=\frac{۵}{۲}$$

۶۹۲- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. توجه کنید که $x^۴+۴x^۳+۴x^۲=x^۲(x^۲+۴x+۴)=x^۲(x+۲)^۲$. بنابراین

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۴+۴x^۳+۴x^۲}{(x+۲)^۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲(x+۲)^۲}{(x+۲)^۲}=\lim_{x\to -۲}x^۲=۴$$

۶۹۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^۳-۸=(x-۲)(x^۲+۲x+۴)\ ,\quad x^۲-۴=(x-۲)(x+۲)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۲x+۴}{x+۲}=\frac{۴+۴+۴}{۲+۲}=۳$$

۶۹۴- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم می‌شود که $\lim\limits_{x\to -۲}f(x)=۴$. در نتیجه

$$\lim_{x\to -۲}\frac{f^۳(x)-۶۴}{f(x)-۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{f^۳(x)-۴^۳}{f(x)-۴}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(f(x)-۴)(f^۲(x)+۴f(x)+۱۶)}{f(x)-۴}$$

$$=\lim_{x\to -۲}(f^۲(x)+۴f(x)+۱۶)=۴^۲+۴\times ۴+۱۶=۴۸$$

۶۹۵- گزینهٔ ۳ یک عامل $x-۱$ را از صورت و مخرج ساده می کنیم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-۳x+۲}{x^۳+۳x-۴}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-۱-۳x+۳}{x^۳-۱+۳x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)-۳(x-۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)+۳(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x-۲)}{(x-۱)(x^۲+x+۴)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x-۲}{x^۲+x+۴}=\frac{۰}{۶}=۰$$

۶۹۶- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{\sqrt{(x-۲)^۲}}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x-۲|}{x^۲-۳x+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{(x-۲)(x-۱)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۱}{x-۱}=-۱$$

۶۹۷- گزینهٔ ۳ چون حد صورت کسر صفر است، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. که این طور نیست $(b\neq ۰)$. پس

$$\lim_{x\to ۳}(x^۲+ax+۳)=۹+۳a+۳=۱۲+۳a=۰\Rightarrow a=-۴$$

بنابراین

$$b=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x^۲+ax+۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x^۲-۴x+۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{(x-۳)(x-۱)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x+۳}{x-۱}=\frac{۳+۳}{۳-۱}=۳$$

بنابراین $a+b=-۴+۳=-۱$.

۶۹۸- گزینهٔ ۲ از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{۱-۲x^۳}}{x^۳}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\sqrt{۱-۲x^۳})(۱+\sqrt{۱-۲x^۳})}{x^۳(۱+\sqrt{۱-۲x^۳})}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-(۱-۲x^۳)}{x^۳(۱+\sqrt{۱-۲x^۳})}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۳}{x^۳(۱+\sqrt{۱-۲x^۳})}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۲}{۱+\sqrt{۱-۲x^۳}}=\frac{۲}{۱+۱}=۱$$

۶۹۹- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود

$$\lim_{x\to ۵}\frac{\sqrt{x-۱}-۲\sqrt{x-۴}}{x^۲-۶x+۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{(\sqrt{x-۱}-۲\sqrt{x-۴})(\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{x-۴})}{(x^۲-۶x+۵)(\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{x-۴})}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{x-۱-۴(x-۴)}{(x-۱)(x-۵)(\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{x-۴})}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{-۳(x-۵)}{(x-۱)(x-۵)(\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{x-۴})}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{-۳}{(x-۱)(\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{x-۴})}=\frac{-۳}{۴(۲+۲)}=\frac{-۳}{۱۶}$$

۷۰۰- گزینهٔ ۱ به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۸}\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{\sqrt{x+۱}-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۸}\left(\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{\sqrt{x+۱}-۳}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt{x+۱}+۳}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۳}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۸}\left(\frac{x-۸}{x+۱-۹}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۳}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۸}\frac{\sqrt{x+۱}+۳}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\frac{۳+۳}{۴+۴+۴}=\frac{۱}{۲}$$

۷۰۱- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است، توجه کنید که

$$(۲x+۱)^۳+(۲x-۱)^۳=۸x^۳+۱۲x^۲+۶x+۱+۸x^۳-۱۲x^۲+۶x-۱$$

$$=۱۶x^۳+۱۲x=۴x(۴x^۲+۳)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(۲x+۱)^۳+(۲x-۱)^۳}{۴x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴x(۴x^۲+۳)}{۴x}=\lim_{x\to ۰}(۴x^۲+۳)=۳$$

۷۰۲- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\sqrt{۳}}\frac{۳x^۴-۹x^۲}{x-\sqrt{۳}}=\lim_{x\to\sqrt{۳}}\frac{۳x^۲(x^۲-۳)}{x-\sqrt{۳}}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{۳}}\frac{۳x^۲(x-\sqrt{۳})(x+\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}}=\lim_{x\to\sqrt{۳}}(۳x^۲(x+\sqrt{۳}))$$

$$=۳(\sqrt{۳})^۲(\sqrt{۳}+\sqrt{۳})=۱۸\sqrt{۳}$$

۷۰۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x^۴-۲۷x=x(x^۳-۲۷)=x(x-۳)(x^۲+۳x+۹)$$

$$x^۲-x-۶=(x-۳)(x+۲)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۴-۲۷x}{x^۲-x-۶}=\lim_{x\to ۳}\frac{x(x-۳)(x^۲+۳x+۹)}{(x-۳)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{x(x^۲+۳x+۹)}{x+۲}=\frac{۳(۹+۹+۹)}{۳+۲}=\frac{۸۱}{۵}$$

۷۰۴- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۶-۱}{x^۴-x^۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۱)(x^۴+x^۲+۱)}{x^۲(x^۲-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴+x^۲+۱}{x^۲}=۳$$

۷۰۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $[x]$ در سمت چپ ۳ مساوی ۲ است. پس

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-x[x]-۳}{x[x]-۶}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۲x-۳}{۲x-۶}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(x-۳)(x+۱)}{۲(x-۳)}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x+۱}{۲}=۲$$

۷۰۶- گزینهٔ ۱ بنابر اتحاد چاق‌ولاغر، $x^۳-۸=(x-۲)(x^۲+۲x+۴)$

در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}\right)\times\left(\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x^۲+۲x+۴}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x+۲-۴}{(x-۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}\right)\times\frac{۱}{۱۲}=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{۲+\sqrt{x+۲}}\right)\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۴۸}$$

۷۰۷- گزینهٔ ۲ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x-\sqrt{x+۲}}{۳x-\sqrt{۱۵x+۶}}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{۳x+\sqrt{۱۵x+۶}}\times\frac{۳x+\sqrt{۱۵x+۶}}{x+\sqrt{x+۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x^۲-x-۲}{۹x^۲-۱۵x-۶}\times\frac{۳x+\sqrt{۱۵x+۶}}{x+\sqrt{x+۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{(x-۲)(x+۱)}{(x-۲)(۹x+۳)}\times\frac{۳x+\sqrt{۱۵x+۶}}{x+\sqrt{x+۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x+۱}{۹x+۳}\times\frac{۳x+\sqrt{۱۵x+۶}}{x+\sqrt{x+۲}}\right)=\frac{۳}{۲۱}\times\frac{۶+۶}{۲+۲}=\frac{۳}{۷}$$

۷۰۸- گزینهٔ ۴ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. فرض می‌کنیم $\sqrt[۶]{x}=t$.

در این صورت، اگر $x\to ۶۴$، آن‌گاه $t\to ۲$، بنابراین $t>۰$. اکنون می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۶۴}\frac{\sqrt{x}-۸}{\sqrt[۳]{x}-۴}=\lim_{t\to ۲}\frac{t^۳-۸}{t^۲-۴}=\lim_{t\to ۲}\frac{(t-۲)(t^۲+۲t+۴)}{(t-۲)(t+۲)}$$

$$=\lim_{t\to ۲}\frac{t^۲+۲t+۴}{t+۲}=\frac{۲^۲+۲\times۲+۴}{۲+۲}=۳$$

۷۰۹- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\sqrt[۱۲]{x}$، آن‌گاه $x=t^{۱۲}$ و $t\to ۱$.

بنابراین $t>۰$ و می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۴]{x}}=\lim_{t\to ۱}\frac{\sqrt{t^{۱۲}}-t^{۱۲}}{\sqrt[۳]{t^{۱۲}}-\sqrt[۴]{t^{۱۲}}}=\lim_{t\to ۱}\frac{t^۶-t^{۱۲}}{t^۴-t^۳}$$

$$=\lim_{t\to ۱}\frac{-t^۶(t^۶-۱)}{t^۳(t-۱)}=\lim_{t\to ۱}\frac{-t^۳(t-۱)(t^۵+t^۴+\cdots+t+۱)}{t-۱}$$

$$=\lim_{t\to ۱}(-t^۳(t^۵+t^۴+\cdots+t+۱))=-۶$$

۷۱۰- گزینهٔ ۳ چون حد صورت کسر برابر صفر است و حد مورد نظر صفر نیست، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to ۰}(\sqrt{ax+b}-۳)=۰\Rightarrow\sqrt{b}=۳\Rightarrow b=۹$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، مقدار حد را به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sqrt{ax+۹}-۳}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x}{\sqrt{ax+۹}-۳}\times\frac{\sqrt{ax+۹}+۳}{\sqrt{ax+۹}+۳}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x}{ax+۹-۹}\times\frac{\sqrt{ax+۹}+۳}{۱}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+۹}+۳}{a}=\frac{۶}{a}$$

بنابراین $\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{a}$ و در نتیجه $a=۱۲$. پس $a+b=۲۱$.

۷۱۱- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع f به‌صورت $[-۲,۰)\cup(۰,۲]$ است، بنابراین این تابع در نقطهٔ $x=۲$ فقط پیوستگی چپ دارد، در نقطهٔ $x=-۲$ فقط پیوستگی راست دارد و در نقطهٔ $x=۰$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است: $\lim_{x\to ۱}f(x)=\sqrt{۳}=f(۱)$.

۷۱۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(۲)=۴,\quad \lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲+x)=۴+۲=۶$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^۲-x)=۴-۲=۲$$

بنابراین مقدار تابع f در نقطهٔ $x=۲$ نه با حد چپ آن در این نقطه برابر است نه با حد راست آن. پس این تابع در نقطهٔ $x=۲$ نه پیوستگی چپ دارد، نه پیوستگی راست.

۷۱۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۷-m^۲x^۲)=۷-۹m^۲$$

همچنین $f(۳)=\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(x^۲-۶)=۳$، در نتیجه

$$۷-۹m^۲=۳\Rightarrow ۹m^۲=۴\Rightarrow m=\pm\frac{۲}{۳}$$

بنابراین حاصل ضرب مقدارهای ممکن m برابر $-\frac{۴}{۹}$ است.

۷۱۴- گزینهٔ ۱ چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در $x=-۱$ هم پیوسته است. بنابراین حدهای چپ و راست تابع و مقدار تابع در این نقطه برابرند:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{a}{x-۲}=\frac{a}{-۳}$$

$$f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x+۲a}{x+۲}=\frac{-۱+۲a}{-۱+۲}=۲a-۱$$

بنابراین

$$۲a-۱=-\frac{a}{۳}\Rightarrow a=\frac{۳}{۷}$$

۷۱۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(۲)=a\,,\quad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳x-[x])=\lim_{x\to ۲^-}(۳x-۱)=۵$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x+۲b)=۲+۲b$$

بنابراین $a=۵$ و $۲+۲b=۵$، پس $b=\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $ab=\frac{۱۵}{۲}$.

۷۱۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax^۲-a+۴)=a-a+۴=۴$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}{\sqrt{x}}=۴$$

بنابراین به‌ازای هر مقدار a تابع f در $x=۱$ پیوسته است. زیرا:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)=۴$$

۷۱۷- گزینهٔ ۳

$$\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۳x+۲}\geq ۰\Rightarrow\frac{x^۲-۴x}{(x-۱)(x-۲)}\geq ۰$$

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		۰		۱		۲		۴		$+\infty$
$\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۳x+۲}$		+	۰	−	ت ن	+	ت ن	−	۰	+	

بنابراین تابع f روی بازه‌های $[۴,+\infty)$، $(۱,۲)$ و $(-\infty,۰]$ پیوسته است و حداکثر مقدار a برابر صفر است.

۷۱۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $[x]\geq ۰$ و $f(x)=۰$ و اگر $x<۰$، آن‌گاه $[x]<۰$ و $f(x)=۲[x]$. بنابراین تابع f در نقاط صحیح مثبت پیوسته است ولی در نقاط صحیح نامثبت، یعنی در نقاط $x=۰$، $x=-۱$، $x=-۲$ و $x=-۳$ از بازهٔ $(-۴,۴)$ ناپیوسته است.

۷۱۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در نقطه‌هایی که مقدار $\frac{x+۱}{۴}$ عددی صحیح شود، تابع $y=[\frac{x+۱}{۴}]$ ناپیوسته است:

$$\frac{x+۱}{۴}=k\Rightarrow x=۴k-۱,\quad k\in\mathbb{Z}$$

یعنی در نقطه‌هایی به‌صورت $۴k-۱$ تابع ناپیوسته است. پس تابع روی بازهٔ $(-۱,۳)$ پیوسته است و در $x=۳$ ناپیوسته است. سپس روی بازهٔ $(۳,۷)$ پیوسته است، یعنی حداکثر مقدار k برابر ۳ است.

راه حل دوم

$$-۱<x<k\xrightarrow{+۱}۰<x+۱<k+۱\xrightarrow{\div ۴}۰<\frac{x+۱}{۴}<\frac{k+۱}{۴}$$

برای اینکه $[\frac{x+۱}{۴}]$ در این بازه پیوسته باشد، باید $\frac{k+۱}{۴}=۱$، پس $k=۳$.

۷۲۰- گزینهٔ ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $\sqrt{x}$ عددی صحیح شود تابع $y=[\sqrt{x}]$ ناپیوسته است.

$$\sqrt{x}=k\in\mathbb{R}\Rightarrow x=k^۲$$

پس تابع در نقطه‌های $x=۰$، $x=۱$، $x=۴$، $x=۹$ و ... ناپیوسته است، یعنی تابع روی بازهٔ $(۱,۴)$ پیوسته است، در $x=۴$ ناپیوسته است سپس روی بازهٔ $(۴,۹)$ پیوسته است. پس حداکثر مقدار k برابر ۹ است.

۷۲۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۴)=[\frac{۴}{۲}]+[-\frac{۴}{۲}]=۲-۲=۰$ و

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=۲-۳=-۱\,,\quad \lim_{x\to ۴^-} f(x)=۱-۲=-۱$$

بنابراین تابع در $x=۴$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع در این نقطه حد دارد ولی پیوسته نیست.

۷۲۲- گزینهٔ ۲ در $x=۴$، $x=۱۶$ و $x=۶۴$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{۲}$ عدد صحیح می‌شود. پس تابع $f(x)=[\frac{\sqrt{x}}{۲}]$ در این نقطه‌ها پیوسته نیست. در نقطهٔ $x=۹$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{۲}$ عدد صحیح نیست، پس تابع $y=[\frac{\sqrt{x}}{۲}]$ در این نقطه پیوسته است.

۷۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(۲-۳x)=۵$.

همچنین $f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=|-۳-a|=|۳+a|$. در نتیجه

$$|۳+a|=۵\Rightarrow ۳+a=۵ \text{ یا } ۳+a=-۵\Rightarrow a=۲ \text{ یا } a=-۸$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر -۶ است.

۷۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(\frac{\pi}{۴})=۱+ab$ و

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}(\sin ۲x-a)=\sin\frac{\pi}{۲}-a=۱-a$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}(-۲-\sin ۲x)=-۲-\sin\frac{\pi}{۲}=-۳$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، باید $۱+ab=۱-a=-۳$. در نتیجه $a=۴$ و $۱+ab=۱+۴b=-۳$، بنابراین $b=-۱$. پس $a+b=۳$.

۷۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to(-۱)^-}(۳x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(ax-b)$$

$$-۳=-a-b \qquad (۱)$$

همچنین

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}(ax-b)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲-۱)$$

$$۲a-b=۳ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $a=۲$ و $b=۱$. پس $\frac{a}{b}=۲$.

۷۲۶- گزینهٔ ۳ مخرج نباید هیچ جا صفر شود، در نتیجه باید دلتای معادلهٔ $x^۲-۶x+m+۱=۰$ منفی باشد:

$$\Delta=۳۶-۴(m+۱)<۰\Rightarrow m>۸$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۷۲۷- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ نقطه‌های ناپیوستگی تابع f مقدارهایی از x است که مخرج، یعنی $x^۲-ax+b$ ، به ازای آن‌ها صفر است. بنابراین -۳ و ۴ ریشه‌های مخرج هستند. به این ترتیب

$a=$مجموع ریشه‌ها$=۴-۳=۱$

$b=$حاصل‌ضرب ریشه‌ها$=۴(-۳)=-۱۲$

بنابراین $a+b=-۱۱$.

۷۲۸- گزینهٔ ۲ این تابع در تمام نقاطی که $۲x+\frac{۱}{۲}$ مقداری صحیح داشته باشد، ناپیوسته است:

$$۲x+\frac{۱}{۲}=k\,,\,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۲x=k-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k-۱}{۴}$$

پس در تمام نقاطی که به‌صورت $\frac{۲k-۱}{۴}$ باشند و k عددی صحیح باشد، این تابع ناپیوسته است. برای اینکه معلوم شود در بازهٔ $(-۱,۲)$ چند نقطه به این صورت است، کافی است نامعادلهٔ $-۱<x<۲$ را حل کنیم:

$$-۱<\frac{۲k-۱}{۴}<۲\Rightarrow -۴<۲k-۱<۸\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<k<\frac{۹}{۲}$$

$$k\in\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$$

بنابراین تابع f در شش نقطه از بازهٔ $(-۱,۲)$ ناپیوسته است که این نقاط به‌صورت زیر هستند:

k	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
x	$-\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۷}{۴}$

۷۲۹- گزینهٔ ۳ باید $x^۲+kx+۴\geq ۰$. در نتیجه $\Delta\leq ۰$ ، یعنی

$$k^۲-۱۶\leq ۰\Rightarrow -۴\leq k\leq ۴$$

بنابراین اگر k یکی از عددهای صحیح زیر باشد، تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴$$

۷۳۰- گزینهٔ ۲ باید

$$۷-|x-۲|\geq ۰\Rightarrow |x-۲|\leq ۷\Rightarrow -۷\leq x-۲\leq ۷\Rightarrow -۵\leq x\leq ۹$$

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۵,۹]$ پیوسته است.

۷۳۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=۰$ و در یک همسایگی چپ نقطهٔ -۲ مقادیر تابع f منفی هستند. بنابراین $\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{۴}{f(x)}=-\infty$.

۷۳۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to۳}|x-۳|=۰$ ، و چون مقادیر $|x-۳|$ در یک همسایگی محذوف ۳ مثبت‌اند، پس $\lim_{x\to۳}\frac{۳}{|x-۳|}=+\infty$.

۷۳۳- گزینهٔ ۳ اگر $x\to ۱^-$ ، آن‌گاه $-x\to(-۱)^+$ و در نتیجه $[-x]=-۱$. بنابراین $\lim_{x\to۱^-}\frac{[-x]}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{-۱}{x-۱}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$.

۷۳۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که مخرج کسر تابع f سه ریشه دارد:

$$x^۳-۴x=۰\Rightarrow x(x^۲-۴)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=\pm۲$$

این اعداد ریشه‌های صورت کسر تابع نیستند. از طرف دیگر، $\lim_{x\to۰^-} f(x)=-\infty$. پس تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد چپ نامتناهی دارد. همین‌طور در نقطه‌های $x=-۲$ و $x=۲$ حد چپ تابع f نامتناهی است.

۷۳۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{x}{x^۳-x^۲}=\lim_{x\to۰^-}\frac{x}{x^۲(x-۱)}=\lim_{x\to۰^-}\frac{۱}{x(x-۱)}$$

از طرف دیگر، $\lim_{x\to۰^-} x(x-۱)=۰$ و اگر $x\to۰^-$ ، مقادیر $x(x-۱)$ مثبت هستند، پس $\lim_{x\to۰^-}\frac{x}{x^۳-x^۲}=\lim_{x\to۰^-}\frac{۱}{x(x-۱)}=+\infty$.

۷۳۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to\pi^-}\sin x=\lim_{x\to\pi^+}\sin x=۰$ و اگر $x\to\pi^+$ ، مقادیر $\sin x$ منفی‌اند و اگر $x\to\pi^-$ ، مقادیر $\sin x$ مثبت‌اند. بنابراین $\lim_{x\to\pi^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to\pi^-} f(x)=+\infty$.

۷۳۷- گزینهٔ ۲ اگر $x\to\pi^+$ ، آن‌گاه $\cos x\to(-۱)^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[\cos x]}{\cos\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-۱}{\cos\frac{x}{۲}}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

۷۳۸- گزینهٔ ۲ حد مخرج $f(x)$ در $x=۲$ و $x=-۳$ باید برابر صفر باشد، یعنی $x=۲$ و $x=-۳$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+۲=۰$ هستند. با توجه به مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها معلوم می‌شود:

$$\begin{cases} ۲\times(-۳)=\frac{۲}{a} \\ ۲+(-۳)=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

بنابراین $a=-\frac{۱}{۳}$ و $b=-\frac{۱}{۳}$. پس

$$f(x)=\frac{x^۲+۱}{-\frac{۱}{۳}x^۲-\frac{۱}{۳}x+۲}\Rightarrow \lim_{x\to۱} f(x)=\frac{۱+۱}{-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}+۲}=\frac{۳}{۲}$$

۷۳۹- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج وقتی $x\to۲$ صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید. بنابراین $x-۲$ یکی از عامل‌های صورت است و صورت را می‌توان این‌طور نوشت $۲x^۲+mx+n=(x-۲)(۲x+k)$. به این ترتیب، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(۲x+k)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۲\times۲+k}{۲+۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow k=۶$$

اکنون می‌توان نوشت $۲x^۲+mx+n=(x-۲)(۲x+۶)=۲x^۲+۲x-۱۲$. پس $m=۲$ و $n=-۱۲$ ، و در نتیجه $m-n=۱۴$.

۷۴۰- گزینهٔ ④ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۴-۳}{x-۱}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۰-۳}{x-۱}=+\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=۱$ به‌صورت زیر است:

۷۴۱- گزینهٔ ③ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)=۰$ و مقادیر f در یک همسایگی چپ نقطهٔ ۴، منفی هستند. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۴^-}\frac{-۲}{f(x)}=+\infty$. بقیهٔ گزینه‌ها نادرست هستند.

۷۴۲- گزینهٔ ③ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۱)^+}(۲x+۱)=-۱\,,\qquad \lim_{x\to(-۱)^+}(x^۲+x)=۰$$

از طرف دیگر، وقتی $x\to(-۱)^+$، مقادیر $x^۲+x$ منفی هستند ($x^۲+x=\underbrace{x}_{\text{منفی}}\underbrace{(x+۱)}_{\text{مثبت}}$)، پس $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\frac{۲x+۱}{x^۲+x}=+\infty$.

۷۴۳- گزینهٔ ① اگر $x\to ۲^+$، آن‌گاه $[x]=۲$ و $f(x)=\frac{۲}{x-۲}$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=+\infty$. اگر $x\to ۲^-$، آن‌گاه $[x]=۱$ و $f(x)=\frac{-۱}{x-۲}$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=+\infty$.

۷۴۴- گزینهٔ ① در ریشه‌های مخرج ممکن است تابع حد چپ نامتناهی داشته باشد. ریشه‌های مخرج $x=۱$ و $x=۲$ هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x^۲(x-۱)}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{x^۲}{x-۲}\,,\quad x\neq ۱$$

پس $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{x^۲}{x-۲}=-\infty$. بنابراین تابع فقط در $x=۲$ حد چپ نامتناهی دارد.

۷۴۵- گزینهٔ ③ ابتدا توجه کنید که اگر $x\neq ۱$، آن‌گاه

$$\frac{x^۲-۳x+۲}{-۲x^۲+۴x-۲}=\frac{(x-۱)(x-۲)}{-۲(x-۱)^۲}=\frac{x-۲}{-۲(x-۱)}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۳x+۲}{-۲x^۲+۴x-۲}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{x-۲}{-۲(x-۱)}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$.

۷۴۶- گزینهٔ ② اگر $x\to(\frac{۱}{۳})^+$، آن‌گاه

$$\pi x\to(\frac{\pi}{۳})^+\Rightarrow\cos(\pi x)\to(\frac{۱}{۲})^-$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۳})^+}\frac{۳x+۱}{۲\cos(\pi x)-۱}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$.

۷۴۷- گزینهٔ ③ باید علامت عبارت $۲x-\sqrt{x+۳}$ را در اطراف نقطهٔ $x=۱$ مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که $x=۱$ تنها جواب معادلهٔ $۲x-\sqrt{x+۳}=۰$ است.

$$۲x=\sqrt{x+۳}\Rightarrow ۴x^۲-x-۳=۰\Rightarrow x=۱,\ x=-\frac{۳}{۴}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین علامت عبارت $۲x-\sqrt{x+۳}$ را می‌توانیم با عددگذاری مشخص کنیم. مثلاً اگر $x=۲$، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $۴-\sqrt{۵}$ است که عددی مثبت است و اگر $x=۰$، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $-\sqrt{۳}$ است که عددی منفی است.

x		-۳		۱		$+\infty$
$۲x-\sqrt{x+۳}$	▨	ن ت	$-$	۰	$+$	

در یک همسایگی چپ $x=۱$ مقدار عبارت منفی است، پس $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty$.

در یک همسایگی راست $x=۱$ مقدار عبارت مثبت است، پس

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty$$

۷۴۸- گزینهٔ ③ چون $\lim\limits_{x\to ۲}(x-۳)=-۱$، پس باید $ax^۲+۶x+b$ در $x=۲$ برابر صفر شود و مقدار این عبارت در دو طرف $x=۲$ عددی منفی باشد. بنابراین باید $x=۲$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^۲+۶x+b=۰$ باشد، یعنی این عبارت باید به‌صورت $a(x-۲)^۲$ باشد. چون $a<۰$، پس

$$ax^۲-۴ax+۴a=ax^۲+۶x+b\,,\quad -۴a=۶\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲},\quad b=۴a=-۶$$

پس $ab=۹$.

۷۴۹- گزینهٔ ③ چون حد مخرج وقتی $x\to ۱$ برابر صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، باید حد صورت هم صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}(\sqrt{۲x+a}-\sqrt{x+b})=۰\Rightarrow\sqrt{۲+a}=\sqrt{۱+b}\Rightarrow b=a+۱$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج مقدار حد را حساب می‌کنیم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x+a}-\sqrt{x+a+۱}}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt{۲x+a}-\sqrt{x+a+۱}}{x-۱}\times\frac{\sqrt{۲x+a}+\sqrt{x+a+۱}}{\sqrt{۲x+a}+\sqrt{x+a+۱}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۲x+a-x-a-۱}{x-۱}\times\frac{۱}{\sqrt{۲x+a}+\sqrt{x+a+۱}}\right)=\frac{۱}{۲\sqrt{a+۲}}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲\sqrt{a+۲}}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\sqrt{a+۲}=۳\Rightarrow a=۷$$

پس $b=۸$ و در نتیجه $ab=۵۶$.

۷۵۰- گزینهٔ ④ ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲-۴}{x^۲-۳x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(x-۱)}=\frac{x+۲}{x-۱}\ ,\ x\neq ۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=۱$ به‌صورت مقابل است:

۷۵۱- گزینهٔ ② توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۰}(f(x)-۲)=۰$ و مقادیر $f(x)-۲$ در یک همسایگی محذوف نقطهٔ صفر منفی هستند. زیرا در این همسایگی مقادیر $f(x)$ کمتر از ۲ هستند. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{f(x)-۲}=-\infty$.

۷۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۰}(x-۱)=-۱\,,\quad \lim_{x\to ۰}(x^{۳}-۲x^{۲})=۰$$

از طرف دیگر، چون $x^{۳}-۲x^{۲}=x^{۲}(x-۲)$، وقتی $x\to ۰$، مقادیر $x^{۳}-۲x^{۲}$ منفی هستند. پس $\lim_{x\to ۰}\frac{x-۱}{x^{۳}-۲x^{۲}}=+\infty$.

۷۵۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to ۵^-}([x]^{۲}-۲۵)=۱۶-۲۵=-۹$ و $\lim_{x\to ۵^-}(x-۵)=۰$ و مقادیر $x-۵$ در یک همسایگی چپ ۵ منفی‌اند.

بنابراین $\lim_{x\to ۵^-}\frac{[x]^{۲}-۲۵}{x-۵}=+\infty$.

۷۵۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اعداد صحیح، ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f هستند:

$$x-[x]=۰\Rightarrow x=[x]\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

اکنون دقت کنید که از اعداد صحیح فقط $x=۰$ و $x=۱$ ریشهٔ صورت $f(x)$ هستند. حد چپ و حد راست تابع در این نقاط را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x(x-۱)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}(x-۱)=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x(x-۱)}{x+۱}=۰$$

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^{۲}-x}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}x=۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^{۲}-x}{x}=\lim_{x\to ۱^-}(x-۱)=۰$$

بنابراین تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ حد چپ متناهی و حد راست متناهی دارد. در بقیهٔ اعداد صحیح حد صورت کسر صفر نیست، درحالی که حد راست مخرج کسر صفر است، پس تابع f در این نقاط حد راست نامتناهی دارد.

۷۵۵- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $\sqrt[۶]{x}=t$. در این صورت اگر $x\to ۰^+$ آن‌گاه $t\to ۰^+$ و

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t^{۳}-t^{۲}}{t^{۶}-t^{۳}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t-۱}{t(t^{۳}-۱)}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۱}{t(t^{۲}+t+۱)}=+\infty$$

۷۵۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۱}{۲\sin x\cos x-۲\sin x}=\frac{۱}{۲\sin x(\cos x-۱)}$$

عبارت $\cos x-۱$ همواره نامثبت است. یعنی $\cos x-۱\le ۰$. از طرف دیگر اگر $x\to ۰^-$، آن‌گاه $\sin x\to ۰^-$ و اگر $x\to ۰^+$، آن‌گاه $\sin x\to ۰^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{۲\sin x(\cos x-۱)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۲\sin x(\cos x-۱)}=-\infty$$

۷۵۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x^{۳}-۴x^{۲}+۵x-۲=(x-۱)(x^{۲}-۳x+۲)$$

$$=(x-۱)(x-۱)(x-۲)=(x-۱)^{۲}(x-۲)$$

بنابراین در هر دو حالت $x\to ۱^+$ و $x\to ۱^-$:

$$(x-۱)^{۲}\to ۰^+\Rightarrow(x-۱)^{۲}(x-۲)\to ۰^-$$

پس $\lim_{x\to ۱^+}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to ۱^-}f(x)=-\infty$.

۷۵۸- گزینهٔ ۱ در یک همسایگی راست $x=۲$ تساوی $[x]=۲$ برقرار است. پس $\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳[x]+k}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۶+k}{x-۲}=+\infty$.

چون $(x-۲)\to ۰^+$، پس $۶+k>۰$ و در نتیجه $k>-۶$.

در یک همسایگی چپ $x=۲$ تساوی $[x]=۱$ برقرار است. پس

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳[x]+k}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳+k}{x-۲}=+\infty$$

چون $(x-۲)\to ۰^-$، پس $۳+k<۰$ و در نتیجه $k<-۳$، بنابراین $-۶<k<-۳$.

۷۵۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۴})^-}(x)=\frac{\pi}{۴}\,,\quad \lim_{x\to (\frac{\pi}{۴})^-}(\sin x-\cos x)=۰$$

از طرف دیگر، وقتی $x\to(\frac{\pi}{۴})^-$ مقادیر $\sin x$ از مقادیر $\cos x$ کوچک‌ترند، پس مقادیر $\sin x-\cos x$ منفی‌اند. در نتیجه

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۴})^-}\frac{x}{\sin x-\cos x}=-\infty$$

۷۶۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=\frac{۴}{۰^+}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\frac{۴}{۰^-}=-\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=-۲$ به‌صورت مقابل است.

۷۶۱- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم است که $\lim_{x\to -\infty}f(x)=۱$ و $\lim_{x\to +\infty}f(x)=۱$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۲ است.

۷۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to ۱^-}f(x)=-\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^-}(fof)(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(f(x))=\lim_{t\to -\infty}f(t)=-۲$$

۷۶۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{۳x+\frac{۱}{x}+\frac{x^{۲}}{x-۱}}{۲x-\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{۳x^{۲}(x-۱)+x-۱+x^{۳}}{x(x-۱)}}{\frac{۲x^{۲}-۱}{x}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{۴x^{۳}-۳x^{۲}+x-۱}{(۲x^{۲}-۱)(x-۱)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۴x^{۳}-۳x^{۲}+x-۱}{۲x^{۳}-۲x^{۲}-x+۱}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۷۶۴- گزینهٔ ۴ ابتـدا توجه کنید که وقتـی $x\to-\infty$، مقادیر $۱-۳x$ مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-|۱-۳x|}{۵x-۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-(۱-۳x)}{۵x-۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x-۱}{۵x-۳}=۱$$

۷۶۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(۳x-۲)^۴(۴x^۲+۱)^۲}{(۶x^۴-۲x^۳+۱)^۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(۳^۴x^۴-\cdots)(۴^۲x^۴+\cdots)}{۶^۲x^۸+\cdots}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳^۴\times۴^۲x^۸-\cdots}{۶^۲x^۸+\cdots}=\frac{۳^۴\times۴^۲}{۶^۲}=۳۶$$

۷۶۶- گزینهٔ ۱ توجـه کنید که اگر n عددی طبیعی باشـد، $۳n+۴$ و $۲n+۶$ از ۱ بیشترند، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۳n+۴}+x+۱}{x^{۲n+۶}-x+۱}=\lim_{x\to+\infty}x^{۳n+۴-(۲n+۶)}=\lim_{x\to+\infty}x^{n-۲}$$

اگر این حد صفر باشد، باید $n-۲<۰$، یعنی $n<۲$، بنابراین فقط $n=۱$ ویژگی مورد نظر را دارد.

۷۶۷- گزینهٔ ۲ اگـر m عددی مثبت باشـد، وقتی $x\to+\infty$، مقادیر $۱-mx$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(mx-۱)+۲x-۱}{۳x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m+۲)x-۲}{۳x+۱}=\frac{m+۲}{۳}$$

بنابرایـن $\frac{m+۲}{۳}=۳$، پـس $m=۷$. اگـر m عـددی منفـی باشـد، وقتـی $x\to+\infty$، مقادیر $۱-mx$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(۱-mx)+۲x-۱}{۳x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(۲-m)x}{۳x+۱}=\frac{۲-m}{۳}$$

بنابرایـن $\frac{۲-m}{۳}=۳$، پـس $m=-۷$. اگر $m=۰$، حـد مورد نظـر برابر $\frac{۲}{۳}$ می‌شـود که درسـت نیسـت. بنابراین مقادیر m عددهای ۷ و ۷− هسـتند و حاصل‌ضرب آن‌ها ۴۹− است.

۷۶۸- گزینهٔ ۴ چـون حد مـورد نظر برابر $-\infty$ شـده اسـت، پس باید درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت کمتر باشـد و ضریب بزرگ‌ترین جمله در صورت بایـد منفی باشـد. برای اینکـه درجهٔ مخـرج از درجهٔ صورت کمتر باشـد، باید $۵-a=۰$، یعنـی $a=۵$. توجه کنید که اگـر $a=۵$، بزرگ‌ترین جملهٔ صورت $-x^۲$ می‌شود، بنابراین حد مورد نظر برابر $-\infty$ است.

۷۶۹- گزینهٔ ۳ چون درجهٔ مخرج کسر داده شده برابر ۲ است، اگر در صورت این کسر جملهٔ شامل $x^۳$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^۳$ در صورت کسر داده شده صفر است، یعنی $a=۳$. در نتیجه حد مورد نظر برابر است با $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(b+۲)x^۲-۳x+۴}{۳x^۲-۱}=\frac{b+۲}{۳}$.

بنابراین $\frac{b+۲}{۳}=۵$، پس $b=۱۳$. به این ترتیب $a+b=۱۶$.

۷۷۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=۱$.

از طـرف دیگـر $f(x)=\frac{x-۱}{x+۳}=۱-\frac{۴}{x+۳}$. اگـر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{۴}{x+۳}\to۰^+$، پـس $f(x)<۱$. اگـر $x\to-\infty$، آن‌گاه $\frac{۴}{x+۳}\to۰^-$، پـس $f(x)>۱$. پـس در $+\infty$ نمودار تابـع f پایین‌تر از خط $y=۱$ قرار دارد و در $-\infty$ نمودار تابع f بالاتر از خط $y=۱$ قرار دارد.

۷۷۱- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $t=۱-x$. در این صورت اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $t\to-\infty$. اکنون از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x\to+\infty}f(۱-x)=\lim_{t\to-\infty}f(t)=-۲$$

۷۷۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنیـد که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۲$. از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>۲$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{t\to۲^+}f(t)=+\infty$$

۷۷۳- گزینهٔ ۲ ابتـدا توجـه کنیـد کـه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-۲$. همچنیـن اگـر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>۱$ و $[f(x)]=۱$ و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-۲$ و $[f(x)]=-۳$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=۱,\qquad\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=-۳$$

پس $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]-\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=-۳-۱=-۴$.

۷۷۴- گزینهٔ ۲ ابتـدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{۱}{x}\to۰^+$ و در نتیجه $[\frac{۱}{x}]=۰$، بنابراین $\lim\limits_{x\to+\infty}(x[\frac{۱}{x}])=\lim\limits_{x\to+\infty}x(۰)=\lim\limits_{x\to+\infty}۰=۰$.

در واقع در $+\infty$ تابع $f(x)=x[\frac{۱}{x}]$ و تابع $g(x)=۰$ مسـاوی‌اند و حد آن‌ها برابر صفر اسـت.

۷۷۵- گزینهٔ ۳ ابتـدا توجه کنید که اگر $x\to-\infty$، مقادیر x، $۲x$ و $۳x-۱$ همگـی‌منفی‌انـد. بنابرایـن

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|۲x|+|x|}{|۳x-۱|-|۲x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x-x}{۱-۳x-(-۲x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳x}{-x+۱}=۳$$

۷۷۶- گزینهٔ ۴ توجـه کنید کـه اگر $n=۱$، آن‌گاه مقدار حـد برابر صفر اسـت که وجود دارد. اگر $n>۱$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^{n-۱}-۲x}{x^۴-x+۱}=\lim_{x\to+\infty}(۳x^{n-۱-۴})=۳\lim_{x\to+\infty}x^{n-۵}$$

برای اینکه این حد وجود نداشـته باشد، باید $n-۵\geq۱$، یعنی $n\geq۶$. بنابراین کوچک‌ترین عددی که ویژگی مورد نظر را دارد، ۶ اسـت.

۷۷۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|mx|-۲x+۱}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|m||x|-۲x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-|m|-۲)x}{-x}=|m|+۲$$

بنابراین

$$|m|+۲=۶\Rightarrow|m|=۴\Rightarrow m=\pm۴$$

به این ترتیب، عددهای ۴ و ۴− ویژگی مورد نظر را دارند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۶− است.

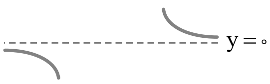
۷۷۸- گزینهٔ ۲ اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل $x^۲$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^۲$ باید صفر باشد، یعنی $a+۱=۰$، پس $a=-۱$. در این صورت، حد مورد نظر برابر است با $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۵x+۴}{(b-۲)x-۱}=\frac{-۵}{b-۲}$. بنابراین $\frac{-۵}{b-۲}=\frac{۱}{۲}$، در نتیجه $b=-۸$. به این ترتیب، $ab=۸$.

۷۷۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل $x^۳$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^۳$ در صورت کسر داده شده صفر است، درنتیجه $۲a-۱=۰$، پس $a=\frac{۱}{۲}$. به این ترتیب حد مسئله می‌شود $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۴x^۲-۱}{۲x^۲+x+۱}=\frac{۴}{۲}=۲$.

در نتیجه $b=۲$ و $a+b=\frac{۵}{۲}$.

۷۸۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=۰$.

همچنین اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>۰$ و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<۰$. بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ بالای خط $y=۰$ و در $-\infty$ پایین خط $y=۰$ قرار دارد.



۷۸۱- گزینهٔ ۴ گزینهٔ (۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=۱\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}(۱-f(x))=۰$

و اگر $x\to-\infty$، مقادیر $۱-f(x)$ مثبت‌اند. بنابراین $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۴}{۱-f(x)}=+\infty$.

گزینهٔ (۲) $\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=+\infty$

گزینهٔ (۳) $\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to۱^-}((x+۲)f(x))=-\infty$

گزینهٔ (۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۱\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(۱-f(x))=۰$

و اگر $x\to+\infty$، مقادیر $۱-f(x)$ منفی‌اند. بنابراین $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۴}{۱-f(x)}=+\infty$.

پس گزینهٔ (۴) درست نیست.

۷۸۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-۲,\qquad\lim_{x\to+\infty}f(x)=۲$$

اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-۲$، بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{t\to(-۲)^-}f(t)=-\infty$$

از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>۲$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{t\to۲^+}f(t)=+\infty$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)-\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=(-\infty)-(+\infty)=-\infty$$

۷۸۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $-\frac{۱}{x}\to۰^-$

و در نتیجه $[-\frac{۱}{x}]=-۱$، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x[-\frac{۱}{x}]-۱}{۲x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-۱}{۲x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{۲x}=-\frac{۱}{۲}$$

۷۸۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که جملهٔ دارای بزرگ‌ترین توان در صورت کسر برابر $(۲x^۳)^۲-(۳x^۲)^۳=-۲۳x^۶$ است و جملهٔ دارای بزرگ‌ترین توان در مخرج کسر برابر $x^۲(۳x^۲)^۲=۹x^۶$ است. پس حد مورد نظر برابر است با $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۲۳x^۶}{۹x^۶}=-\frac{۲۳}{۹}$.

۷۸۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to-\infty$، مقادیر $۳x^۲-۱$، $۲x^۲-۳$ و $۵x^۲-x$ مثبت‌اند، پس

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|۳x^۲-۱|-|۲x^۲-۳|}{|۵x^۲-x|-x^۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x^۲-۱-۲x^۲+۳}{۵x^۲-x-x^۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲}{۴x^۲}=\frac{۱}{۴}$$

۷۸۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که باید $m\neq۰$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(۳x+۱)^۵(mx+۲)^۷}{(۲mx-۱)^۴(۶x-۱)^۸}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(۳^۵x^۵+\cdots)(m^۷x^۷+\cdots)}{(۲^۴m^۴x^۴-\cdots)(۶^۸x^۸-\cdots)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳^۵m^۷x^{۱۲}+\cdots}{۲^۴\times۶^۸m^۴x^{۱۲}+\cdots}=\frac{۳^۵m^۷}{۲^۴\times۶^۸m^۴}=\frac{m^۳}{۲^{۱۲}\times۳^۳}$$

بنابراین $\frac{m^۳}{۲^{۱۲}\times۳^۳}=-۱$، پس $m=-۴۸$.

۷۸۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، $۳n+۲$ و $۲n+۵$ از ۲ بیشتر هستند، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۳n+۲}+x^۲+۱}{x^{۲n+۵}-x^۲+۱}=\lim_{x\to+\infty}x^{۳n+۲-(۲n+۵)}=\lim_{x\to+\infty}x^{n-۳}$$

اگر این حد صفر باشد، باید $n-۳<۰$، یعنی $n<۳$، بنابراین فقط $n=۱$ و $n=۲$ ویژگی مورد نظر را دارند.

۷۸۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل $x^۳$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^۳$ در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه $۲a-۱=۰$، پس $a=\frac{۱}{۲}$. به این ترتیب حد مسئله می‌شود $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲-۱}{۳x^۲+x+۱}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲}{۳x^۲}=۱$. در نتیجه $b=۱$ و $a+b=\frac{۳}{۲}$.

۷۸۹- گزینهٔ ۳ اگر $n>۳$، آن‌گاه $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^n}=۱$، اگر $n=۳$، آن‌گاه $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۳+۴x^۳-۱}{x^۳-۲x^۳+۱}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۵x^۳}{-x^۳}=-۵$. اگر $n<۳$، آن‌گاه $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۴x^۳}{-۲x^۳}=-۲$، پس سه مقدار مختلف برای L وجود دارد.

۷۹۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $f(x)=ax+b$، آن‌گاه $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}}{ax+b}=\frac{\frac{۱}{a}}{a}=\frac{۱}{a^۲}$$

بنابراین $\frac{۱}{a^۲}=۱۶$. چون a منفی است، پس $a=-\frac{۱}{۴}$. به این ترتیب $f(x)=-\frac{۱}{۴}x+b$ و $f(۳)=۳$، پس $-\frac{۳}{۴}+b=۳$. در نتیجه $b=\frac{۱۵}{۴}$.

بنابراین $f(x)=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۱۵}{۴}$، پس $f(-۱)=۴$.

۷۹۱- گزینهٔ ۱ اگر $x\to ۲^+$ ، آن‌گاه $f(x)\to(-۱)^-$ و در نتیجه $f(f(x))\to ۲^-$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲^+}[(fof)(x)]=\lim_{x\to ۲^+}[f(f(x))]=\lim_{t\to ۲^-}[t]=۱$$

۷۹۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x+۱)=a(x+۱)^۲+b(x+۱)-c\ ,\quad f(۳x)=۹ax^۲+۳bx-c$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰}f(x+۱)=a(۰+۱)^۲+b(۰+۱)-c=a+b-c$$

$$\lim_{x\to ۱}f(۳x)=۹a\times ۱^۲+۳b\times ۱-c=۹a+۳b-c$$

بنابراین از شرط مسئله نتیجه می‌شود $a+b-c=۹a+۳b-c$. یعنی $۸a=-۲b$ ، پس $\frac{a}{b}=-\frac{۱}{۴}$.

۷۹۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to ۳^-$ ، آن‌گاه $-x\to(-۳)^+$ و در نتیجه $[x]=۲$ و $[-x]=-۳$. پس

$$\lim_{x\to ۳^-}(\frac{x^۲}{[x]}-\frac{[-x]}{x})=\lim_{x\to ۳^-}(\frac{x^۲}{۲}-\frac{-۳}{x})=\frac{۹}{۲}+\frac{۳}{۳}=\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$$

۷۹۴- گزینهٔ ۳ حد چپ و حد راست تابع در $x=۱$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۴-۵x^۲+۴}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x^۲-۱)(x^۲-۴)}{x^۲-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}(x^۲-۴)=-۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{a}{x-۲}=-a$$

چون حد تابع در $x=۱$ وجود دارد، پس حد چپ و حد راست آن در این نقطه برابرند:

$$-a=-۳\Rightarrow a=۳$$

۷۹۵- گزینهٔ ۳ چون حد صورت کسر وقتی $x\to ۳$ صفر است، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. پس

$$\lim_{x\to ۳}(x^۲+ax+۳)=۹+۳a+۳=۱۲+۳a=۰\Rightarrow a=-۴$$

بنابراین

$$b=\lim_{x\to ۳}\frac{ax-۳a}{x^۲+ax+۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۴x+۱۲}{x^۲-۴x+۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{-۴(x-۳)}{(x-۳)(x-۱)}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۴}{x-۱}=-۲$$

بنابراین $a+b=-۶$.

۷۹۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ در بیاید.

بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}(\sqrt{x^۲+x+a}-۲)=۰\Rightarrow\sqrt{۲^۲+۲+a}-۲=۰\Rightarrow a=-۲$$

اگر $a=-۲$ ، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+x-۲}-۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x^۲+x-۲}-۲)(\sqrt{x^۲+x-۲}+۲)}{(x+۲)(x-۲)(\sqrt{x^۲+x-۲}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+x-۲-۴}{(x-۲)}\times\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{(x+۲)\sqrt{x^۲+x-۲}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+x-۶}{(x-۲)}\times\frac{۱}{۱۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۳)}{(x-۲)}\times\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{۱۶}\lim_{x\to ۲}(x+۳)=\frac{۵}{۱۶}$$

در نتیجه $b=\frac{۵}{۱۶}$.

راه‌حل دوم چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}(\sqrt{x^۲+x+a}-۲)=۰\Rightarrow\sqrt{۲^۲+۲+a}-۲=۰\Rightarrow a=-۲$$

اکنون برای به‌دست آوردن مقدار حد می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+x-۲}-۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲+x-۲}}}{۲x}=\frac{\frac{۵}{۴}}{۴}=\frac{۵}{۱۶}$$

۷۹۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ ، بنابراین تابع f فقط در نقطهٔ $x=۱$ ممکن است ناپیوسته باشد. در این نقطه حد چپ، حد راست و مقدار تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x+۳}{۲x^۲+۱}=\frac{۴}{۳}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۴-۱}{x^۳-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x^۳+x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳+x^۲+x+۱}{x^۲+x+۱}=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین تابع f در $x=۱$ پیوسته است و نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

۷۹۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to-\infty}f(x)=۳$. بنابراین $[\lim_{x\to-\infty}f(x)]=[۳]=۳$. از طرف دیگر اگر $x\to-\infty$ ، آن‌گاه $f(x)<۳$ ، بنابراین $[f(x)]=۲$ و در نتیجه $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}۲=۲$. پس

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]-۲[\lim_{x\to-\infty}f(x)]=۲-۲\times ۳=-۴$$

۷۹۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲x^۲-۵۰=۲(x^۲-۲۵)=۲(x-۵)(x+۵)$$

$$x^۳-۱۰x^۲+۲۵x=x(x^۲-۱۰x+۲۵)=x(x-۵)^۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۵^-}\frac{۲x^۲-۵۰}{x^۳-۱۰x^۲+۲۵x}=\lim_{x\to ۵^-}\frac{۲(x-۵)(x+۵)}{x(x-۵)^۲}=\lim_{x\to ۵^-}\frac{۲(x+۵)}{x(x-۵)}=-\infty$$

۸۰۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(۲x)-۱=۳(۲x)^۲-۲x-۱=۱۲x^۲-۲x-۱$$

$$f(x)+۳x^۲-۱=۳x^۲-x+۳x^۲-۱=۶x^۲-x-۱$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x\to+\infty}\frac{۱۲x^۲-۲x-۱}{۶x^۲-x-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱۲x^۲}{۶x^۲}=۲$.

۸۰۱- گزینهٔ ۲ اگر $x\to(\frac{۵\pi}{۴})^+$ ، آن‌گاه $\sin x\to(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^-$. بنابراین $\sqrt{۲}\sin x\to(-۱)^-$ ، پس $\lim\limits_{x\to(\frac{۵\pi}{۴})^+}[\sqrt{۲}\sin x]=\lim\limits_{t\to(-۱)^-}[t]=-۲$.

۸۰۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to۵}\frac{\sqrt{x+۴}-\sqrt{x-۴}-۲}{x^۲-۲۵}=\lim_{x\to۵}(\frac{\sqrt{x+۴}-۳}{x^۲-۲۵}-\frac{\sqrt{x-۴}-۱}{x^۲-۲۵})$$

$$=\lim_{x\to۵}\frac{\sqrt{x+۴}-۳}{x^۲-۲۵}-\lim_{x\to۵}\frac{\sqrt{x-۴}-۱}{x^۲-۲۵}$$

اکنون از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۵}(\frac{\sqrt{x+۴}-۳}{x^۲-۲۵}\times\frac{\sqrt{x+۴}+۳}{\sqrt{x+۴}+۳})-\lim_{x\to۵}(\frac{\sqrt{x-۴}-۱}{x^۲-۲۵}\times\frac{\sqrt{x-۴}+۱}{\sqrt{x-۴}+۱})$$

$$=\lim_{x\to۵}(\frac{x+۴-۹}{(x-۵)(x+۵)}\times\frac{۱}{\sqrt{x+۴}+۳})-\lim_{x\to۵}(\frac{x-۴-۱}{(x-۵)(x+۵)}\times\frac{۱}{\sqrt{x-۴}+۱})$$

$$=\lim_{x\to۵}\frac{۱}{(\sqrt{x+۴}+۳)(x+۵)}-\lim_{x\to۵}\frac{۱}{(\sqrt{x-۴}+۱)(x+۵)}=\frac{۱}{۶۰}-\frac{۱}{۲۰}=-\frac{۱}{۳۰}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to۵}\frac{\sqrt{x+۴}-\sqrt{x-۴}-۲}{x^۲-۲۵}=\lim_{x\to۵}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x-۴}}}{۲x}=\frac{\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۲}}{۱۰}=-\frac{۱}{۳۰}$$

۸۰۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $\sqrt[۳]{x}=t$. در این صورت وقتی $x\to۸$ ، $t=۲$. بنابراین

$$\lim_{x\to۸}\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt[۳]{x}-۱}{x-۸}=\lim_{t\to۲}\frac{\sqrt{t^۳+۱}-t-۱}{t^۳-۸}$$

$$=\lim_{t\to۲}(\frac{\sqrt{t^۳+۱}-(t+۱)}{t^۳-۸}\times\frac{\sqrt{t^۳+۱}+(t+۱)}{\sqrt{t^۳+۱}+(t+۱)})$$

$$=\lim_{t\to۲}(\frac{t^۳+۱-t^۲-۲t-۱}{t^۳-۸}\times\frac{۱}{\sqrt{t^۳+۱}+t+۱})$$

$$=\lim_{t\to۲}(\frac{t(t-۲)(t+۱)}{(t-۲)(t^۲+۲t+۴)}\times\frac{۱}{\sqrt{t^۳+۱}+t+۱})=\frac{۲\times(۲+۱)}{۴+۴+۴}\times\frac{۱}{۳+۲+۱}=\frac{۱}{۱۲}$$

راه‌حل دوم

$$\lim_{x\to۸}\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt[۳]{x}-۱}{x-۸}=\lim_{x\to۸}(\frac{\sqrt{x+۱}-۳}{x-۸}-\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x-۸})$$

$$=\lim_{x\to۸}(\frac{\sqrt{x+۱}-۳}{x-۸}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۳}{\sqrt{x+۱}+۳})-\lim_{x\to۸}(\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x-۸}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴})$$

$$=\lim_{x\to۸}(\frac{x+۱-۹}{x-۸}\times\frac{۱}{\sqrt{x+۱}+۳})-\lim_{x\to۸}(\frac{x-۸}{x-۸}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴})$$

$$=\lim_{x\to۸}\frac{۱}{\sqrt{x+۱}+۳}-\lim_{x\to۸}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}$$

$$=\frac{۱}{۳+۳}-\frac{۱}{۴+۴+۴}=\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۱۲}$$

راه‌حل سوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to۸}\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt[۳]{x}-۱}{x-۸}=\lim_{x\to۸}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{۱}=\frac{۱}{۲\times۳}-\frac{۱}{۳\times۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

۸۰۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(\frac{\pi}{۲})=ab-۱\,,\qquad \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}(a\sin x)=a$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}(\cos ۲x+b)=-۱+b$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد باید $\begin{cases}ab-۱=a\\ a=b-۱\end{cases}$. بنابراین

$$ab-۱=a\xrightarrow{b=a+۱}a(a+۱)-۱=a$$

$$a^۲+a-۱=a\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=\pm۱$$

اگر $a=۱$ ، آن‌گاه $b=۲$ و $a+b=۳$.

اگر $a=-۱$ ، آن‌گاه $b=۰$ و $a+b=-۱$.

۸۰۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(f+۲g)-(f-g)=۳g$ ، پس تابع g در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است. به این ترتیب چون $(f-g)+g=f$ ، پس تابع f هم در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است. چون برد تابع‌های f و g مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است، پس مخرج کسرهای $\frac{۱}{f}$ ، $\frac{۱}{g}$ و $\frac{۱}{f+g}$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و دامنهٔ این توابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است و چون f و g در $x=a$ پیوسته‌اند، این توابع هم در $x=a$ پیوسته‌اند. ولی دامنهٔ تابع $\frac{۱}{f-g}$ ممکن است $\mathbb{R}$ نباشد و این تابع ممکن است در $x=a$ تعریف نشود. (کافی است $f(a)=g(a)$)، پس تابع $\frac{۱}{f-g}$ ممکن است در $x=a$ پیوسته نباشد.

۸۰۶- گزینهٔ ۴ ابتدا حد تابع در $x=۰$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x\to۰}f(x)=\lim_{x\to۰}\frac{۱}{x}(\sqrt[۳]{x+۲۷}-۳)=\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt[۳]{x+۲۷}-۳}{x}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt[۳]{x+۲۷}=t$. پس $x+۲۷=t^۳$. در نتیجه $x=t^۳-۲۷$ همچنین اگر $x\to۰$ ، آن‌گاه $t\to۳$. بنابراین حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{t\to۳}\frac{t-۳}{t^۳-۲۷}=\lim_{t\to۳}\frac{t-۳}{(t-۳)(t^۲+۳t+۹)}=\lim_{t\to۳}\frac{۱}{t^۲+۳t+۹}=\frac{۱}{۲۷}$$

در نتیجه $a=۲۷$.

۸۰۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to۲}f(x)=+\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to۲}(fof)(x)=\lim_{x\to۲}f(f(x))=\lim_{t\to+\infty}f(t)=۱$$

همچنین مقادیر $f(x)$ در مثبت بی‌نهایت بزرگ‌تر از یک هستند. پس $(fof)(x)\to۱^+$ ، در نتیجه $\lim\limits_{x\to۲}\frac{۱}{۱-(fof)(x)}=-\infty$.

۸۰۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}=\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$.

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=۱$ به‌صورت مقابل است.

۸۰۹- گزینهٔ ۲ اگر m عددی مثبت باشد، وقتی که $x\to+\infty$، مقادیر $۳-mx$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(mx-۳)+x-۱}{۳x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m+۱)x-۴}{۳x+۱}=\frac{m+۱}{۳}$$

بنابراین $\frac{۲}{۳}=\frac{m+۱}{۳}$، پس $m=۱$. اگر m عددی منفی باشد، وقتی که $x\to+\infty$، مقادیر $۳-mx$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(۳-mx)+x-۱}{۳x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(۱-m)x+۲}{۳x+۱}=\frac{۱-m}{۳}$$

بنابراین $\frac{۲}{۳}=\frac{۱-m}{۳}$، پس $m=-۱$. اگر $m=۰$، حد مورد نظر برابر $\frac{۱}{۳}$ می‌شود و قابل قبول نیست. بنابراین مقادیر m عددهای ۱ و ۱− هستند. پس m دو مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۸۱۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $f(x)=ax+b$، آن‌گاه $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}}=\frac{a}{\frac{۱}{a}}=a^{۲}$$

بنابراین $a^{۲}=۹$، و چون شیب خط مثبت است، بنابراین a مثبت است، پس $a=۳$. به این ترتیب $f(x)=۳x+b$ و

$$f(۳)=۱۰\Rightarrow ۹+b=۱۰\Rightarrow b=۱$$

بنابراین $f(x)=۳x+۱$، پس $f(۱)=۴$.

۸۱۱- گزینهٔ ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=\pi$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x\to\pi^{-}$، آن‌گاه $\frac{x}{۲}\to(\frac{\pi}{۲})^{-}$، بنابراین $\cos\frac{x}{۲}\to۰^{+}$، پس $\lim_{x\to\pi^{-}}[\cos\frac{x}{۲}]=۰$ و $۲x\to(۲\pi)^{-}$، بنابراین $\sin ۲x\to۰^{-}$، پس $\lim_{x\to\pi^{-}}[\sin ۲x]=-۱$. در نتیجه

$$\lim_{x\to\pi^{-}}f(x)=\lim_{x\to\pi^{-}}(\sin\frac{x}{۲}\times۰-\cos x\times(-۱))=\cos\pi=-۱$$

از طرف دیگر، اگر $x\to\pi^{+}$، آن‌گاه $\frac{x}{۲}\to(\frac{\pi}{۲})^{+}$. بنابراین $\cos\frac{x}{۲}\to۰^{-}$، پس $\lim_{x\to\pi^{+}}[\cos\frac{x}{۲}]=-۱$ و $۲x\to(۲\pi)^{+}$. بنابراین $\sin ۲x\to۰^{+}$، پس

$$\lim_{x\to\pi^{+}}[\sin ۲x]=۰$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to\pi^{+}}f(x)=\lim_{x\to\pi^{+}}(\sin\frac{x}{۲}\times(-۱)-\cos x\times۰)=-\sin\frac{\pi}{۲}=-۱$$

پس $\lim_{x\to\pi}f(x)=-۱$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۸۱۲- گزینهٔ ۱ چون حد مخرج کسر صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to۱}(\sqrt{ax+b}-۲)=۰\Rightarrow\sqrt{a+b}=۲\Rightarrow a+b=۴\Rightarrow b=۴-a$$

اکنون با استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to۱}(\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{ax+b}+۲}{\sqrt{ax+b}+۲})$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{ax+b-۴}{(x-۱)(x+۱)(\sqrt{ax+b}+۲)}$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{ax-a}{(x-۱)(x+۱)}\times\frac{۱}{۲+۲}=\lim_{x\to۱}\frac{a}{x+۱}\times\frac{۱}{۴}=\frac{a}{۸}$$

بنابراین $\frac{۳}{۲}=\frac{a}{۸}$ و در نتیجه $a=۱۲$، پس $b=-۸$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۸۱۳- گزینهٔ ۳ چون $\lim_{x\to۳}\frac{x-۴}{۲x^{۲}+ax+b}=-\infty$. بنابراین باید مخرج کسر به صفر میل کند. همچنین چون حد چپ و راست برابر $-\infty$ است، پس $x=۳$ باید ریشهٔ مضاعف مخرج کسر باشد. بنابراین

$$۲x^{۲}+ax+b=۲(x-۳)^{۲}\Rightarrow ۲x^{۲}+ax+b=۲x^{۲}-۱۲x+۱۸$$
$$a=-۱۲,b=۱۸\Rightarrow a+b=۶$$

ریاضی - ۹۳

۸۱۴- گزینهٔ ۱ باید تعداد نقاطی را پیدا کنیم که به‌ازای آن‌ها $(\frac{۱}{۳}x-۱)\in\mathbb{Z}$:

$$۰<x<۹\Rightarrow ۰<\frac{۱}{۳}x<۳\Rightarrow -۱<\frac{۱}{۳}x-۱<۲$$
$$\xrightarrow{(\frac{۱}{۳}x-۱)\in\mathbb{Z}}(\frac{۱}{۳}x-۱)\in\{۰,۱\}$$

ولی در نقطهٔ $x=۳$ که به‌ازای آن $\frac{۱}{۳}x-۱=۰$، عامل صفر کنندهٔ $x-۳$ موجب پیوستگی می‌شود. پس تابع f فقط در یک نقطهٔ از بازهٔ $(۰,۹)$ ناپیوسته است.

ریاضی - ۸۵

۸۱۵- گزینهٔ ۲ برای آنکه تابع روی دامنه‌اش پیوسته باشد، باید در $x=a$ پیوسته باشد. پس

$$\lim_{x\to a^{-}}f(x)=\lim_{x\to a^{+}}f(x)\Rightarrow\frac{۱}{a}=۱-\frac{a}{۴}\Rightarrow ۴=۴a-a^{۲}$$
$$a^{۲}-۴a+۴=۰\Rightarrow(a-۲)^{۲}=۰\Rightarrow a=۲$$

خارج از کشور ریاضی- ۹۵

۸۱۶- گزینهٔ ۳ حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۲$ باید برابر مقدار تابع در این نقطه باشند، بنابراین

$$\lim_{x\to۲^{-}}f(x)=۵\Rightarrow\lim_{x\to۲^{-}}(x^{۲}+bx-۱)=۵\Rightarrow ۴+۲b-۱=۵\Rightarrow b=۱$$
$$\lim_{x\to۲^{+}}f(x)=۵\Rightarrow\lim_{x\to۲^{+}}(ax+b)=۵\Rightarrow ۲a+b=۵$$

چون $b=۱$، در نتیجه $۲a+۱=۵$، یعنی $a=۲$.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۸۱۷- گزینهٔ ۲ برای برقراری شرط پیوستگی تابع روی $\mathbb{R}$ ، پیوستگی آن در نقاط $x=\pm ۱$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=a+b \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۱\times[۱^-]=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow a+b=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱)=\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)=-a+b \\ \lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)=(-۱)\times[(-۱)^+]=۱ \end{array}\right\}\Rightarrow -a+b=۱$$

بنابراین $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه به‌ازای $|x|\geq ۱$ ، $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}$ ، پس $f(۳)=-۱$.

ریاضی - ۹۰

۸۱۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $x\notin\mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $[x]+[-x]=-۱$. بنابراین تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases}-۱ & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ است و به‌ازای $a=-۱$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی پیوسته است.

ریاضی - ۹۶

۸۱۹- گزینهٔ ۲ در نقطهٔ $x=-۱$ ، باید حد چپ و حد راست تابع با هم برابر باشند:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{۲-\sqrt{۳-x}}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{۳-x}}}{۱}=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=-a+۱$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۴}=-a+۱\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۸۲۰- گزینهٔ ۴ در نقطهٔ $x=۰$ ، باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد. توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{(۱-\sqrt{۱-x})(۱+\sqrt{۱-x})}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{۱-۱+x}=\lim_{x\to ۰}(۱+\sqrt{۱-x})=۲$$

بنابراین اگر $f(۰)=a=۲$ ، تابع در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است.

تجربی - ۹۶

۸۲۱- گزینهٔ ۲ چون حد مورد نظر برابر عددی غیر صفر و حد صورت برابر صفر است، باید حد مخرج هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}(ax+b)=۰\Rightarrow ۲a+b=۰\Rightarrow b=-۲a$$

اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax-۲a}\times\frac{x+\sqrt{۳x-۲}}{x+\sqrt{۳x-۲}}\right)=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۳x+۲}{a(x-۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x-۱)}{a(x-۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}=\frac{۱}{a(۲+۲)}=\frac{۱}{۴a}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۴a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

چون $b=-۲a$ ، پس $b=-۱$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۸۲۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x^۲-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x-۲||x+۱|}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{|x-۲||x+۱|}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}\times\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۱۲}}{۲x+\sqrt{x^۲+۱۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x-۲||x+۱|(۲x+\sqrt{x^۲+۱۲})}{۳(x^۲-۴)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)(x+۱)(۲x+\sqrt{x^۲+۱۲})}{۳(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x+۱)(۲x+\sqrt{x^۲+۱۲})}{۳(x+۲)}=\frac{-(۳)\times ۸}{۳\times ۴}=-۲$$

ریاضی - ۹۰

۸۲۳- گزینهٔ ۴ از فرض سؤال نتیجه می‌شود $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{|x^۲|}{ax^۲}=\frac{۱}{a}=-۱$ ، پس $a=-۱$. برای محاسبهٔ حد راست عبارت در $x=-۲$ دقت کنید که به ازای $-۲<x<۲$ ، عبارت $x^۲-۴$ منفی است، بنابراین باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۴-x^۲}{-x^۲-x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{(۲-x)(۲+x)}{(x+۲)(-x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۲-x}{-x+۱}=\frac{۴}{۳}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۸۲۴- گزینهٔ ۱ وقتی $x\to(\frac{۱}{۶})^+$ ، $\cos\pi x$ با مقدارهای کوچک‌تر از $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ به $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ نزدیک می‌شود، پس

$$\cos\pi x\to(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^-\Rightarrow ۴\cos^۲\pi x\to ۳^-\Rightarrow[۴\cos^۲\pi x]=۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}\frac{[۴\cos^۲\pi x]-۱۲x}{ax+b}=\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}\frac{۲-۱۲x}{ax+b}=\frac{۱}{۲}$$

چون حد صورت برابر صفر است، حد مخرج کسر نیز باید صفر شود تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید، زیرا در غیر این‌صورت حاصل حد برابر صفر می‌شود. در نتیجه

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}(ax+b)=۰\Rightarrow\frac{a}{۶}+b=۰\Rightarrow a=-۶b$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}\frac{۲-۱۲x}{ax+b}=\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}\frac{۲-۱۲x}{-۶bx+b}=\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}\frac{۲(۱-۶x)}{b(۱-۶x)}=\frac{۲}{b}$$

بنابراین $\frac{۲}{b}=\frac{۱}{۲}$ ، یعنی $b=۴$. چون $a=-۶b$ ، پس $a=-۲۴$. در نتیجه $a+b=-۲۰$.

خارج از کشور ریاضی- ۹۲

۸۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۳$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(ax-۳a-\frac{۳}{۸})=۳a-۳a-\frac{۳}{۸}=-\frac{۳}{۸}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱-\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}(\frac{۱-\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{x-۳}\times\frac{۱+\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{۱+\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}})$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱-x+\sqrt{x+۱}}{x-۳}\times\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{۱+\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}(\frac{۱-x+\sqrt{x+۱}}{x-۳}\times\frac{۱-x-\sqrt{x+۱}}{۱-x-\sqrt{x+۱}})\times\frac{۱}{۲}$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{(۱-x)^۲-(x+۱)}{x-۳}\times\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{۱-x-\sqrt{x+۱}}\times\frac{۱}{۲}$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x(x-۳)}{x-۳}\times\frac{۱}{-۴}\times\frac{۱}{۲}=۳\times\frac{۱}{-۴}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۸}$$

از طرف دیگر $f(۳)=-\frac{۳}{۸}$. بنابراین تابع به‌ازای هر مقدار a در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۸۲۶- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}(\frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{x-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۱+\sqrt{x}}}{\sqrt[۳]{۱+\sqrt{x}}})=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{۱-x}}{-\sqrt[۳]{۲}(۱-x)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{-\sqrt[۳]{۲}\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}=-\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطهٔ $x=۱$ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۸۲۷- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۲-a=f(۲)$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(\frac{a(۱+\sqrt[۳]{۱-x})}{x^۲-۲x}\times\frac{۱-\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}{۱-\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}})$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{a(۱+۱-x)}{x(x-۲)\times(۱-\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲})}=\frac{-a}{۶}$$

برای اینکه تابع f همواره پیوسته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۲$ برابر باشند، بنابراین

$$\frac{-a}{۶}=۲-a\Rightarrow ۱۲-۶a=-a\Rightarrow ۱۲=۵a\Rightarrow a=۲/۴$$

ریاضی - ۹۴

۸۲۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$-۱\le x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow f(x)=-\sin(\frac{\pi x}{۲})$$

$$۰\le x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=\sin(\frac{\pi x}{۲})$$

$$۱\le x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow f(x)=-\sin(\frac{\pi x}{۲})$$

پیوستگی تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ را بررسی می‌کنیم تا گزینهٔ درست مشخص شود:

$$f(۰)=۰,\qquad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(-\sin(\frac{\pi x}{۲}))=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\sin(\frac{\pi x}{۲})=۰$$

$$f(۱)=-۱,\qquad \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\sin(\frac{\pi x}{۲})=۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(-\sin(\frac{\pi x}{۲}))=-۱$$

پس تابع در $x=۰$ پیوسته و در $x=۱$ ناپیوسته است. به همین ترتیب این تابع در تمام نقطه‌های زوج پیوسته و در تمام نقطه‌های فرد ناپیوسته است.

ریاضی - ۹۳

۸۲۹- گزینهٔ ۳ نشان می‌دهیم تابع gof در $x=۰$ پیوسته است. حد چپ و حد راست تابع gof در نقطهٔ $x=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x\to ۰^-: f(x)=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} g(f(x))=\lim_{t\to(\frac{-۱}{۲})} g(t)=-۲\times\frac{-۱}{۲}=۱$$

$$x\to ۰^+: f(x)=۲x\to ۰^+\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+} g(f(x))=\lim_{t\to ۰^+} g(t)=۱$$

با توجه به اینکه $g(f(۰))=۱$، تابع gof در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است. ناپیوستگی توابع دیگر نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. (بررسی سایر گزینه‌ها بر عهدهٔ خواننده)

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

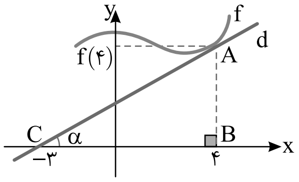
۸۳۰- گزینهٔ ۲ با توجه به آنکه $f(x)=[x^۲-۳]=[x^۲]-۳$، باید $y=[x^۲]$ روی این بازه پیوسته باشد. تابع مورد نظر در نقاط $x=\pm\sqrt{n}$ (که $n\in\mathbb{N}$) ناپیوسته است. پس در نقاط $x=۲$ و $x=\sqrt{۵}$ ناپیوسته است و در نتیجه بازهٔ مورد نظر $[۲,\sqrt{۵})$ است، بنابراین $k=\sqrt{۵}-۲$.

ریاضی - ۸۸

۸۳۱- گزینهٔ ۱ در نقاط $x=b$ و $x=c$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f صفر است. در نقطهٔ $x=d$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f مثبت و در نقطهٔ $x=a$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f منفی است. بنابراین مشتق تابع f در $x=a$ از بقیه کوچک‌تر است.

۸۳۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با $f'(۴)$. از طرف دیگر، شیب خط d برابر با $\tan\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{f(۴)}{۷}$ است. به این ترتیب $f'(۴)=\frac{f(۴)}{۷}$، پس

$$f(۴)+f'(۴)=۲\Rightarrow f(۴)+\frac{f(۴)}{۷}=۲\Rightarrow f(۴)=\frac{۷}{۴}$$



۸۳۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲f(x)-۲f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۲(f(x)-f(۲))}{x-۲}=۲\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$$
$$=۲f'(۲)=۶$$

۸۳۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر به جای ۲ در صورت کسر داده شده، $\sqrt{f(۲)}$ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^{۲}-۲x}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(۲)}}{x(x-۲)}$$
$$=\lim_{x\to ۲}(\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(۲)}}{x(x-۲)}\times\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}})$$
$$=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)})x}$$
$$=f'(۲)\times\frac{۱}{۲(\sqrt{f(۲)}+\sqrt{f(۲)})}=f'(۲)\times\frac{۱}{۴\sqrt{f(۲)}}=\frac{۲\times ۲}{۲-۱}\times\frac{۱}{۴\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^{۲}-۲x}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}}{۲x-۲}=\frac{f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}(۴-۲)}=\frac{\frac{۲\times ۲}{۲-۱}}{۲\times ۲\times ۲}=\frac{۱}{۲}$$

۸۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{۲h^{۲}+۳h}=\lim_{h\to ۰}(\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}\times\frac{۱}{۳+۲h})$$
$$=f'(۳)\times\frac{۱}{۳+۰}=\frac{۶}{۳}=۲$$

۸۳۶- گزینهٔ ۲ اگر $-h^{۲}=k$ و $h\to ۰$، آن‌گاه $k\to ۰^{-}$ و در نتیجه

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱-h^{۲})-f(۱)}{h^{۲}}=\lim_{k\to ۰^{-}}\frac{f(۱+k)-f(۱)}{-k}$$
$$=-\lim_{k\to ۰^{-}}\frac{f(۱+k)-f(۱)}{k}=-f'_{-}(۱)=-۲$$

۸۳۷- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)^{۲}(x^{۲}+۱)^{۲}}{x-۱}$$
$$=\lim_{x\to ۱}((x+۱)^{۲}(x^{۲}+۱)^{۲})=(۱+۱)^{۲}(۱+۱)^{۲}=۱۶$$

۸۳۸- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x}{|x|+۱}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{|x|+۱}=۱$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

۸۳۹- گزینهٔ ۴ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع در $x=۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_{+}(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{\sqrt[۳]{(۲-x)^{۲}}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۲}}=+\infty$$
$$f'_{-}(۲)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{\sqrt[۳]{(۲-x)^{۲}}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۲}}=-\infty$$

۸۴۰- گزینهٔ ۱ مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{|x|\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to ۰^{+}}\sqrt[۳]{x}=۰$$
$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{|x|\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-x\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to ۰^{-}}(-\sqrt[۳]{x})=۰$$

بنابراین $f'(۰)=۰$ و نمودار تابع در این نقطه، خط مماس موازی محور طول‌ها دارد.

۸۴۱- گزینهٔ ۲ شیب خطی که از نقطه‌های $A(-۱,۳)$ و $B(۴,۴)$ می‌گذرد، برابر است با $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱}{۵}$. از طرف دیگر، مشتق تابع f در نقطهٔ -۱ با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ A برابر است. بنابراین $f'(-۱)=\frac{۱}{۵}$.

۸۴۲- گزینهٔ ۲ اگر $x\to ۳$، آن‌گاه شیب خطی که نقطه‌های A و B را به هم وصل می‌کند، به شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=۳$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین

$$۲=\lim_{x\to ۳}\frac{k}{x}\Rightarrow ۲=\frac{k}{۳}\Rightarrow k=۶$$

۸۴۳- گزینهٔ ۳ اگر به جای ۴ مقدار $f(۱)$ را قرار دهیم، آن‌گاه

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۲}{f(x)-۴}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲(x-۱)}{f(x)-f(۱)}=\frac{۲}{\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}}=\frac{۲}{f'(۱)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۸۴۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۳f(x)-۳f(۳)}{x^۲-۹}=۳\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{(x-۳)(x+۳)}$$
$$=۳(\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳})(\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{x+۳})=۳\times f'(۳)\times\frac{۱}{۳+۳}=۳\times ۴\times\frac{۱}{۶}=۲$$

۸۴۵- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $x=۲-h$ ، آن‌گاه $h\to ۰$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{f(x)-f(۲)}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲-h-۲}{f(۲-h)-f(۲)}=-\lim_{h\to ۰}\frac{h}{f(۲-h)-f(۲)}$$
$$=-\frac{۱}{\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}}=-\frac{۱}{۴}$$

۸۴۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** به جای ۸ قرار می‌دهیم $f^۳(۱)$ و از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=۱$ استفاده کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-f^۳(۱)}{h}$$

توجه کنید که به کمک اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-f^۳(۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{(f(۱+h)-f(۱))(f^۲(۱+h)+f(۱)f(۱+h)+f^۲(۱))}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}\times\lim_{h\to ۰}(f^۲(۱+h)+۲f(۱+h)+۴)$$
$$=f'(۱)\times(f^۲(۱)+۲f(۱)+۴)=(\sqrt[۳]{۱}+۱)(۴+۴+۴)=۲۴$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۳f'(۱+h)f^۲(۱+h)}{۱}=۳f'(۱)f^۲(۱)$$
$$=۳\times(\sqrt[۳]{۱}+۱)\times ۲^۲=۲۴$$

۸۴۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(۲)=۰$. اکنون با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=۲$ مقدار $f'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{(x^۲-۳x+۲)\sqrt{\frac{x+۲}{x+۷}}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}((x-۱)\sqrt{\frac{x+۲}{x+۷}})$$
$$=(۲-۱)\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\frac{۲}{۳}$$

۸۴۸- گزینهٔ ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

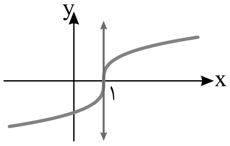
$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x+|x|\sqrt[۳]{x+۸}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x+x\sqrt[۳]{x+۸}}{x}$$
$$=\lim_{x\to ۰^+}(۱+\sqrt[۳]{x+۸})=۱+۲=۳$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x+|x|\sqrt[۳]{x+۸}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x-x\sqrt[۳]{x+۸}}{x}$$
$$=\lim_{x\to ۰^-}(۱-\sqrt[۳]{x+۸})=۱-۲=-۱$$

بنابراین $f'_+(۰)-f'_-(۰)=۴$.

۸۴۹- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ در نقطهٔ $x=۱$ مشتق ندارد، زیرا

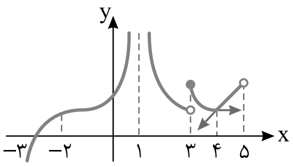
$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}-۰}{x-۱}$$
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}}=+\infty$$



ولی خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه وجود دارد و موازی محور عرض‌ها است.

۸۵۰- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطهٔ ۳ پیوسته نیست، پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. تابع در نقطهٔ ۴ نیز مشتق‌پذیر نیست، زیرا مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابر نیستند. در بقیهٔ نقاط، دامنهٔ تابع مشتق وجود دارد. بنابراین مجموع مورد نظر برابر ۷ است.

توجه کنید که نقطهٔ $x=۱$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد.



۸۵۱- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f روی بازهٔ $[۰,۲]$ پاره‌خطی است که نقطه‌های $(۰,۰)$ و $(۲,۱)$ را به هم وصل می‌کند، پس شیب آن برابر $\frac{۱-۰}{۲-۰}=\frac{۱}{۲}$ است، در نتیجه $f'(۱)=\frac{۱}{۲}$. نمودار تابع f روی بازهٔ $[۲,۴]$ پاره‌خطی است که شیب آن صفر است، پس $f'(۳)=۰$. نمودار تابع f روی بازهٔ $[۴,+\infty)$ نیم‌خطی است که از نقطه‌های $(۴,۱)$ و $(۶,۵)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر $\frac{۵-۱}{۶-۴}=۲$ است، در نتیجه $f'(۵)=۲$. بنابراین $\frac{f'(۱)+f'(۳)}{f'(۵)}=\frac{\frac{۱}{۲}+۰}{۲}=\frac{۱}{۴}$.

۸۵۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}=۳$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f^۲(x)-۹}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{(f(x)-۳)(f(x)+۳)}{(x-۲)(x+۲)}$$
$$=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}\times\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)+۳}{x+۲}=f'(۲)\times\frac{f(۲)+۳}{۲+۲}$$
$$=۳\times\frac{۳+۳}{۴}=\frac{۹}{۲}$$

۸۵۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-۳}{x-۱}=۶$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f^{۳}(x)-۲۷}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(f(x)-۳)(f^{۲}(x)+۳f(x)+۹)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-۳}{x-۱}\times\lim_{x\to ۱}((f^{۲}(x)+۳f(x)+۹)(\sqrt{x}+۱))$$

$$=f'(۱)\times(f^{۲}(۱)+۳f(۱)+۹)(۱+۱)=۳\sqrt{۱+۳}(۳^{۲}+۳\times۳+۹)\times۲=۳۲۴$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f^{۳}(x)-۲۷}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۳f'(x)f^{۲}(x)}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{۳\times۳\sqrt{۱+۳}\times۳^{۲}}{\frac{۱}{۲\times۱}}=۳۲۴$$

۸۵۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $x=۲-h$ ، آن‌گاه $h\to۰$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-۸}{f(x)-f(۲)}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲-h)^{۳}-۸}{f(۲-h)-f(۲)}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(-۱۲+۶h-h^{۲})}{f(۲-h)-f(۲)}$$

$$=\frac{۱}{\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}}\times\lim_{h\to ۰}(-۱۲+۶h-h^{۲})=\frac{۱}{۴}\times(-۱۲)=-۳$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-f'(۲-h)}{۱}=-f'(۲)=۴\Rightarrow f'(۲)=-۴$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-۸}{f(x)-f(۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^{۲}}{f'(x)}=\frac{۱۲}{f'(۲)}=\frac{۱۲}{-۴}=-۳$$

۸۵۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+۲h)-f(۳-h)}{h}=(۲-(-۱))f'(۳)$$

بنابراین $۳f'(۳)=۱۲$ ، در نتیجه $f'(۳)=۴$.

۸۵۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که حد خواسته شده برابر مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x=۱$ است، ولی چون تابع در این نقطه پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ هم ندارد و این حد وجود ندارد. به‌صورت مستقیم هم می‌توان حاصل این حد را به‌دست آورد:

$$\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{-۲(۱+h)-۱}{h}=\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{-۲h-۳}{h}=+\infty$$

۸۵۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $g(۰)=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰}f(x)=-۲$. پس

$$g'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x}{x-۲f(x)}}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x-۲f(x)}=\frac{۱}{۴}$$

۸۵۸- گزینهٔ ۳ مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطهٔ $x=۲$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_{+}(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{|x-۲|[x]}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{۲(x-۲)}{x-۲}=۲$$

$$f'_{-}(۲)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{|x-۲|[x]}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱$$

بنابراین $f'_{+}(۲)-f'_{-}(۲)=۳$.

۸۵۹- گزینهٔ ۲ برای تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}}$ تساوی‌های داده شده برقرار هستند:

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=+\infty$$

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=-\infty$$

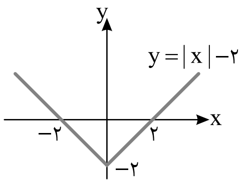
برای توابع دیگر توجه کنید که

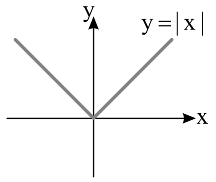
گزینهٔ (۱) : $f(x)=\sqrt[۳]{x}\Rightarrow f'_{+}(۰)=f'_{-}(۰)=+\infty$

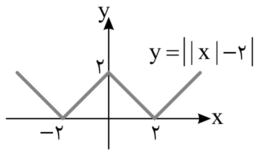
گزینهٔ (۳) : $f(x)=-\sqrt[۳]{|x|}\Rightarrow f'_{+}(۰)=-\infty, f'_{-}(۰)=+\infty$

گزینهٔ (۴) : $f(x)=-\sqrt[۳]{x}\Rightarrow f'_{+}(۰)=f'_{-}(۰)=-\infty$

۸۶۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل زیر است.







بنابراین تابع در نقاط $x=۰$ ، $x=۲$ و $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۸۶۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=۳x^{۲}-۳$ ، پس

$$f'(\frac{۱}{۳})=۳\times\frac{۱}{۹}-۳=\frac{۱}{۳}-۳=-\frac{۸}{۳}$$

۸۶۲- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=a(x-۳)+ax+۱=۲ax-۳a+۱$$

در نتیجه

$$\begin{cases}f'(۱)=-a+۱\\ f'(۱)=۵\end{cases}\Rightarrow a=-۴$$

۸۶۳- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(x-۴+x-۲)x^{۲}-۲x(x-۲)(x-۴)}{x^{۴}}$$

$$=\frac{(۲x-۶)x^{۲}-۲x(x-۲)(x-۴)}{x^{۴}}$$

در نتیجه $\frac{۷}{۲}=\frac{(-۱۰)۴+۴(-۴)(-۶)}{۱۶}=f'(-۲)$.

۸۶۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\frac{۳x^{۲}(x^{۲}+k)-(۲x)(x^{۳})}{(x^{۲}+k)^{۲}}$.

در نتیجه

$$f'(-۱)=\frac{۵}{۸}\Rightarrow\frac{۳(۱+k)-۲}{(۱+k)^{۲}}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow k=۳, k=-\frac{۱}{۵}\text{(غ.ق.ق.)}$$

۸۶۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=۲\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۳\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

در نتیجه $۲۴=۲^{۳}+۲^{۴}=\frac{۱}{\sqrt{۲^{-۶}}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲^{-۱۲}}}=f'(۲^{-۶})$.

۸۶۶- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ تقسیم، $(\frac{f}{g})'(۱)=\frac{f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^{۲}(۱)}$.

از طرف دیگر، $f(۱)=۱$ ، $g(۱)=-\frac{۱}{۲}$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}\ ,\quad g'(x)=\frac{۱}{۲}(۲x)=x\Rightarrow g'(۱)=۱$$

بنابراین $(\frac{f}{g})'(۱)=\frac{\frac{۱}{۲}\times(-\frac{۱}{۲})-۱\times۱}{\frac{۱}{۴}}=-۵$.

۸۶۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۶\sqrt{x}-۲۴}{\sqrt[۳]{x}}=\frac{۶\sqrt{x}}{\sqrt[۳]{x}}-\frac{۲۴}{\sqrt[۳]{x}}=۶x^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}}-۲۴x^{-\frac{۱}{۳}}$$
$$=۶x^{\frac{۱}{۶}}-۲۴x^{-\frac{۱}{۳}}$$

بنابراین $f'(x)=\frac{۶}{۶}x^{-\frac{۵}{۶}}+\frac{۲۴}{۳}x^{-\frac{۴}{۳}}$ ، پس $f'(۱)=۱+۸=۹$.

۸۶۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ ۳ علامت عبارت $x-۴$ منفی است، بنابراین در یک همسایگی نقطهٔ ۳، $f(x)=-(x-۴)+۲x=x+۴$. در نتیجه $f'(x)=۱$ و $f'(۳)=۱$.

۸۶۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$ ، $۱<\frac{x}{۲}+۱<۲$ ، پس در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$ ، مقدار $[\frac{x}{۲}+۱]$ برابر ۱ است، و در نتیجه

$$f(x)=۳x^{۲}-۱\Rightarrow f'(x)=۶x\Rightarrow f'(\frac{۱}{۲})=۳$$

۸۷۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sqrt{x}-۸$ به‌ازای $x=۶۴$ برابر با صفر است. پس عامل صفر کننده است و مشتق آن به‌ازای $x=۶۴$ برابر $\frac{۱}{۱۶}$ است:

$$y=\sqrt{x}-۸\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow y'(۶۴)=\frac{۱}{۱۶}$$

بنابراین مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۶۴$ برابر است با

$$\frac{۱}{۱۶}\times(\sqrt[۳]{۶۴}+۴)(\sqrt[۴]{۶۴})=\frac{۱}{۱۶}\times۸\times۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$$

۸۷۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۳x^{۲}}{۳}+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(۲x)+۲=x^{۲}+۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})x+۲$$

بنابراین $f'(\sqrt{۲})=\sqrt{۲}^{۲}+۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})\sqrt{۲}+۲=۲+۲\sqrt{۶}-۴+۲=۲\sqrt{۶}$.

۸۷۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=\frac{x-۱}{x^{۲}+۱}$ ، در نتیجه

$$f'(x)=\frac{(۱)(x^{۲}+۱)-(۲x)(x-۱)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$$

در نتیجه، $f'(-۱)=\frac{۲-۴}{۴}=-\frac{۱}{۲}$.

۸۷۳- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g'(x)=\frac{۲xf(x)-x^{۲}f'(x)}{f^{۲}(x)}$$

بنابراین $g'(۲)=\frac{۴f(۲)-۴f'(۲)}{f^{۲}(۲)}=\frac{۱۲-(-۸)}{۹}=\frac{۲۰}{۹}$.

۸۷۴- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(۱)(x+a)-(۱)(x)}{(x+a)^{۲}}=\frac{a}{(x+a)^{۲}}$$

در نتیجه

$$f'(۰)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{a}{a^{۲}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a=۳$$

۸۷۵- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x^{۲}+۱)+(\sqrt{x}-۱)(۲x)$$

بنابراین $f'(۴)=\frac{۱}{۲\times۲}(۱۷)+(۲-۱)(۸)=\frac{۴۹}{۴}$.

۸۷۶- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱-\sqrt{x})-(-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۱+\sqrt{x})}{(۱-\sqrt{x})^{۲}}$$

در نتیجه $f'(\frac{۱}{۴})=\frac{\frac{۲}{۲}(۱-\frac{۱}{۲})+\frac{۲}{۲}(۱+\frac{۱}{۲})}{(۱-\frac{۱}{۲})^{۲}}=۸$.

۸۷۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=xx^{\frac{۱}{۲}}(x^{\frac{۱}{۳}}+۲)=x^{\frac{۱۱}{۶}}+۲x^{\frac{۳}{۲}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{۱۱}{۶}x^{\frac{۵}{۶}}+۳x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱۱}{۶}+۳=\frac{۲۹}{۶}$$

۸۷۸- گزینهٔ ۲ چون $x^{۳}-۲x=x(x^{۲}-۲)$ ، در یک همسایگی نقطهٔ ۲ علامت عبارت $x^{۳}-۲x$ مثبت است، بنابراین

$$f(x)=x^{۲}+(x^{۳}-۲x)=x^{۳}+x^{۲}-۲x$$

در نتیجه $f'(x)=۳x^{۲}+۲x-۲$ و $f'(۲)=۱۴$.

۸۷۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۳}{۲}$ مقدار $[x]$ برابر ۱ است و در نتیجه

$$f(x)=\frac{x^{۳}}{x+۵}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳x^{۲}(x+۵)-x^{۳}}{(x+۵)^{۲}}=\frac{۲x^{۳}+۱۵x^{۲}}{(x+۵)^{۲}}\Rightarrow f'(\frac{۳}{۲})=\frac{۱۶۲}{۱۶۹}$$

۸۸۰- گزینهٔ ۲ در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۴}{۵}$ ، علامت عبارت $x^{۲}-۱$ منفی است و $۱<۲x<۲$ ، پس در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۴}{۵}$ ، $[۲x]=۱$. بنابراین

$$f(x)=\frac{-(x^{۲}-۱)}{x+۱}=-(x-۱)$$

در نتیجه $f'(x)=-۱$ و $f'(\frac{۴}{۵})=-۱$.

۸۸۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=۳ax^{۲}-۲ax+۴$. بنابراین

$$f'(-۲)=۱۲\Rightarrow۱۲a+۴a+۴=۱۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{۲}-x+۴$. پس $f'(۱)=\frac{۹}{۲}$.

۸۸۲- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم و مشتق آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x(x^2-1)(x^2-2)=x^5-3x^3+2x\Rightarrow f'(x)=5x^4-9x^2+2$$

بنابراین

$$f'(x)=0\Rightarrow 5x^4-9x^2+2=0\Rightarrow\begin{cases}x^2=\frac{9+\sqrt{41}}{10}\\ x^2=\frac{9-\sqrt{41}}{10}\end{cases}$$

پس در نقاط $x=\pm\sqrt{\frac{9+\sqrt{41}}{10}}$ و $x=\pm\sqrt{\frac{9-\sqrt{41}}{10}}$ مشتق تابع f برابر صفر است. حاصل‌ضرب این اعداد برابر است با $\frac{2}{5}$.

۸۸۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=x^{-10}+x^{-9}+\cdots+x^{-1}+1+x+x^2+\cdots+x^{10}$$

بنابراین $f'(x)=-10x^{-11}-9x^{-10}-\cdots-x^{-2}+1+2x+\cdots+10x^9$.

در نتیجه $f'(1)=-10-9-\cdots-1+1+1+2+\cdots+10=0$.

۸۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(x^5+x^2)-(x^3+1)}{x^3+1}=\frac{x^2(x^3+1)-(x^3+1)}{x^3+1}=x^2-1\ (x\neq-1)$$

در نتیجه برای هر $x\neq-1$ مشتق تابع f برابر $2x$ است و $f'(\frac{\sqrt{2}-1}{2})=\sqrt{2}-1$.

۸۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2x-m)(x^2+5x+3)-(2x+5)(x^2-mx+4)}{(x^2+5x+3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(-1)=0\Rightarrow(-2-m)(1-5+3)-(-2+5)(1+m+4)=0\Rightarrow m=-\frac{13}{2}$$

۸۸۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$ به‌ازای $x=1$ برابر صفر است، پس عامل صفر کننده است. از طرف دیگر،

$$y=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow y'(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

در نتیجه $f'(1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{12}$.

۸۸۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=xx^{\frac{1}{3}}(xx^{\frac{1}{2}}+1)=x^{\frac{17}{6}}+x^{\frac{4}{3}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{17}{6}x^{\frac{11}{6}}+\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(1)=\frac{17}{6}+\frac{4}{3}=\frac{25}{6}$$

۸۸۸- گزینهٔ ۲ اگر در تساوی $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-1}{2x}$ قرار دهیم $x=-1$، چون $f(-1)=1$، به‌دست می‌آید $g(-1)=0$. اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=\frac{(2x)(2x)-2(x^2-1)}{4x^2}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$، به‌دست می‌آید $\frac{g'(-1)-0}{1}=1$، بنابراین

$$g'(-1)=1$$

۸۸۹- گزینهٔ ۳ در یک همسایگی $x=2$ مقدار عبارت x^2-3x منفی است و مقدار عبارت x^2+3x مثبت است. بنابراین ضابطهٔ تابع در این همسایگی به‌صورت $f(x)=-x^2+3x-x^2-3x=-2x^2$ است. بنابراین

$$f'(x)=-4x\Rightarrow f'(2)=-8$$

۸۹۰- گزینهٔ ۳ اگر ضابطهٔ تابع را به‌صورت

$$f(x)=(x^2-49)\underbrace{(x^2-50)(x^2-20)(x^2-21)\cdots(x^2-48)}_{g(x)}$$

بنویسیم، در این صورت

$$f(x)=(x^2-49)g(x)\Rightarrow f'(x)=2xg(x)+(x^2-49)g'(x)$$

واضح است که اگر $f'(7)$ را حساب کنیم، مقدار عبارت $(x^2-49)g'(x)$ صفر می‌شود و کافی است مقدار عبارت $2xg(x)$ را حساب کنیم:

$$f'(7)=2\times7g(7)=2\times7\times(49-50)(49-20)(49-21)\cdots(49-48)$$
$$=-14\times29!$$

۸۹۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+49x^{48}-50x^{49}$$

بنابراین $f'(-1)=1+2+3+4+\cdots+49+50=1275$.

۸۹۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که چون مقدار $x+1$ به‌ازای $x=-1$ صفر است، پس مشتق عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(ax+4)$ به‌ازای $x=-1$ برابر است با $(-1+2)(-1+3)(-a+4)=8-2a$. بنابراین

$$8-2a=2\Rightarrow a=3$$

۸۹۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f'(x)=a\Rightarrow f'(x)f(x)=a^2x+ab=4x-8$$

بنابراین $a^2=4\Rightarrow a=\pm2,\quad f'(3)=a\Rightarrow f'(3)=\pm2$

۸۹۴- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+mx+1}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+mx+1)-(2x+m)(x^2-x+1)}{(x^2+mx+1)^2}$$

بنابراین $f'(0)=\frac{(-1)(1)-(m)(1)}{1^2}=-1-m$. در نتیجه

$$-1-m=2m\Rightarrow m=-\frac{1}{3}$$

۸۹۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{g(x)-1}{x^2+1}\Rightarrow(x^2+1)f(x)=g(x)-1$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$(2x)f(x)+(x^2+1)f'(x)=g'(x)\Rightarrow 2f(1)+2f'(1)=g'(1)\Rightarrow g'(1)=12$$

۸۹۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{3h}=\frac{2}{3}\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}=\frac{2}{3}f'(2)$$

از طرف دیگر، $f(x)=2x^2+8x^{-2}$، پس

$$f'(x)=4x+8(-2)x^{-3}=4x-\frac{16}{x^3}$$

بنابراین $f'(2)=8-2=6$ و مقدار حد مورد نظر برابر است با $\frac{2}{3}\times6=4$.

۸۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^{۲}+\sqrt{x}}{x^{۳}+\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{(x^{۲}+\sqrt{x})'(x^{۳}+\sqrt[۳]{x})-(x^{۳}+\sqrt[۳]{x})'(x^{۲}+\sqrt{x})}{(x^{۳}+\sqrt[۳]{x})^{۲}}$$

$$=\frac{(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(x^{۳}+\sqrt[۳]{x})-(۳x^{۲}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}})(x^{۲}+\sqrt{x})}{(x^{۳}+\sqrt[۳]{x})^{۲}}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=۱$ ، نتیجه می‌شود

$$f'(۱)=\frac{(۲+\frac{۱}{۲})(۱+۱)-(۳+\frac{۱}{۳})(۱+۱)}{(۱+۱)^{۲}}=-\frac{۵}{۱۲}$$

۸۹۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$$(f\times g)'(۱)=f'(۱)g(۱)+g'(۱)f(۱)$$

ابتدا ضابطهٔ تابع $f\times g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=(x^{۲}+\sqrt{x^{۴}+x^{۲}})^{۹}(x^{۲}-\sqrt{x^{۴}+x^{۲}})^{۹}$$

$$=((x^{۲}+\sqrt{x^{۴}+x^{۲}})(x^{۲}-\sqrt{x^{۴}+x^{۲}}))^{۹}=(x^{۴}-x^{۴}-x^{۲})^{۹}=-x^{۱۸}$$

بنابراین

$$(f\times g)'(x)=(-x^{۱۸})'=-۱۸x^{۱۷}\Rightarrow(f\times g)'(۱)=-۱۸\times ۱^{۱۷}=-۱۸$$

۸۹۹- گزینهٔ ۴ دریک‌همسایگی‌نقطهٔ $x=۱$ علامت‌عبارت $۲x-x^{۲}\sqrt{x}$ مثبت است و در یک همسایگی نقطهٔ $x=۴$ علامت این عبارت منفی است. بنابراین در یک همسایگی نقطهٔ ۱،

$$f(x)=۲x-x^{۲}\sqrt{x}=۲x-x^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow f'(x)=۲-\frac{۵}{۲}x^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(۱)=۲-\frac{۵}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

و در یک همسایگی نقطهٔ ۴،

$$f(x)=-۲x+x^{۲}\sqrt{x}=-۲x+x^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow f'(x)=-۲+\frac{۵}{۲}x^{\frac{۳}{۲}}$$

$$f'(۴)=-۲+\frac{۵}{۲}\times ۸=۱۸$$

بنابراین $f'(۱)f'(۴)=-۹$.

۹۰۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۲۱}{۲}$ مقدار عبارت‌های x ، $x-۱$ ، $x-۲$ و ... و $x-۱۰$ مثبت و مقدار عبارت‌های $x-۱۱$ ، $x-۱۲$ ، ... و $x-۲۰$ منفی است. بنابراین ضابطهٔ تابع در همسایگی این نقطه به شکل زیر است:

$$f(x)=x+(x-۱)+(x-۲)+\cdots+(x-۱۰)-(x-۱۱)-(x-۱۲)-\cdots-(x-۲۰)$$

در نتیجه $f(x)=x+k$ ، که k مقداری ثابت است. بنابراین $f'(\frac{۲۱}{۲})=۱$.

۹۰۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^{n})'=ng'g^{n-۱}$ ، بنابراین

$$f'(x)=۳(۳x-۲)'(۳x-۲)^{۳-۱}-۴(۲x-۳)'(۲x-۳)^{۴-۱}$$

$$=۳(۳)(۳x-۲)^{۲}-۴(۲)(۲x-۳)^{۳}$$

در نتیجه $f'(-۱)=۹(-۳-۲)^{۲}-۸(-۲-۳)^{۳}=۹\times ۵^{۲}+۸\times ۵^{۳}=۴۹\times ۵^{۲}$

۹۰۲- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ ضرب و اینکه $(g^{n})'=ng'g^{n-۱}$ ،

$$f'(x)=((x^{۲}-۱)^{۲})'(x+۲)^{۴}+(x^{۲}-۱)^{۲}((x+۲)^{۴})'$$

$$=(۲(۲x)(x^{۲}-۱)^{۲-۱})(x+۲)^{۴}+(x^{۲}-۱)^{۲}(۴(۱)(x+۲)^{۴-۱})$$

$$=۴x(x^{۲}-۱)(x+۲)^{۴}+۴(x^{۲}-۱)^{۲}(x+۲)^{۳}$$

بنابراین $f'(۰)=۰+۴(۱)(۲)^{۳}=۳۲$.

۹۰۳- گزینهٔ ۳ بنابـر قاعدهٔ زنجیری، $(gof)'(۱)=f'(۱)g'(f(۱))$. از طـرف دیگـر، $f(x)=x^{۳}-x+۱$ ، در نتیجـه $f'(x)=۳x^{۲}-۱$. بنابرایـن $f(۱)=۱$ و $f'(۱)=۲$. همچنین

$$g(x)=۲-x^{۲}\Rightarrow g'(x)=-۲x\Rightarrow g'(f(۱))=g'(۱)=-۲$$

بنابراین $(gof)'(۱)=۲\times(-۲)=-۴$.

۹۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^{n})'=ng'g^{n-۱}$ ، بنابراین

$$f'(x)=(-۳)(۳-\frac{۱}{x^{۲}})(۳x+\frac{۱}{x})^{-۴}$$

در نتیجه، $f'(۱)=(-۳)(۲)(۴)^{-۴}=\frac{-۳}{۱۲۸}$. بنابراین $۱۲۸f'(۱)=-۳$.

۹۰۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(\sqrt[۳]{g})'=\frac{g'}{۳\sqrt[۳]{g^{۲}}}$ ، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲}+۲)^{۲}}}\Rightarrow f'(۵)=\frac{۱۰}{۲۷}$$

۹۰۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}-۷}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۴}{\sqrt{۹}}-\frac{۱}{۲\times ۲}=\frac{۱۳}{۱۲}$$

۹۰۷- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $f(۲x)=-x^{۲}+۳x+۴$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$(۲x)'f'(۲x)=-۲x+۳\Rightarrow ۲f'(۲x)=-۲x+۳$$

$$\xrightarrow{x=۲}۲f'(۴)=-۴+۳\Rightarrow f'(۴)=-\frac{۱}{۲}$$

۹۰۸- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$(\frac{۱}{۳x-۱})'f'(\frac{۱}{۳x-۱})=۶x\Rightarrow\frac{-۳}{(۳x-۱)^{۲}}f'(\frac{۱}{۳x-۱})=۶x$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$ ، به‌دست می‌آید $\frac{-۳}{۴}f'(\frac{۱}{۲})=۶$.

پس $f'(\frac{۱}{۲})=-۸$.

۹۰۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)$. از طرف دیگر، اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$-f'(۱-x)=۶x+۱\xrightarrow{x=-۱}-f'(۲)=-۵\Rightarrow f'(۲)=۵$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر ۵ است.

۹۱۰- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f^{۲}(x^{۳})$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$g'(x)=۲(f(x^{۳}))'f(x^{۳})=۲(۳x^{۲})f'(x^{۳})f(x^{۳})=۶x^{۲}f'(x^{۳})f(x^{۳})$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۲$ ، به‌دست می‌آید

$$g'(۲)=۶\times ۴\times f'(۸)f(۸)=۶\times ۴\times\frac{۱}{۶}=۴$$

۹۱۱- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ زنجیری،

$$(fog)'(-۱)=g'(-۱)f'(g(-۱))$$

از طرف دیگر،

$$g(x)=x^{۳}-۳x\Rightarrow g'(x)=۳x^{۲}-۳\Rightarrow g'(-۱)=۰$$

بنابراین $(fog)'(-۱)=۰$.

۹۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(g^{n})'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۳(۱+(۲+x^{۲})^{۲})'(۱+(۲+x^{۲})^{۲})^{۳-۱}$$

$$=۳(۲(۲x)(۲+x^{۲})^{۲-۱})(۱+(۲+x^{۲})^{۲})^{۲}=۱۲x(۲+x^{۲})(۱+(۲+x^{۲})^{۲})^{۲}$$

بنابراین $f'(۱)=۱۲\times۱\times۳\times۱۰^{۲}=۳۶۰۰$.

۹۱۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(g^{n})'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۳(-\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۳}{x^{۴}}+۱)(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^{۳}}+x)^{۲}$$

در نتیجه $f'(۱)=۹$.

۹۱۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(\sqrt[۳]{g})'=\frac{g'}{۳\sqrt[۳]{g^{۲}}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲x-۳}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲}-۳x+۱)^{۲}}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{-۱}{۳(۱)}=-\frac{۱}{۳}$$

۹۱۵- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=(۲x+۳)\sqrt{x^{۲}+۳}+(x^{۲}+۳x)\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۳}}$$

بنابراین $f'(۱)=۵\times۲+۴\times\frac{۱}{۲}=۱۲$.

۹۱۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f^{۲}(x)=\frac{۲x+۱}{x+۲}$. اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=۱$، به‌دست می‌آید

$$۲f'(x)f(x)=\frac{(۲)(x+۲)-(۱)(۲x+۱)}{(x+۲)^{۲}}\Rightarrow ۲f'(۱)f(۱)=\frac{۶-۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین $f(۱)f'(۱)=\frac{۱}{۶}$.

۹۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $g(۴)=\frac{۲+۱}{۳}=۱$ و

$$(fog)'(۴)=g'(۴)f'(g(۴))=g'(۴)f'(۱)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\frac{(۲x+۱)(x^{۲}+۱)-۲x(x^{۲}+x)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{-x^{۲}+۲x+۱}{(x^{۲}+۱)^{۲}},\quad f'(۱)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sqrt{x^{۲}-۷}-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}-۷}}(\sqrt{x}+۱)}{x^{۲}-۷}$$

$$g'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}\times۳-\frac{۸}{۶}\times۳}{۹}=-\frac{۱۳}{۳۶}$$

بنابراین $(fog)'(۴)=\frac{۱}{۲}\times\frac{-۱۳}{۳۶}=\frac{-۱۳}{۷۲}$.

۹۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(۲ax)\sqrt{۳x+۱}-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}(ax^{۲}+a)}{۳x+۱}$$

بنابراین

$$f'(۱)=\frac{۲۱}{۸}\Rightarrow\frac{(۲a)(۲)-\frac{۳}{۲\times۲}(a+a)}{۴}=\frac{۲۱}{۸}\Rightarrow\frac{\frac{۵a}{۲}}{۴}=\frac{۲۱}{۸}\Rightarrow a=\frac{۲۱}{۵}$$

۹۱۹- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی $f(x)=g(x^{۲}+۲x)$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $f'(x)=(۲x+۲)g'(x^{۲}+۲x)$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۳$، به‌دست می‌آید $f'(۳)=۸g'(۱۵)$، پس $g'(۱۵)=۹$.

۹۲۰- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $۴xf'(۲x^{۲}-۴)=۳f'(x-۳)+۵$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$، به‌دست می‌آید

$$۴f'(-۲)=۳f'(-۲)+۵\Rightarrow f'(-۲)=۵$$

۹۲۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۲(\frac{۳x^{۲}(x^{۲}-۱)-۲x(x^{۳}-۱)}{(x^{۲}-۱)^{۲}})(\frac{x^{۳}-۱}{x^{۲}-۱})\Rightarrow f'(-۲)=۰$$

۹۲۲- گزینهٔ ۱ چون نقطهٔ $(۲,۳)$ روی نمودار تابع f است، پس $f(۲)=۳$. چون خط d از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۵,۰)$ گذشته است، شیب آن برابر است با $\frac{۳-۰}{۲-۵}=-۱$. بنابراین $f'(۲)=-۱$. اکنون توجه کنید که

$$g'(x)=f(۳x-۴)+x(۳f'(۳x-۴))$$

$$g'(۲)=f(۲)+۶f'(۲)=۳-۶=-۳$$

۹۲۳- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}(\sqrt{x+۴}-۱)+(\sqrt{x-۱}+۲)\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}$$

در نتیجه $f'(۵)=\frac{۱}{۲\times۲}(۲)+۴\times\frac{۱}{۲\times۳}=\frac{۷}{۶}$.

۹۲۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=((x^{۳}+۲)(\sqrt{x}+۲x))^{۲}$ و $(g^{n})'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۲((۳x^{۲})(\sqrt{x}+۲x)+(x^{۳}+۲)(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۲))(x^{۳}+۲)(\sqrt{x}+۲x)$$

در نتیجه $f'(۱)=۲(۳(۳)+۳(\frac{۱}{۲}+۲))(۳)(۳)=۲۹۷$.

۹۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=\frac{۳x^{۲}+۳a}{۳\sqrt[۳]{(x^{۳}+۳ax)^{۲}}}$. بنابراین

$$f'(۲)=۰\Rightarrow ۳\times۲^{۲}+۳a=۰\Rightarrow a=-۴$$

۹۲۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{(\sqrt[۳]{x^{۲}-۱})^{۳}+۱}$$

$$=\sqrt{x^{۲}-۱+۱}=\sqrt{x^{۲}}=|x|$$

بنابراین

$$g'(x)f'(g(x))=(fog)'(x)=(|x|)'=\frac{x}{|x|}$$

۹۲۷- گزینهٔ ۲ طبق قاعدهٔ مشتق تابع مرکب:

$$y=f(x+\sqrt{۱+x^۲})\Rightarrow y'=(x+\sqrt{۱+x^۲})'f'(x+\sqrt{۱+x^۲})$$

$$=(۱+\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}})\times\frac{-۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{\sqrt{۱+x^۲}+x}{\sqrt{۱+x^۲}}\times\frac{-۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{-۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

۹۲۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که چون $g(-۱)=۲$، پس $f(۲)=f(g(-۱))$.

بنابراین

$$\lim_{x\to -۱}\frac{f(g(x))-f(۲)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{f(g(x))-f(g(-۱))}{x-(-۱)}$$

$$=(fog)'(-۱)=g'(-۱)f'(g(-۱))=۵\times f'(۲)=۵\times(-۳)=-۱۵$$

۹۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(x^۳)=\frac{x}{f(x^۲)}\Rightarrow ۳x^۲g'(x^۳)=\frac{f(x^۲)-۲x^۲f'(x^۲)}{f^۲(x^۲)}$$

$$g'(x^۳)=\frac{f(x^۲)-۲x^۲f'(x^۲)}{۳x^۲f^۲(x^۲)}$$

اکنون در تساوی فوق قرار می‌دهیم $x=۲$ و نتیجه می‌شود

$$g'(۸)=\frac{f(۴)-۸f'(۴)}{۱۲f^۲(۴)}=\frac{۱-۸\times\frac{۱۳}{۸}}{۱۲\times۱}=-۱$$

۹۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+k}{x+۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲-k}{(x+۲)^۲}$$

بنابراین

$$g(x)=(fof)(x)\Rightarrow g'(x)=f'(x)f'(f(x))$$

$$g'(۰)=f'(۰)f'(f(۰))=f'(۰)f'(\frac{k}{۲})$$

در نتیجه

$$\frac{۲-k}{۴}\times\frac{۲-k}{(\frac{k}{۲}+۲)^۲}=۴\Rightarrow(۲-k)^۲=۱۶(\frac{k}{۲}+۲)^۲$$

$$\begin{cases}۲-k=۴(\frac{k}{۲}+۲)\\ ۲-k=-۴(\frac{k}{۲}+۲)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-۲\\ k=-۱۰\end{cases}$$

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k برابر ۲۰ است.

۹۳۱- گزینهٔ ۴ توابع گزینه‌های (۱) و (۳) در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته نیستند، پس مشتق‌پذیر نیستند.

در گزینهٔ (۲)، ابتدا توجه کنید که تابع در $x=۱$ پیوسته است:

$$f(۱)=\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=۱$$

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq۱\\ x^۳ & x<۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۱\\ ۳x^۲ & x<۱\end{cases}$$

همچنین $f'_+(۱)=\lim_{x\to۱^+}(۲x)=۲$ و $f'_-(۱)=\lim_{x\to۱^-}(۳x^۲)=۳$. چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$، پس این تابع هم در نقطهٔ $x=۱$ مشتق ندارد.

در گزینهٔ (۴) تابع در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است و

$$f(x)=\begin{cases}۳x^۲-۱ & x\geq۱\\ ۲x^۳ & x<۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۶x & x>۱\\ ۶x^۲ & x<۱\end{cases}$$

همچنین، $f'_+(۱)=\lim_{x\to۱^+}(۶x)=۶$ و $f'_-(۱)=\lim_{x\to۱^-}(۶x^۲)=۶$. چون $f'_+(۱)=f'_-(۱)$، پس تابع گزینهٔ (۴) در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر است.

۹۳۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}=f'_+(-۱)$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ پیوستگی راست ندارد، پس مشتق راست هم ندارد. بنابراین حد فوق وجود ندارد. دقت کنید که می‌توانیم بدون استفاده از مفهوم مشتق هم نشان دهیم این حد وجود ندارد:

$$\lim_{h\to۰^+}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}=\lim_{h\to۰^+}\frac{۲(-۱+h)^۳-۳}{h}=-\infty$$

۹۳۳- گزینهٔ ۳ چون تابع در نقطهٔ $x=-۱$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}f(x)$$

$$-a+۲=-a+۲=۱-b\Rightarrow a-b=۱$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}۳ax^۲ & x>-۱\\ ۲x+b & x<-۱\end{cases}$، بنابراین

$$f'_+(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+}(۳ax^۲)=۳a\,,\,f'_-(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^-}(۲x+b)=-۲+b$$

$$f'_+(-۱)=f'_-(-۱)\Rightarrow ۳a=b-۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a-b=۱\\ ۳a-b=-۲\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{۳}{۲}$ و $b=-\frac{۵}{۲}$

و در نتیجه $a+b=-۴$.

۹۳۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f(۱)=\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=۲$$

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲ & x>۱\\ ۲x+۱ & x<۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(۱)=\lim_{x\to۱^+}(۳x^۲)=۳\\ f'_-(۱)=\lim_{x\to۱^-}(۲x+۱)=۳\end{cases}$$

بنابراین $f'(۱)=۳$. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{۱}{x+۱}=f'(۱)\times\frac{۱}{۲}=۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۹۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(۱)=۲$ و

$$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^+}(x^۳+x)=۲,\quad\lim_{x\to۱^-}f(x)=\lim_{x\to۱^-}۴x=۴$$

پس تابع در $x=۱$ پیوستگی چپ ندارد و $f'_-(۱)$ وجود ندارد، از طرف دیگر

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+۱ & x>۱\\ ۴ & x<۱\end{cases}$$

بنابراین $f'_+(۱)=\lim_{x\to۱^+}f'(x)=\lim_{x\to۱^+}(۳x^۲+۱)=۴$.

۹۳۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که تابع f در $x=۲$ پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ هم ندارد. از طرف دیگر

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲[x]-۸}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x^۲-۸}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x-۲)(x+۲)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}۲(x+۲)=۸$$

$$۲<x<۳\Rightarrow f(x)=۲x^۲\Rightarrow f'(x)=۴x\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}f'(x)=۸$$

$$۱<x<۲\Rightarrow f(x)=x^۲\Rightarrow f'(x)=۲x\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}f'(x)=۴$$

۹۳۷- گزینهٔ ۴ اگر $g(x)=(x+۱)(x-۲)^۲$، آن‌گاه $g(۲)=g'(۲)=۰$. بنابراین تابع $f(x)=|g(x)|$ در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است.

۹۳۸- گزینهٔ ۲ چندجمله‌ای داخل قدرمطلق یعنی $x^۲+۴x+m^۲$ باید دو ریشهٔ متمایز داشته باشد. پس

$$\Delta=۱۶-۴m^۲>۰\Rightarrow m^۲<۴\Rightarrow -۲<m<۲$$

۹۳۹- گزینهٔ ۲ تابع را به‌صورت $f(x)=(x-۲)|(x-۲)(x-۳)|$ می‌نویسیم. تابع $y=|(x-۲)(x-۳)|$ در نقاط $x=۲$ و $x=۳$ مشتق ندارد، ولی عامل صفر کنندهٔ $(x-۲)$ در پشت قدرمطلق باعث می‌شود که تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد. پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=۳$ مشتق ندارد.

۹۴۰- گزینهٔ ۱ عبارت داخل قدرمطلق $(x^۲-۴=(x-۲)(x+۲))$ دو ریشهٔ سادهٔ ۲ و ۲- دارد. برای آنکه تابع مورد نظر مشتق‌پذیر باشد، باید $x^۲+ax+b$ به ازای $x=-۲$ و $x=۲$ برابر صفر شود:

$$\begin{cases}x=۲\Rightarrow ۲^۲+a\times ۲+b=۰\Rightarrow ۲a+b=-۴\\ x=-۲\Rightarrow (-۲)^۲+a(-۲)+b=۰\Rightarrow -۲a+b=-۴\end{cases}$$

پس $a=۰$ و $b=-۴$، بنابراین $۳a+b=-۴$.

۹۴۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases}۴x-۳ & x<۳\\ ۹ & x>۳\end{cases}$. چون تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۳]$ پیوسته و روی بازهٔ $(-\infty,۳)$ مشتق‌پذیر است، همین‌طور روی بازهٔ $[۳,+\infty)$ پیوسته و روی بازهٔ $(۳,+\infty)$ مشتق‌پذیر است و

$$\lim_{x\to ۳^-}f'(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۴x-۳)=۹ \qquad (۱)$$

$$\lim_{x\to ۳^+}f'(x)=\lim_{x\to ۳^+}(۹)=۹ \qquad (۲)$$

پس مقدار حد (۱) برابر $f'_-(۳)$ و مقدار حد (۲) برابر $f'_+(۳)$ است، و چون این دو مقدار برابرند، پس $f'(۳)=۹$.

۹۴۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases}۲x+۲ & x>۲\\ ۳x^۲ & x<۲\end{cases}$. بنابراین

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x+۲)=۴+۲=۶$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳x^۲)=۳\times ۴=۱۲$$

در نتیجه $f'_+(۲)-f'_-(۲)=۶-۱۲=-۶$.

۹۴۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۲)=۳$ و

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲+۱)=۵$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^۳-۱)=۷$$

پس تابع f در نقطهٔ $x=۲$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه وجود ندارند.

۹۴۴- گزینهٔ ۴ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)$$

$$b=\lim_{x\to ۲^+}(x^۳+ax)=\lim_{x\to ۲^-}(cx^۲+c)\Rightarrow b=۸+۲a=۵c \qquad (I)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+a & x>۲\\ ۲cx & x<۲\end{cases}$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۳x^۲+a)=۱۲+a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۲cx)=۴c$$

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۱۲+a=۴c\Rightarrow a=۴c-۱۲$$

$$\xrightarrow{(I)} ۸+۲(۴c-۱۲)=۵c\Rightarrow c=\frac{۱۶}{۳}$$

$$f(۲)=۵c=\frac{۸۰}{۳}$$

۹۴۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x+۴a & x>۲\\ ۳ax^۲+۲ & x<۲\end{cases}$$

پس

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x+۴a)=۴+۴a$$

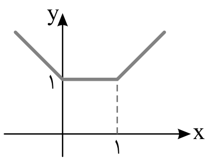
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳ax^۲+۲)=۱۲a+۲$$

چون تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۴+۴a=۱۲a+۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین $f'(۴a)=f'(۱)=۳a+۲=\frac{۳}{۴}+۲=\frac{۱۱}{۴}$.

۹۴۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع به شکل زیر است و در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$. توجه کنید که $x=۰$ و $x=۱$ ریشه‌های سادهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق هستند.



۹۴۷- گزینهٔ ۳ تابع در نقطهٔ $x=1$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد:

$$x\geq 1\Rightarrow f(x)=x(x^2-x)=x^3-x^2$$

$$f'(x)=3x^2-2x\Rightarrow f'_+(1)=3-2=1$$

$$0\leq x\leq 1\Rightarrow f(x)=x(x-x^2)=x^2-x^3$$

$$f'(x)=2x-3x^2\Rightarrow f'_-(1)=2-3=-1$$

ولی در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x^2-x|}{x}=\lim_{x\to 0}|x^2-x|=0$$

توجه کنید که تابع $y=|g(x)|$ در ریشه‌های سادهٔ $g(x)=0$ مشتق ندارد. پس $y=|x^2-x|$ در $x=0$ و $x=1$ مشتق ندارد ولی تابع $y=x|x^2-x|$ به دلیل وجود عامل صفرکنندهٔ x که در قدرمطلق ضرب شده است در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

۹۴۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=|x^3-x^2|=|x^2(x-1)|=x^2|x-1|$$

بنابراین تابع فقط در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا عبارت داخل قدرمطلق فقط یک ریشهٔ سادهٔ $x=1$ دارد.

۹۴۹- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید چندجمله‌ای $y=x^2-2x+m$ ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد. زیرا اگر این تابع دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta\leq 0\Rightarrow 4-4m\leq 0\Rightarrow m\geq 1$$

۹۵۰- گزینهٔ ۲ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو عامل $x-1$ در آن وجود داشته باشد. یعنی باید

$$x^2+ax+b=(x-1)^2=x^2-2x+1\Rightarrow a=-2$$

۹۵۱- گزینهٔ ۱ شیب خط مماس برابر $f'(2)$ است.

$$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(2)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

خط مورد نظر از نقطهٔ $(2,f(2))$ می‌گذرد. پس معادلهٔ خطی را می‌خواهیم که از نقطهٔ $(2,\frac{3}{2})$ عبور کرده و شیب آن برابر $\frac{5}{4}$ باشد، یعنی

$$y-\frac{3}{2}=\frac{5}{4}(x-2)\Rightarrow 5x-4y-4=0$$

۹۵۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=2\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x=5$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(5,2)$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\Rightarrow f'(5)=\frac{1}{4}$$

بنابراین شیب خط مماس مورد نظر برابر $\frac{1}{4}$ است و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-2=\frac{1}{4}(x-5)\Rightarrow 4y-x=3$$

۹۵۳- گزینهٔ ۲ در نقاطی که خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست، مقدار مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین

$$f'(x)=3x^2-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x^4=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

بنابراین معادلهٔ فوق دو جواب دارد و در دو نقطه، خط مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌هاست.

۹۵۴- گزینهٔ ۴ شیب خط $y=9x-1$ برابر ۹ است، پس مشتق تابع f در نقطهٔ مورد نظر باید برابر ۹ باشد:

$$f(x)=x^3-3x^2+15\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=9$$

$$3x^2-6x-9=0\Rightarrow x=-1\,\text{(غ.ق.ق.)}\,,\ x=3$$

مقدار تابع در نقطه‌ای با طول مثبت مد نظر است، پس

$$f(3)=27-27+15=15$$

۹۵۵- گزینهٔ ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، مقدار تابع و مقدار مشتق آن صفر است. بنابراین:

$$f'(x)=3x^2+m=0\Rightarrow m=-3x^2$$

$$f(x)=0\Rightarrow x^3+(-3x^2)x-54=0\Rightarrow x^3=-27\Rightarrow x=-3$$

بنابراین $m=-27$.

۹۵۶- گزینهٔ ۲ شیب خط $y=-x+b$ برابر -1 است، بنابراین مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=2$ برابر با -1 است:

$$f'(x)=\frac{a(x+1)-(ax+3)}{(x+1)^2}=\frac{a-3}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(2)=\frac{a-3}{(2+1)^2}=-1\Rightarrow a=-6$$

۹۵۷- گزینهٔ ۱ شیب خط $y=\frac{2}{9}x+1$ برابر $\frac{2}{9}$ است. بنابراین مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=1$ برابر $\frac{2}{9}$ است.

$$f'(x)=\frac{(2x-m)(x+2)-(x^2-mx+1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(1)=\frac{(2-m)(3)-(2-m)}{(1+2)^2}=\frac{2(2-m)}{9}$$

بنابراین

$$\frac{2(2-m)}{9}=\frac{2}{9}\Rightarrow 2-m=1\Rightarrow m=1$$

۹۵۸- گزینهٔ ۳ ابتدا نقطه‌ای با طول منفی روی نمودار تابع $f(x)=x^3-x^2$ پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب خط $y=x+k$ یعنی ۱ باشد:

$$f'(x)=3x^2-2x=1\Rightarrow 3x^2-2x-1=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\ \text{(غ.ق.ق.)}\\[4pt] x=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

بنابراین خط $y=x+k$ در نقطهٔ $A(-\frac{1}{3},-\frac{4}{27})$ بر نمودار تابع مماس می‌شود و نقطهٔ A روی این خط قرار دارد. یعنی

$$-\frac{4}{27}=-\frac{1}{3}+k\Rightarrow k=\frac{5}{27}$$

۹۵۹- گزینهٔ ۳ باید شیب خط یعنی a بتواند با مشتق تابع برابر شود. بنابراین $f'(x)=۳x^۲-۱=a$. واضح است که $۳x^۲-۱\geq -۱$ بنابراین $a\geq -۱$.

۹۶۰- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=-x^۲$ را k واحد به بالا انتقال دهیم، به نمودار تابع $f(x)=-x^۲+k$ تبدیل می‌شود $(k>۰)$. می‌خواهیم خط $y=۲x+۳$ بر نمودار تابع f مماس شود. ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع f را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب این خط یعنی ۲ باشد:

$$f'(x)=-۲x=۲\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=۱$$

پس نقطهٔ $A(-۱,۱)$ نقطهٔ مورد نظر است که باید روی نمودار تابع $f(x)=-x^۲+k$ باشد. پس

$$-۱+k=۱\Rightarrow k=۲$$

۹۶۱- گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور عرض‌ها $(۰,۳)$ و شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر $f'(۰)$ است.

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}\Rightarrow f'(۰)=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ خطی با شیب $\frac{۱}{۴}$ را که از نقطهٔ $(۰,۳)$ عبور می‌کند، می‌نویسیم.

$$y-۳=\frac{۱}{۴}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{۱}{۴}x+۳$$

۹۶۲- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که $f(۲)=\frac{۳}{۲}$ و $f'(۲)$ برابر است با شیب خطی که از نقاط $(۰,۳)$ و $(۴,۰)$ می‌گذرد، پس $f'(۲)=\frac{۳-۰}{۰-۴}=-\frac{۳}{۴}$. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه‌ای به طول ۲ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$g(x)=۴f^۲(x)+x\Rightarrow g'(x)=۸f'(x)f(x)+۱\Rightarrow g'(۲)=۸f'(۲)f(۲)+۱$$

$$\text{شیب خط مماس}=g'(۲)=۸\times\frac{-۳}{۴}\times\frac{۳}{۲}+۱=-۸$$

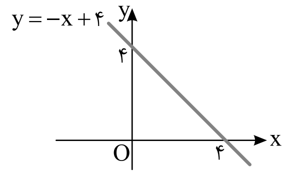
همچنین $g(۲)=۴f^۲(۲)+۲=۴(\frac{۳}{۲})^۲+۲=۱۱$. بنابراین می‌خواهیم معادلهٔ خطی با شیب -۸ را بنویسیم که از نقطهٔ $(۲,۱۱)$ می‌گذرد:

$$y-۱۱=-۸(x-۲)\Rightarrow y=-۸x+۲۷$$

۹۶۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(۱)=۳$ و $f'(x)=۱-\frac{۲}{x^۲}$. بنابراین $f'(۱)=-۱$ و در نتیجه معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(۱,۳)$ به‌صورت زیر است:

$$y-۳=-(x-۱)\Rightarrow y=-x+۴$$

این خط محورهای مختصات را در نقاط $A(۰,۴)$ و $B(۴,۰)$ قطع می‌کند. بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{۴\times۴}{۲}=۸$.



۹۶۴- گزینهٔ ۱ چون A نقطه‌ای به طول صفر روی سهمی به معادلهٔ $y=-x^۲+bx+۲$ است، پس عرض آن برابر است با $y=۲$. چون خط d از نقطه‌های $(۰,۲)$ و $(۳,۰)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با $\frac{۲-۰}{۰-۳}=-\frac{۲}{۳}$. چون خط d در نقطه‌ای به طول صفر بر سهمی مماس است، مقدار y' به‌ازای $x=۰$ برابر با شیب خط d است:

$$y=-x^۲+bx+۲\Rightarrow y'=-۲x+b\xrightarrow{x=۰}b=-\frac{۲}{۳}$$

۹۶۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید نقطهٔ تماس $(x_۰,y_۰)$ باشد. در این صورت مقدار $f'(x_۰)$ برابر با شیب خط $y=x+۲$ است، یعنی $f'(x_۰)=۱$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=x^۲+x-۱\Rightarrow f'(x_۰)=۱\Rightarrow x_۰^۲+x_۰-۲=۰\Rightarrow x_۰=-۲,x_۰=۱$$

اگر $x_۰=-۲$، چون نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی خط $y=x+۲$ است، پس $y_۰=۰$ و چون نقطهٔ $(-۲,۰)$ روی نمودار تابع f است، پس

$$۰=-\frac{۸}{۳}+\frac{۴}{۲}+۲+k\Rightarrow k=-\frac{۴}{۳}$$

اگر $x_۰=۱$، آن‌گاه $y_۰=۳$ و نتیجه می‌شود $k=\frac{۱۹}{۶}$ که قابل قبول نیست زیرا طبق فرض سؤال باید $k<۰$.

۹۶۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases}x=-۱\\y=۳x+۱\end{cases}\Rightarrow y=-۲$$

بنابراین

$$f(-۱)=-۲\Rightarrow -a+b=-۲\quad(۱)$$

از طرف دیگر، شیب خط $y=۳x+۱$ برابر ۳ است و چون نمودار تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ بر این خط مماس است، پس $f'(-۱)=۳$. در نتیجه

$$f'(x)=۳ax^۲+۲bx+۲\Rightarrow f'(-۱)=۳a-۲b+۲=۳\Rightarrow ۳a-۲b=۱\quad(۲)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-۳$ و $b=-۵$، بنابراین $a+b=-۸$.

۹۶۷- گزینهٔ ۳ شیب خط $۲x+y=۳$ برابر -۲ است. پس شیب خط مماس بر نمودار تابع f برابر $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین باید نقاطی را پیدا کنیم که مقدار مشتق تابع در آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است. پس

$$f'(x)=\frac{۵(x+۲)-(۵x+۲)}{(x+۲)^۲}=\frac{۸}{(x+۲)^۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$(x+۲)^۲=۱۶\Rightarrow x=۲,x=-۶$$

$$x=۲\Rightarrow f(۲)=\frac{۵\times۲+۲}{۲+۲}=۳$$

$$x=-۶\Rightarrow f(-۶)=\frac{۵\times(-۶)+۲}{-۶+۲}=۷$$

پس نقاط مورد نظر $A(۲,۳)$ و $B(-۶,۷)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $AB=\sqrt{(-۶-۲)^۲+(۷-۳)^۲}=\sqrt{۸۰}$.

۹۶۸- گزینهٔ ۴ معادلهٔ خطی که نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ را به هم وصل می‌کند، به‌صورت $y=0$ است. یعنی می‌خواهیم بدانیم تابع در چه نقطه‌ای بر محور طول‌ها مماس است. بنابراین

$$f'(x)=4x^3-2x=0\Rightarrow x=0,\ x^2=\frac{1}{2}$$

اگر $x=0$، آن‌گاه $f(x)=0$، پس نمودار تابع در $(0,0)$ بر محور طول‌ها مماس است. اگر $x^2=\frac{1}{2}$، آن‌گاه $f(x)=-\frac{1}{4}$، پس نمودار تابع در این نقاط بر محور طول‌ها مماس نیست. توجه کنید که شرط‌های $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ برای نقاطی که در آن‌ها نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس است، برقرار است.

۹۶۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر مختصات نقطهٔ تماس را $(\alpha, 2\alpha-\alpha^2)$ در نظر بگیریم، معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-(2\alpha-\alpha^2)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ است. چون $f'(\alpha)=2-2\alpha$، پس $y-(2\alpha-\alpha^2)=(2-2\alpha)(x-\alpha)$. نقطهٔ $(4,1)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$1-(2\alpha-\alpha^2)=(2-2\alpha)(4-\alpha)\Rightarrow 1-2\alpha+\alpha^2=8-2\alpha-8\alpha+2\alpha^2$$

$$\alpha^2-8\alpha+7=0\Rightarrow(\alpha-1)(\alpha-7)=0\Rightarrow\alpha=1,\quad \alpha=7$$

اگر $\alpha=1$، آن‌گاه $f'(\alpha)=0$ و اگر $\alpha=7$، آن‌گاه $f'(\alpha)=-12$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

راه‌حل دوم فرض کنید خطی که از نقطهٔ $A(4,1)$ می‌گذرد در نقطهٔ $B(\alpha, f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شود. در این صورت شیب این خط برابر با $\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4}$ است. از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس مقدار $f'(\alpha)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=2x-x^2\Rightarrow f'(x)=2-2x\Rightarrow f'(\alpha)=2-2\alpha$$

بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4}=2-2\alpha\Rightarrow\frac{2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha-4}=2-2\alpha$$

$$2\alpha-\alpha^2-1=2\alpha-8-2\alpha^2+8\alpha\Rightarrow\alpha^2-8\alpha+7=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha-7)=0\Rightarrow\alpha=1,\alpha=7$$

اگر $\alpha=1$، آن‌گاه $f'(\alpha)=0$ و اگر $\alpha=7$، آن‌گاه $f'(\alpha)=-12$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

۹۷۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر مختصات نقطهٔ تماس را $(\alpha, \frac{5\alpha+1}{\alpha-1})$ در نظر بگیریم، معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

چون $f'(\alpha)=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$، پس $y-\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}(x-\alpha)$. نقطهٔ $(0,2)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$2-\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}(0-\alpha)\Rightarrow\frac{2(\alpha-1)-(5\alpha+1)}{\alpha-1}=\frac{-6(-\alpha)}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{2\alpha-2-5\alpha-1}{\alpha-1}=\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\Rightarrow-3\alpha-3=\frac{6\alpha}{\alpha-1}\Rightarrow-3\alpha^2-6\alpha+3=0$$

مقادیر α که از معادلهٔ فوق حاصل می‌شوند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -2 است.

راه‌حل دوم فرض کنید این خط‌ها در نقطهٔ $B(\alpha, f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شوند. در این صورت شیب این خط‌ها برابر $f'(\alpha)$ خواهد بود. بنابراین

$$f(x)=\frac{5x+1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-6}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

از طرف دیگر، شیب این خط‌ها که از دو نقطهٔ $A(0,2)$ و $B(\alpha, f(\alpha))$ می‌گذرند برابر است با $\frac{f(\alpha)-2}{\alpha-0}$. بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-2}{\alpha}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}\Rightarrow\frac{\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}-2}{\alpha}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{3\alpha+3}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}\Rightarrow 3(\alpha+1)(\alpha-1)=-6\alpha\Rightarrow\alpha^2+2\alpha-1=0$$

مقادیر α که از معادلهٔ فوق به‌دست می‌آیند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -2 است.

۹۷۱- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-1,2]$ برابر است با

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{0-(-\frac{3}{2})}{3}=\frac{1}{2}$$

۹۷۲- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[1,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{\frac{1}{a}-1}{a-1}=\frac{1-a}{a(a-1)}=-\frac{1}{a}$ است. بنابراین

$$-\frac{1}{a}=-\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

۹۷۳- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[4,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(4)}{a-4}=\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}$ است. بنابراین

$$\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}=\frac{1}{6}\Rightarrow 6\sqrt{a}-12=a-4\Rightarrow 6\sqrt{a}=a+8\Rightarrow 36a=a^2+16a+64$$

$$a^2-20a+64=0\Rightarrow(a-16)(a-4)=0\Rightarrow a=16,\quad a=4\ (\text{غ.ق.ق})$$

۹۷۴- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{1}{x-4}$ در بازهٔ $[-a,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(-a)}{2a}$ است:

$$\frac{f(a)-f(-a)}{2a}=\frac{\frac{1}{a-4}-\frac{1}{-a-4}}{2a}=\frac{-a-4-a+4}{2a(16-a^2)}=\frac{1}{a^2-16}$$

بنابراین

$$\frac{1}{a^2-16}=\frac{-1}{7}\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=3,\quad a=-3\ (\text{غ.ق.ق})$$

۹۷۵- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a-1,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(a-1)}{a-a+1}$ است:

$$\frac{f(a)-f(a-1)}{1}=\frac{a-\frac{1}{a}-(a-1-\frac{1}{a-1})}{1}=\frac{-1}{a}+\frac{1}{a-1}+1=1+\frac{1}{a^2-a}$$

$$1+\frac{1}{a^2-a}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{a^2-a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a^2-a=2\Rightarrow a^2-a-2=0$$

$$(a-2)(a+1)=0\Rightarrow a=-1,2$$

۹۷۶- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[-۳,۰]$ برابر است با

$$\frac{f(۰)-f(-۳)}{۰-(-۳)}=\frac{۰-(-۳۰)}{۳}=۱۰$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر است با $f'(a)$.

$$f'(x)=۳x^۲+۱\Rightarrow f'(a)=۳a^۲+۱$$

بنابراین

$$۳a^۲+۱=۱۰\Rightarrow a^۲=۳\Rightarrow a=\sqrt{۳}\ (\text{غ.ق.ق}),\quad a=-\sqrt{۳}$$

۹۷۷- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,۱]$ برابر است با $\frac{f(۱)-f(۰)}{۱-۰}=۱-k$. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=۱$ برابر است با

$$f'(x)=۳x^۲-۲kx\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=۳-۲k$$

بنابراین

$$۳-۲k=۱-k\Rightarrow k=۲$$

۹۷۸- گزینهٔ ۱ اگر S مساحت و P محیط دایره‌ای به شعاع r باشد، آن‌گاه

$$S=\pi r^۲\Rightarrow r=\sqrt{\frac{S}{\pi}},\quad P=۲\pi r=۲\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}=۲\sqrt{\pi}\sqrt{S}$$

بنابراین

$$P(S)=۲\sqrt{\pi}\sqrt{S}\Rightarrow P'(S)=۲\sqrt{\pi}\times\frac{۱}{۲\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}$$

مقدار $P'(۴\pi)$ خواسته شده که برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۹۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$S=x(۶-x)\Rightarrow S(x)=۶x-x^۲\Rightarrow S'(x)=۶-۲x$$

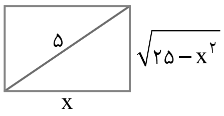
مقدار $S'(۲)$ خواسته شده که برابر ۲ است.

۹۸۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس عرض مستطیل برابر است با $\sqrt{۲۵-x^۲}$. پس

$$P(x)=۲(x+\sqrt{۲۵-x^۲})$$

$$P'(x)=۲(۱-\frac{۲x}{۲\sqrt{۲۵-x^۲}})=۲-\frac{۲x}{\sqrt{۲۵-x^۲}}$$

مقدار $P'(۴)$ خواسته شده که برابر است با $P'(۴)=۲-\frac{۸}{\sqrt{۲۵-۱۶}}=-\frac{۲}{۳}$.



۹۸۱- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق اول و دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۳x^۲-۲x+۱\Rightarrow f''(x)=۶x-۲$$

بنابراین باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲-۲x+۱=۶x^۲-۲x$ را مشخص کنیم:

$$۳x^۲=۱\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس در دو نقطه تساوی $f'(x)=xf''(x)$ برقرار است.

۹۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} f'(x)=۴x^۳+۲ax+b\xrightarrow{x=۱}۱۴=۴+۲a+b \\ f''(x)=۱۲x^۲+۲a\xrightarrow{x=۱}۱۶=۱۲+۲a \end{cases}$$

از این دستگاه معادلات نتیجه می‌شود $a=۲$ و $b=۶$، پس $a+b=۸$.

۹۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=(x+k)^۲(x-۱)$$

$$f'(x)=۲(x+k)(x-۱)+(x+k)^۲$$

$$f''(x)=۲(x-۱)+۲(x+k)+۲(x+k)$$

$$f''(۲)=۲+۴(۲+k)\xrightarrow{f''(۲)=۲}۲+۴(۲+k)=۲\Rightarrow k=-۲$$

۹۸۴- گزینهٔ ۳ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x}{x^۲+۴}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^۲+۴-۲x^۲}{(x^۲+۴)^۲}=\frac{-x^۲+۴}{(x^۲+۴)^۲}$$

$$f''(x)=\frac{-۲x(x^۲+۴)^۲-۴x(x^۲+۴)(-x^۲+۴)}{(x^۲+۴)^۴}$$

$$=\frac{-۲x(x^۲+۴)-۴x(-x^۲+۴)}{(x^۲+۴)^۳}=\frac{۲x^۳-۲۴x}{(x^۲+۴)^۳}$$

بنابراین

$$f''(x)=۰\Rightarrow ۲x^۳-۲۴x=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm\sqrt{۱۲}$$

پس در سه نقطه مشتق دوم تابع f برابر صفر است.

۹۸۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^۶}{x^۲}+\frac{x^۴}{x^۲}+\frac{x^۲}{x^۲}+\frac{۱}{x^۲}=x^۴+x^۲+۱+\frac{۱}{x^۲}$$

بنابراین

$$f'(x)=۴x^۳+۲x-\frac{۲}{x^۳}\Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲+۲+\frac{۶}{x^۴}$$

$$f''(۱)=۱۲+۲+۶=۲۰$$

۹۸۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=(x^{\frac{۱}{۳}}-۱)(x^{\frac{۱}{۲}}+۱)=x^{\frac{۵}{۶}}+x^{\frac{۱}{۳}}-x^{\frac{۱}{۲}}-۱$$

$$f'(x)=\frac{۵}{۶}x^{-\frac{۱}{۶}}+\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}-\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$f''(x)=-\frac{۵}{۳۶}x^{-\frac{۷}{۶}}-\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}+\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}$$

بنابراین $f''(۱)=-\frac{۵}{۳۶}-\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۹}$.

۹۸۷- گزینهٔ ۴ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^۲+۱}-\frac{۲x^۲}{۲\sqrt{x^۲+۱}}}{x^۲+۱}=\frac{x^۲+۱-x^۲}{(x^۲+۱)\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{۱}{(x^۲+۱)\sqrt{x^۲+۱}}$$

بنابراین $f''(\sqrt{۳})=\frac{۱}{(۳+۱)\sqrt{۳+۱}}=\frac{۱}{۸}$.

۹۸۸- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $۲f'(۲x-۳)=۳x^{۲}+۲ax+b$. اگر باز هم از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $۴f''(۲x-۳)=۶x+۲a$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$، به‌دست می‌آید

$$۴f''(-۱)=۶+۲a\Rightarrow ۴\times ۴=۶+۲a\Rightarrow a=۵$$

۹۸۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}, \quad f'(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}, \quad f'_{+}(۰)\neq f'_{-}(۰)$$

چون تابع در نقطهٔ $x=۰$ مشتق اول ندارد، پس مشتق دوم هم ندارد.

۹۹۰- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۴x^{۳}+۶ax^{۲}+۱۲x$$

$$f''(x)=۱۲x^{۲}+۱۲ax+۱۲=۱۲(x^{۲}+ax+۱)$$

پس معادلهٔ $x^{۲}+ax+۱=۰$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta=a^{۲}-۴<۰\Rightarrow |a|<۲$$

۹۹۱- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۵}+۱}{x^{۷}+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۵x^{۴}}{۷x^{۶}}=\frac{۵}{۷}$$

۹۹۲- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}+x^{۲}-x-۱}{x^{۴}+x^{۳}+x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۳x^{۲}+۲x-۱}{۴x^{۳}+۳x^{۲}+۱}$$

توجه کنید که این حد هم حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. بنابراین باز هم از قاعدهٔ هوپیتال نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۳x^{۲}+۲x-۱}{۴x^{۳}+۳x^{۲}+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۶x+۲}{۱۲x^{۲}+۶x}=\frac{-۶+۲}{۱۲-۶}=-\frac{۲}{۳}$$

۹۹۳- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۱)^{۴}-(۲x-۳)^{۴}}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{۴(x-۱)^{۳}-۸(۲x-۳)^{۳}}{۲x}=\frac{۴-۸}{۴}=-۱$$

۹۹۴- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{n}-۱}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{nx^{n-۱}}{۲x}=\frac{n}{۲}=۱۰\Rightarrow n=۲۰$$

۹۹۵- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{۴x-۸}-۲}{\sqrt{۵x+۱۰}-۵}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۴}{۲\sqrt{۴x-۸}}}{\frac{۵}{۲\sqrt{۵x+۱۰}}}=\frac{\frac{۴}{۲\times ۲}}{\frac{۵}{۲\times ۵}}=۲$$

۹۹۶- گزینهٔ ۱ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x+۶}-۲}{x^{۳}-۸}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۶)^{۲}}}}{۳x^{۲}}=\frac{\frac{۱}{۳\times ۴}}{۳\times ۴}=\frac{۱}{۱۴۴}$$

۹۹۷- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۱۴}-۲x}{\sqrt[۳]{x+۲۵}-۳}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱۴}}-۲}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۲۵)^{۲}}}}=\frac{\frac{۱}{۸}-۲}{\frac{۱}{۳\times ۹}}=-\frac{۴۰۵}{۸}$$

۹۹۸- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲\sqrt[۳]{x}-\sqrt{x+۳}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}}{۱}=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۲\times ۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

۹۹۹- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۴]{x^{۳}}}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{\frac{۱}{۲}}-x}{x^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۳}{۴}}}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}-۱}{\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}-\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۱}{۴}}}=\frac{\frac{۱}{۲}-۱}{\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۴}}=۶$$

۱۰۰۰- گزینهٔ ۴ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+۹}-۳}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{a}{۲\sqrt{ax+۹}}}{۱}=\frac{a}{۲\sqrt{۹}}=\frac{a}{۶}$$

پس $\frac{a}{۶}=۴$ و در نتیجه $a=۲۴$.

۱۰۰۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to -۲}\frac{۲f(x)-۶}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{۲(f(x)-۳)}{x+۲}=۲\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=۲f'(-۲)$$

از طرف دیگر، مقدار $f'(-۲)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $A(-۲,۳)$، یعنی شیب خط d است. اکنون توجه کنید که چون خط d از نقطه‌های $A(-۲,۳)$ و $(۱,۰)$ می‌گذرد، شیب آن برابر است با $\frac{۳-۰}{-۲-۱}=-۱$.

بنابراین $f'(-۲)=-۱$ و حد مورد نظر برابر است با $۲f'(-۱)=-۲$.

۱۰۰۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to -۲}\frac{f^{۳}(x)-f^{۳}(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{f^{۳}(x)-f^{۳}(-۲)}{x-(-۲)}$$

$$=(f^{۳})'(-۲)=۳f'(-۲)f^{۲}(-۲)$$

از طرف دیگر، $f(-۲)=۳$ و $f'(x)=\frac{۲x-۱}{۲\sqrt{x^{۲}-x+۳}}$، پس

$$f'(-۲)=\frac{-۵}{۲\sqrt{۹}}=-\frac{۵}{۶}$$

به این ترتیب، مقدار حد مورد نظر برابر است با $۳(-\frac{۵}{۶})\times ۳^{۲}=-\frac{۴۵}{۲}$.

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to -۲}\frac{f^{۳}(x)-f^{۳}(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{۳f'(x)f^{۲}(x)}{۱}$$

از طرف دیگر، $f(-۲)=۳$ و $f'(x)=\frac{۲x-۱}{۲\sqrt{x^{۲}-x+۳}}$، پس

$$f'(-۲)=\frac{-۵}{۲\sqrt{۹}}=-\frac{۵}{۶}$$

پس $\lim_{x\to -۲}(۳f'(x)f^{۲}(x))=۳f'(-۲)f^{۲}(-۲)=-\frac{۴۵}{۲}$.

۱۰۰۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $H=-h^{۲}$ ، آن‌گاه $H\to ۰^{-}$ و در نتیجه

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h^{۲})-f(۲)}{h^{۲}-h^{۴}}=\lim_{H\to ۰^{-}}\frac{f(۲+H)-f(۲)}{-H-H^{۲}}$$

$$=\lim_{H\to ۰^{-}}\frac{f(۲+H)-f(۲)}{H}\times\lim_{H\to ۰^{-}}\frac{-۱}{۱+H}=-f'_{-}(۲)=۶$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h^{۲})-f(۲)}{h^{۲}-h^{۴}}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲hf'(۲-h^{۲})}{۲h-۴h^{۳}}=\lim_{h\to ۰}\frac{(-f'(۲-h^{۲}))}{۱-۲h^{۲}}$$

$$=\lim_{H\to ۰^{+}}\frac{(-f'(۲-H))}{۱-۲H}=-f'_{-}(۲)=۶$$

توجه کنید که $H=h^{۲}$.

۱۰۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases}۲x+۴ & x>۲\\ ۳x^{۲}+۲x & x<۲\end{cases}$. بنابراین

$$f'_{+}(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}f'(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}(۲x+۴)=۴+۴=۸$$

$$f'_{-}(۲)=\lim_{x\to ۲^{-}}f'(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}(۳x^{۲}+۲x)=۱۲+۴=۱۶$$

و در نتیجه $f'_{+}(۲)-f'_{-}(۲)=۸-۱۶=-۸$.

۱۰۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$f(x)=\frac{x^{۵}+۱}{x^{۴}-x^{۳}+x^{۲}-x+۱}=\frac{(x+۱)(x^{۴}-x^{۳}+x^{۲}-x+۱)}{x^{۴}-x^{۳}+x^{۲}-x+۱}=x+۱$$

بنابراین $f'(x)=۱$ و $f'(۱۰۰۰)=۱$.

۱۰۰۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(۲ax)\sqrt{۳x+۱}-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}(ax^{۲}+۲)}{۳x+۱}$$

بنابراین

$$f'(۱)=\frac{۷}{۱۶}\Rightarrow\frac{(۲a)(۲)-\frac{۳}{۲\times۲}(a+۲)}{۴}=\frac{۷}{۱۶}$$

$$۱۶a-۳(a+۲)=۷\Rightarrow ۱۳a=۱۳\Rightarrow a=۱$$

۱۰۰۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}-\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}x}{(\sqrt{۱-x^{۲}})^{۲}}=\frac{۱-x^{۲}+x^{۲}}{(۱-x^{۲})\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

$$=\frac{۱}{(۱-x^{۲})\sqrt{۱-x^{۲}}}=\frac{۱}{g^{۳}(x)}$$

از طرف دیگر $g'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}=\frac{-x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=-f(x)$.

بنابراین

$$f'(x)g'(x)=(\frac{۱}{g^{۳}(x)})(-f(x))=-\frac{f(x)}{g^{۳}(x)}$$

۱۰۰۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x^{۳}+x)=g(\frac{۴}{x})\Rightarrow(۳x^{۲}+۱)f'(x^{۳}+x)=-\frac{۴}{x^{۲}}g'(\frac{۴}{x})$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=۱$ ، نتیجه می‌شود

$$۴f'(۲)=-۴g'(۴)\Rightarrow f'(۲)=-g'(۴)=۴$$

۱۰۰۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{a(x^{۲}+۱)-۲x(ax-۱)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{-ax^{۲}+۲x+a}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{(-۲ax+۲)(x^{۲}+۱)^{۲}-۴x(x^{۲}+۱)(-ax^{۲}+۲x+a)}{(x^{۲}+۱)^{۴}}$$

$$=\frac{(-۲ax+۲)(x^{۲}+۱)-۴x(-ax^{۲}+۲x+a)}{(x^{۲}+۱)^{۳}}$$

بنابراین $f''(۱)=\frac{(-۲a+۲)(۲)-۴(-a+۲+a)}{۲^{۳}}=\frac{-a-۱}{۲}=۴$. در نتیجه

$$a=-۹$$

۱۰۱۰- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,۰]$ برابر است با

$$\frac{f(۰)-f(a)}{۰-a}=\frac{a^{۲}-۲a}{-a}=-a+۲$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,a+۱]$ برابر است با

$$\frac{f(a+۱)-f(۰)}{a+۱-۰}=\frac{-(a+۱)^{۲}+۲(a+۱)}{a+۱}=\frac{-a^{۲}+۱}{a+۱}=-a+۱$$

بنابراین $(-a+۲)+(-a+۱)=۴\Rightarrow -۲a=۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$

۱۰۱۱- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که $f(۱)=۰$ ، پس

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲x(۲x-۱)(۲x-۲)\cdots(۲x-۱۲)-۰}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}(۴x(۲x-۱)(۲x-۳)(۲x-۴)\cdots(۲x-۱۲))$$

$$=۴\times۱(۱)(-۱)(-۲)(-۳)\cdots(-۱۰)=۴\times۱۰!$$

راه‌حل دوم با توجه به اینکه مقدار $۲x-۲$ به‌ازای $x=۱$ برابر صفر است، کافی است مشتق این عبارت یعنی ۲ را در مقدار عبارت $۲x(۲x-۱)(۲x-۳)(۲x-۴)\cdots(۲x-۱۲)$ به‌ازای $x=۱$ ضرب کنیم.

$$f'(۱)=۲\times۲\times۱\times(-۱)(-۲)\cdots(-۱۰)=۴\times۱۰!$$

۱۰۱۲- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^{۳}+\sqrt{x}}{x^{۲}+\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{(x^{۳}+\sqrt{x})'(x^{۲}+\sqrt[۳]{x})-(x^{۲}+\sqrt[۳]{x})'(x^{۳}+\sqrt{x})}{(x^{۲}+\sqrt[۳]{x})^{۲}}$$

$$=\frac{(۳x^{۲}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(x^{۲}+\sqrt[۳]{x})-(۲x+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}})(x^{۳}+\sqrt{x})}{(x^{۲}+\sqrt[۳]{x})^{۲}}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=۱$ ، نتیجه می‌شود:

$$f'(۱)=\frac{(۳+\frac{۱}{۲})(۱+۱)-(۲+\frac{۱}{۳})(۱+۱)}{(۱+۱)^{۲}}=\frac{۷}{۱۲}$$

۱۰۱۳- گزینهٔ ۲ در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$، علامت عبارت $x^۲-x$ منفی است و $۱<۳x<۲$، پس در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$ تساوی‌های $|x^۲-x|=x-x^۲$ و $[۳x]=۱$ برقرارند و

$$f(x)=\frac{x-x^۲}{x^۳-۱}=\frac{-x(x-۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}=\frac{-x}{x^۲+x+۱}\quad(x\neq۱)$$

در نتیجه

$$f'(x)=-\frac{x^۲+x+۱-(۲x+۱)x}{(x^۲+x+۱)^۲}=\frac{x^۲-۱}{(x^۲+x+۱)^۲}$$

$$f'(\frac{۱}{۲})=\frac{\frac{۱}{۴}-۱}{(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}+۱)^۲}=-\frac{۱۲}{۴۹}$$

۱۰۱۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f(۱)=\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=۴$$

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+۳ & x>۱\\ ۶x & x<۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to۱^+}(۳x^۲+۳)=۶\\ f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to۱^-}(۶x)=۶\end{cases}$$

بنابراین $f'(۱)=۶$، از طرف دیگر

$$\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-۴}{x^۳-x}=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{۱}{x(x+۱)}=f'(۱)\times\frac{۱}{۲}=۶\times\frac{۱}{۲}=۳$$

۱۰۱۵- گزینهٔ ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x\to۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=f'(۴)$$

پس

$$\lim_{x\to۴}\frac{f(x)+۵}{x-۴}=۵\Rightarrow f(۴)=-۵\,,f'(۴)=۵$$

از طرف دیگر،

$$g(x)=\frac{x}{f(۲x)}\Rightarrow g'(x)=\frac{f(۲x)-۲xf'(۲x)}{f^۲(۲x)}$$

بنابراین $g'(۲)=\frac{f(۴)-۴f'(۴)}{f^۲(۴)}=\frac{-۵-۴\times۵}{(-۵)^۲}=-۱$.

۱۰۱۶- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم. اگر $x\geq۰$، آن‌گاه

$$f(x)=۴x+x=۵x$$

$$(gof)(x)=g(۵x)=۴(۵x)-|۵x|=۲۰x-۵x=۱۵x$$

اگر $x<۰$، آن‌گاه $f(x)=۴x-x=۳x$ و

$$(gof)(x)=g(۳x)=۴(۳x)-|۳x|=۱۲x+۳x=۱۵x$$

بنابراین $(gof)(x)=۱۵x$ و در نتیجه $(gof)'(x)=۱۵$ و $(gof)'(۰)=۱۵$.

۱۰۱۷- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید تابع $y=x^۲-۶x+m$ ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد، زیرا اگر این تابع دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta=۳۶-۴m\leq۰\Rightarrow m\geq۹$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۱۰۱۸- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a همان $f'(a)$ است:

$$f'(x)=-\frac{k}{x^۲}\Rightarrow f'(a)=-\frac{k}{a^۲}$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۳,۶]$ برابر است با

$$\frac{f(۶)-f(۳)}{۶-۳}=\frac{\frac{k}{۶}-\frac{k}{۳}}{۳}=\frac{-k}{۱۸}$$

بنابراین $-\frac{k}{a^۲}=-\frac{k}{۱۸}$ پس $a^۲=۱۸$ و با توجه به اینکه $a\in[۳,۶]$، در نتیجه $a=\sqrt{۱۸}$.

۱۰۱۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $y=۴x+۲$ در نقطهٔ $A(۱,۶)$ بر نمودار تابع f مماس است. از طرف دیگر $f'(x)=۳x^۲-۳a$، بنابراین $f(۱)=۶$ و $f'(۱)=۴$. پس

$$\begin{cases}۱-۳a+b=۶\\ ۳-۳a=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{۱}{۳}\\ b=۴\end{cases}$$

۱۰۲۰- گزینهٔ ۳ خط d از نقطه‌های $(۰,۴)$ و $(۲,۰)$ گذشته است، پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=-۲x+۴$ است. چون خط d در نقطه‌ای به طول ۱ بر سهمی مماس است، پس مقدار $f'(x)$ به‌ازای $x=۱$ برابر با شیب خط d است:

$$f(x)=ax^۲+c\Rightarrow f'(x)=۲ax\Rightarrow f'(۱)=۲a=-۲\Rightarrow a=-۱$$

چون نقطهٔ A روی خط $y=-۲x+۴$ است، پس عرض آن برابر است با $y=۲$. چون نقطهٔ $A(۱,۲)$ روی سهمی $f(x)=-x^۲+c$ است، پس $f(۱)=۲$، بنابراین $۲=-۱+c$، یعنی $c=۳$.

۱۰۲۱- گزینهٔ ۱ مقدار حد خواسته شده، همان $f'(۲)$ است. پس ابتدا $f'(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=(\frac{x+۲}{۲x-۳})^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}(\frac{x+۲}{۲x-۳})^{\frac{۱}{۲}}\times\frac{-۳-۴}{(۲x-۳)^۲}$$

بنابراین $f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\sqrt{۴}\times(-۷)=-۲۱$. تجربی - ۹۵

۱۰۲۲- گزینهٔ ۲ تابع f باید در نقطهٔ $x=-۲$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=f(-۲)$$

$$۴a-۲b+۴=-۸+۲\Rightarrow۲a-b=-۵$$

از طرف دیگر چون تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ مشتق‌پذیر است، پس مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابرند:

$$f'(x)=\begin{cases}۲ax+b & x\geq-۲\\ ۳x^۲-۱ & x\leq-۲\end{cases}\Rightarrow f'_+(-۲)=f'_-(-۲)\Rightarrow-۴a+b=۱۱$$

بنابراین از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}۲a-b=-۵\\ -۴a+b=۱۱\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-۳$ و $b=-۱$ و در نتیجه $f(۱)=a+b+۴=۰$. تجربی - ۹۷

۱۰۲۳- گزینهٔ ۴ تابع باید در $x=۱$ پیوسته باشد، بنابراین $a+b=۲$. از طرف دیگر مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه باید برابر باشند:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x^{\frac{-۱}{۲}} & x\geq ۱ \\ ax^{۲}+bx & x<۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -x^{\frac{-۳}{۲}} & x>۱ \\ ۲ax+b & x<۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_{+}(۱)=-۱ \\ f'_{-}(۱)=۲a+b \end{cases} \Rightarrow ۲a+b=-۱$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a+b=۲ \\ ۲a+b=-۱ \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-۳$ و $b=۵$.

خارج از کشور ریاضی – ۸۹

۱۰۲۴- گزینهٔ ۲ ابتدا مقدار جزءصحیح و علامت تابع قدرمطلق را در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=-۳$ مشخص می‌کنیم:

$$x\to(-۳)^{+}\Rightarrow[x]=-۳,\quad |x|=-x\Rightarrow f(x)=(x-۳)\sqrt[۳]{۹x}$$

بنابراین $f'(x)=\sqrt[۳]{۹x}+\frac{۹}{۳\sqrt[۳]{(۹x)^{۲}}}(x-۳)$. پس

$$f'_{+}(-۳)=-۳+\frac{۹}{۳\times ۹}(-۶)=-۵$$

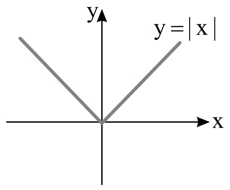
ریاضی – ۹۳

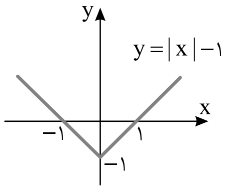
۱۰۲۵- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=x|x|$ نشان دهیم که به‌وضوح در $x=۰$ پیوسته است. همچنین تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است، زیرا

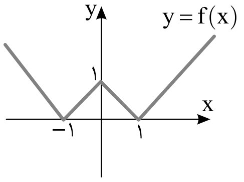
$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x|x|-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}|x|=۰,\quad f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{x|x|-۰}{x-۰}=۰$$

ریاضی – ۸۷

۱۰۲۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:







از نمودار تابع مشخص است که سه نقطهٔ گوشه‌ای (و بنابراین مشتق‌ناپذیر) وجود دارد.

ریاضی – ۸۶

۱۰۲۷- گزینهٔ ۱ از قاعدهٔ زنجیری استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=(\frac{۱۶}{x}-\sqrt[۳]{x^{۲}})^{۲}\Rightarrow f'(x)=۲(\frac{۱۶}{x}-\sqrt[۳]{x^{۲}})(-\frac{۱۶}{x^{۲}}-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}})$$

$$f'(-۸)=۲(-۲-۴)(-\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۶})=-۱$$

ریاضی – ۸۸

۱۰۲۸- گزینهٔ ۲ به‌جای اینکه حاصل $f'(x)\times g'(f(x))$ را بیابیم، مشتق تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}{\sqrt{۱+\frac{x^{۲}}{۱-x^{۲}}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}{\sqrt{\frac{۱}{۱-x^{۲}}}}=x$$

بنابراین $(gof)'(x)=۱$.

خارج از کشور ریاضی – ۹۲

۱۰۲۹- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۴,۶/۲۵]$ برابر است با

$$\frac{f(۶/۲۵)-f(۴)}{۶/۲۵-۴}=\frac{\sqrt{۶/۲۵}-\sqrt{۴}}{۶/۲۵-۴}=\frac{۲/۵-۲}{۲/۲۵}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۹}{۴}}=\frac{۲}{۹}$$

اما آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=۴$ برابر $f'(۴)$ است:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۴},\qquad \text{مقدار مورد نظر}=\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۹}=\frac{۹-۸}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

خارج از کشور تجربی – ۹۳

۱۰۳۰- گزینهٔ ۲ باید معادلهٔ برخورد خط و نمودار ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$(m+۳)x^{۲}+mx=۲x-۴\Rightarrow(m+۳)x^{۲}+(m-۲)x+۴=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=۰}(m-۲)^{۲}-۱۶(m+۳)=۰$$

$$m^{۲}-۲۰m-۴۴=۰\Rightarrow(m-۲۲)(m+۲)=۰\Rightarrow m_{۱}=۲۲,\ m_{۲}=-۲$$

ریاضی – ۹۰

۱۰۳۱- گزینهٔ ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=f'(۴)$$

پس

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(۴)=-۷,\ f'(۴)=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین

$$y=\frac{۱}{x}f(۲x)\Rightarrow y'=-\frac{۱}{x^{۲}}f(۲x)+۲f'(۲x)\times\frac{۱}{x}$$

$$y'(۲)=-\frac{۱}{۴}f(۴)+۲f'(۴)\times\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۴}-\frac{۶}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

ریاضی – ۹۶

۱۰۳۲- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطهٔ $x=۱$ باید پیوسته باشد و مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^{+}}f(x)=f(۱)=۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^{-}}f(x)=a+b+۱ \end{cases}\Rightarrow a+b+۱=۰$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۱-\frac{-۱}{x^{۲}} & x>۱ \\ ۲x+a & x<۱ \end{cases},\quad \lim_{x\to ۱^{+}}f'(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}f'(x)\Rightarrow ۲=۲+a$$

از دو شرط $۲=۲+a$ و $a+b+۱=۰$ نتیجه می‌شود $a=۰$ و $b=-۱$، پس

$$f(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲})^{۲}+a(۱-\sqrt{۲})+b=۳-۲\sqrt{۲}-۱=۲-۲\sqrt{۲}$$

خارج از کشور ریاضی – ۹۲

۱۰۳۳- گزینهٔ ۳ چون $f(۰)=۰$ ، پس

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{-\sqrt{x^۲}}$$

دقت کنید که چون $x<۰$ ، به جای x می‌توانیم $-\sqrt{x^۲}$ قرار دهیم. بنابراین

$$f'_-(۰)=-\lim_{x\to ۰^-}\sqrt{\frac{(۱-\sqrt{۱-x^۲})(۱+\sqrt{۱-x^۲})}{x^۲(۱+\sqrt{۱-x^۲})}}$$

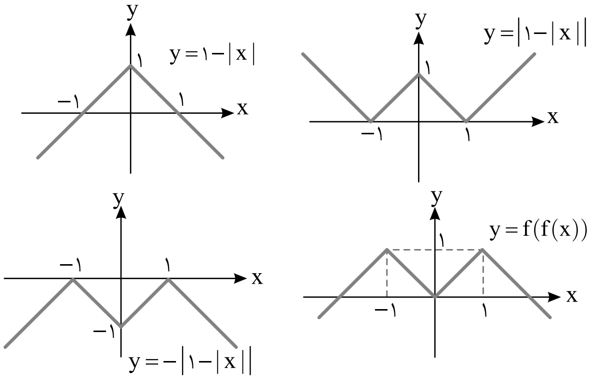
$$=-\lim_{x\to ۰^-}\sqrt{\frac{۱-۱+x^۲}{x^۲(۱+\sqrt{۱-x^۲})}}=-\lim_{x\to ۰^-}\sqrt{\frac{۱}{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ریاضی - ۸۹

۱۰۳۴- گزینهٔ ۴ بـه دلیل حضـور جزءصحیح‌هـا در هر نقطـه‌ای که تابع ناپیوسـته باشـد، مشـتق‌ناپذیر اسـت. یعنی باید نقاطی را بیابیم که $x\in\mathbb{Z}$ یا $x+\frac{۱}{۳}\in\mathbb{Z}$. در هـر یـک از این نقاط یکی از دو تابع $[x]$ و $[x+\frac{۱}{۳}]$ پیوسـته و دیگری ناپیوسـته اسـت، بنابرایـن مجموع آن دو نیز ناپیوسـته اسـت. در بازهٔ $(۰,۳)$ این نقاط عبارت‌اند از: $\{\frac{۲}{۳},۱,\frac{۵}{۳},۲,\frac{۸}{۳}\}$

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۰۳۵- گزینهٔ ۳ توجـه کنید کـه $f(f(x))=۱-\left|۱-|x|\right|$. اکنون نمودار این تابع را رسم می کنیم:



با توجه به نمودار، $y=۱-\left|۱-|x|\right|$ در سه نقطهٔ $x=۰$ و $x=\pm۱$ مشتق‌ناپذیر است.

خارج از کشور ریاضی -۸۸

۱۰۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا تابع‌های f و g را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۵}x & x\geq ۰\\ x & x\leq ۰\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}۵x & x\geq ۰\\ ۳x & x\leq ۰\end{cases}$$

بنابرایـن $(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(۵x) & x\geq ۰\\ f(۳x) & x\leq ۰\end{cases}=\begin{cases}۳x & x\geq ۰\\ ۳x & x\leq ۰\end{cases}$ و در نتیجه $(fog)'(x)=۳$.

تجربی - ۹۴

۱۰۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=x+۱+(g(x))^۵\Rightarrow f'(x)=۱+۵g'(x)g^۴(x) \qquad (۱)$$

$$\xrightarrow{x=۰} f'(۰)=۱+۵g'(۰)g^۴(۰)\Rightarrow ۱=۱+۵g'(۰)\Rightarrow g'(۰)=۰$$

اکنون از دو طرف تساوی (۱) مشتق می‌گیریم:

$$f''(x)=۰+۵g''(x)g^۴(x)+۲۰g'^۲(x)g^۳(x)$$

$$\xrightarrow{x=۰} f''(۰)=۵g''(۰)\times۱^۴+۲۰\times۰\times۱=۵g''(۰)$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۰۳۸- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۱,۱/۴۴]$ برابر است با $\frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۱/۴۴-۱}=\frac{\frac{۰/۴۴}{۱/۲}-۰}{۰/۴۴}=\frac{۵}{۶}$. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=۱$ نیز این‌گونه به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}})'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\frac{۱}{۲x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

اختلاف این دو مقدار $\frac{۱}{۶}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۱۰۳۹- گزینهٔ ۴ معادلهٔ خط مماس گذرنده از $(\alpha,\frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱})$ را می‌نویسیم و مختصات $A(-۱,۰)$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$y'=\frac{۲+۱}{(x+۱)^۲}\Rightarrow m=\frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ مماس}} y-\frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱}=\frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}(x-\alpha)$$

$$\xrightarrow{A(-۱,۰)} -\frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱}=\frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}(-۱-\alpha)\Rightarrow ۲\alpha-۱=۳\Rightarrow \alpha=۲$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۰۴۰- گزینهٔ ۱ شـیب خط $(m+۲)y=mx$ برابر $\frac{m}{m+۲}$ است. پس بایـد مشـتق تابـع $y=\sqrt{۱+x^۲}$ در نقطهٔ $x_۰$ واقـع بر منحنـی برابر $\frac{m}{m+۲}$ باشد. یعنی

$$y'(x_۰)=\frac{x_۰}{\sqrt{۱+x_۰^۲}}=\frac{m}{m+۲}\Rightarrow\frac{x_۰^۲}{۱+x_۰^۲}=\frac{m^۲}{(m+۲)^۲}$$

$$m^۲x_۰^۲+m^۲=(m+۲)^۲x_۰^۲\Rightarrow x_۰^۲=\frac{m^۲}{۴(m+۱)}\geq۰$$

بنابراین $m+۱>۰$ پس $m>-۱$.

ریاضی - ۹۵

۱۰۴۱- گزینهٔ ۱ توجـه کنید کـه $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ همـان تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول یک است. پس ابتدا $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}}\times\frac{۴\times۳-۵\times۱}{(x+۳)^۲}$$

بنابراین $f'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۹}{۴}}}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۷}{۴۸}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۰۴۲- گزینهٔ ۲ برای آنکه تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشـتق‌پذیر باشد، ابتدا لازم است در این نقطه پیوسته باشد و همچنین، مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه برابر باشند:

$$\text{شرط پیوستگی}: ۳-۵=۱+a+b\Rightarrow a+b=-۳$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{۳}{x^۲} & x>۱\\ ۲x+a & x<۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(۱)=-۳\\ f'_-(۱)=۲+a\end{cases}$$

$$۲+a=-۳\Rightarrow a=-۵\ ,\ b=۲$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۰۴۳- گزینهٔ ۴ در یک همسایگی راست $\sqrt{۲}$ ، $f(x)=x^{۳}-۴x$ ، پس در این همسایگی،

$$f'(x)=۳x^{۲}-۴\Rightarrow f'_{+}(\sqrt{۲})=۳\times۲-۴=۲$$

خارج از کشور تجربی با کمی تغییر - ۹۴

۱۰۴۴- گزینهٔ ۳ با فرض $g(x)=f(x+\sqrt{۱+x^{۲}})$ طبق قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌شود

$$g'(x)=f'(x+\sqrt{۱+x^{۲}})\times(۱+\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}})$$

$$=\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^{۲}}}\times(\frac{\sqrt{۱+x^{۲}}+x}{\sqrt{۱+x^{۲}}})=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

خارج از کشور ریاضی -۸۵

۱۰۴۵- گزینهٔ ۲ حاصل مورد نظر همان مشتق تابع $y=f(g(x))$ است. پس،

$$y=f(g(x))=\frac{x-۱-۲}{۱+x-۱}=\frac{x-۳}{x}\Rightarrow y'=\frac{۳}{x^{۲}}$$

ریاضی - ۹۲

۱۰۴۶- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۴x & x\geq ۰\\ ۲x & x\leq ۰\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}(a+\frac{۳}{۴})x & x\geq ۰\\ (\frac{۳}{۴}-a)x & x\leq ۰\end{cases}$$

اکنون تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=\begin{cases}(a+\frac{۳}{۴})\times۴x & x\geq ۰\\ (\frac{۳}{۴}-a)\times۲x & x\leq ۰\end{cases}$$

در نهایت از تابع به‌دست آمده مشتق می‌گیریم:

$$(gof)'(x)=\begin{cases}۴a+۳ & x\geq ۰\\ \frac{۳}{۲}-۲a & x\leq ۰\end{cases}$$

از برابری مشتق چپ و مشتق راست تابع gof در نقطهٔ $x=۰$ نتیجه می‌شود:

$$۴a+۳=\frac{۳}{۲}-۲a\Rightarrow ۶a=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۰۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۴,۱۲]$ و سپس آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ $x=۴$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\frac{f(۱۲)-f(۴)}{۱۲-۴}=\frac{\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}}{۸}=\frac{\frac{-۲}{۱۵}}{۸}=\frac{-۱}{۶۰}\\ f'(x)=-(۲x+۱)^{-\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{-۱}{۲۷}\end{cases}\Rightarrow\frac{-۱}{۶۰}-(\frac{-۱}{۲۷})=\frac{۱۱}{۵۴۰}$$

تجربی - ۹۳

۱۰۴۸- گزینهٔ ۲ ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ را می‌نویسیم:

$$y-۲=\frac{۳-۲}{-۱-۱}(x-۱)\Rightarrow y-۲=\frac{-۱}{۲}(x-۱)\Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

این خط در نقطهٔ $x=۳$ بر نمودار تابع f مماس است، پس در این نقطه با تابع مشترک است و شیب این خط، همان مشتق تابع در این نقطه است:

$$f(۳)=\frac{-۱}{۲}\times۳+\frac{۵}{۲}=\frac{-۳}{۲}+\frac{۵}{۲}=۱,\quad f'(۳)=\frac{-۱}{۲}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to۳}\frac{f^{۲}(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}=\lim_{x\to۳}(\frac{f(x)-۱}{x-۳}\times\frac{f(x)+۵}{-۱})$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}\times\lim_{x\to۳}(-f(x)-۵)$$

$$=f'(۳)\times(-f(۳)-۵)=-\frac{۱}{۲}(-۱-۵)=۳$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۰۴۹- گزینهٔ ۲ شیب خط $y=۵x+a$ برابر ۵ است. پس ابتدا نقطه‌ای از تابع $f(x)=۲x^{۲}-۳x+۶$ را مشخص می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه (یعنی مشتق تابع) برابر ۵ باشد:

$$f'(x)=۴x-۳=۵\Rightarrow x=۲$$

پس خط در نقطهٔ $(۲,f(۲))$ بر نمودار تابع مماس است. این نقطه متعلق به خط هم هست، پس در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$f(۲)=۵\times۲+a\Rightarrow ۲\times۲^{۲}-۳\times۲+۶=۱۰+a\Rightarrow ۸=۱۰+a\Rightarrow a=-۲$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱۰۵۰- گزینهٔ ۱ دو نقطه عبارت‌اند از $A(۱,۳+a)$ و $B(-۱,-۳+a)$. معادلهٔ خط گذرنده از A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{۳+a-(-۳+a)}{۱-(-۱)}=۳$$

$$AB\ \text{معادلهٔ}:y-(۳+a)=۳(x-۱)\Rightarrow y=۳x+a$$

فرض کنید $f(x)=۳x+a$ و $g(x)=x^{۳}+ax^{۲}+۲x$. برای آنکه خط بر منحنی مماس باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$g'(x)=f'(x)\Rightarrow ۳x^{۲}+۲ax+۲=۳$$

$$g(x)=f(x)\Rightarrow x^{۳}+ax^{۲}+۲x=۳x+a$$

$$x^{۲}(x+a)-(x+a)=۰\Rightarrow(x+a)(x^{۲}-۱)=۰$$

از شرط دوم نتیجه می‌گیریم $x=-a$ یا $x=\pm۱$ که با جای‌گذاری این نتایج در معادلهٔ اول مقدار a به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}x=\pm۱\Rightarrow ۳\pm۲a=۱\Rightarrow a=\pm۱\\ x=-a\Rightarrow ۳a^{۲}-۲a^{۲}=۱\Rightarrow a^{۲}=۱\Rightarrow a=\pm۱\end{cases}\Rightarrow a=\pm۱$$

ریاضی - ۹۰

۱۰۵۱- گزینهٔ ۱ با توجه به تعریف مشتق، مشتق تابع f در $x=-۱$ مورد نظر است. برای به‌دست آوردن مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to-۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{(x+۱)(x-۲)\sqrt[۳]{x^{۲}-۷x}}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to-۱}((x-۲)\sqrt[۳]{x^{۲}-۷x})=-۶$$

ریاضی - ۹۲

۱۰۵۲- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس می‌توان نوشت:

$$f(۱)=\lim_{x\to۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to۱^{-}}f(x)\Rightarrow a+b=۲$$

$$f'(x)=\begin{cases}۳ax^{۲}+b & x\leq۱\\ \frac{۴}{\sqrt{۴x-۳}} & x\geq۱\end{cases},\quad f'_{+}(۱)=f'_{-}(۱)\Rightarrow ۴=۳a+b$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a=۱$ و $b=۱$.

ریاضی - ۹۲

۱۰۵۳- گزینهٔ ۳ با توجه به ضابطه، نقطهٔ مشتق‌ناپذیری تابع $x=۰$ است. توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱+x} & x>۰\\ \sqrt{۱-x} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲\sqrt{۱+x}} & x>۰\\ \dfrac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}} & x<۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(۰)=\frac{۱}{۲}\\ f'_-(۰)=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\xrightarrow[\text{مشتق‌پذیر}]{x=۰\ \text{در}\ f}f'_+(۰)-f'_-(۰)=۱$$

خارج از کشور ریاضی – ۸۵

۱۰۵۴- گزینهٔ ۴ اگر $x<-۱$، آن‌گاه $-۱<\frac{۱}{x}<۰$، بنابراین $[\frac{۱}{x}]=-۱$. پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-۱)$ تابعی ثابت و مشتق‌پذیر است. گزینه‌های (۱) و (۲) به راحتی رد می‌شوند، زیرا $\frac{۱}{x}$ در نامتناهی نقطه از آن‌ها مقدار صحیح می‌شود. همچنین در گزینهٔ (۳)، $\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{-۱}{x-۱}=-\infty$. پس تابع f روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ مشتق‌پذیر نیست.

ریاضی – ۹۱

۱۰۵۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}\ ,\quad D_g=\mathbb{R}-\{۴\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۴\}|\frac{x+۲}{x-۴}\in\mathbb{R}-\{-۳\}\}$$

$$\frac{x+۲}{x-۴}=-۳\Rightarrow x+۲=-۳x+۱۲\Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین $D_{fog}=\mathbb{R}-\{۴,\frac{۵}{۲}\}$. پس تابع fog در نقاط $x=۴$ و $x=\frac{۵}{۲}$ مشتق‌پذیر نیست.

ریاضی – ۸۴

۱۰۵۶- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج کسر صفر است، حد صورت نیز باید صفر باشد تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید. یعنی باید

$$\lim_{h\to۰}(f(-۲+h)+۳)=۰\Rightarrow\lim_{h\to۰}f(-۲+h)=-۳\Rightarrow f(-۲)=-۳$$

پس حد داده شده همان تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ است:

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=f'(-۲)=\frac{۱}{۲}$$

پس

$$g(x)=x^۲f(x)\Rightarrow g'(x)=(x^۲f(x))'=۲xf(x)+x^۲f'(x)$$

$$g'(-۲)=-۴f(-۲)+۴f'(-۲)=۱۲+۲=۱۴$$

خارج از کشور ریاضی – ۹۶

۱۰۵۷- گزینهٔ ۲ با توجه به فرض سؤال $f'(۲)=-\frac{۱}{۳}$. همچنین اگر فرض کنیم $g(x)=f(\sqrt{|x|+۳})$، در یک همسایگی $x=-۱$،

$$g(x)=f(\sqrt{۳-x})\ \Rightarrow\ g'(x)=f'(\sqrt{۳-x})\times\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}$$

$$\xrightarrow{x=-۱}g'(-۱)=-\frac{۱}{۴}f'(۲)=\frac{۱}{۱۲}$$

ریاضی – ۸۷

۱۰۵۸- گزینهٔ ۲ اگر $g(x)=f(xf(x))$، آن‌گاه طبق قاعدهٔ زنجیری،

$$g'(x)=f'(xf(x))\times(f(x)+xf'(x))$$

$$\xrightarrow{x=۲}g'(۲)=f'(۲f(۲))\times(f(۲)+۲f'(۲))$$

چون $f(۲)=-\frac{۱}{۲}$ و $f'(x)=-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}$، پس $f'(۲)=-\frac{۱}{۴}$. پس

$$f'(۲f(۲))=f'(-۱)=-\frac{۱}{۲\sqrt{-۱+۲}}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow g'(۲)=-\frac{۱}{۲}\times(-\frac{۱}{۲}+۲\times\frac{-۱}{۴})=\frac{۱}{۲}$$

ریاضی – ۸۹

۱۰۵۹- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[۱,۱/۲۱]$ محاسبه می‌کنیم: $\frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۱/۲۱-۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{۰/۱}{۰/۲۱}=\frac{۱۰}{۲۱}$. اکنون آهنگ تغییر لحظه‌ای f را در نقطهٔ $x=۱$ حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین اختلاف آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱۰}{۲۱}=\frac{۲۱-۲۰}{۴۲}=\frac{۱}{۴۲}$$

تجربی – ۹۴ با کمی تغییر

۱۰۶۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** شیب نیمساز ناحیهٔ اول برابر ۱ است. پس ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع $f(x)=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶$ را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه (مشتق) برابر یک باشد:

$$f'(x)=۱\Rightarrow۴x+m+۱=۱\Rightarrow x=-\frac{m}{۴}$$

بنابراین خط $y=x$ در نقطهٔ $(-\frac{m}{۴},-\frac{m}{۴})$ بر نمودار تابع f مماس شده است.

این نقطه روی نمودار تابع f است، پس مختصات آن در معادلهٔ تابع صدق می‌کند:

$$-\frac{m}{۴}=۲(-\frac{m}{۴})^۲+(m+۱)(-\frac{m}{۴})+m+۶$$

$$m^۲-۸m-۴۸=۰\Rightarrow(m-۱۲)(m+۴)=۰\Rightarrow m=۱۲\ ,\ m=-۴$$

$m=۱۲$ قابل قبول نیست، چون در این صورت نقطهٔ تماس $(-۳,-۳)$ می‌شود که در ناحیهٔ اول قرار ندارد.

راه‌حل دوم شرط آنکه یک تابع بر یک خط مماس باشد آن است که معادلهٔ حاصل از تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد. پس

$$\begin{cases}y=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶\\ y=x\end{cases}\Rightarrow۲x^۲+(m+۱)x+m+۶=x$$

$$۲x^۲+mx+m+۶=۰\xrightarrow{\Delta=۰}m^۲-۸(m+۶)=۰$$

$$m^۲-۸m-۴۸=۰\Rightarrow(m-۱۲)(m+۴)=۰\Rightarrow m=۱۲,m=-۴$$

$$\begin{cases}m=۱۲\Rightarrow۲x^۲+۱۲x+۱۸=۰\Rightarrow x^۲+۶x+۹=۰\Rightarrow x=-۳\ \text{(غ.ق.ق)}\\ m=-۴\Rightarrow۲x^۲-۴x+۲=۰\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

چون نمودار تابع بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است، پس باید طول نقطهٔ تماس مثبت باشد. پس $x=۱$ و در نتیجه $m=-۴$ قابل قبول است.

خارج از کشور تجربی – ۹۳

۱۰۶۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۳x-۶=۳(x^۲-x-۲)=۳(x-۲)(x+۱)$$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(۳,۴)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۰۶۲- گزینهٔ ۱ تابع مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=-۹x^۲+۹x-۲\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}, x=\frac{۲}{۳}$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۳}$		$\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}]$ صعودی است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۱۰۶۳- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد باید $f'(x)\geq ۰$.

مشتق توابع گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $y=x^۳-x+۱\Rightarrow y'=۳x^۲-۱\Rightarrow \Delta=۱۲>۰$

گزینهٔ (۲) $y=x^۳+x^۲+۱\Rightarrow y'=۳x^۲+۲x\Rightarrow \Delta=۴>۰$

گزینهٔ (۳) $y=x^۳+x^۲-x+۱\Rightarrow y'=۳x^۲+۲x-۱\Rightarrow \Delta=۱۶>۰$

گزینهٔ (۴) $y=x^۳+x^۲+x-۱\Rightarrow y'=۳x^۲+۲x+۱\Rightarrow \Delta=-۸<۰$

واضح است که مشتق تابع گزینهٔ (۴) یعنی عبارت $۳x^۲+۲x+۱$ همواره مثبت است و تابع صعودی است.

۱۰۶۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=x^۲-۴x+۳\Rightarrow f''(x)=۲x-۴$$

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
$f''(x)$		−	۰	+	

بنابراین تابع f' روی بازهٔ $(۳,۵)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۰۶۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که همواره $۳x^۲-x+۱>۰$، پس $D_f=\mathbb{R}$.

از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{۶x-۱}{۲\sqrt{۳x^۲-x+۱}}$.

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۶}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	

پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,\frac{۱}{۶})$ اکیداً نزولی است.

۱۰۶۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[۰,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{۴}{۲\sqrt{x}}-۱=\frac{۲-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, f'(x)=۰\Rightarrow x=۴$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است:

x	۰		۴		$+\infty$
$f'(x)$	▨	+	۰	−	

یعنی تابع f روی بازهٔ $[۴,+\infty)$ نزولی است و حداقل مقدار a برابر ۴ است.

۱۰۶۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=(۰,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{۲x}}-\frac{۱}{x^۲}=\frac{x^۲-۲\sqrt{۲x}}{۲x^۲\sqrt{۲x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲=۲\sqrt{۲x}\Rightarrow x^۴=۸x\Rightarrow x=۰ , x=۲$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$	▨	−	۰	+	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(۰,۲]$ نزولی و روی بازهٔ $[۲,+\infty)$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۱۰۶۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-۱,۲]$ و

$$f'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۲-x}}+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}=\frac{\sqrt{۲-x}-\sqrt{x+۱}}{۲\sqrt{x+۱}\sqrt{۲-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow \sqrt{۲-x}=\sqrt{x+۱}\Rightarrow ۲-x=x+۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	-۱		$\frac{۱}{۲}$		۲
$f'(x)$	▨	+	۰	−	▨

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(۰)>۰$)

پس تابع f روی بازهٔ $[-۱,\frac{۱}{۲}]$ صعودی و روی بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۲]$ نزولی است. در نتیجه حداکثر مقدار $b-a$ برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۰۶۹- گزینهٔ ۱ مشتق تابع به‌صورت زیر است:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^۲+۱}-\frac{۲x^۲}{۲\sqrt{x^۲+۱}}}{x^۲+۱}=\frac{x^۲+۱-x^۲}{(x^۲+۱)\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{۱}{(x^۲+۱)\sqrt{x^۲+۱}}$$

پس $f'(x)>۰$ و در نتیجه تابع همواره صعودی است.

۱۰۷۰- گزینهٔ ۲ مشتق تابع به‌صورت $f'(x)=۳x^۲-۲ax+۳$ است. برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن همواره نامنفی باشد. پس

$$\Delta=۴a^۲-۳۶\leq ۰\Rightarrow a^۲\leq ۹\Rightarrow -۳\leq a\leq ۳$$

۱۰۷۱- گزینهٔ ۲ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید:

$$f'(x)=\frac{x^۲+۱-۲x^۲}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۱,۱]$ صعودی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۲ است.

۱۰۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x^۳-۴x^۲+۵x-۲=x^۲(x-۱)-۳x^۲+۵x-۲=x^۲(x-۱)-(۳x-۲)(x-۱)$$

$$=(x-۱)(x^۲-۳x+۲)=(x-۱)(x-۱)(x-۲)=(x-۱)^۲(x-۲)$$

بنابراین $D_f=[۲,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{۳x^۲-۸x+۵}{۲\sqrt{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}}=\frac{(۳x-۵)(x-۱)}{۲\sqrt{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}}$$

بنابراین f' ریشه‌ای در بازهٔ $[۲,+\infty)$ ندارد و روی این بازه همواره مثبت است. بنابراین f روی بازهٔ $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۱۰۷۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-\frac{۱}{x^۲}=\frac{\sqrt[۳]{x^۴}-۳}{۳x^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۴}=۳\Rightarrow x^۴=۲۷\Rightarrow x=\pm\sqrt[۴]{۲۷}$$

پس جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt[۴]{۲۷}$		۰		$\sqrt[۴]{۲۷}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	ت ن	$-$	۰	$+$	

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-\sqrt[۴]{۲۷}]$ و $[\sqrt[۴]{۲۷},+\infty)$ صعودی است و روی بازه‌های $[-\sqrt[۴]{۲۷},۰)$ و $(۰,\sqrt[۴]{۲۷}]$ نزولی است. بنابراین کمترین مقدار a برابر $\sqrt[۴]{۲۷}$ است.

۱۰۷۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-۳,+\infty)$ و

$$f'(x)=۲x-\frac{۸}{۲\sqrt{x+۳}}=\frac{۲x\sqrt{x+۳}-۴}{\sqrt{x+۳}}$$

مخرج کسر فوق مثبت است، پس باید صورت آن را تعیین علامت کنیم تا علامت $f'(x)$ معلوم شود. بدین منظور ابتدا ریشه‌های صورت کسر فوق را به‌دست می‌آوریم:

$$۲x\sqrt{x+۳}-۴=۰\Rightarrow x\sqrt{x+۳}=۲\xrightarrow{x>۰}x^۲(x+۳)=۴$$

$$x^۳+۳x^۲-۴=۰\Rightarrow x^۳-۱+۳x^۲-۳=۰$$

$$(x-۱)(x^۲+x+۱)+۳(x-۱)(x+۱)=۰$$

$$(x-۱)(x^۲+۴x+۴)=۰\Rightarrow(x-۱)(x+۲)^۲=۰\Rightarrow x=۱,\ x=-۲\text{(غ.ق.ق)}$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است:

x	-۳		۱		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$-$	۰	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی است و کمترین مقدار a برابر ۱ است.

۱۰۷۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=[۰,+\infty)$ و برای هر $x>۰$

$$f(x)=x^{\frac{۱}{۲}}-x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow\frac{۱}{۲^۶}x^{-۳}=\frac{۱}{۳^۶}x^{-۴}$$

$$۳^{-۶}x^۳=۲^{-۶}x^۴\Rightarrow x=(\frac{۲}{۳})^۶$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است.

x	۰		$(\frac{۲}{۳})^۶$		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$-$	۰	$+$	

(برای تعیین علامت می‌توانید عددگذاری کنید، مثلاً $f'(۱)>۰$) بنابراین تابع روی بازهٔ $[۰,(\frac{۲}{۳})^۶]$ اکیداً نزولی است و حداکثر مقدار a برابر $(\frac{۲}{۳})^۶$ است.

۱۰۷۶- گزینهٔ ۲ مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=۳\sqrt[۳]{x}-x\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=\frac{۱-\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۱=\sqrt[۳]{x^۲}\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

پس جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	ت ن	$+$	۰	$-$	

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید، مثلاً $f'(\sqrt{۸})=-\frac{۱}{۲}$)

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-۱]$ و $[۱,+\infty)$ نزولی و روی بازهٔ $[-۱,۱]$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۱ است.

۱۰۷۷- گزینهٔ ۳ تابع مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x+۱)-\sqrt{x}}{(x+۱)^۲}=\frac{x+۱-۲x}{۲\sqrt{x}(x+۱)^۲}=\frac{۱-x}{۲\sqrt{x}(x+۱)^۲}$$

با توجه به مثبت بودن مخرج کسر فوق، جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$+$	۰	$-$	

بنابراین ابتدا تابع در بازهٔ $[۰,۱]$ صعودی، سپس در بازهٔ $[۱,+\infty)$ نزولی است.

۱۰۷۸- گزینهٔ ۴ از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(۱,۳)$ مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است، بنابراین $f'(x)>۰$. همچنین، مقادیر تابع f منفی‌اند، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. در مورد گزینهٔ (۴) توجه کنید که $(f^۲)'(x)=۲f'(x)f(x)<۰$. پس گزینهٔ (۴) درست نیست.

۱۰۷۹- گزینهٔ ۳ به جز در ریشه‌های مخرج ضابطهٔ تابع f،

$$f'(x)=\frac{(۲ax+۲)(۳x^۲+bx+۲b)-(۶x+b)(ax^۲+۲x+b)}{(۳x^۲+bx+۲b)^۲}$$

$$=\frac{(ab-۶)x^۲+۲b(۲a-۳)x+۴b-b^۲}{(۳x^۲+bx+۲b)^۲}$$

اگر f تابعی ثابت باشد، مشتق آن صفر است. بنابراین چندجمله‌ای صورت ضابطهٔ f' باید چندجمله‌ای ثابت صفر باشد. در نتیجه ضریب‌های این چندجمله‌ای صفرند:

$$ab-۶=۰\,,\quad ۲b(۲a-۳)=۰\,,\quad ۴b-b^۲=۰$$

توجه کنید که $b\neq ۰$، زیرا اگر $b=۰$، تساوی $ab-۶=۰$ درست نیست. بنابراین از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $۲a-۳=۰$، یعنی $a=\frac{۳}{۲}$. بنابراین

$\frac{۳}{۲}b-۶=۰$، یعنی $b=۴$. به این ترتیب، $a+b=\frac{۱۱}{۲}$.

۱۰۸۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^۲+a^۲-۲x(x+a)}{(x^۲+a^۲)^۲}=\frac{-x^۲-۲ax+a^۲}{(x^۲+a^۲)^۲}$$

اگر مشتق تابع f نامنفی باشد، آن‌گاه تابع f اکیداً صعودی است. پس باید عبارت $-x^۲-۲ax+a^۲$ نامنفی باشد:

$$-x^۲-۲ax+a^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲+۲ax-a^۲\leq ۰\Rightarrow (x+a)^۲\leq ۲a^۲$$

$$-\sqrt{۲}a\leq x+a\leq \sqrt{۲}a\Rightarrow -(\sqrt{۲}+۱)a\leq x\leq (\sqrt{۲}-۱)a$$

پس باید $-(\sqrt{۲}+۱)a\leq ۰$ و $(\sqrt{۲}-۱)a\geq ۱$ تا تابع f روی بازهٔ $[۰,۱]$ اکیداً صعودی باشد که چون a عددی مثبت است، پس $-(\sqrt{۲}+۱)a\leq ۰$ برقرار است و در نتیجه

$$(\sqrt{۲}-۱)a\geq ۱\Rightarrow a\geq \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}\Rightarrow a\geq \sqrt{۲}+۱$$

۱۰۸۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

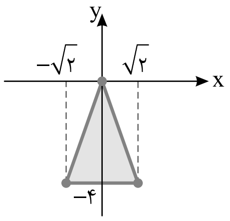
$$f'(x)=۴x^۳-۱۲x^۲\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow ۴x^۲(x-۳)=۰\Rightarrow x=۰\,,x=۳$$

بنابراین تابع f در $x=۰$ و $x=۳$ نقطهٔ بحرانی دارد و مجموع مقادیر تابع f در این نقاط را باید حساب کنیم:

$$f(۰)=۱,\quad f(۳)=-۲۶,\quad f(۰)+f(۳)=-۲۵$$

۱۰۸۲- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۴x^۳-۸x=۴x(x^۲-۲)=۰\Rightarrow x=۰, x=\pm\sqrt{۲}$$

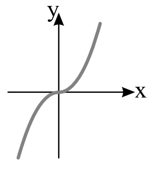


بنابراین $(۰,۰)$، $(\sqrt{۲},-۴)$ و $(-\sqrt{۲},-۴)$ نقاط بحرانی تابع هستند و مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با

$$\frac{۲\sqrt{۲}\times ۴}{۲}=۴\sqrt{۲}$$

۱۰۸۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

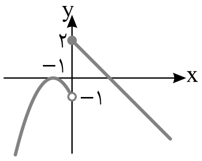
$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x\leq ۰ \end{cases}$$



پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است و تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و $f'(۰)=۰$. پس $x=۰$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع است.

۱۰۸۴- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. تابع f در $x=۰$ پیوسته نیست، پس مشتق‌پذیر نیست و $f'(-۱)=۰$. بنابراین $(۰,۲)$ و $(-۱,۰)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-۱-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=\sqrt{۵}$$



۱۰۸۵- گزینهٔ ۳ تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست (نقطهٔ گوشه‌ای دارد). عرض نقطهٔ بحرانی برابر است با $f(۰)=۳$.

۱۰۸۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x-۲ & x\geq ۱ \\ -x & ۰<x<۱ \\ x^۲+۲x & x\leq ۰ \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۱ & x>۱ \\ -۱ & ۰<x<۱ \\ ۲x+۲ & x<۰ \end{cases}$$

تابع f در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا

$$\begin{cases} f'_{+}(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f'(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{+}} (-۱)=-۱ \\ f'_{-}(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f'(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{-}} (۲x+۲)=۲ \end{cases}\Rightarrow f'_{+}(۰)\neq f'_{-}(۰)$$

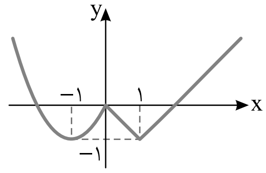
$$\begin{cases} f'_{+}(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f'(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}} ۱=۱ \\ f'_{-}(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f'(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}} (-۱)=-۱ \end{cases}\Rightarrow f'_{+}(۱)\neq f'_{-}(۱)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲x+۲=۰\Rightarrow x=-۱$$

بنابراین نقطه‌های $(۱,-۱)$، $(۰,۰)$ و $(-۱,-۱)$ نقطه‌های بحرانی تابع f هستند که مجموع عرض‌هایشان برابر -۲ است.

راه‌حل دوم نمودار تابع f به‌صورت زیر است و این تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(-۱)=۰$. پس $(۰,۰)$، $(۱,-۱)$ و $(-۱,-۱)$ نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر -۲ است.



۱۰۸۷- گزینهٔ ۴ تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۱-\frac{۲}{\sqrt{x+۱}}=\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{\sqrt{x+۱}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow \sqrt{x+۱}-۲=۰\Rightarrow x+۱=۴\Rightarrow x=۳$$

پس $x=۳$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع است که عرض آن برابر است با -۵.

۱۰۸۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$.

تابع f در $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۰)=۰$. پس تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۰۸۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

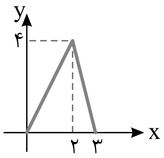
$$f(x)=|x^۲(x-۳)|=|x^۲||x-۳|=x^۲|x-۳|$$

$$f(x)=\begin{cases} x^۳-۳x^۲ & x\geq ۳ \\ -x^۳+۳x^۲ & x\leq ۳ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۶x & x>۳ \\ -۳x^۲+۶x & x<۳ \end{cases}, \quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰, x=۲$$

همچنین تابع f در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست. پس $(۰,۰)$، $(۲,۴)$ و $(۳,۰)$ نقاط بحرانی تابع‌اند و مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با

$$\frac{۳\times ۴}{۲}=۶$$



۱۰۹۰- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطه‌های $x=۰$ ، $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases} -x+x^۲-۱ & x\leq -۱ \\ -x-x^۲+۱ & -۱<x\leq ۰ \\ x-x^۲+۱ & ۰<x\leq ۱ \\ x+x^۲-۱ & x>۱ \end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases} -۱+۲x & x<-۱ \\ -۱-۲x & -۱<x<۰ \\ ۱-۲x & ۰<x<۱ \\ ۱+۲x & x>۱ \end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}, x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین تابع f پنج نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۰۹۱- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

پس نقاط بحرانی تابع نقاط $(۱,-۱)$ و $(-۱,۳)$ هستند که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر ۲ است.

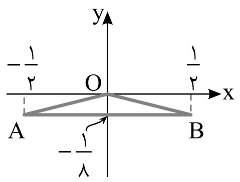
۱۰۹۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، طول نقاط بحرانی آن ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند. از طرف دیگر

$$f'(x)=۸x^۳-۲x=۲x(۴x^۲-۱)\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۰, x=-\frac{۱}{۲}, x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نقطه‌های بحرانی تابع f نقطه‌های $O(۰,۰)$ ، $A(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۸})$ و $B(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۸})$ هستند. از روی شکل زیر معلوم است که

$$AB=۱, \quad OA=OB=\sqrt{\frac{۱}{۸^۲}+\frac{۱}{۲^۲}}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۸}$$

بنابراین محیط مثلث OAB برابر است با $۱+۲\times\frac{\sqrt{۱۷}}{۸}=۱+\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$.



۱۰۹۳- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\sqrt{۱-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}=\frac{۱-۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین تابع دو نقطهٔ بحرانی به طول‌های $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ دارد.

۱۰۹۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید $D_f=(۲,+\infty)$ و اگر $x\in D_f$ ، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{(x-۱)(x-۲)}}=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۳x+۲}}$$

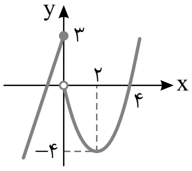
بنابراین

$$f'(x)=\frac{\frac{-(۲x-۳)}{۲\sqrt{x^۲-۳x+۲}}}{(x^۲-۳x+۲)}=-\frac{۲x-۳}{۲(x^۲-۳x+۲)^{\frac{۳}{۲}}}, \quad f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

و چون $\frac{۳}{۲}$ در دامنهٔ تابع f نیست و تابع f در همهٔ نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، پس تابع f نقطهٔ بحرانی ندارد.

۱۰۹۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\frac{۴-۲x}{۳\sqrt[۳]{(۴x-x^۲)^۲}}$. تابع f در $x=۰$ و $x=۴$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۲)=۰$. پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۰۹۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=۲x+\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$. تابع f در نقطه‌های $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۰)=۰$. پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

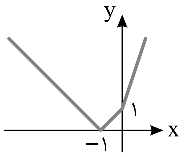


۱۰۹۷- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است و این تابع در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۲)=۰$. پس $(۰,۳)$ و $(۲,-۴)$ نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر -۱ است.

۱۰۹۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

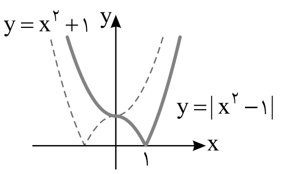
$$x\geq ۰\Rightarrow f(x)=|۲x+x+۱|=۳x+۱$$

$$x\leq ۰\Rightarrow f(x)=|۲x-x+۱|=|x+۱|$$



پس نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است و این تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=-۱$ مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای) و هیچ‌جا مشتق آن صفر نیست. پس تابع f دو نقطهٔ بحرانی دارد.

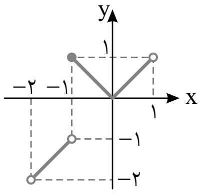
۱۰۹۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\geq ۰$ ، آن‌گاه $f(x)=|x^۲-۱|$ و اگر $x<۰$ ، آن‌گاه $f(x)=|-x^۲-۱|=x^۲+۱$. بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. پس تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای) و در نقطهٔ $x=۰$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع دو نقطهٔ بحرانی دارد.



۱۱۰۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x & -۲<x<-۱ \\ -x & -۱\le x<۰ \\ x & ۰\le x<۱ \end{cases}$$

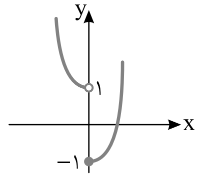
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و تابع f در $x=۰$ و $x=-۱$ نقطهٔ بحرانی دارد، زیرا در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته نیست و مشتق‌پذیر هم نیست و در نقطهٔ $x=۰$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد، پس مشتق‌پذیر نیست.



۱۱۰۱- گزینهٔ ۱ تابع f در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۲$ به‌ترتیب ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد. بنابراین f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۱۱۰۲- گزینهٔ ۳ تابع f' در نقطه‌های -۴، -۱، ۲ و ۵ برابر صفر است و در نقطه‌های -۴، -۱ و ۲ تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه، این نقطه‌ها، نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع f هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۸ است.

۱۱۰۳- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که تابع فقط در نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی دارد و در هیچ نقطه‌ای ماکزیمم نسبی ندارد.



۱۱۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

x	$-\infty$		۱		۲		۳		۴		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	−	۰	+	۰	+	

چون $f'(۳)=۰$ و تغییر علامت تابع f' در نقطهٔ $x=۳$ از منفی به مثبت است، پس تابع f در نقطهٔ $x=۳$ مینیمم نسبی دارد.

۱۱۰۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۵-۵x^۳ \Rightarrow f'(x)=۵x^۴-۱۵x^۲=۵x^۲(x^۲-۳)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۰, x=\pm\sqrt{۳}$$

عبارت $f'(x)$ در $x=۰$ تغییر علامت نمی‌دهد ولی در $x=\sqrt{۳}$ و $x=-\sqrt{۳}$ تغییر علامت می‌دهد. پس تابع f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی به طول‌های $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ دارد و حاصل‌ضرب طول آن‌ها برابر -۳ است.

۱۱۰۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۲x(x^۲-۱)-۲x(x^۲+۱)}{(x^۲-۱)^۲}=\frac{-۴x}{(x^۲+۱)^۲}\ , \quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	

پس تابع f در $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد و این ماکزیمم برابر $f(۰)=-۱$ است.

۱۱۰۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[-\sqrt{۳},۰]\cup[\sqrt{۳},+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{۳x^۲-۳}{۲\sqrt{x^۳-۳x}}, \quad f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases} x=۱ & (\text{غ.ق.ق.}) \\ x=-۱ \end{cases}$$

پس $x=-۱$ طول اکسترمم نسبی تابع f است که با توجه به‌صورت مسئله طول ماکزیمم نسبی است. بنابراین $f(-۱)=\sqrt{۲}$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع است.

۱۱۰۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[۰,+\infty)$ و

$$f'(x)=۱-\frac{۲}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{x}}\ , \quad f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{x}=۲\Rightarrow x=۴$$

پس $x=۴$ طول اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(۴)=-۴$.

۱۱۰۹- گزینهٔ ۲ چون تابع f همه جا مشتق‌پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی تابع f جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند. توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۹=۳(x-۱)(x-۳)$$

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

بنابراین تابع f در نقطهٔ ۱ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ ۳ مینیمم نسبی دارد. یعنی $a=۳$ و $b=۱$، پس $a-b=۲$.

۱۱۱۰- گزینهٔ ۱ چون تابع f روی دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، پس نقطه‌های اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند. بنابراین $f'(۱)=۰$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(۲x-a)(x+۱)-(۱)(x^۲-ax)}{(x+۱)^۲}=\frac{x^۲+۲x-a}{(x+۱)^۲}$$

$$f'(۱)=۰\Rightarrow\frac{۱+۲-a}{۴}=۰\Rightarrow a=۳$$

۱۱۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۳		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	+	

تابع f' در نقطه‌های -۲، -۱ و صفر برابر صفر است و در این نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین تابع f در نقطه‌های -۲، -۱ و صفر اکسترمم نسبی دارد. مجموع طول این نقطه‌ها -۳ است.

۱۱۱۲- گزینهٔ ۱ ابتدا طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۴x^۳-۱۲x^۲+۸x=۴x(x^۲-۳x+۲)=۴x(x-۱)(x-۲)$$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	

پس تابع f در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۲$ مینیمم نسبی و در نقطهٔ $x=۱$ ماکزیمم نسبی دارد. مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر است با $f(۱)=-۱$.

۱۱۱۳- گزینهٔ ۴ ابتدا طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{x^۲+۳-۲x(x+۱)}{(x^۲+۳)^۲}=\frac{-x^۲-۲x+۳}{(x^۲+۳)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=-۳,\quad x=۱$$

پس تابع f در نقاط $x=-۳$ و $x=۱$ اکسترمم نسبی دارد.

$$f(-۳)f(۱)=-\frac{۲}{۱۲}\times\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۱۲}$$

۱۱۱۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[۰,+\infty)$ و

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-۳}{۲\sqrt{x}}=\frac{۲x+x-۳}{۲\sqrt{x}}=\frac{۳x-۳}{۲\sqrt{x}}, \quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

پس $x=۱$ طول نقطهٔ اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع f است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(۱)=-۲$.

۱۱۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=[۰,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x+۱)-\sqrt{x}}{(x+۱)^۲}=\frac{x+۱-۲x}{۲\sqrt{x}(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

پس $x=۱$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است.

۱۱۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=[\frac{۱}{۲},+\infty)$ و

$$f'(x)=۱-\frac{۱}{\sqrt{۲x-۱}}=\frac{\sqrt{۲x-۱}-۱}{\sqrt{۲x-۱}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۲x-۱}=۱\Rightarrow ۲x-۱=۱\Rightarrow x=۱$$

پس $x=۱$ طول نقطهٔ اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(۱)=۰$.

x		$\frac{۱}{۲}$		۱		$+\infty$
$f'(x)$	▨		−	∘	+	
$f(x)$	▨		↘	min نسبی	↗	

۱۱۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=x^۲+۲ax+۱$. ضریب $x^۲$ در $f'(x)$ مثبت است، پس این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد، بنابراین برای اینکه تابع f اکسترمم نسبی نداشته باشد، باید $f'(x)\geq ۰$، یعنی

$$\Delta\leq ۰\Rightarrow ۴a^۲-۴\leq ۰\Rightarrow a^۲\leq ۱\Rightarrow -۱\leq a\leq ۱$$

۱۱۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=۷$ مشتق‌پذیر است و برای اینکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(۷)=۰$. پس

$$f'(x)=a-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^۴}}\Rightarrow f'(۷)=۰\Rightarrow a-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۸^۴}}=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۴۸}$$

۱۱۱۹- گزینهٔ ۲ چون $(-۱,-۱)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است و تابع f در نقطهٔ -۱ مشتق‌پذیر است، پس $f(-۱)=-۱$ و $f'(-۱)=۰$. از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{a(x^۲+۱)-۲x(ax+b)}{(x^۲+۱)^۲}$.

بنابراین

$$\begin{cases} f(-۱)=-۱ \\ f'(-۱)=۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{-a+b}{۲}=-۱ \\ \frac{۲a+۲(-a+b)}{۴}=۰ \end{cases}\Rightarrow a=۲\ ,\ b=۰$$

پس $a+b=۲$.

۱۱۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=(۰,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{k\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(kx+۱)}{x}=\frac{۲kx-(kx+۱)}{۲x\sqrt{x}}=\frac{kx-۱}{۲x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow kx=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{k}$$

پس طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f برابر $\frac{۱}{k}$ است.

اکنون توجه کنید که

$$f(\frac{۱}{k})=۴\Rightarrow\frac{k\times\frac{۱}{k}+۱}{\sqrt{\frac{۱}{k}}}=\frac{۲}{\sqrt{\frac{۱}{k}}}=۴\Rightarrow ۲\sqrt{k}=۴\Rightarrow k=۴$$

۱۱۲۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۶(x^۲-x-۲)\ , \quad f'(x)=۰\Rightarrow x=-۱, x=۲$$

چون f' در نقطه‌های $x=-۱$ و $x=۲$ تغییر علامت می‌دهد، پس نقاط $(-۱,-۱)$ و $(۲,-۲۸)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(۲+۱)^۲+(-۲۸+۱)^۲}=\sqrt{۷۳۸}$.

۱۱۲۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۲x(x^۲-x+۱)-(۲x-۱)(x^۲+۱)}{(x^۲-x+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲-x+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

پس تابع در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ اکسترمم نسبی دارد. حاصل‌جمع مقادیر $f(۱)$ و $f(-۱)$ را می‌خواهیم: $f(۱)=۲, f(-۱)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f(۱)+f(-۱)=\frac{۸}{۳}$

۱۱۲۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۴(\frac{۱}{۲})+a}{۴(\frac{۱}{۴})+a+۱}=\frac{۲+a}{۲+a}=۱, \quad a\neq -۲$$

از طرف دیگر تابع در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. پس مشتق آن در $x=\frac{۱}{۲}$ باید صفر باشد:

$$f'(x)=\frac{۴(۴x^۲+a+۱)-۸x(۴x+a)}{(۴x^۲+a+۱)^۲}=\frac{-۱۶x^۲-۸ax+۴a+۴}{(۴x^۲+a+۱)^۲}$$

$$f'(\frac{۱}{۲})=\frac{-۴-۴a+۴a+۴}{(۲+a)^۲}=۰, \quad a\neq -۲$$

پس اگر $a\neq -۲$، آن‌گاه $f(\frac{۱}{۲})=۱$ و $f'(\frac{۱}{۲})=۰$ و در نتیجه $(\frac{۱}{۲},۱)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است.

۱۱۲۴- گزینهٔ ۳ ابتدا طول نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{۵x}{x^۲+k^۲}$$

$$f'(x)=\frac{۵(x^۲+k^۲-۲x^۲)}{(x^۲+k^۲)^۲}=\frac{۵(k^۲-x^۲)}{(x^۲+k^۲)^۲}\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm k$$

پس نقاط $A(k,\frac{۵}{۲k})$ و $B(-k,\frac{-۵}{۲k})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند.

اختلاف مقدار ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع برابر است با $|\frac{۵}{۲k}-\frac{-۵}{۲k}|$. بنابراین

$$|\frac{۵}{k}|=۱۰\Rightarrow|k|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow k=\pm\frac{۱}{۲}$$

۱۱۲۵- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس مشتق آن در نقطهٔ اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است: $f'(x)=۳ax^۲-b\Rightarrow f'(-۱)=۳a-b=۰$

از طرف دیگر مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$f(-۱)=۴\Rightarrow -a+b+۲=۴\Rightarrow -a+b=۲$$

بنابراین $a=۱$ و $b=۳$، در نتیجه $ab=۳$.

۱۱۲۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۳a^۲x^۲+۴ax+۱$ و چون تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد و در این نقطه مشتق‌پذیر است، پس $f'(-۱)=۰$. در نتیجه

$$۳a^۲-۴a+۱=۰\Rightarrow a=۱,\quad a=\frac{۱}{۳}$$

اگر $a=۱$، آن‌گاه $f'(x)=۳x^۲+۴x+۱$ و

x	$-\infty$		-۱		$-\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

پس تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد. اگر $a=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه

$f'(x)=\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۴}{۳}x+۱$ و

x	$-\infty$		-۳		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

پس تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ مینیمم نسبی دارد. بنابراین $a=۱$ تنها مقدار ممکن برای a است.

۱۱۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=[۳,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x-۳}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲\sqrt{x-۳}=\sqrt{x}\Rightarrow ۴(x-۳)=x\Rightarrow x=۴$$

پس $x=۴$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(۴)=۳$.

۱۱۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۱-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}-۱}{\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow (x+۲)^۲=۱\Rightarrow x=-۱\,,\ x=-۳$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به شکل زیر است.

x	$-\infty$		-۳		-۲		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	ت ن	$-$	۰	$+$	

بنابراین $x=-۳$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر $f(-۳)=۰$ است.

۱۱۲۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

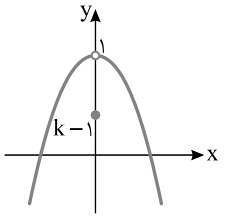
$$f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲+۳۶x=x(۴x^۲+۳ax+۳۶)$$

برای اینکه تابع f سه نقطهٔ اکسترمم نسبی داشته باشد باید علامت $f'(x)$ در سه نقطه تغییر کند. بنابراین باید معادلهٔ $f'(x)=۰$ سه جواب داشته باشد. چون $x=۰$ یک جواب این معادله است، پس باید معادلهٔ $۴x^۲+۳ax+۳۶=۰$ دو جواب غیرصفر داشته باشد. پس

$$\Delta=۹a^۲-۱۶\times۳۶>۰\Rightarrow a^۲>\frac{۳۶\times۱۶}{۹}\Rightarrow |a|>۸$$

۱۱۳۰- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر است که نقطهٔ $(۰,k-۱)$ هرجایی روی محور y می‌تواند باشد. چون تابع مینیمم نسبی دارد، پس این نقطه باید پایین‌تر از نقطهٔ $(۰,۱)$ باشد چون در غیر این صورت تابع در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد و مینیمم نسبی ندارد. بنابراین

$$k-۱<۱\Rightarrow k<۲$$



۱۱۳۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x=۳x(x-۴)=۰\Rightarrow x=۰, x=۴\ (\text{غ.ق.ق})$$

پس برای مشخص کردن مقدار مینیمم مطلق باید مقادیر $f(۰)$، $f(۳)$ و $f(-۱)$ را مقایسه کنیم: $f(۰)=۰$، $f(-۱)=-۷$ و $f(۳)=-۲۷$. پس مقدار مینیمم مطلق تابع برابر -۲۷ است.

۱۱۳۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f همه جا مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

بنابراین باید مقادیر $f(۱)$، $f(-۱)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند: $f(۱)=k-۲$، $f(-۱)=k+۲$ و $f(۲)=k+۲$.
پس $k+۲$ ماکزیمم مطلق و $k-۲$ مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[-۱,۲]$ هستند. بنابراین

$$k+۲+k-۲=۴\Rightarrow k=۲$$

۱۱۳۳- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{۴(x^۲+۱-۲x^۲)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۴(۱-x^۲)}{(۱+x^۲)^۲}\ ,\qquad f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

پس باید مقادیر $f(۲)$، $f(۱)$ و $f(-۱)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند: $f(۱)=۲$، $f(-۱)=-۲$ و $f(۲)=\frac{۸}{۵}$. پس ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲ و مینیمم مطلق آن برابر -۲ است و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -۴ است.

۱۱۳۴- گزینهٔ ۴ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۵x^۴-۴x^۳-۹x^۲=x^۲(۵x^۲-۴x-۹)$$

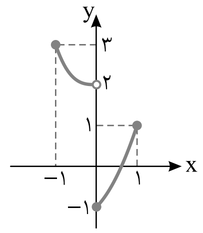
$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\,,\quad x=-۱\,,\quad x=\frac{۹}{۵}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین باید مقادیر $f(-۲)$، $f(-۱)$ و $f(۱)$ را مقایسه کنیم تا مقدار ماکزیمم مطلق تابع معلوم شود (توجه کنید که چون f' در نقطهٔ $x=۰$ تغییر علامت نمی‌دهد، مقدار $f(۰)$ را حساب نمی‌کنیم):

$$f(-۲)=-۱۵\,,\quad f(-۱)=۱۰\,,\quad f(۱)=۶$$

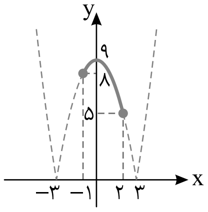
بنابراین $(-۱,۱۰)$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۲,۱]$ است. بنابراین $a=-۱$، $b=۱۰$ و $a+b=۹$.

۱۱۳۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این شکل معلوم است که ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق تابع f برابر ۱- است، پس مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



راه‌حل دوم تابع $y=۲-x^۳$ روی بازه $[-۱,۰)$ اکیداً نزولی است. ($y'=-۳x^۲<۰$) و مقادیرش در بازهٔ $(f(۰),f(-۱)]$ یعنی $(۲,۳]$ هستند. تابع $y=x^۲+x-۱$ روی بازهٔ $[۰,۱]$ اکیداً صعودی است ($y'=۲x+۱>۰$) و مقادیرش در بازهٔ $[f(۰),f(۱)]$ یعنی $[-۱,۱]$ هستند. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق آن برابر ۱- است، که مجموعشان می‌شود ۲.

۱۱۳۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** نمودار تابع به‌صورت زیر است. مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر ۵ است.



راه‌حل دوم با توجه به اینکه در بازهٔ $[-۱,۲]$، مقدار $x^۲-۹$ منفی است، پس

$$f(x)=|x^۲-۹|=۹-x^۲\Rightarrow f'(x)=-۲x\,,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰$$

پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(-۱)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم تا کمترین مقدار تابع معین شود:

$$f(۰)=۹\,,\quad f(-۱)=۸\,,\quad f(۲)=۵$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر ۵ است.

۱۱۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^۳-۳x & ۰\le x\le ۱\\ x^۳+۳x & -۱\le x\le ۰\end{cases}\,,\quad f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۳ & ۰<x<۱\\ ۳x^۲+۳ & -۱<x<۰\end{cases}$$

پس تابع f در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین باید مقادیر $f(۱)$، $f(-۱)$ و $f(۰)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند:

$$f(۰)=۰,\quad f(۱)=-۲,\quad f(-۱)=-۴$$

پس ماکزیمم مطلق تابع برابر صفر و مینیمم مطلق آن برابر ۴- است و مجموع این دو مقدار برابر ۴- است.

۱۱۳۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}-(x^۲+۴x) & -۱\le x<۰\\ -(x^۲-۴x) & ۰\le x\le ۳\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}-(۲x+۴) & -۱<x<۰\\ -(۲x-۴) & ۰<x<۳\end{cases}\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

اکنون توجه کنید که $f(-۱)=۳$، $f(۰)=۰$، $f(۲)=۴$ و $f(۳)=۳$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۴ است.

۱۱۳۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[۰,۸]$ و تابع f روی بازهٔ $(۰,۸)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۸-x}}=\frac{\sqrt{۸-x}-\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\sqrt{۸-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۸-x}=\sqrt{x}\Rightarrow ۸-x=x\Rightarrow x=۴$$

پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(۸)$ و $f(۴)$ را مقایسه کنیم تا کمترین و بیشترین مقدار تابع معین شوند:

$$f(۰)=\sqrt{۸}\,,\quad f(۸)=\sqrt{۸}\,,\quad f(۴)=۴$$

بنابراین ۴ و $\sqrt{۸}$ به‌ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $۸\sqrt{۲}$ است.

۱۱۴۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-۲,۲]$ و تابع f روی بازهٔ $(-۲,۲)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۱+\frac{x}{\sqrt{۴-x^۲}}=\frac{\sqrt{۴-x^۲}+x}{\sqrt{۴-x^۲}}\,,\quad f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۴-x^۲}=-x$$

$$\xrightarrow{x\le ۰}۴-x^۲=x^۲\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{۲}\ (\text{غ.ق.ق.})\\ x=-\sqrt{۲}\end{cases}$$

بنابراین باید $f(-۲)$، $f(۲)$ و $f(-\sqrt{۲})$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع در بازهٔ $[-۲,۲]$ مشخص شوند: $f(۲)=۲$، $f(-۲)=-۲$ و $f(-\sqrt{۲})=-۲\sqrt{۲}$. بنابراین $-۲\sqrt{۲}$ کمترین مقدار و ۲ بیشترین مقدار تابع است و نسبت آن‌ها برابر $-\sqrt{۲}$ است.

۱۱۴۱- گزینهٔ ۴ f تابعی است که در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۳x^۲-۸x-۳,\quad f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\ x=-\frac{۱}{۳}\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

پس باید مقادیر $f(۱)$، $f(۳)$ و $f(۴)$ را مقایسه کنیم تا مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[۱,۴]$ مشخص شوند:

$$f(۱)=-۵,\quad f(۳)=-۱۷,\quad f(۴)=-۱۱$$

بنابراین در بازهٔ داده شده ماکزیمم مطلق تابع ۵- و مینیمم مطلق آن ۱۷- است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۲ است.

۱۱۴۲- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۴x^۳+۳۲x\,,\quad f'(x)=۰\Rightarrow ۴x(x^۲+۸)=۰\Rightarrow x=۰$$

پس باید مقادیر $f(۱)$، $f(-۱)$ و $f(۰)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع را معین کنیم: $f(۰)=۱$، $f(۱)=۱۸$ و $f(-۱)=۱۸$. پس ماکزیمم مطلق تابع ۱۸ و مینیمم مطلق آن ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۷ است.

۱۱۴۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=۲+\frac{x^۲}{x+۱}$ ، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲x(x+۱)-x^۲}{(x+۱)^۲}=\frac{x^۲+۲x}{(x+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=-۲\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین باید مقادیر $f(-\frac{۱}{۲})$ ، $f(۰)$ و $f(۲)$ را حساب کنیم:

$$f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۲},\quad f(۰)=۲,\quad f(۲)=\frac{۱۰}{۳}$$

در نتیجه، کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[-\frac{۱}{۲},۲]$ برابر ۲ است.

۱۱۴۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۳x^۲-۶x$. پس

$$۳x^۲-۶x=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=۲$$

پس برای پیدا کردن مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱,۲]$ باید مقادیر $f(۰)$ ، $f(۲)$ و $f(-۱)$ را مقایسه کنیم. چون $f(۰)=a$ ، $f(-۱)=a-۴$ و $f(۲)=a-۴$ ، بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر $a-۴$ است. پس

$$a-۴=۴\Rightarrow a=۸$$

۱۱۴۵- گزینهٔ ۲ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۱۰x^۹-۱۰=۱۰(x^۹-۱)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین باید مقادیر $f(۱)$ ، $f(-۱)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم تا مقدار مینیمم مطلق تابع معلوم شود: $f(۱)=-۸$ ، $f(-۱)=۱۲$ و $f(۲)=۱۰۰۵$. پس $(۱\,,-۸)$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱\,,۲]$ است. بنابراین $a=۱$ ، $b=-۸$ و $a+b=-۷$.

۱۱۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=۳mx^۲+۶mx$. چون

$$f''(x)=۶mx+۶m,\quad f''(x)=۰\Rightarrow x=-۱$$

پس تنها نقطهٔ بحرانی تابع f' نقطهٔ $x=-۱$ است و بیشترین مقدار تابع f' به‌ازای $x=-۱$ به‌دست می‌آید:

$$f'(-۱)=۱۲\Rightarrow ۳m-۶m=۱۲\Rightarrow m=-۴$$

۱۱۴۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^۲-۳x+۲ & ۲\le x\le ۳\\ -x^۲+۳x-۲ & ۰\le x<۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۳ & ۲<x<۳\\ -۲x+۳ & ۰<x<۲\end{cases}$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(\frac{۳}{۲})=۰$. پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(۳)$، $f(۲)$ و $f(\frac{۳}{۲})$ را مقایسه کنیم تا مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع به‌دست آیند: $f(۰)=-۲$ ، $f(۳)=۲$ ، $f(۲)=۰$ و $f(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۴}$. بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲ و مقدار مینیمم مطلق آن برابر ۲− است و اختلاف این دو مقدار برابر ۴ است.

۱۱۴۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[۰,۵]$ و تابع f روی بازهٔ $(۰,۵)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۵-x}}=\frac{۲\sqrt{۵-x}-\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\sqrt{۵-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲\sqrt{۵-x}=\sqrt{x}\Rightarrow ۴(۵-x)=x\Rightarrow x=۴$$

پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(۴)$ و $f(۵)$ را با هم مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به‌دست آیند:

$$f(۰)=\sqrt{۵},\quad f(۴)=۵,\quad f(۵)=۲\sqrt{۵}$$

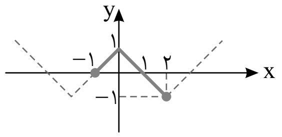
پس بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به‌ترتیب برابر است با ۵ و $\sqrt{۵}$. بنابراین حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f برابر $۵\sqrt{۵}$ است.

۱۱۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=۲x-\frac{۱۶}{x^۲}$ ، پس

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$ ، پس کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $(۰\,,+\infty)$ به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با $f(۲)=۱۲$.

۱۱۵۰- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است و حداکثر مقدار تابع در بازهٔ $[-۱\,,۲]$ برابر ۱ است.



۱۱۵۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=۴-x$ و در نتیجه $xy=x(۴-x)$. بنابراین بیشترین مقدار تابع $f(x)=۴x-x^۲$ روی بازهٔ $[۰\,,۱]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=۴-۲x\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۲\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$f(۰)=۰,\quad f(۱)=۳=f_{max}$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن xy برابر ۳ است.

۱۱۵۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول ضلع‌های باغچه x و y باشند (شکل را ببینید). در این صورت، طبق فرض $x+y+\frac{x}{۲}=۱۲۰$ ، یعنی $\frac{۳}{۲}x+y=۱۲۰$.

بنابراین

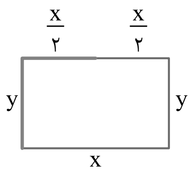
$$\text{مساحت باغچه}=xy=x(۱۲۰-\frac{۳}{۲}x)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x(۱۲۰-\frac{۳}{۲}x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۱۲۰-۳x\ ,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۴۰$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت باغچه به‌ازای $x=۴۰$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\text{مساحت باغچه}=۴۰\times۶۰=۲۴۰۰$$



۱۱۵۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید شعاع‌های دایره‌ها $r_۱$ و $r_۲$ باشد. در این صورت

مجموع محیط ها $=۲\pi r_۱+۲\pi r_۲=۱۰\pi\Rightarrow r_۱+r_۲=۵$

از طرف دیگر،

مجموع مساحت‌ها $=\pi r_۱^۲+\pi r_۲^۲=\pi(r_۱^۲+(۵-r_۱)^۲)=\pi(۲r_۱^۲-۱۰r_۱+۲۵)$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(r_۱)=۲r_۱^۲-۱۰r_۱+۲۵$ را پیدا کنیم. چون

$$f'(r_۱)=۴r_۱-۱۰\,,\quad f'(r_۱)=۰\Rightarrow r_۱=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f وقتی به‌دست می‌آید که $r_۱=\frac{۵}{۲}$ و برابر است با $\frac{۲۵}{۲}$. در نتیجه مجموع مساحت‌های دایره‌ها حداقل $\frac{۲۵\pi}{۲}$ است.

۱۱۵۴- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(۳x-x)^۲+(x+۶-۳)^۲}=\sqrt{۵x^۲+۶x+۹}$$

بنابرایـن باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۵x^۲+۶x+۹}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که همواره $۵x^۲+۶x+۹>۰$ و

$$f'(x)=\frac{۱۰x+۶}{۲\sqrt{۵x^۲+۶x+۹}}\,,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{۵}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{۳}{۵}$ به‌دست می‌آید.

۱۱۵۵- گزینهٔ ۲ مختصات نقطهٔ B به‌صورت $(x,x^۲)$ است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(x-۳)^۲+(x^۲-۰)^۲}=\sqrt{x^۴+x^۲-۶x+۹}$$

اگر $y=\sqrt{x^۴+x^۲-۶x+۹}$، آن‌گاه $y'=\frac{۲x^۳+x-۳}{\sqrt{x^۴+x^۲-۶x+۹}}$ و در نتیجه

$$y'=۰\Rightarrow ۲x^۳+x-۳=۰\Rightarrow ۲(x^۳-۱)+(x-۱)=۰$$

$$(x-۱)(۲x^۲+۲x+۳)=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابرایـن کمتریـن مقدار تابع y به‌ازای $x=۱$ به‌دسـت می‌آید. به این ترتیب، B نقطهٔ $(۱,۱)$ است.

۱۱۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که خط d از نقطه‌های $(۴,۰)$ و $(۰,۴)$ گذشته است، پس معادله‌اش به‌صورت $y=۴-x$ است. در نتیجه

$$x^۲+y^۲=x^۲+(۴-x)^۲=۲(x^۲-۴x+۸)$$

بنابراین باید کمتریـن مقدار تابع $f(x)=۲(x^۲-۴x+۸)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۴x-۸\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

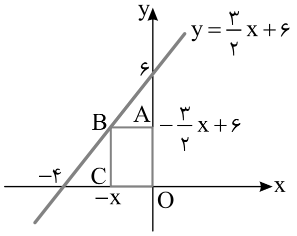
بنابراین کمترین مقدار تابع f به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۸.

۱۱۵۷- گزینهٔ ۲ فـرض کنیـد طـول نقطهٔ C برابـر $-x$ باشـد. در این صـورت طول نقطهٔ B هم برابر $-x$ اسـت. نقطهٔ B روی خطی اسـت که از نقطه‌هـای $(-۴,۰)$ و $(۰,۶)$ می‌گـذرد. معادلهٔ این خط $y=\frac{۳}{۲}x+۶$ اسـت.

بنابراین عرض نقطهٔ B برابر $-\frac{۳}{۲}x+۶$ است. به این ترتیب،

مساحت مستطیل OABC $=x(-\frac{۳}{۲}x+۶)$

پـس بایـد بیشـترین مقـدار تابـع $y=x(-\frac{۳}{۲}x+۶)$ را پیـدا کنیـم. چـون $y'=-۳x+۶$، اگر $y'=۰$، آن‌گاه $x=۲$. بنابراین بیشـترین مقدار تابع y، یعنی بیشـترین مقدار مسـاحت مسـتطیل OABC به‌ازای $x=۲$ به‌دسـت می‌آید و برابر است با $۲\times۳=۶$.



۱۱۵۸- گزینهٔ ۴ تابع هزینه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$C=۱۰۰(xl)+۶۰(۲xh+۲lh)=۱۰۰xl+۱۲۰h(x+l)$$

$$=۱۰۰x(۲x)+۱۲۰h(x+۲x)=۲۰۰x^۲+۳۶۰xh\quad(۱)$$

اکنون توجه کنید که

حجم مخزن $=۱۰\Rightarrow x\times l\times h=۱۰\Rightarrow x(۲x)h=۱۰\Rightarrow h=\frac{۵}{x^۲}\quad(۲)$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید

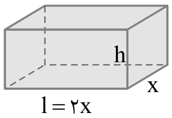
$$C(x)=۲۰۰x^۲+۳۶۰x(\frac{۵}{x^۲})=۲۰۰x^۲+\frac{۱۸۰۰}{x}\,,\quad x\in(۰,+\infty)$$

نقطهٔ بحرانی تابع C را به‌دست می‌آوریم:

$$C'(x)=۰\Rightarrow ۴۰۰x-\frac{۱۸۰۰}{x^۲}=۰\Rightarrow\frac{۴۰۰x^۳-۱۸۰۰}{x^۲}=۰$$

$$۴۰۰x^۳-۱۸۰۰=۰\Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{۹}{۲}}$$

پـس کمتریـن مقـدار تابع C بـه ازای $x=\sqrt[۳]{\frac{۹}{۲}}$ به‌دست می‌آید.



۱۱۵۹- گزینهٔ ۴ اگـر قطار با سـرعت ثابـت v کیلومتر بر سـاعت حرکت کند، آن‌گاه

هزینهٔ t ساعت حرکت: $C=۲۰۰۰t+(۴v^۲)t$

هزینهٔ x کیلومتر حرکت: $C=۲۰۰۰(\frac{x}{v})+۴v^۲(\frac{x}{v})$

هزینهٔ ۱ کیلومتر حرکت: $C(v)=\frac{۲۰۰۰}{v}+۴v$

بنابراین

$$C'(v)=-\frac{۲۰۰۰}{v^۲}+۴\,,\quad C'(v)=۰\Rightarrow v^۲=۵۰۰\Rightarrow v=۱۰\sqrt{۵}$$

۱۱۶۰- گزینهٔ ۴ باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

محیط $=۹\Rightarrow ۲h+x+\frac{۱}{۲}(۲\pi r)=۹\Rightarrow ۲h+۲r+\pi r=۹$

$$h=\frac{۹}{۲}-r-\frac{\pi r}{۲}$$

مساحت پنجره: $S=$ مساحت مستطیل + مساحت نیم‌دایره

$$S(r)=۲r(\frac{۹}{۲}-r-\frac{\pi r}{۲})+\frac{۱}{۲}\pi r^۲=-(\frac{\pi+۴}{۲})r^۲+۹r$$

$$S'(r)=-(\pi+۴)r+۹\,,\quad S'(r)=۰\Rightarrow r=\frac{۹}{\pi+۴}$$

۱۱۶۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $y=\frac{۴}{x}$ و در نتیجه $x+y=x+\frac{۴}{x}$.

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{۴}{x}$ با دامنهٔ $[\frac{۱}{۲},۳]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=۱-\frac{۴}{x^۲}\ ,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=۲,\ x=-۲\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

پس برای پیدا کردن مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۳]$ باید مقادیر $f(\frac{۱}{۲})$، $f(۳)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم: $f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱۷}{۲}$، $f(۳)=\frac{۱۳}{۳}$ و $f(۲)=۴=f_{min}$.

پس کمترین مقدار $x+y$ برابر ۴ است.

۱۱۶۲- گزینهٔ ۲ چون $x-y=۲$، پس $y=x-۲$، در نتیجه

$$x^۳-y^۳=x^۳-(x-۲)^۳\Rightarrow f(x)=۶x^۲-۱۲x+۸\Rightarrow f'(x)=۱۲x-۱۲$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۱۲x-۱۲=۰\Rightarrow x=۱$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(۱)=۲$$

۱۱۶۳- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم طول ضلع زمین در امتداد شمال- جنوب برابر x و در امتداد شرق- غرب برابر y باشد. در این صورت، $xy=۱۰۰۰۰$ و هزینهٔ نرده‌کشی برابر است با

$$S=۱۵۰۰۰(۲x)+۶۰۰۰۰(۲y)=۳۰۰۰۰x+۱۲۰۰۰۰y=۳\times۱۰^۴x+\frac{۱۲\times۱۰^۸}{x}$$

بنابراین $S'=۳\times۱۰^۴-\frac{۱۲\times۱۰^۸}{x^۲}$ و اگر $S'=۰$، $x=۲۰۰$. بنابراین کمترین مقدار تابع S به‌ازای $x=۲۰۰$ به‌دست می‌آید. در این حالت، طول یک ضلع زمین برابر ۲۰۰ است و طول ضلع دیگر زمین برابر است با $\frac{۱۰۰۰۰}{۲۰۰}=۵۰$.

بنابراین محیط زمین برابر است با $۲(۲۰۰+۵۰)=۵۰۰$.

۱۱۶۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x_۱+x_۲=-۱$ و

$$x_۱x_۲=-(m^۲+m+۱)$$

بنابراین

$$x_۱^۳+x_۲^۳=(x_۱+x_۲)((x_۱+x_۲)^۲-۳x_۱x_۲)$$
$$=-(۱+۳(m^۲+m+۱))=-۳m^۲-۳m-۴$$

بنابراین باید بیشترین مقدار ممکن تابع $f(m)=-۳m^۲-۳m-۴$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(m)=-۶m-۳\ ,\quad f'(m)=۰\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{m\to -\infty} f(m)=\lim_{m\to +\infty} f(m)=-\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به ازای $m=-\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱۳}{۴}$$

۱۱۶۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید B نقطه‌ای روی نمودار تابع $۲y=x^۲$ باشد. در این صورت مختصات نقطهٔ B به‌صورت $(x,\frac{x^۲}{۲})$ است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(x-۴)^۲+(\frac{x^۲}{۲}-۱)^۲}$$

اگر $y=\sqrt{(x-۴)^۲+(\frac{x^۲}{۲}-۱)^۲}$، آن‌گاه

$$y'=\frac{x-۴+x(\frac{x^۲}{۲}-۱)}{\sqrt{(x-۴)^۲+(\frac{x^۲}{۲}-۱)^۲}}=\frac{\frac{x^۳}{۲}-۴}{\sqrt{(x-۴)^۲+(\frac{x^۲}{۲}-۱)^۲}}\Rightarrow y'=۰\Rightarrow x=۲$$

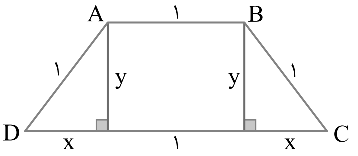
بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید. به این ترتیب، B نقطهٔ $(۲,۲)$ است.

۱۱۶۶- گزینهٔ ۱ با نمادگذاری شکل زیر معلوم می‌شود که بنابر قضیهٔ فیثاغورس $y^۲+x^۲=۱$، پس $y=\sqrt{۱-x^۲}$. در نتیجه مساحت ذوزنقهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{۲}y(۱+۱+۲x)=y(۱+x)=\sqrt{۱-x^۲}(۱+x)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}(۱+x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{-x(۱+x)}{\sqrt{۱-x^۲}}+\sqrt{۱-x^۲}=\frac{-۲x^۲-x+۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ ,\quad x=-۱\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید و در این صورت $CD=۲$.



۱۱۶۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\text{حجم استوانه}=۲lit=۲۰۰۰cm^۳\Rightarrow \pi r^۲h=۲۰۰۰\Rightarrow h=\frac{۲۰۰۰}{\pi r^۲}$$

سطح جانبی+مساحت قاعده=S=مساحت کل استوانه

$$S(r)=\pi r^۲+۲\pi rh=\pi r^۲+۲\pi r(\frac{۲۰۰۰}{\pi r^۲})=\pi r^۲+\frac{۴۰۰۰}{r}$$

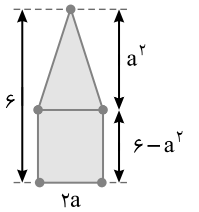
پس

$$S'(r)=۲\pi r-\frac{۴۰۰۰}{r^۲}\ ,\quad S'(r)=۰\Rightarrow r=\sqrt[۳]{\frac{۲۰۰۰}{\pi}}$$

۱۱۶۸- گزینهٔ ۳ این پنج‌ضلعی از یک مستطیل به ابعاد ۲a، $۶-a^۲$ و یک مثلث به ارتفاع $a^۲$ و قاعدهٔ ۲a تشکیل شده است. بنابراین مساحت آن برابر است با $S(a)=۲a(۶-a^۲)+\frac{۱}{۲}a^۲(۲a)=۱۲a-a^۳$. بنابراین

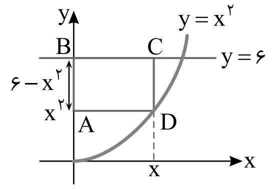
$$S'(a)=۱۲-۳a^۲\ ,\quad S'(a)=۰\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=۲\ ,\quad a=-۲\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

پس نقطهٔ (۲,۱۶)، نقطهٔ ماکزیمم تابع S است و در نتیجه بیشترین مقدار مساحت پنج‌ضلعی برابر ۱۶ است.



۱۱۶۹- گزینهٔ ① فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت، چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^۲$ است، پس عرض آن برابر $x^۲$ است. به این ترتیب عرض نقطهٔ A هم برابر $x^۲$ است و در نتیجه $AB=۶-x^۲$. بنابراین $۲(x+۶-x^۲)=$ محیط مستطیل $ABCD$. اگر $y=۲(x+۶-x^۲)$، آن‌گاه $y'=۲-۴x$ و در نتیجه $y'=۰$، پس $x=\frac{۱}{۲}$.

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار محیط مستطیل $ABCD$ به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲(\frac{۱}{۲}+۶-\frac{۱}{۴})=\frac{۲۵}{۲}$.



۱۱۷۰- گزینهٔ ② فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت طول نقطهٔ C هم برابر x است و چون نقطهٔ C روی خط $y=-x+۳$ است، پس عرض آن برابر $-x+۳$ است. بنابراین عرض نقطهٔ B هم برابر $-x+۳$ است و چون این نقطه روی خط $y=x+۵$ است، پس طول نقطهٔ B برابر است با $(-x+۳)-۵$، یعنی $-x-۲$. به این ترتیب،

$$BC=x-(-x-۲)=۲x+۲$$

در نتیجه

$$ABCD \text{ مساحت مستطیل } =BC\times CD=(۲x+۲)(-x+۳)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $y=(۲x+۲)(-x+۳)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$y'=۲(-x+۳)+(-۱)(۲x+۲)=-۴x+۴\ ,\quad y'=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن تابع y، یعنی بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل $ABCD$ به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۴\times۲=۸$.

۱۱۷۱- گزینهٔ ③ توجه کنید که $y=۴-x$ و چون $y<۰$، پس $x>۴$ و باید بیشترین مقدار تابع

$$f(x)=x^۲+(۴-x)^۳\ ,\quad x\in(۴,+\infty)$$

را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(x)=۲x-۳(۴-x)^۲=-۳x^۲+۲۶x-۴۸$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۶, x=\frac{۸}{۳}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و چون

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=۱۶,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,\quad f(۶)=۲۸$$

پس بیشترین مقدار ممکن تابع f برابر ۲۸ است.

۱۱۷۲- گزینهٔ ③ چون $۲x+y=۸$، پس $y=۸-۲x$ و

$$xy^۳=x(۸-۲x)^۳=۸x(۴-x)^۳$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=۸x(۴-x)^۳$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۸(۴-x)^۳-۲۴x(۴-x)^۲=۳۲(۴-x)^۲(۱-x)$$

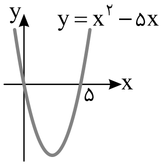
$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۴, x=۱$$

چون تابع f' در $x=۴$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=۱$ اکسترمم نسبی دارد. همچنین،

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(۱)=۲۱۶$$



۱۱۷۳- گزینهٔ ③ فرض کنید P نقطهٔ (x,y) باشد. چون نقطهٔ P روی سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۵x$ است، پس P نقطهٔ $(x,x^۲-۵x)$ است و مجموع مختصات P برابر است با $x+x^۲-۵x=x^۲-۴x$.
البته چون P نقطه‌ای زیر محور x است، پس $۰<x<۵$.
به این ترتیب، باید کمترین مقدار تابع $f(x)=x^۲-۴x$ را روی بازهٔ $(۰,۵)$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۲x-۴,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۴-۸=-۴$.

۱۱۷۴- گزینهٔ ① توجه کنید که

$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{۱}{۲}(۵-x)(۱۲+x^۲+۸x+۴)=\frac{۱}{۲}(۵-x)(x^۲+۸x+۱۶)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}(۵-x)(x^۲+۸x+۱۶)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=-\frac{۱}{۲}(x^۲+۸x+۱۶)+(۵-x)(x+۴)=-\frac{۳}{۲}x^۲-۳x+۱۲$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۲, x=-۴\ (\text{غ.ق.ق})$$

توجه کنید که به‌ازای $x=-۴$، طول قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ مورد نظر به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{۱}{۲}(۳)(۳۶)=۵۴$.

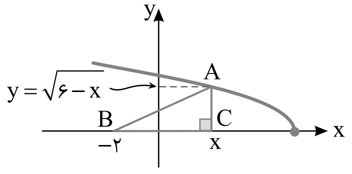
۱۱۷۵- گزینهٔ ② فرض کنید طول نقطهٔ C برابر x باشد. در این صورت، طول نقطهٔ A هم برابر x است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=\sqrt{۶-x}$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر با $\sqrt{۶-x}$ است. بنابراین $AC=\sqrt{۶-x}$. از طرف دیگر، $BC=x+۲$. به این ترتیب

$$ABC \text{ مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}(x+۲)\sqrt{۶-x}$$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+۲)\sqrt{۶-x}$ به‌ازای آن بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶-x}+\frac{۱}{۲}(x+۲)\frac{-۱}{۲\sqrt{۶-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sqrt{۶-x}=\frac{x+۲}{۴\sqrt{۶-x}}\Rightarrow ۶-x=\frac{x+۲}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$$

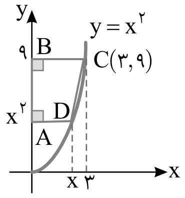


۱۱۷۶- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^۲$ است، پس عرض نقطهٔ D برابر $x^۲$ است. در نتیجه، عرض نقطهٔ A نیز برابر $x^۲$ است. از طرف دیگر عرض نقطهٔ B برابر عرض نقطهٔ C است، پس عرض نقطهٔ B برابر ۹ است. به این ترتیب، $BA=۹-x^۲$. بنابراین

$$\text{مساحت ذوزنقهٔ ABCD}=\frac{۱}{۲}AB(BC+AD)=\frac{۱}{۲}(۹-x^۲)(۳+x)$$

اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}(۹-x^۲)(۳+x)$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{۳}{۲}(۳+x)(۱-x)$، پس

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۱ \quad (\text{توجه کنید که } x>۰)$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ ABCD به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(۹-۱)(۳+۱)=۱۶$$

۱۱۷۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید طول ضلع‌های نظیر رأس قائمه در این مثلث x و y باشند. در این صورت $x^۲+y^۲=۴$. از طرف دیگر،

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}x\sqrt{۴-x^۲}$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x\sqrt{۴-x^۲}$ را پیدا کنیم $(۰<x<۲)$. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴-x^۲}-\frac{x^۲}{۲\sqrt{۴-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۴-x^۲}=\frac{x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}\Rightarrow ۴-x^۲=x^۲\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

چون $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=۰$، پس بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث مورد نظر به‌ازای $x=\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۱$.

۱۱۷۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید (x, y) نقطه‌ای روی خط $y=۴x+۲$ باشد. فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+(۴x+۲)^۲}=\sqrt{۱۷x^۲+۱۶x+۴}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۱۷x^۲+۱۶x+۴}$ را پیدا کنیم.

$$f'(x)=\frac{۳۴x+۱۶}{۲\sqrt{۱۷x^۲+۱۶x+۴}},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۸}{۱۷}$$

پس $y=۴x+۲=\frac{۲}{۱۷}$، یعنی نقطهٔ مورد نظر $(-\frac{۸}{۱۷},\frac{۲}{۱۷})$ است.

۱۱۷۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ B برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطهٔ A هم برابر $-x$ است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=x^۳+۸$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر است با $۸-x^۳$. بنابراین

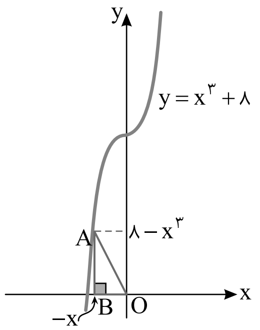
$$\text{مساحت مثلث OAB}=\frac{۱}{۲}x(۸-x^۳)$$

اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}x(۸-x^۳)$، آن‌گاه $f(x)=۴x-\frac{x^۴}{۲}$، پس $f'(x)=۴-۲x^۳$. در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث OAB وقتی به‌دست می‌آید که $x=\sqrt[۳]{۲}$ و برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۲}(۶)=۳\sqrt[۳]{۲}$$



۱۱۸۰- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ A برابر $-x$ باشد. چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=x^۲+۱$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر $x^۲+۱$ است. به این ترتیب، عرض نقطهٔ D هم برابر $x^۲+۱$ است و در نتیجه

$$CD=۷-(x^۲+۱)=۶-x^۲$$

بنابراین $\text{مساحت مستطیل ABCD}=x(۶-x^۲)$.

اگر $f(x)=x(۶-x^۲)$، آن‌گاه $f(x)=۶x-x^۳$، در نتیجه

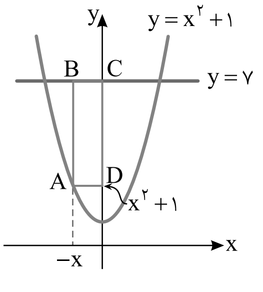
$$f'(x)=۶-۳x^۲$$

پس

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\sqrt{۲}\ (\text{توجه کنید که } x>۰)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به ازای $x=\sqrt{۲}$ به دست می‌آید و برابر است با

$$\sqrt{۲}\times۴=۴\sqrt{۲}$$



۱۱۸۱- گزینهٔ ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و صعودی است، پس مشتق آن همه‌جا نامنفی است. بنابراین $f'(x)=۳ax^۲-۱۸x+۳a\geq ۰$. در نتیجه

$$ax^۲-۶x+a\geq ۰\Rightarrow a>۰\,,\quad \Delta=۶^۲-۴a^۲\leq ۰\Rightarrow a\geq ۳ \text{ یا } a\leq -۳$$

پس $a\geq ۳$.

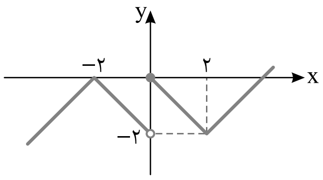
۱۱۸۲- گزینهٔ ۴ از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $(-۳,-۱)$ مشتق‌پذیر و اکیداً نزولی است. بنابراین $f'(x)<۰$. اکنون توجه کنید که چون مقادیر تابع f منفی‌اند، پس

$$y=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow y'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^۲}>۰,\quad x\in(-۳,-۱)$$

بنابراین تابع گزینهٔ (۴) اکیداً صعودی است.

مثال نقض برای گزینه‌های دیگر تابع $f(x)=-x^۳-۱۰۰$ است.

۱۱۸۳- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به شکل زیر است. این تابع در نقطه‌های $x=-۲$ و $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=۲$ مینیمم نسبی دارد.



۱۱۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=x(x^۲+۵x+۴)=x(x+۱)(x+۴)$$

x	$-\infty$		-۴		-۱		۰		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	
$f(x)$		↘	min	↗	max	↘	min	↗	

پس تابع f در نقطه‌های $x=۰$ و $x=-۴$ مینیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد.

۱۱۸۵- گزینهٔ ۱ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند. از طرف دیگر،

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۹=۳(x-۱)(x-۳)$$

چون $f'(۱)=۰$ و f' در نقطهٔ $x=۱$ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس تابع f در نقطهٔ $x=۱$ ماکزیمم نسبی دارد. طبق فرض $f(۱)=-۴$ ، پس

$$۱-۶+۹+a=-۴\Rightarrow a=-۸$$

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
$f(x)$		↗	max	↘	min	↗	

۱۱۸۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=(-۵,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{۲x\sqrt{x+۵}-\dfrac{x^۲-۱۷}{۲\sqrt{x+۵}}}{x+۵}=\frac{۳x^۲+۲۰x+۱۷}{۲(x+۵)\sqrt{x+۵}}$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. پس نقاط اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ است. پس

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳x^۲+۲۰x+۱۷=۰\Rightarrow x=-۱,\quad x=-\frac{۱۷}{۳}\,(\text{غ.ق.ق.})$$

پس $x=-۱$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است و عرض این نقطه برابر است با $f(-۱)=-۸$.

۱۱۸۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=۳(x-۲)^۲(x+۲)+(x-۲)^۳=(x-۲)^۲(۴x+۴)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۲,\quad x=-۱$$

اکنون مقادیر $f(-۱)$ ، $f(۲)$ و $f(-۲)$ را مقایسه می‌کنیم:

$$f(-۱)=-۲۷,\quad f(۲)=۰,\quad f(-۲)=۰$$

بنابراین -۲۷ مقدار مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[-۲,۲]$ است.

۱۱۸۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x=۴-۲y$ و باید کمترین مقدار ممکن تابع $f(y)=۴-۲y+y^۲$ را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(y)=-۲+۲y,\quad f'(y)=۰\Rightarrow y=۱$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{y\to-\infty}f(y)=\lim_{y\to+\infty}f(y)=+\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $y=۱$ به دست می‌آید و برابر است با $f(۱)=۳$.

۱۱۸۹- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(۳x-x)^۲+(x+۶-۴)^۲}=\sqrt{۵x^۲+۴x+۴}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۵x^۲+۴x+۴}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و

$$f'(x)=\frac{۱۰x+۴}{۲\sqrt{۵x^۲+۴x+۴}},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۲}{۵}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به ازای $x=-\frac{۲}{۵}$ به‌دست می‌آید که برابر است با

$$f(-\frac{۲}{۵})=\sqrt{۵(-\frac{۲}{۵})^۲+۴(-\frac{۲}{۵})+۴}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

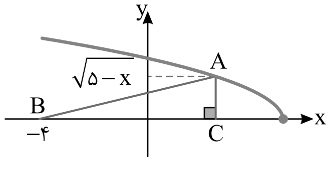
۱۱۹۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر x باشد. در این صورت، طول نقطهٔ A هم برابر x است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=\sqrt{۵-x}$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر با $\sqrt{۵-x}$ است. بنابراین $AC=\sqrt{۵-x}$. از طرف دیگر $BC=x+۴$. به این ترتیب

$$\text{مساحت مثلث } ABC=\frac{۱}{۲}(x+۴)\sqrt{۵-x}$$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+۴)\sqrt{۵-x}$ به‌ازای آن بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵-x}+\frac{۱}{۲}(x+۴)\frac{-۱}{۲\sqrt{۵-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sqrt{۵-x}=\frac{۱}{۴}\times\frac{x+۴}{\sqrt{۵-x}}\Rightarrow ۱۰-۲x=x+۴\Rightarrow x=۲$$



۱۱۹۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$ و

$$f'(x)=\frac{x^۲-۱-۲x(x)}{(x^۲-۱)^۲}=\frac{-x^۲-۱}{(x^۲-۱)^۲}$$

به جدول زیر توجه کنید:

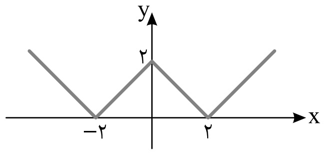
x	−∞		−۱		۱		+∞
f′(x)		−		−		−	
f(x)		↘	ت ن	↘	ت ن	↘	

همچنین

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty$$

بنابرایـن جدول تعیین جدول تغییرات تابع f به شـکل بالاسـت و این تابع روی بازه‌هـای $(-\infty,-۱)$، $(-۱,۱)$ و $(۱,+\infty)$ نزولی اسـت ولـی روی دامنه‌اش غیر یکنواست.

۱۱۹۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به شکل زیر است. از روی این شکل معلوم است که تابع f دو نقطهٔ مینیمم نسبی و یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.



۱۱۹۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۵-۵x^۴+۱\Rightarrow f'(x)=۵x^۴-۲۰x^۳=۵x^۳(x-۴)$$
$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=۴$$

x	−∞		۰		۴		+∞
f′(x)		+	۰	−	۰	+	
f(x)		↗	max	↘	min	↗	

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x=۴$ مینیمم نسبی دارد.

۱۱۹۴- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس مشتق آن در نقطهٔ اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f(x)=\frac{a}{۳}x^۳+۲bx^۲+۴x-\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(x)=ax^۲+۴bx+۴$$
$$f'(-۱)=۰\Rightarrow a-۴b+۴=۰$$

از طرف دیگر، مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$f(-۱)=۲\Rightarrow -\frac{a}{۳}+۲b-۴-\frac{۴}{۳}=۲\Rightarrow -a+۶b=۲۲$$

از حل دسـتگاه معادلات $\begin{cases}a-۴b=-۴\\-a+۶b=۲۲\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=۳۲$ و $b=۹$ و در نتیجه $a-b=۲۳$.

۱۱۹۵- گزینهٔ ۴ توجـه کنید کـه $f'(x)=\frac{۳-۳x^۲}{۳\sqrt[۳]{(۳x-x^۳)^۲}}$. تابع f در نقطه‌های $x=۰$ و $x=\pm\sqrt{۳}$ مشـتق ندارد و در نقطه‌های $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق آن صفر است. جدول تغییرات تابع f به‌صورت زیر است:

x	−∞		−√۳		−۱		۰		۱		√۳		+∞
f′(x)		−	ت ن	−	۰	+	ت ن	+	۰	−	ت ن	−	
f(x)		↘		↘	min	↗		↗	max	↘		↘	

پس $x=۱$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است و عرض این نقطه برابر $\sqrt[۳]{۲}$ است.

۱۱۹۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۲x\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{۲(x^۲-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۸x^۲-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشـتق‌پذیر نیست و $f'(-\frac{۱}{۲})=۰$ و $f'(\frac{۱}{۲})=۰$. پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۱۹۷- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجـه کنید کـه تابـع f در تمام نقـاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x+a)}{x}=\frac{x-a}{۲x\sqrt{x}},\ f'(x)=۰\Rightarrow x=a\notin[۱,۴]\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

پـس بایـد بیـن مقادیـر $f(۱)$ و $f(۴)$ دنبـال ماکزیمـم مطلق تابـع بگردیم: $f(۱)=۱+a$ و $f(۴)=۲+\frac{a}{۲}$. چـون a عـددی از بـازهٔ $(۰,۱)$ اسـت، مقـدار $۲+\frac{a}{۲}$ از مقـدار $۱+a$ بزرگ‌تر اسـت، پس مقدار ماکزیمـم مطلق تابع $۲+\frac{a}{۲}$ است. بنابراین $\frac{۹}{۴}=۲+\frac{a}{۲}$، در نتیجه $a=\frac{۱}{۲}$.

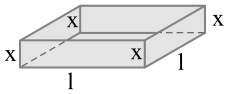
۱۱۹۸- گزینهٔ ۴ ارتفـاع مکعب حاصل مسـاوی x اسـت. طـول و عرض قاعدهٔ آن را با l نمایش می‌دهیم. در این صورت $\text{حجم}=xl^۲$. توجه کنید که

$$۲x+l=۳۰\Rightarrow l=۳۰-۲x\Rightarrow \text{حجم}=x(۳۰-۲x)^۲$$

بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x(۳۰-۲x)^۲$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f(x)=۴x^۳-۱۲۰x^۲+۹۰۰x\Rightarrow f'(x)=۱۲x^۲-۲۴۰x+۹۰۰$$
$$f'(x)=۰\Rightarrow ۱۲x^۲-۲۴۰x+۹۰۰=۰\Rightarrow x^۲-۲۰x+۷۵=۰$$
$$(x-۵)(x-۱۵)=۰\Rightarrow x=۵\,,\,x=۱۵$$

توجـه کنیـد که بـه ازای $x=۱۵$ حجم جعبـه برابر صفـر می‌شـود، در نتیجه بیشترین مقدار تابع f به ازای $x=۵$ به‌دست می‌آید.



۱۱۹۹- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ A برابر $-x$ باشد. چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=x^۲+۱$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر $x^۲+۱$ است. به این ترتیب، عرض نقطهٔ D هم برابر $x^۲+۱$ است و در نتیجه

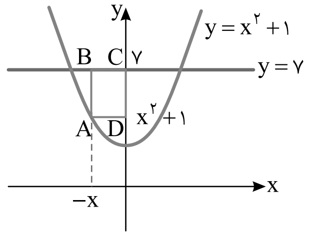
$$CD=۷-(x^۲+۱)=۶-x^۲$$

بنابراین $(۶-x^۲)x=$مساحت مستطیل ABCD .

اگر $f(x)=x(۶-x^۲)$، آن‌گاه $f(x)=۶x-x^۳$، در نتیجه $f'(x)=۶-۳x^۲$. پس

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\sqrt{۲}\ \ (\text{توجه کنید که } x>۰)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به ازای $x=\sqrt{۲}$ به دست می‌آید و برابر است با $\sqrt{۲}\times۴=۴\sqrt{۲}$.



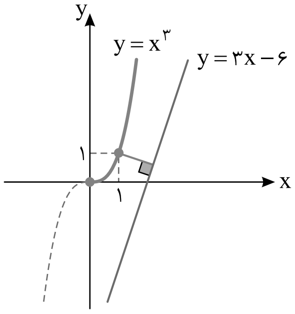
۱۲۰۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید $(x,x^۳)$ نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=x^۳$ باشد. فاصلهٔ این نقطه تا خط $y-۳x+۶=۰$ برابر است با

$$\frac{|x^۳-۳x+۶|}{\sqrt{۱^۲+۳^۲}}=\frac{|x^۳-۳x+۶|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{x^۳-۳x+۶}{\sqrt{۱۰}}$$

بنابراین طول نقطهٔ مورد نظر جایی است که کمترین مقدار تابع $d=x^۳-۳x+۶$ به‌دست می‌آید. توجه کنید که

$$d'=۳x^۲-۳,\quad d'=۰\Rightarrow x=۱, x=-۱(\text{غ.ق.ق})$$

پس باید مقادیر $d(۰)$ و $d(۱)$ را مقایسه کنیم: $d(۰)=۶$ و $d(۱)=۴$.
بنابراین طول نزدیک‌ترین نقطه برابر ۱ است.



۱۲۰۱- گزینهٔ ۱ از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=۴x^۳-۱۲x+۸=۴(x-۱)(x^۲+x-۲)=۴(x-۱)^۲(x+۲)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x_۱=۱,\quad x_۲=-۲$$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	
$f(x)$		↘	min	↗		↗	

با توجه به جدول بالا تابع فقط یک مینیمم نسبی دارد. خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۲۰۲- گزینهٔ ۲ نقطهٔ $(۱,-۲)$ روی نمودار تابع است، پس $f(۱)=-۲$، درنتیجه $a+b=-۲$. همچنین

$$f'(x)=-\frac{a}{x^۲}+۲bx\xrightarrow{f'(۱)=۰}-a+۲b=۰\xrightarrow{a+b=-۲}$$

$$۳b=-۲\Rightarrow b=-\frac{۲}{۳}, a=-\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $f'(x)=\frac{۴}{۳}(\frac{۱-x^۳}{x^۲})$.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	
$f(x)$		↗	max	↘	

پس نقطهٔ $(۱,-۲)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. ریاضی - ۸۹

۱۲۰۳- گزینهٔ ۱ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}(x-۱)^۲\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}(x-۱)^۲+۲(x-۱)x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}\frac{(x-۱)^۲}{\sqrt[۳]{x}}+۲(x-۱)\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۲(x-۱)^۲+۶x(x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

اکنون معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲(x-۱)(x-۱+۳x)}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۲(x-۱)(۴x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}=۰\Rightarrow x=۱\ , x=\frac{۱}{۴}$$

تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۴}$		۱		$+\infty$
$۲(x-۱)(۴x-۱)$		$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$\sqrt[۳]{x}$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘	min	↗	max	↘	min	↗	

با توجه به جدول، $x=\frac{۱}{۴}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۲۰۴- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار تابع f مشخص است که تابع فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی به طول ۳ دارد. بنابراین $x=۳$ جواب معادلهٔ $f'(x)=۰$ است و $f'(x)$ در این نقطه تغییر علامت می‌دهد:

$$f(x)=ax^۴+۲x^۳+bx^۲$$

$$f'(x)=۴ax^۳+۶x^۲+۲bx=۲x(۲ax^۲+۳x+b)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۰,\quad ۲ax^۲+۳x+b=۰$$

پس $x=۳$ باید جواب معادلهٔ $۲ax^۲+۳x+b=۰$ باشد و این معادله نباید جواب دیگری غیر از $x=۰$ داشته باشد. بنابراین

$$x=۰\Rightarrow۰+۰+b=۰\Rightarrow b=۰\ ,\quad x=۳\Rightarrow۱۸a+۹+۰=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

تجربی - ۹۲

۱۲۰۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۲x\sqrt[۳]{x}+\frac{x^۲-۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۶x^۲+x^۲-۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۷x^۲-۲۸}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و در نقطه‌های $x=۲$ و $x=-۲$ مشتق آن صفر است. پس مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع f به‌صورت $\{-۲,۰,۲\}$ است.

تجربی - ۸۳

۱۲۰۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۱,۲]$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین، $f(x)=|x||x^۲-۱|$. بنابراین نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ نیز نقطه‌های بحرانی تابع f هستند. از طرف دیگر، $f(x)=\begin{cases}x^۳-x & -۱\le x\le ۰\\ -x^۳+x & ۰\le x\le ۱\\ x^۳-x & ۱\le x\le ۲\end{cases}$، بنابراین

$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۱ & -۱<x<۰\\ -۳x^۲+۱ & ۰<x<۱\\ ۳x^۲-۱ & ۱<x<۲\end{cases}$. در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پس تابع f شش نقطهٔ بحرانی دارد.

ریاضی - ۹۰

۱۲۰۷- گزینهٔ ۴ تابع f در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۲,۲]$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین تابع f در نقطه‌های $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها نیز نقطه‌های بحرانی هستند. از طرف دیگر، $f(x)=\begin{cases}x^۳-x & -۲\le x\le -۱\\ -x^۳+x & -۱\le x\le ۱\\ x^۳-x & ۱\le x\le ۲\end{cases}$، بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۱ & -۲<x<-۱\\ -۳x^۲+۱ & -۱<x<۱\\ ۳x^۲-۱ & ۱<x<۲\end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پس تابع f شش نقطهٔ بحرانی دارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۲۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۳-۳x^۲-۹x+۵\Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۶x-۹$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳(x^۲-۲x-۳)=۰\Rightarrow ۳(x+۱)(x-۳)=۰$$

$x=-۱\ ,\ x=۳$ (غ.ق.ق.)

اکنون مقادیر $f(-۲)$، $f(۲)$ و $f(-۱)$ را پیدا می‌کنیم تا بیشترین مقدار تابع f در بازهٔ $[-۲,۲]$ مشخص شود: $f(-۲)=۳$، $f(۲)=-۱۷$ و $f(-۱)=۱۰$. پس بیشترین مقدار تابع f در این بازه برابر ۱۰ است.

تجربی - ۹۲

۱۲۰۹- گزینهٔ ۲ طول نقاط بحرانی تابع روی بازهٔ $(-۴,۳)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۱۵x\Rightarrow f'(x)=x^۲-۲x-۱۵$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow (x-۵)(x+۳)=۰\Rightarrow x=-۳\ ,\ x=۵$$

$x=۵$ در بازهٔ مورد نظر نیست. برای یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم، مقدار تابع را در نقاط زیر با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(-۴)=-\frac{۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=-\frac{۶۴}{۳}+۴۴=\frac{۶۸}{۳}=۲۲/\overline{۶}$$

$$f(-۳)=-\frac{۲۷}{۳}-۹+۴۵=-۱۸+۴۵=۲۷$$

$$f(۳)=\frac{۲۷}{۳}-۹-۴۵=-۴۵$$

پس $f(-۳)=۲۷$ مقدار ماکزیمم مطلق و $f(۳)=-۴۵$ مینیمم مطلق تابع داده شده در بازهٔ مورد نظر است.

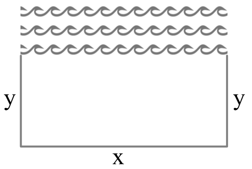
تجربی - ۹۵

۱۲۱۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر، $x+۲y=۸۸\Rightarrow x=۸۸-۲y$

می‌خواهیم مساحت مستطیل یعنی $S=xy$ ماکزیمم باشد:

$$S(y)=(۸۸-۲y)y=-۲y^۲+۸۸y$$

$$S'(y)=-۴y+۸۸=۰\Rightarrow y=۲۲\Rightarrow S_{max}=۹۶۸m^۲$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۲۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=۲x-\frac{a}{x^۲}=\frac{۲x^۳-a}{x^۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}x_۰=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$$

$x=۰$ جزء دامنهٔ تابع نیست و تنها باید $x=x_۰$ را بررسی کنیم. در همسایگی این نقطه، علامت f' از منفی به مثبت تغییر می‌کند (به ازای همهٔ مقادیر a)، بنابراین همواره $x=x_۰$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و تابع ماکزیمم نسبی ندارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۹

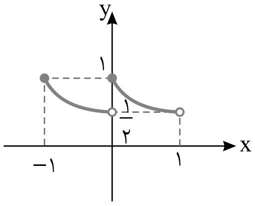
۱۲۱۲- گزینهٔ ۲ چون $۰\le x-[x]<۱$، پس $-۱<f(x)\le ۰$، بنابراین از اینکه تابع $g(x)=۲^x$ اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود

$$g(-۱)<g(f(x))\le g(۰)\Rightarrow \frac{۱}{۲}<(gof)(x)\le ۱$$

پس تابع gof مقدار ماکزیمم نسبی دارد و مقدار مینیمم نسبی ندارد. به نمودار تابع در بازهٔ $(-۱,۱)$ توجه کنید.

$$-۱\le x<۰\Rightarrow f(x)=-۱-x\Rightarrow (gof)(x)=۲^{-x-۱}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})^x$$

$$۰\le x<۱\Rightarrow f(x)=-x\Rightarrow (gof)(x)=۲^{-x}=(\frac{۱}{۲})^x$$



ریاضی - ۹۱

۱۲۱۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در نقطه‌های $x=\pm\sqrt{۳}$ مشتق‌پذیر نیست، بنابراین این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی تابع f هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases} x^{۳}-۳x & x\le-\sqrt{۳} \\ -x^{۳}+۳x & -\sqrt{۳}\le x\le\sqrt{۳} \\ x^{۳}-۳x & x\ge\sqrt{۳} \end{cases}$$

پس $f'(x)=\begin{cases} ۳x^{۲}-۳ & x<-\sqrt{۳} \\ -۳x^{۲}+۳ & -\sqrt{۳}<x<\sqrt{۳} \\ ۳x^{۲}-۳ & x>\sqrt{۳} \end{cases}$. در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	ت ن	−	۰	+	۰	−	ت ن	+	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘		↗	

پس تابع f در چهار نقطه اکسترمم نسبی دارد.

خارج از کشور ریاضی – ۸۸

۱۲۱۴- گزینهٔ ۳ اگر تابع f در نقطهٔ c مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در این نقطه برابر صفر است، پس مشتق راست تابع نیز در این نقطه برابر صفر است. اگر تابع f در نقطهٔ c مشتق‌پذیر نباشد، مشتق راست آن در این نقطه مثبت است.

خارج از کشور ریاضی ۹۰

۱۲۱۵- گزینهٔ ۳ عبارات گزینه‌های (۲) و (۴) درست هستند. همچنین می‌دانیم اگر f' در نقطهٔ اکسترمم نسبی c موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=۰$، پس گزینهٔ (۱) نیز عبارتی درست است. گزینهٔ (۳) نادرست است، زیرا هر نقطهٔ بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست، مانند $x=۰$ در $f(x)=x^{۳}$.

ریاضی – ۹۰

۱۲۱۶- گزینهٔ ۱ مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۱}}\times x-\sqrt{۱+x^{۲}}}{x^{۲}}=\frac{x^{۲}-(x^{۲}+۱)}{x^{۲}\sqrt{۱+x^{۲}}}=-\frac{۱}{x^{۲}\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

پس تابع f' ریشه ندارد و در همهٔ نقاط دامنهٔ f، تابع مشتق‌پذیر است، بنابراین تابع f نقطهٔ بحرانی ندارد.

خارج از کشور ریاضی ۹۰

۱۲۱۷- گزینهٔ ۳ در تابع $f(x)=(x-۱)|(x-۱)(x+۲)|$، $x=-۲$ ریشهٔ ساده عبارت داخل قدرمطلق است، پس تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ مشتق‌پذیر نیست.

در $x=۱$ نیز مشتق تابع برابر صفر است و به همین دلیل این نقطه نیز جزء نقاط بحرانی تابع است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} (x-۱)^{۲}(x+۲) & (x-۱)(x+۲)\ge۰ \\ -(x-۱)^{۲}(x+۲) & (x-۱)(x+۲)<۰ \end{cases}$$

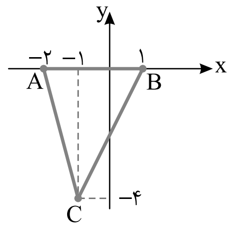
$$f'(x)=۰\Rightarrow((x-۱)^{۲}(x+۲))'=۰$$

$$۲(x-۱)(x+۲)+(x-۱)^{۲}=(x-۱)(۳x+۳)=۰\Rightarrow x=۱,-۱$$

پس نقطهٔ بحرانی سوم، نقطه‌ای به طول $x=-۱$ است. بنابراین

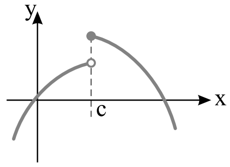
$A(-۲,۰)\ ,\ B(۱,۰)\ ,\ C(-۱,-۴)$: نقاط بحرانی

در نتیجه $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}$ قاعده × ارتفاع $=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$.



خارج از کشور ریاضی – ۹۲

۱۲۱۸- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل زیر هر سه گزینهٔ (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند. گزینهٔ (۴) درست است، زیرا با توجه به اینکه تابع f در همسایگی نقطهٔ $x=c$ تعریف شده است، در این نقطه مقدار تابع f در تعریف اکسترمم نسبی صدق می‌کند.



ریاضی – ۸۸

۱۲۱۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt[۳]{x^{۲}-x^{۳}}=\sqrt[۳]{x^{۳}}-\sqrt[۳]{x^{۳}-x^{۲}}$$

واضح است که برای هر x حقیقی $x^{۳}-x^{۲}\le x^{۳}$، پس $\sqrt[۳]{x^{۳}-x^{۲}}\le\sqrt[۳]{x^{۳}}$ و در نتیجه $f(x)\ge۰$. از طرف دیگر $f(۰)=۰$. پس کمترین مقدار تابع برابر صفر است.

ریاضی – ۹۲

۱۲۲۰- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول x برابر با $f'(x)$ است. بنابراین $m=f'(x)=-x^{۲}+۴x-۱$.

بیشترین مقدار $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m'=-۲x+۴\xrightarrow{m'=۰}x=۲\Rightarrow m=۳$$

بنابراین خطی با شیب ۳ مورد نظر است که در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار تابع f مماس شده است. معادلهٔ این خط را می‌نویسیم:

$$y-f(۲)=۳(x-۲)\Rightarrow y-\frac{۱۰}{۳}=۳x-۶$$

این خط محور y را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند:

$$x=۰\Rightarrow y-\frac{۱۰}{۳}=۰-۶\Rightarrow y=-\frac{۸}{۳}$$

خارج از کشور ریاضی – ۹۷

۱۲۲۱- گزینهٔ ۲ طول پاره‌خط AB برابر است با $(۲a+۱)-(a-۱)$. بنابراین

$$AB=۲a+۱-a+۱=۵\Rightarrow a=۳$$

پس طول پاره‌خط BC برابر است با

$$BC=(۵a-۲)-(۲a+۱)=۳a-۳=۶$$

۱۲۲۲- گزینهٔ ۲ فاصلهٔ نقطهٔ $(a,a\sqrt{۳})$ از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{a^۲+(a\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{a^۲+۳a^۲}=\sqrt{۴a^۲}=۲|a|=۶$$

بنابراین $a=\pm۳$.

۱۲۲۳- گزینهٔ ۲ مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+m}{۲},\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۳m+۱}{۲}$$

چون M روی خط $۲y+۳x-۱=۰$ است، پس

$$۲(\frac{-۳m+۱}{۲})+۳(\frac{۲+m}{۲})-۱=۰\Rightarrow-۳m+۱+۳+\frac{۳m}{۲}-۱=۰$$

$$-\frac{۳m}{۲}=-۳\Rightarrow m=۲$$

بنابراین M نقطهٔ $(\frac{۲+۲}{۲},\frac{-۳\times۲+۱}{۲})$، یعنی $(۲,-\frac{۵}{۲})$ است.

۱۲۲۴- گزینهٔ ۴ حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -۱ است. در نتیجه

$$\frac{۳}{k}\times\frac{-(k-۵)}{۲}=-۱\Rightarrow۳(k-۵)=۲k\Rightarrow k=۱۵$$

۱۲۲۵- گزینهٔ ۳ اگر رأس B قائمه باشد، آن‌گاه AB بر BC عمود است، یعنی حاصل‌ضرب شیب‌های خط‌های AB و BC برابر -۱ است:

$$m_{AB}=\frac{۶-۴}{۷-۴}=\frac{۲}{۳},\quad m_{BC}=\frac{۴-a^۲}{۴-۲a}$$

توجه کنید که اگر $a=۲$، نقطه‌های B و C بر هم منطبق می‌شوند که درست نیست. بنابراین $a\neq۲$ و در نتیجه $m_{BC}=\frac{۲+a}{۲}$. به این ترتیب

$$m_{AB}\times m_{BC}=-۱\Rightarrow\frac{۲}{۳}(\frac{۲+a}{۲})=-۱\Rightarrow a=-۵$$

۱۲۲۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** وسط پاره‌خط واصل نقطه‌های $(-۳,۱۰)$ و $(-۹,-۲)$ نقطهٔ $(\frac{۱۰-۲}{۲},\frac{-۳-۹}{۲})$، یعنی $(-۶,۴)$ است. چون نقطهٔ $(۴m,۲m-۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط مورد نظر است، پس حاصل‌ضرب شیب خطی که از نقطه‌های $(۴m,۲m-۱)$ و $(-۶,۴)$ می‌گذرد و شیب خطی که از نقطه‌های $(-۳,۱۰)$ و $(-۹,-۲)$ می‌گذرد برابر -۱ است:

$$\frac{۲m-۱-۴}{۴m+۶}\times\frac{۱۰+۲}{-۳+۹}=-۱\Rightarrow\frac{۲m-۵}{۴m+۶}\times۲=-۱\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم چون نقطهٔ $P(۴m,۲m-۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل نقاط $A(-۳,۱۰)$ و $B(-۹,-۲)$ است، پس

$$PA=PB\Rightarrow\sqrt{(۴m+۳)^۲+(۲m-۱-۱۰)^۲}=\sqrt{(۴m+۹)^۲+(۲m-۱+۲)^۲}$$

$$(۴m+۳)^۲+(۲m-۱۱)^۲=(۴m+۹)^۲+(۲m+۱)^۲$$

$$۱۶m^۲+۲۴m+۹+۴m^۲-۴۴m+۱۲۱=۱۶m^۲+۷۲m+۸۱+۴m^۲+۴m+۱$$

$$۹۶m=۴۸\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۲۷- گزینهٔ ۲ شیب خط $۲y+x=۱$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. شیب خط عمود بر این خط ۲ است. پس معادلهٔ خطی را که شیب آن ۲ باشد و از نقطهٔ $(-۱,۲)$ بگذرد می‌نویسیم:

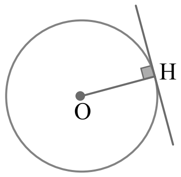
$$y-۲=۲(x+۱)\Rightarrow y=۲x+۴\Rightarrow۲x-y+۴=۰$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات از این خط، مطلوب مسئله است که برابر است با

$$\frac{|۰-۰+۴|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

۱۲۲۸- گزینهٔ ۴ شعاع دایره برابر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $۶x+۸y+۱=۰$ است: $R=\frac{|۶-۸+۱|}{\sqrt{۳۶+۶۴}}=\frac{۱}{۱۰}$. بنابراین مساحت دایره برابر است با

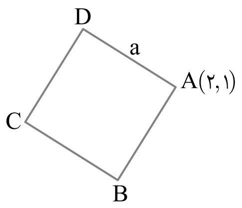
$$S=\pi R^۲=\frac{\pi}{۱۰۰}$$



۱۲۲۹- گزینهٔ ۲ چون مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط داده شده صدق نمی‌کنند، پس $y=۲x-۱$ معادلهٔ AD و AB نیست. پس یا معادلهٔ BC است یا DC. هر کدام که باشد، اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۱)$ تا خط $y=۲x-۱$ را حساب کنیم، طول ضلع مربع به دست می‌آید:

$$۲x-y-۱=۰,\quad a=\frac{|۴-۱-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

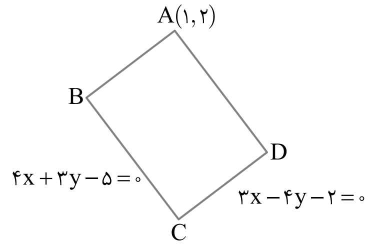
بنابراین مساحت مربع ABCD برابر است با $S=a^۲=\frac{۴}{۵}$.



۱۲۳۰- گزینهٔ ۳ رأس A روی هیچ‌کدام از خط‌های داده شده قرار ندارد، زیرا مختصات آن در معادله‌های داده شده صدق نمی‌کنند. پس برای محاسبهٔ طول و عرض مستطیل کافی است فاصلهٔ A از دو خط داده شده را به دست آوریم:

$$AB=\frac{|۴+۶-۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۵}{۵}=۱,\quad AD=\frac{|۳-۸-۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۷}{۵}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با $S=۱\times\frac{۷}{۵}=\frac{۷}{۵}$.



۱۲۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$AB=|x_B-x_A|=|۲m-(m-۱)|=|m+۱|$$

$$BC=|x_C-x_B|=|۳m+۱-۲m|=|m+۱|$$

بنابراین

$$۲|m+۱|-|m+۱|=۳\Rightarrow |m+۱|=۳\Rightarrow \begin{cases} m+۱=۳\Rightarrow m=۲ \\ m+۱=-۳\Rightarrow m=-۴ \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با -۲.

۱۲۳۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(a-\frac{۱}{۲})^۲+(۲a+۳)^۲}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\Rightarrow (a-\frac{۱}{۲})^۲+(۲a+۳)^۲=\frac{۱۳}{۴}$$

$$a^۲-a+\frac{۱}{۴}+۴a^۲+۱۲a+۹=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow ۵a^۲+۱۱a+۶=۰$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر است با مجموع جواب‌های این معادله، یعنی $-\frac{۱۱}{۵}$. توجه کنید که این معادله دو جواب دارد.

۱۲۳۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطهٔ وسط پاره‌خط AC همان نقطهٔ وسط پاره‌خط BD است. بنابراین $(\frac{-۲+x}{۲},\frac{-۳+y}{۲})=(\frac{۷-x-۱}{۲},\frac{۲-y+۳}{۲})$. در نتیجه

$$-۲+x=۶-x\Rightarrow x=۴,\quad -۳+y=۵-y\Rightarrow y=۴$$

یعنی C نقطهٔ $(۴,۴)$ است.

راه‌حل دوم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. پس

$$AB||CD\Rightarrow m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow \frac{-۳-۲+y}{-۲-۷+x}=\frac{y-۳}{x+۱}\Rightarrow \frac{-۵+y}{-۹+x}=\frac{y-۳}{x+۱}$$

$$-۵x-۵+yx+y=-۹y+۲۷+xy-۳x\Rightarrow -x+۵y=۱۶$$

به همین ترتیب،

$$AD||BC\Rightarrow m_{AD}=m_{BC}\Rightarrow \frac{-۳-۳}{-۲+۱}=\frac{۲-y-y}{۷-x-x}$$

$$۶=\frac{۲-۲y}{۷-۲x}\Rightarrow ۴۲-۱۲x=۲-۲y\Rightarrow ۶x-y=۲۰$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} -x+۵y=۱۶ \\ ۶x-y=۲۰ \end{cases}$ به دست می‌آید $x=۴$ و $y=۴$.

بنابراین C نقطهٔ $(۴,۴)$ است.

۱۲۳۴- گزینهٔ ۱ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-۱,۶)$ و $(-۲,-۳)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۶+۳}{-۱+۲}=۹$. بنابراین شیب خط راستی که بر این خط عمود است برابر است با $-\frac{۱}{۹}$. معادلهٔ خط راستی که شیب آن $-\frac{۱}{۹}$ است و از نقطهٔ $(۰,-۵)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y-(-۵)=-\frac{۱}{۹}(x-۰)\Rightarrow x+۹y+۴۵=۰$$

۱۲۳۵- گزینهٔ ۳ شیب خطی را که از نقطه‌های A و B می‌گذرد حساب می‌کنیم $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-۲}{-۱-۱}=۱$. پس شیب ارتفاع CH برابر -۱ است، زیرا $CH\perp AB$. اکنون معادلهٔ خطی را که از رأس C با شیب -۱ می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y-y_C=m_{CH}\times(x-x_C)\Rightarrow y+۱=-(x-۳)\Rightarrow y=-x+۲$$

۱۲۳۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** می‌دانیم عمودمنصف AB از وسط این پاره‌خط یعنی نقطهٔ $M(-۱,۳)$ می‌گذرد. شیب خط گذرنده از A و B برابر ۱ است، بنابراین شیب عمودمنصف برابر -۱ است. در نتیجه معادلهٔ این خط به‌صورت $y-۳=-۱(x+۱)$ یا به طور ساده‌تر $x+y=۲$ است.

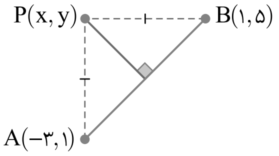
راه‌حل دوم می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است. فرض می‌کنیم نقطهٔ $P(x,y)$ روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. در این صورت

$$PA=PB\Rightarrow \sqrt{(x+۳)^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۵)^۲}$$

$$(x+۳)^۲+(y-۱)^۲=(x-۱)^۲+(y-۵)^۲$$

$$x^۲+۶x+۹+y^۲-۲y+۱=x^۲-۲x+۱+y^۲-۱۰y+۲۵$$

$$۸x+۸y=۱۶\Rightarrow x+y=۲$$



۱۲۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید شیب خطی که BC روی آن قرار دارد، برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس شیب خطی که AH روی آن قرار دارد برابر -۲ است.

بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)$$

$$y-۲=-۲(x-۱)\Rightarrow y=-۲x+۴$$

بنابراین برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ H کافی است محل تقاطع دو خط $y=-۲x+۴$ و $۲x-۴y+۱=۰$ را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} y=-۲x+۴ \\ ۲x-۴y+۱=۰\xrightarrow{y=-۲x+۴} ۲x-۴(-۲x+۴)+۱=۰ \end{cases}$$

$$۱۰x=۱۵\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=-۲(\frac{۳}{۲})+۴\Rightarrow y=۱$$

پس H نقطهٔ $(\frac{۳}{۲},۱)$ است.

۱۲۳۸- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، اندازهٔ AH را حساب می‌کنیم:

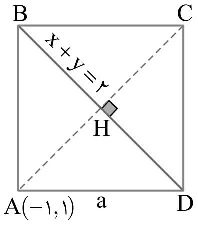
$$AH=\frac{|-۱+۱-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

بنابراین طول قطر مربع برابر $۲\sqrt{۲}$ است. طول ضلع مربع را حساب می‌کنیم:

$$a^۲+a^۲=(۲\sqrt{۲})^۲\Rightarrow ۲a^۲=۸$$

$$a^۲=۴\Rightarrow a=۲$$

بنابراین محیط مربع برابر ۸ است.



۱۲۳۹- گزینهٔ ۴ چون خط‌های داده شده موازی‌اند، پس شیب‌های آن‌ها برابر است، در نتیجه $-\frac{a}{۲}=-۳$ ، پس $a=۶$. اگر دو طرف معادلهٔ خط دوم را در ۲ ضرب کنیم، به شکل $۶x+۲y+۲k=۰$ درمی‌آید. چون فاصلهٔ این دو خط $\sqrt{۱۰}$ است، پس

$$\frac{|۲k+۶|}{\sqrt{۶^۲+۲^۲}}=\sqrt{۱۰}\xrightarrow{k>۰}\frac{۲k+۶}{\sqrt{۴۰}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow k=۷$$

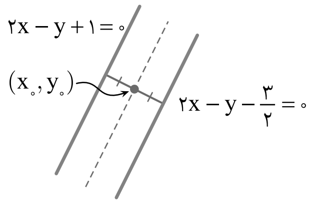
بنابراین $a+k=۱۳$.

۱۲۴۰- گزینهٔ ۱ ابتدا معادلهٔ خط دوم را به صورت $۲x-y-\frac{۳}{۲}=۰$ می‌نویسیم. اکنون فرض می‌کنیم نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی خط مورد نظر باشد. فاصلهٔ این نقطه از دو خط باید برابر باشد

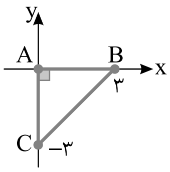
$$\frac{|۲x_۰-y_۰+۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}|}{\sqrt{۴+۱}}\Rightarrow|۲x_۰-y_۰+۱|=|۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}|$$

$$\begin{cases}۲x_۰-y_۰+۱=۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۱=-\frac{۳}{۲}\,(\text{غ.ق.ق.})\\ ۲x_۰-y_۰+۱=-۲x_۰+y_۰+\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۴x_۰-۲y_۰-\frac{۱}{۲}=۰\end{cases}$$

پس مختصات تمام نقطه‌هایی که از دو خط داده شده به یک فاصله باشند، در معادلهٔ $۴x-۲y-\frac{۱}{۲}=۰$ صدق می‌کنند، یعنی معادلهٔ خط مورد نظر $۴x-۲y-\frac{۱}{۲}=۰$ است.



۱۲۴۱- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل مقابل واضح است که $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $AB=AC=۳$. بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.



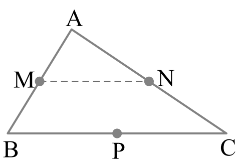
۱۲۴۲- گزینهٔ ۱ چون خط‌های MN و BC موازی هستند، پس شیب آن‌ها برابر است. شیب خط MN را به دست می‌آوریم:

$$m_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-۱-۴}{-۲-۵}=\frac{۵}{۷}$$

معادلهٔ خطی را که از نقطهٔ $P(-۳,-۴)$ با شیب $\frac{۵}{۷}$ می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y+۴=\frac{۵}{۷}(x+۳)\Rightarrow ۷y=۵x-۱۳$$

پس معادلهٔ خطی که BC روی آن قرار دارد، $۷y=۵x-۱۳$ است.



۱۲۴۳- گزینهٔ ۳ مختصات نقطهٔ M وسط ضلع AC را حساب می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{۴+۲}{۲}=۳,\quad y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{۱-۱}{۲}=۰$$

بنابراین طول میانهٔ BM برابر است با

$$BM=\sqrt{(m-۳)^۲+(-۲-۰)^۲}=\sqrt{(m-۳)^۲+۴}$$

چون $BM=۲$ ، پس

$$\sqrt{(m-۳)^۲+۴}=۲\Rightarrow(m-۳)^۲+۴=۴\Rightarrow(m-۳)^۲=۰\Rightarrow m=۳$$

۱۲۴۴- گزینهٔ ۲ خط $۳x+y=۴$ بر خط $x-ay=۷$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب این خط‌ها -۱ است:

$$-۳\times\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=۳$$

خط $x-۳y=۷$ بر خط $bx+۲y=-۵$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب این خط‌ها نیز -۱ است:

$$\frac{۱}{۳}\times(-\frac{b}{۲})=-۱\Rightarrow b=۶$$

بنابراین $a+b=۹$.

۱۲۴۵- گزینهٔ ۱ اگر نقطهٔ H وسط پاره‌خط AA' باشد، آن‌گاه

$$x_H=\frac{۱-۳}{۲}=-۱,\quad y_H=\frac{۲+۴}{۲}=۳$$

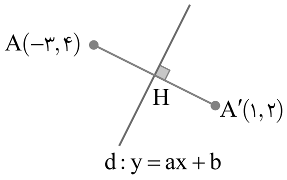
با توجه به شکل زیر مختصات نقطهٔ H در معادلهٔ خط $y=ax+b$ صدق می‌کنند. پس

$$۳=a(-۱)+b\Rightarrow b=a+۳$$

از طرف دیگر عکس و قرینهٔ شیب خطی که از A و A' می‌گذرد، برابر a ، شیب خط $y=ax+b$ است، پس

$$m_{AA'}=\frac{y_{A'}-y_A}{x_{A'}-x_A}=\frac{۲-۴}{۱-(-۳)}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $b=۵$ و در نتیجه $ab=۱۰$.



۱۲۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(۵-۱)^۲+(-۵-۳)^۲}=\sqrt{۸۰},\quad AC=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۲-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

$$BC=\sqrt{(-۱-۵)^۲+(۲+۵)^۲}=\sqrt{۸۵}$$

واضح است که تساوی $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}\times\sqrt{۵}=۱۰$$

۱۲۴۷- گزینهٔ ۳ ابتدا خط‌ها را به‌صورت $۲x-y+k=۰$ و $x-۲y-۱=۰$ می‌نویسیم. اکنون اگر فاصلهٔ A از دو خط به‌ترتیب برابر AH و AH' باشد، آن‌گاه

$$AH=\frac{|۲k+۱+k|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|۳k+۱|}{\sqrt{۵}}\ ,\quad AH'=\frac{|k+۲-۱|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|k+۱|}{\sqrt{۵}}$$

$$AH=۲AH'\Rightarrow|۳k+۱|=۲|k+۱|\Rightarrow\begin{cases}۳k+۱=۲k+۲\Rightarrow k=۱\\ ۳k+۱=-۲k-۲\Rightarrow k=-\frac{۳}{۵}\end{cases}$$

۱۲۴۸- گزینهٔ ۲ خط راست گذرنده از B و C از نقاط (۰,۱) و (۲,۰) نیز می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ آن $y-۰=\frac{۰-۱}{۲-۰}(x-۲)$ یا $۲y+x-۲=۰$ است. طول ارتفاع وارد بر BC برابر با فاصلهٔ A از BC است: $\frac{|۲\times۴-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۵}}=\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$.

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{۱}{۲}\times۴\times\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$.

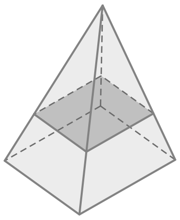
۱۲۴۹- گزینهٔ ۲ طول ضلع BC برابر است با

$$BC=\sqrt{(۵-۳)^۲+(۴-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

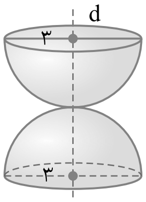
معادلهٔ خط گذرنده از نقاط B و C به‌صورت $y-۳=\frac{۴-۳}{۵-۳}(x-۳)$ یا $۲y-x-۳=۰$ است. بنابراین طول ارتفاع وارد بر BC یا همان فاصلهٔ A از خط گذرنده از نقاط B و C برابر است با $\frac{|۲(۱)-(-۷)-۳|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۶}{\sqrt{۵}}$. بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با $\frac{۶}{\sqrt{۵}}\times\sqrt{۵}=۶$.

۱۲۵۰- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ خطهای موازی $۳x+۴y+۶=۰$ و $۳x+۴y-۶=۰$ برابر است با $\frac{|۶+۶|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۲}{۵}$. در نتیجه، چون مساحت مستطیل ۱۲ است، پس طول ضلع دیگرش برابر با ۵ است. بنابراین طول ضلع بزرگ‌تر این مستطیل برابر ۵ است.

۱۲۵۱- گزینهٔ ۳ همان‌گونه که در شکل مقابل دیده می‌شود، سطح مقطع حاصل یک مربع است.



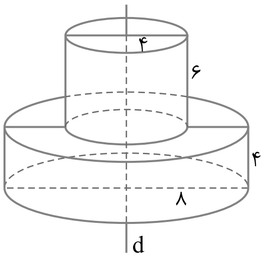
۱۲۵۲- گزینهٔ ۳ جسم حاصل از دو نیم‌کره هر یک به شعاع ۳ درست شده است. بنابراین حجم آن برابر است با $۲\times\left(\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۳}\pi\times۳^۳\right)\right)=۳۶\pi$.



۱۲۵۳- گزینهٔ ۱ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۱۲ و ارتفاع ۴ است که استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۴ از آن حذف شده است. بنابراین حجم آن برابر است با $\pi\times۱۲^۲\times۴-\pi\times۲^۲\times۴=۵۶۰\pi$.

۱۲۵۴- گزینهٔ ۳ از دوران هر نیم‌دایره حول خط d یک کره ایجاد می‌شود. پس شکل ایجاد شده فضای بین دو کره است.

۱۲۵۵- گزینهٔ ۴ جسم مورد نظر از دو استوانه درست شده است. یکی به شعاع قاعدهٔ ۸ و ارتفاع ۴ و دیگری به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۶. بنابراین حجم مورد نظر برابر است با $\pi\times۸^۲\times۴+\pi\times۴^۲\times۶=۳۵۲\pi$.

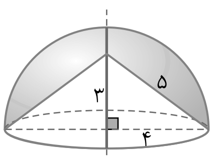


۱۲۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس شعاع ربع دایره را تعیین می‌کنیم:

$$۵^۲=۳^۲+r^۲\Rightarrow r=۴$$

جسم حاصل نیم‌کره‌ای به شعاع ۴ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است. بنابراین حجم این جسم برابر است با

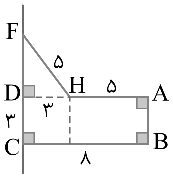
$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۳}\pi\times۴^۳\right)-\frac{\pi\times۴^۲\times۳}{۳}=\frac{۸۰\pi}{۳}$$

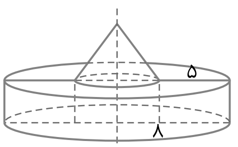


۱۲۵۷- گزینهٔ ۳ به شکل زیر توجه کنید. برای به‌دست آوردن FD از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

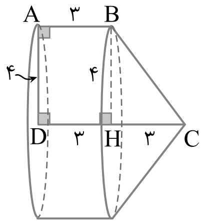
$$FD^۲=FH^۲-DH^۲\Rightarrow FD=\sqrt{۲۵-۹}=۴$$

بنابراین جسم مورد نظر از یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۸ و ارتفاع ۳ و از یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۴ درست شده است. بنابراین حجم مورد نظر برابر است با $\pi\times۸^۲\times۳+\frac{\pi\times۳^۲\times۴}{۳}=۲۰۴\pi$.





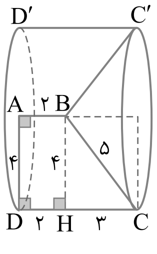
۱۲۵۸- گزینهٔ ۱ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ به آن اضافه شده است. بنابراین حجم جسم حاصل برابر است با $\pi\times۴^۲\times۳+\frac{\pi\times۴^۲\times۳}{۳}=۶۴\pi$.



۱۲۵۹- گزینهٔ ۲ به شکل زیر توجه کنید. برای به‌دست آوردن HC از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$HC^۲=BC^۲-BH^۲\Rightarrow HC=\sqrt{۲۵-۱۶}=۳$$

بنابراین جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۵ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است. بنابراین حجم حاصل برابر است با $\pi\times۴^۲\times۵-\frac{\pi\times۴^۲\times۳}{۳}=۶۴\pi$.

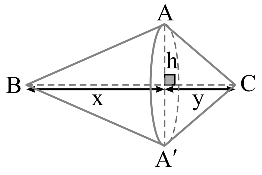


۱۲۶۰- گزینهٔ ۳ جسم حاصل از دو مخروط به هم چسبیده درست شده است. شعاع قاعدهٔ هر دو مخروط برابر ارتفاع وارد بر ضلع BC مثلث ABC است. اگر ارتفاع‌های آن‌ها برابر x و y باشد، آن‌گاه $x+y=BC=۶$. اکنون توجه کنید که

$$S_{ABC}=۱۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}h\times BC=۱۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}h\times۶=۱۲\Rightarrow h=۴$$

بنابراین حجم مورد نظر برابر است با

$$\frac{\pi h^۲x}{۳}+\frac{\pi h^۲y}{۳}=\frac{\pi h^۲}{۳}(x+y)=\frac{\pi\times۴^۲\times۶}{۳}=۳۲\pi$$



۱۲۶۱- گزینهٔ ۲ مرکز بیضی وسط پاره‌خط FF'، یعنی نقطهٔ $(\frac{۶+۶}{۲},\frac{۴-۲}{۲})$ است، که می‌شود نقطهٔ $(۶,۱)$.

۱۲۶۲- گزینهٔ ۴ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$۲a=PF+PF'=\sqrt{(-۶+۶)^۲+(۵-۰)^۲}+\sqrt{(-۶-۶)^۲+(۵-۰)^۲}$$
$$=۵+۱۳=۱۸$$

پس طول قطر بزرگ بیضی برابر ۱۸ است.

۱۲۶۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** طبق فرض،

$$۲a=۶\Rightarrow a=۳\ ,\quad ۲b=۳\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۹=\frac{۹}{۴}+c^۲\Rightarrow c=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

به این ترتیب، فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با $۲c=۳\sqrt{۳}$.

راه‌حل دوم چون $a^۲=b^۲+c^۲$، پس $۴a^۲=۴b^۲+۴c^۲$. در نتیجه $(۲a)^۲=(۲b)^۲+(۲c)^۲$. پس

$$۶^۲=۳^۲+(۲c)^۲\Rightarrow(۲c)^۲=۲۷\Rightarrow۲c=۳\sqrt{۳}$$

۱۲۶۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $۲c=FF'=۶$، پس $c=۳$. طول قطر بزرگ بیضی برابر $۲a$ است، پس $۲a=۱۰$، یعنی $a=۵$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۲۵=b^۲+۹\Rightarrow b=۴$$

در نتیجه، طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b=۸$.

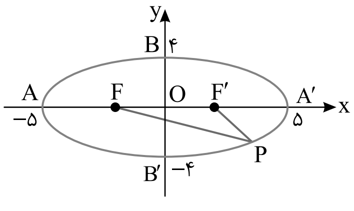
۱۲۶۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\text{محیط مثلث } PFF'=(PF+PF')+FF'=۲a+۲c$$

از طرف دیگر $a=OA'=۵$ و $b=OB=۴$. اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۵^۲=۴^۲+c^۲\Rightarrow c=۳$$

بنابراین محیط مثلث PFF' برابر است با $۲a+۲c=۱۶$.



۱۲۶۶- گزینهٔ ۳ محل برخورد خط $y=۲x+۴$ با محور x نقطهٔ $(-۲,۰)$ است. پس F نقطهٔ $(-۲,۰)$ است. در نتیجه $c=OF=۲$. محل برخورد خط $y=۲x+۴$ با محور y نقطهٔ $(۴,۰)$ است، پس $b=OB=۴$. اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲=۲۰\Rightarrow a=۲\sqrt{۵}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی برابر است با $۲a=۴\sqrt{۵}$.

۱۲۶۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $c=FO=F'O=۲$ و در نتیجه $a=AO=۳+۲=۵$. بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۲}{۵}$.

۱۲۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** طول قطر بزرگ بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین $۲a=۱۶$، پس $a=۸$. از طرف دیگر، خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{c}{a}$ است. بنابراین

$$\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{c}{۸}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow c=۴$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۶۴=b^۲+۱۶\Rightarrow b^۲=۴۸\Rightarrow b=۴\sqrt{۳}$$

طول قطر کوچک بیضی برابر $۲b$ است، پس برابر است با $۸\sqrt{۳}$.

راه‌حل دوم چون $a=۸$ و $e=\frac{۱}{۲}$، پس

$$e=\sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{۶۴}}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=۱-\frac{b^۲}{۶۴}\Rightarrow b^۲=۴۸\Rightarrow b=۴\sqrt{۳}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b=۸\sqrt{۳}$.

۱۲۶۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $c=OF=۱۲$ و چون $۲b=۱۸$، پس $b=۹$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲=۹^۲+۱۲^۲=۲۲۵\Rightarrow a=۱۵$$

در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۴}{۵}$.

۱۲۷۰- گزینهٔ ۱ نقطه‌های F' و B به ترتیب محل برخورد خط $y=-۲x+۱$ با محور x و محور y هستند. بنابراین F' نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},۰)$ و B نقطهٔ $(۰,۱)$ است. در نتیجه $b=OB=۱$ و $c=OF'=\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲=۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۵}}{۲}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$.

۱۲۷۱- گزینهٔ ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین $۲a=PF+PF'=۱۰$، پس $a=۵$.
فاصلهٔ هر سر قطر کوچک بیضی تا هر یک از کانون‌های بیضی برابر a است. پس $B'F'=a=۵$.

۱۲۷۲- گزینهٔ ۳ طول قطر بزرگ بیضی برابر $۲a$ است، پس $۲a=AA'=۸$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. در نتیجه $MF+MF'=NF+NF'=۲a=۸$. بنابراین محیط چهارضلعی $FMF'N$ برابر است با $۸+۸=۱۶$.

۱۲۷۳- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با $۲c$. بنابراین $۲c=۸$، یعنی $c=۴$. طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b$. بنابراین $۲b=۴$، یعنی $b=۲$. اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲=۴+۱۶=۲۰\Rightarrow a=۲\sqrt{۵}$$

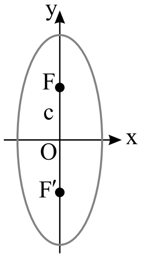
بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با $۴\sqrt{۵}$.

۱۲۷۴- گزینهٔ ۳ طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک بیضی به‌ترتیب برابر $۲a$ و $۲b$ هستند. بنابراین

$$۲a=۱۲\Rightarrow a=۶,\quad ۲b=۱۰\Rightarrow b=۵$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۶^۲=۵^۲+c^۲\Rightarrow c=\sqrt{۱۱}$$



بنابراین $OF'=c=\sqrt{۱۱}$، در نتیجه کانون‌های بیضی نقطه‌های $(۰,\sqrt{۱۱})$ و $(۰,-\sqrt{۱۱})$ هستند.

۱۲۷۵- گزینهٔ ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین $۲a=PF+PF'=۲۶$، $a=۱۳$. همین‌طور، $۲b=BB'=۲۴$، پس $b=۱۲$. اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۱۳^۲=۱۲^۲+c^۲\Rightarrow c=۵$$

در نتیجه $AF=a-c=۱۳-۵=۸$.

۱۲۷۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که محور x از وسط پاره‌خط FF' می‌گذرد و بر آن عمود است. بنابراین BB' قطر کوچک بیضی مورد نظر است. در نتیجه $BF=BF'=a$. اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویهٔ BFF' بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$BF^۲+BF'^۲=FF'^۲\Rightarrow a^۲+a^۲=۸^۲\Rightarrow ۲a^۲=۶۴\Rightarrow a=۴\sqrt{۲}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با $۲a=۸\sqrt{۲}$.

۱۲۷۷- گزینهٔ ۳ از شرط‌های مسئله نتیجه می‌شود که قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی روی محورهای مختصات هستند. بنابراین $b=\sqrt{۱۳}$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین $۲a=PF+PF'=۱۴$، پس $a=۷$.

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۴۹=۱۳+c^۲\Rightarrow c=۶$$

بنابراین، خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۶}{۷}$.

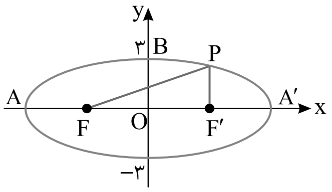
۱۲۷۸- گزینهٔ ۱ چون محور y عمودمنصف FF' است، پس قطر کوچک بیضی روی محور y است. در نتیجه $b=OB=۳$. مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر با $۲a$ است. بنابراین

$$۲a=PF+PF'=۱۸\Rightarrow a=۹$$

در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۹^۲=۳^۲+c^۲\Rightarrow c=۶\sqrt{۲}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۹}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$.

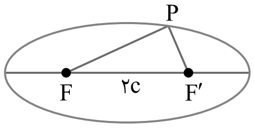


۱۲۷۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$، پس $c=\frac{a}{۲}$ و $۲b=۱۲$، پس $b=۶$، بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲=۳۶+\frac{a^۲}{۴}\Rightarrow a=۴\sqrt{۳}$$

بنابراین $c=\frac{a}{۲}=۲\sqrt{۳}$. مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$\text{محیط مثلث } PFF'=PF+PF'+FF'=۲a+۲c=۱۲\sqrt{۳}$$



۱۲۸۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $c=OF=۵$، پس $FF'=۲c=۱۰$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر است با $۲a$. در نتیجه $PF+PF'=۲a$. اکنون توجه کنید که

$$\text{محیط مثلث } PFF'=(PF+PF')+FF'\Rightarrow ۲۴=۲a+۱۰\Rightarrow a=۷$$

در نتیجه، خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۵}{۷}$.

۱۲۸۱- گزینهٔ ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$۲a=KF+KF'=۱۳+۷=۲۰\Rightarrow a=۱۰$$

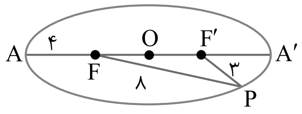
از طرف دیگر، فاصلهٔ هر یک از دو سر قطر کوچک بیضی تا کانون‌های بیضی برابر a است، پس $BF'=۱۰$.

۱۲۸۲- گزینهٔ ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$۲a=PF+PF'=۸+۳=۱۱$$

از طرف دیگر $AA'=۲a$ و $A'F'=AF=۴$، پس

$$FF'=AA'-AF-A'F'=۱۱-۴-۴=۳$$



۱۲۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $۲a=AA'=۱۰$، پس $a=۵$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$PF+PF'=۲a\Rightarrow ۴+PF'=۱۰\Rightarrow PF'=۶$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ PFF'

$$PF^۲+FF'^۲=PF'^۲\Rightarrow ۱۶+FF'^۲=۳۶\Rightarrow FF'=۲\sqrt{۵}$$

۱۲۸۴- گزینهٔ ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین $۲a=PF+PF'=۱۱+۵=۱۶$، پس $a=۸$.

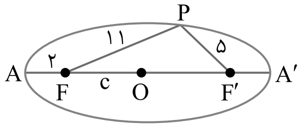
اگر O مرکز بیضی باشد، آن‌گاه

$$AO=AF+FO\Rightarrow a=۲+c\Rightarrow ۸=۲+c\Rightarrow c=۶$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۶۴=b^۲+۳۶\Rightarrow b=۲\sqrt{۷}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $۲b=۴\sqrt{۷}$.



۱۲۸۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $BF=BF'=a$ ، پس $۲a=۲۰$ ، یعنی $a=۱۰$. از طرف دیگر، $c=OF'=OA'-F'A'=۱۰-۴=۶$. اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۱۰۰=b^۲+۳۶\Rightarrow b=۸$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b=۱۶$.

۱۲۸۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲a=AA'=۸\Rightarrow a=۴\ ,\quad ۲b=BB'=۶\Rightarrow b=۳$$

از طرف دیگر،

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۴^۲=۳^۲+c^۲\Rightarrow c=\sqrt{۷}$$

بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOF' ، $\cos\alpha=\frac{OF'}{BF'}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$.

۱۲۸۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. همچنین، $FF'=۲c$. بنابراین

$$\text{محیط مثلث } PFF'=(PF+PF')+FF'=۲a+۲c$$

$$۱۸=۲(a+c)\Rightarrow a+c=۹$$

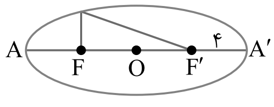
از طرف دیگر، اگر O مرکز بیضی باشد، آن‌گاه

$$A'O=A'F'+F'O\Rightarrow a=۴+c\Rightarrow a-c=۴$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=(a-c)(a+c)=۳۶\Rightarrow b=۶$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $۲b=۱۲$.



راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن b، از رابطهٔ $AF'=a+c$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$۲a=AA'=AF'+F'A'\Rightarrow ۲a=۹+۴=۱۳$$

$$a=\frac{۱۳}{۲}\xrightarrow{a+c=۹}c=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین $b=\sqrt{(\frac{۱۳}{۲})^۲-(\frac{۵}{۲})^۲}=۶$ ، پس $۲b=۱۲$.

۱۲۸۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** بنابر فرض مسئله $\frac{۲a}{۲b}=\frac{۱۳}{۱۲}$ ، پس $\frac{a}{b}=\frac{۱۳}{۱۲}$ ، یعنی $b=\frac{۱۲}{۱۳}a$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲=(\frac{۱۲}{۱۳}a)^۲+c^۲\Rightarrow a^۲-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}a^۲=c^۲$$

$$\frac{۲۵}{۱۶۹}a^۲=c^۲\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۱۳}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $e=\frac{c}{a}=\sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲}$ و چون $\frac{۲a}{۲b}=\frac{۱۳}{۱۲}$ ، پس $\frac{b}{a}=\frac{۱۲}{۱۳}$ ، بنابراین

$$e=\sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲}=\sqrt{۱-(\frac{۱۲}{۱۳})^۲}=\sqrt{\frac{۱۶۹-۱۴۴}{۱۶۹}}=\frac{۵}{۱۳}$$

۱۲۸۹- گزینهٔ ۴ نقطه‌های A و B به ترتیب محل برخورد خط $۲x-۳y+۶=۰$ با محور x و محور y هستند. بنابراین A نقطهٔ $(-۳,۰)$ و B نقطهٔ $(۰,۲)$ است. بنابراین $a=OA=۳$ و $b=OB=۲$. در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۳^۲=۲^۲+c^۲\Rightarrow c=\sqrt{۵}$$

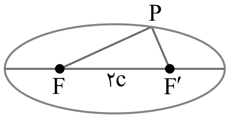
بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$.

۱۲۹۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}$ ، پس $c=\frac{a}{۳}$ و $۲b=۸$ ، پس $b=۴$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲=۱۶+\frac{a^۲}{۹}\Rightarrow a=۳\sqrt{۲}$$

بنابراین $c=\frac{a}{۳}=\sqrt{۲}$. مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$\text{محیط مثلث } PFF'=PF+PF'+FF'=۲a+۲c=۸\sqrt{۲}$$



راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن a و c از $e=\sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۳}=\sqrt{۱-\frac{۱۶}{a^۲}}\Rightarrow\frac{۱}{۹}=۱-\frac{۱۶}{a^۲}\Rightarrow\frac{۸}{۹}=\frac{۱۶}{a^۲}\Rightarrow a=۳\sqrt{۲}$$

از طرفی $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}$ ، پس $c=\sqrt{۲}$.

۱۲۹۱- گزینهٔ ۲ معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ (α,β) و شعاعش r است به‌صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ است. بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر $(x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۵$ است.

۱۲۹۲- گزینهٔ ۳ اندازهٔ شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$. بنابراین $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲-۴(-۳)}=\frac{۵}{۲}$.

۱۲۹۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(۲x-۱)^۲+(۲y+۳)^۲=k+۱\Rightarrow ۴(x-\frac{۱}{۲})^۲+۴(y+\frac{۳}{۲})^۲=k+۱$$

$$(x-\frac{۱}{۲})^۲+(y+\frac{۳}{۲})^۲=\frac{k+۱}{۴}$$

بنابراین شعاع دایره برابر $\sqrt{\frac{k+۱}{۴}}$ است. پس

$$\sqrt{\frac{k+۱}{۴}}=۵\Rightarrow\frac{k+۱}{۴}=۲۵\Rightarrow k+۱=۱۰۰\Rightarrow k=۹۹$$

۱۲۹۴- گزینهٔ ۴ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر فاصلهٔ نقطه‌های $(-۱,۳)$ و $(۲,۵)$ است، پس $r=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۵-۳)^۲}=\sqrt{۱۳}$. به این ترتیب، چون مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-۱,۳)$ است، معادله‌اش به‌صورت زیر است:

$$(x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۱۳\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۶y-۳=۰$$

۱۲۹۵- گزینهٔ ۳ برای اینکه $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره باشد باید $a^۲+b^۲-۴c>۰$ ، در نتیجه باید $k^۲+۲^۲>۴\times۳$ ، بنابراین $k^۲>۸$ و در نتیجه $|k|>۲\sqrt{۲}$.

۱۲۹۶- گزینهٔ ۳ مختصات نقاط داده شده را در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم:

$$A(۲,-۲):\ ۴+۴-۸-۱۲=-۱۲<۰,\quad B(۴,۰):\ ۱۶+۰-۱۶+۰=۰$$

$$C(۳,۱):\ ۹+۱-۱۲+۶=۴>۰,\quad D(۱,-۲):\ ۱+۴-۴-۱۲=-۱۱<۰$$

بنابراین A و D درون دایره، B روی دایره و C بیرون دایره است.

۱۲۹۷- گزینهٔ ۲ شعاع دایره برابر فاصلهٔ نقطهٔ $O(۱,-۲)$ از نقطهٔ $A(۳,-۲)$ است، در نتیجه $r=OA=\sqrt{(۳-۱)^۲+(-۲+۲)^۲}=۲$. پس معادلهٔ دایره به‌صورت $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۴$ است. مختصات نقاط مشترک این دایره با محورهای مختصات به صورت زیر به دست می‌آیند:

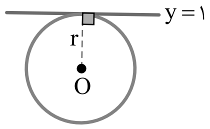
$$x=۰\Rightarrow ۱+(y+۲)^۲=۴\Rightarrow (y+۲)^۲=۳\Rightarrow y=-۲\pm\sqrt{۳}$$

$$y=۰\Rightarrow (x-۱)^۲+۴=۴\Rightarrow (x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱$$

سه نقطهٔ مشترک عبارت‌اند از:

$$(۰,-۲+\sqrt{۳}),\quad (۰,-۲-\sqrt{۳}),\quad (۱,۰)$$

۱۲۹۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $O(-\frac{۴}{۲},-\frac{۲}{۲})$، یعنی $O(-۲,-۱)$ است. اگر دایره بر خطی مماس باشد، شعاعش برابر با فاصلهٔ مرکز دایره از این خط است. فاصلهٔ نقطهٔ $(-۲,-۱)$ از خط $y-۱=۰$ برابر $\frac{|-۱-۱|}{۱}=۲$ است. شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲+۲^۲-۴k}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰-۴k}$. در نتیجه



$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰-۴k}=۲\Rightarrow \sqrt{۲۰-۴k}=۴\Rightarrow k=۱$$

راه‌حل دوم چون خط $y=۱$ بر دایره مماس است، اگر در معادلهٔ دایره قرار دهیم $y=۱$، باید معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس

$$۳+k=۴\Rightarrow k=۱$$

۱۲۹۹- گزینهٔ ۴ مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۱,۲)$ است. بنابراین شیب خطی که از مرکز و نقطهٔ $(۳,۵)$ می‌گذرد (یعنی خطی که شعاع نظیر نقطهٔ $(۳,۵)$ روی آن قرار دارد) برابر است با $\frac{۵-۲}{۳-۱}=\frac{۳}{۲}$. چون خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است، پس اگر شیب خط مماس m باشد،

$$m\times\frac{۳}{۲}=-۱\Rightarrow m=-\frac{۲}{۳}$$

بنابراین خط مماس خطی است که شیب آن $-\frac{۲}{۳}$ است، از نقطهٔ $(۳,۵)$ می‌گذرد و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-۵=-\frac{۲}{۳}(x-۳)\Rightarrow ۲x+۳y=۲۱$$

۱۳۰۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴y=۵$ مرکز نقطهٔ $O(۰,-\frac{۴}{۲})$، یعنی $O(۰,-۲)$ و شعاع برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+۴^۲-۴(-۵)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۲۰}=۳$$

همچنین در دایرهٔ $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۹$ مرکز نقطهٔ $O'(۲,-۱)$ و شعاع برابر $r'=۳$ است. بنابراین $OO'=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۱+۲)^۲}=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}$، $r+r'=۳+۳=۶$ و $r-r'=۰$. پس $r-r'<OO'<r+r'$ و در نتیجه دو دایره متقاطع‌اند.

۱۳۰۱- گزینهٔ ۱ معادلهٔ دایرهٔ موردنظر به‌صورت $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۲^۲$ است که به‌صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$x^۲-۴x+۴+y^۲-۲y+۱=۴\Rightarrow x^۲+y^۲-۴x-۲y+۱=۰$$

۱۳۰۲- گزینهٔ ۱ ابتدا دو طرف معادلهٔ دایره را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا به‌صورت $x^۲+y^۲+۲x-۳y-\frac{۳}{۴}=۰$ نوشته شود. بنابراین مرکز این دایره نقطهٔ $(-\frac{۲}{۲},-\frac{-۳}{۲})$ یعنی $(-۱,\frac{۳}{۲})$ است و شعاعش برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲-۴(-\frac{۳}{۴})}=۲$$

۱۳۰۳- گزینهٔ ۴ مرکز دایره نقطهٔ $(-\frac{a}{۲},-b)$ است. بنابراین

$$-\frac{a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۴,\quad -b=-۴\Rightarrow b=۴$$

پس معادلهٔ دایره به‌صورت $x^۲+y^۲-۴x+۸y=۵$ است و شعاع آن برابر است با $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+۸^۲-۴(-۵)}=۵$.

۱۳۰۴- گزینهٔ ۴ در معادلهٔ دایره جملهٔ شامل xy وجود ندارد. بنابراین ضریب xy باید صفر باشد، پس $a+b=۰$. از طرف دیگر، در معادلهٔ دایره ضریب جمله‌های شامل $x^۲$ و $y^۲$ برابر ۱ است. اگر طرفین معادلهٔ داده شده را بر ۶ تقسیم کنیم، معادلهٔ $x^۲+\frac{۲a-b}{۶}y^۲+\frac{۲}{۳}x-\frac{۵}{۶}=۰$ به‌دست می‌آید. بنابراین $\frac{۲a-b}{۶}=۱$، یعنی $۲a-b=۶$. اکنون توجه کنید که

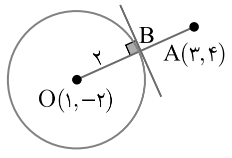
$$\begin{cases}a+b=۰\\ ۲a-b=۶\end{cases}\Rightarrow a=۲, b=-۲\Rightarrow a-b=۴$$

۱۳۰۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر معادلهٔ $x^۲+y^۲+۴x-۲y+a=۰$ مربوط به یک دایره باشد، باید $۴a<(-۲)^۲+۴^۲$، پس $a<۵$. اکنون اگر مختصات نقطهٔ $A(-۱,۲)$ را در عبارت سمت چپ معادلهٔ دایره قرار دهیم، باید حاصل، عددی مثبت شود:

$$x^۲+y^۲+۴x-۲y+a>۰\xrightarrow{x=-۱,\ y=۲}۱+۴-۴-۴+a>۰\Rightarrow a>۳$$

بنابراین $۳<a<۵$.

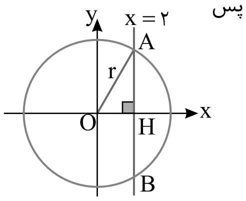
۱۳۰۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که نقطهٔ A بیرون دایره قرار دارد. مطابق شکل، کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایره مربوط به پاره‌خط AB است. بنابراین



$$OA=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۴+۲)^۲}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}\xrightarrow{OB=r=۲}AB=۲\sqrt{۱۰}-۲$$

۱۳۰۷- گزینهٔ ۳ با نمادگذاری شکل زیر $AB=۴\sqrt{۳}$، پس $AH=۲\sqrt{۳}$ و در نتیجه $r=\sqrt{OH^۲+AH^۲}=\sqrt{۲^۲+(۲\sqrt{۳})^۲}=۴$. از طرف دیگر شعاع دایره برابر $\sqrt{۳k+۱}$ است. پس

$$r=\sqrt{۳k+۱}=۴\Rightarrow k=۵$$

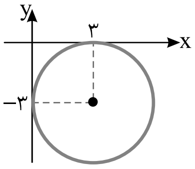


۱۳۰۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{۴}{۲},-\frac{۲}{۲})$، یعنی $(-۲,-۱)$ است. اگر دایره بر خطی مماس باشد، شعاعش برابر با فاصلهٔ مرکز دایره از این خط است. فاصلهٔ نقطهٔ $(-۲,-۱)$ از خط $x=-۴$ برابر ۲ است و شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲+۲^۲-۴k}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰-۴k}$.

در نتیجه

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰-۴k}=۲\Rightarrow\sqrt{۲۰-۴k}=۴\Rightarrow k=۱$$

راه‌حل دوم اگر در معادلهٔ دایره قرار دهیم $x=-۴$، معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس معادلهٔ $y^۲+۲y+k=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد. در نتیجه $k=۱$.



۱۳۰۹- گزینهٔ ۱ از روی شکل روبه‌رو معلوم است که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۳,-۳)$ است.

۱۳۱۰- گزینهٔ ۳ اگر دو دایره مماس بیرونی باشند، طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر مجموع شعاع‌های آن‌هاست. مرکز دایره‌ها نقطه‌های $(۳,-۵)$ و $(-۲,۷)$ و شعاع آن‌ها ۷ و r است. بنابراین $۷+r=\sqrt{(۳+۲)^۲+(-۵-۷)^۲}=۱۳$. پس $r=۶$.

۱۳۱۱- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{-۶}{۲},-\frac{۲}{۲})$، یعنی نقطهٔ $(۳,-۱)$ است. قطر مورد نظر از مبدأ می‌گذرد، پس معادله‌اش به صورت $y=mx$ است و چون مرکز دایره، یعنی نقطهٔ $(۳,-۱)$ روی این قطر است، پس $-۱=m(۳)$، یعنی $m=-\frac{۱}{۳}$. بنابراین معادلهٔ این قطر به صورت $y=-\frac{۱}{۳}x$، یعنی $۳y+x=۰$ است.

۱۳۱۲- گزینهٔ ۴ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+(۲a)^۲-۴(-۹)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵a^۲+۳۶}$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۵a^۲+۳۶}=\frac{۹}{۲}\Rightarrow\sqrt{۵a^۲+۳۶}=۹\Rightarrow ۵a^۲+۳۶=۸۱\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=۳$$

بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت $x^۲+y^۲+۳x+۶y-۹=۰$ است که مرکز آن نقطهٔ $(-\frac{۳}{۲},-\frac{۶}{۲})$، یعنی نقطهٔ $(-\frac{۳}{۲},-۳)$ است.

۱۳۱۳- گزینهٔ ۳ در معادلهٔ گستردهٔ دایره باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر باشند. پس

$$a=۲a+۱\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$-x^۲-y^۲-x+y=-۱\Rightarrow x^۲+y^۲+x-y-۱=۰$$

پس شعاع دایرهٔ برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲-۴(-۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۱+۴}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۱۳۱۴- گزینهٔ ۴ مرکز دایره وسط پاره‌خط بین دو سر قطر است. مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{-۸}{۲},-\frac{-۴}{۲})$، یعنی $(۴,۲)$ است. اگر سر دیگر قطر مورد نظر نقطهٔ (x,y) باشد، وسط این قطر نقطهٔ $(\frac{x-۳}{۲},\frac{y+۲}{۲})$ است. بنابراین

$$(\frac{x-۳}{۲},\frac{y+۲}{۲})=(۴,۲)\Rightarrow\frac{x-۳}{۲}=۴,\quad\frac{y+۲}{۲}=۲$$

بنابراین $x=۱۱$ و $y=۲$. پس نقطهٔ مورد نظر $(۱۱,۲)$ است.

۱۳۱۵- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. چون مختصات نقطه‌های داده شده در این معادله صدق می‌کنند، پس $۹+۳b+c=۰$، $۴۹+۷b+c=۰$ و $۱-a+c=۰$. از معادله‌های اول و دوم $b=-۱۰$ و $c=۲۱$ به دست می‌آید. بنابراین از معادلهٔ سوم $a=۲۲$ به دست می‌آید. اکنون توجه کنید که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ یعنی نقطهٔ $(-۱۱,۵)$ است.

۱۳۱۶- گزینهٔ ۳ اگر مختصات نقطهٔ A را در عبارت سمت چپ معادلهٔ دایره قرار دهیم، باید حاصل مقداری منفی شود:

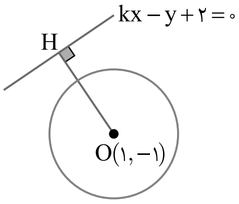
$$x^۲+y^۲+ax+y-۱<۰\xrightarrow{x=۲,y=-۱}۴+۱+۲a-۱-۱<۰$$

$$۲a<-۳\Rightarrow a<-\frac{۳}{۲}$$

۱۳۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که نقطهٔ $(۱,-۱)$ مرکز دایره است و شعاع دایره برابر ۳ است. چون دایره و خط متقاطع نیستند، پس یا خط بر دایره مماس است یا خارج آن قرار دارد. بنابراین فاصلهٔ مرکز دایره از خط کمتر از شعاع دایره نیست. مطابق شکل زیر $OH=\frac{|k+۱+۲|}{\sqrt{k^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|k+۳|}{\sqrt{k^۲+۱}}\geq۳$. بنابراین

$$(k+۳)^۲\geq۹(k^۲+۱)\Rightarrow k^۲+۶k+۹-۹k^۲-۹\geq۰$$

$$-۸k^۲+۶k\geq۰\Rightarrow k(۴k-۳)\leq۰\Rightarrow۰\leq k\leq\frac{۳}{۴}$$

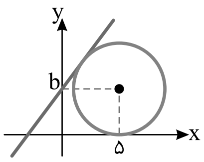


۱۳۱۸- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۵,b)$ باشد. در این صورت از روی شکل زیر معلوم است که شعاع این دایره برابر b است. از طرف دیگر، فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس $۴x-۳y+۱۲=۰$ برابر شعاع دایره است. پس

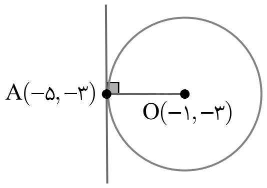
$$\frac{|۴\times۵-۳b+۱۲|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=b\Rightarrow|۳۲-۳b|=۵b$$

$$۳۲-۳b=۵b\Rightarrow b=۴,\quad ۳۲-۳b=-۵b\Rightarrow b=-۱۶\text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۵,۴)$ و شعاع آن هم ۴ است، پس معادله‌اش $(x-۵)^۲+(y-۴)^۲=۱۶$ است.



۱۳۱۹- گزینهٔ ۱ نقطهٔ $O(-\frac{۲}{۲},-\frac{۶}{۲})$، یعنی $O(-۱,-۳)$ مرکز دایره است. مطابق شکل زیر شیب OA برابر است با $\frac{-۳+۳}{-۵+۱}=۰$. بنابراین شیب خط مماس بر دایره که عمود بر خط OA است، تعریف نمی‌شود و این خط موازی محور y است و معادلهٔ آن به‌صورت $x=-۵$ است. پس $a=۱$ و $b=۰$ و در نتیجه $a+b=۱$.



۱۳۲۰- گزینهٔ ۱ اگر دو دایره مماس درونی باشند، طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر قدرمطلق تفاضل شعاع‌های آن‌هاست. مراکز دایره‌ها نقطه‌های $(۱,۲)$ و $(-۲,۶)$ و شعاع‌های آن‌ها ۶ و r است. بنابراین $|۶-r|=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۲-۶)^۲}=۵$، پس

$$\begin{cases} ۶-r=-۵\Rightarrow r=۱۱ \\ ۶-r=۵\Rightarrow r=۱ \end{cases}$$

۱۳۲۱- گزینهٔ ۳ مرکز دایرهٔ داده شده نقطهٔ $(-\frac{۲}{۲},-\frac{-۶}{۲})$، یعنی $(-۱,۳)$ است. شعاع این دایره هم برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۶)^۲-۴(-۶)}=۴$.

بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-۱,۳)$ و شعاعش برابر ۲ است. در نتیجه معادله‌اش به‌صورت $(x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۴$ است.

۱۳۲۲- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ داده شده، یعنی نقطهٔ $(-۱,۳)$ باید روی خط $۲x+by-۷=۰$ باشد. در نتیجه

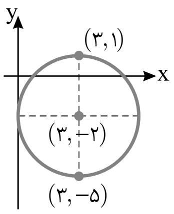
$$-۲+۳b-۷=۰\Rightarrow b=۳$$

۱۳۲۳- گزینهٔ ۴ محل برخورد دو خط داده‌شده، مرکز دایره است. بنابراین مختصات مرکز دایره جواب‌های دستگاه معادلات زیر هستند:

$$\begin{cases} x+y=۶ \\ x+۲y=۴ \end{cases}\Rightarrow x=۸, y=-۲$$

بنابراین شعاع دایره برابر با فاصلهٔ مرکز دایره، یعنی نقطهٔ $(۸,-۲)$ از نقطهٔ $(۶,۲)$ است. پس $\sqrt{۲۰}=\sqrt{(۸-۶)^۲+(-۲-۲)^۲}=$شعاع دایره.

۱۳۲۴- گزینهٔ ۳ نقطهٔ $(-\frac{-۶}{۲},-\frac{۴}{۲})$، یعنی $(۳,-۲)$ مرکز دایره است و اندازهٔ شعاع دایره برابر $\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+۴^۲-۴(۴)}=۳$ است. مطابق شکل زیر، بیشترین و کمترین مقدار عرض نقاط روی دایره مربوط به نقاط $(۳,۱)$ و $(۳,-۵)$ است. پس حاصل‌ضرب کمترین و بیشترین مقدار y برابر -۵ است.



۱۳۲۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر خط بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره، یعنی نقطهٔ $(۳,۴)$ از خط $mx-y=۰$ برابر شعاع دایره، یعنی $\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\frac{|۳m-۴|}{\sqrt{m^۲+۱}}=\sqrt{۵}\Rightarrow(۳m-۴)^۲=۵(m^۲+۱)$$

$$۹m^۲-۲۴m+۱۶=۵m^۲+۵$$

$$۴m^۲-۲۴m+۱۱=۰\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}\ , m=\frac{۱۱}{۲}$$

راه‌حل دوم برای اینکه خط $y=mx$ بر دایرهٔ $(x-۳)^۲+(y-۴)^۲=۵$ مماس باشد، باید معادلهٔ زیر ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

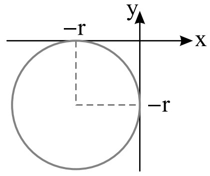
$$(x-۳)^۲+(mx-۴)^۲=۵\Rightarrow(۱+m^۲)x^۲-۲(۳+۴m)x+۲۰=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=۰}۴(۳+۴m)^۲-۸۰(۱+m^۲)=۰\Rightarrow۴m^۲-۲۴m+۱۱=۰$$

$$m=\frac{۱}{۲},\quad m=\frac{۱۱}{۲}$$

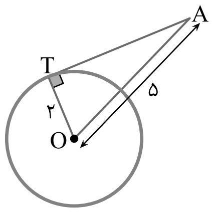
۱۳۲۶- گزینهٔ ۴ اگر شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر r باشد، از روی شکل زیر معلوم است که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-r,-r)$ است. چون $r=۳$، پس مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-۳,-۳)$ و معادله‌اش به صورت زیر است:

$$(x-(-۳))^۲+(y-(-۳))^۲=۹\Rightarrow x^۲+y^۲+۶x+۶y+۹=۰$$



۱۳۲۷- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ داده شده نقطهٔ $O(۱,-۲)$ و شعاعش برابر $r=۲$ است. از طرف دیگر $OA=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۲+۲)^۲}=۵$. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTA:

$$AT=\sqrt{OA^۲-r^۲}\Rightarrow AT=\sqrt{۲۵-۴}\Rightarrow AT=\sqrt{۲۱}$$

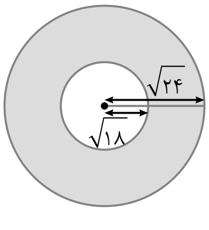


۱۳۲۸- گزینهٔ ۱ در معادلهٔ دایره y را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$x^۲+۰+۳x+۰-۴=۰\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۰\Rightarrow x=-۴, x=۱$$

بنابراین $AB=۱-(-۴)=۵$.

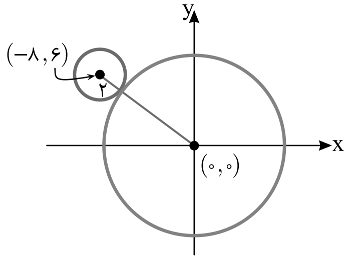
۱۳۲۹- گزینهٔ ۳ ناحیهٔ $x^۲+y^۲<۲۴$ ناحیهٔ درون دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۴$ و ناحیهٔ $x^۲+y^۲>۱۸$ ناحیهٔ بیرون دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱۸$ است. این دایره‌ها هم‌مرکزاند و شعاع آن‌ها $\sqrt{۲۴}$ و $\sqrt{۱۸}$ است. بنابراین مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با مساحت ناحیهٔ رنگی در شکل زیر $\pi(\sqrt{۲۴})^۲-\pi(\sqrt{۱۸})^۲=۶\pi$.



۱۳۳۰- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ $(x+۸)^۲+(y-۶)^۲=۴$ نقطهٔ $(-۸,۶)$ و شعاعش برابر ۲ است. اگر دایره‌ای با این دایره مماس بیرونی باشد، طول خط‌المرکزین این دایره‌ها برابر با مجموع شعاع‌های آن‌هاست. توجه کنید که

$$\text{طول خط‌المرکزین}=\sqrt{(۰-(-۸))^۲+(۰-۶)^۲}=۱۰$$

در نتیجه، اگر شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر r باشد، باید $r+۲=۱۰$، یعنی $r=۸$. معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ $(۰,۰)$ و شعاعش برابر ۸ است به‌صورت $x^۲+y^۲=۶۴$ است.



۱۳۳۱- گزینهٔ ۲ در معادلهٔ دایره، ضریب جمله‌های شامل $x^۲$ و $y^۲$ برابر ۱ است. بنابراین ابتدا دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $۳k-۲$ تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که $۳k-۲\neq ۰$):

$$x^۲+\frac{k+۲}{۳k-۲}y^۲+\frac{۴k}{۳k-۲}x-\frac{۸k}{۳k-۲}y-\frac{۱۶}{۳k-۲}=۰$$

بنابراین $\frac{k+۲}{۳k-۲}=۱$، پس $k=۲$ و معادلهٔ دایره می‌شود

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y-۴=۰$$

و شعاعش برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲-۴(-۴)}=۳$$

۱۳۳۲- گزینهٔ ۲ چون مرکز دایره روی خط $y=۲x$ و در ناحیهٔ اول است، پس به‌صورت $(k,۲k)$ است $(k>۰)$. چون دایرهٔ مورد نظر از مبدأ مختصات می‌گذرد و شعاعش $۲\sqrt{۵}$ است، پس فاصلهٔ مرکزش از مبدأ مختصات برابر $۲\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\sqrt{(k-۰)^۲+(۲k-۰)^۲}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow\sqrt{k^۲+۴k^۲}=۲\sqrt{۵}$$

$$|k|=۲\Rightarrow k=۲$$

بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۲,۴)$ و شعاعش $۲\sqrt{۵}$ است، در نتیجه معادله‌اش به‌صورت $(x-۲)^۲+(y-۴)^۲=۲۰$ است.

۱۳۳۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون مرکز دایره روی محور y است، پس مختصات آن به‌صورت $O(۰,\alpha)$ است. فرض کنید شعاع دایره r باشد. نقطه‌های $A(۰,-۱)$ و $B(۳,۰)$ روی دایره قرار دارند، پس $r=OA=OB$.

از طرف دیگر $OB=\sqrt{۹+\alpha^۲}$ و $OA=\sqrt{(\alpha+۱)^۲}$.

بنابراین

$$\alpha^۲+۲\alpha+۱=۹+\alpha^۲\Rightarrow\alpha=۴$$

و در نتیجه $r=OA=\sqrt{۵^۲}=۵$.

راه‌حل دوم اگر معادلهٔ گستردهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد، مرکزش نقطهٔ $(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ است که چون روی محور y است، پس $-\frac{a}{۲}=۰$، یعنی $a=۰$.

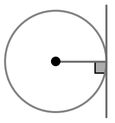
بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+y^۲+by+c=۰$ در می‌آید. چون نقطه‌های $(۰,-۱)$ و $(۳,۰)$ روی این دایره‌اند، پس مختصات آن‌ها در معادلهٔ این دایره صدق می‌کنند:

$$\begin{cases}(۳,۰):۹+c=۰\\(۰,-۱):۱-b+c=۰\end{cases}$$

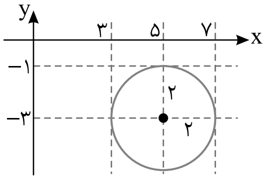
پس $c=-۹$ و $b=-۸$. بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+y^۲-۸y-۹=۰$ است و شعاعش برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+(-۸)^۲-۴(-۹)}=۵$$

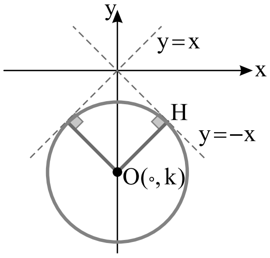
۱۳۳۴- گزینهٔ ۴ اگر خط بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است. مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۷,۲)$ و شعاع آن برابر r است. از طرف دیگر، فاصلهٔ نقطهٔ $(۷,۲)$ تا خط $۴x-۳y+۸=۰$ برابر است با $\frac{|۴\times۷-۳\times۲+۸|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۳۰}{۵}=۶$. بنابراین $r=۶$.



۱۳۳۵- گزینهٔ ۲ شعاع دایرهٔ مورد نظر نصف فاصلهٔ خط‌های $x=۳$ و $x=۷$ است. چون این فاصله برابر ۴ است، پس شعاع دایرهٔ مورد نظر ۲ است. به این ترتیب، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که طول مرکز دایره برابر ۵ و عرض آن برابر -۳ است، یعنی مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۵,-۳)$ است. بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت $(x-۵)^۲+(y+۳)^۲=۴$ است.



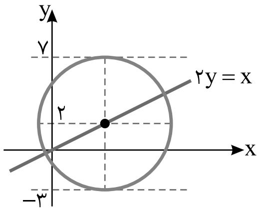
۱۳۳۶- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر مرکز دایره باید روی محور y باشد. اگر $O(۰,k)$ مرکز دایره باشد، آن‌گاه $r=OH=\frac{|۰+k|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{|k|}{\sqrt{۲}}=۲$. پس $|k|=۲\sqrt{۲}$ و چون k منفی است، $k=-۲\sqrt{۲}$.



۱۳۳۷- گزینهٔ ۲ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر فاصلهٔ نقطهٔ $(۳,۴)$ از خط $x+۲y+۴=۰$ است. بنابراین $r=\frac{|۳+۸+۴|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=۳\sqrt{۵}$. بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(x-۳)^۲+(y-۴)^۲=۴۵\Rightarrow x^۲+y^۲-۶x-۸y-۲۰=۰$$

۱۳۳۸- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم است که شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر با نصف فاصلهٔ خط‌های $y=-۳$ و $y=۷$ است. فاصلهٔ این خط‌ها برابر است با $۷-(-۳)=۱۰$، پس شعاع دایره برابر ۵ است. عرض مرکز دایره روی خطی موازی با خطوط $y=۷$ و $y=-۳$ است و از این دو خط به یک فاصله است، یعنی روی خط $y=\frac{۷-۳}{۲}=۲$ قرار دارد، در نتیجه طول مرکز دایره برابر است با $x=۲y=۴$، یعنی مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۴,۲)$ و شعاع آن برابر ۵ است. در نتیجه معادلهٔ آن به صورت $(x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۲۵$ است.



۱۳۳۹- گزینهٔ ۳ چون دایره‌ها متقاطع‌اند، طول خط‌المرکزین آن‌ها از مجموع شعاع‌های دایره‌ها کمتر و از قدرمطلق تفاضل شعاع‌ها بیشتر است:

$$|r-۲|<\sqrt{(۱-(-۳))^۲+(۰-r)^۲}<r+۲$$

$$|r-۲|<\sqrt{۱۶+r^۲}<r+۲$$

$$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به‌توان‌دو}}r^۲-۴r+۴<۱۶+r^۲<r^۲+۴r+۴\Rightarrow-۴r<۱۲<۴r$$

نابرابری سمت چپ همواره درست است و نابرابری سمت راست یعنی اینکه $r>۳$.

۱۳۴۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که مختصات نقاط A و B در معادلهٔ هر دو دایره صدق می‌کنند. پس مختصات این نقاط از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}x^۲+y^۲+۳x+۱=۰ & (۱)\\ x^۲+y^۲+۳y+۱=۰ & (۲)\end{cases}$$

اگر معادلهٔ (۲) را از معادلهٔ (۱) کم کنیم، به معادلهٔ $۳x-۳y=۰$ می‌رسیم. بنابراین نقاط A و B روی خط $y=x$ قرار دارند و باید نقاط تقاطع این خط و یکی از دایره‌ها را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases}y=x\\ x^۲+y^۲+۳x+۱=۰\end{cases}\Rightarrow x^۲+x^۲+۳x+۱=۰$$

$$۲x^۲+۳x+۱=۰\Rightarrow x=-۱,\ x=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ را به‌دست بیاوریم:

$$AB=\sqrt{(-۱+\frac{۱}{۲})^۲+(-۱+\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۳۴۱- گزینهٔ ۱ دو سر وتر مثلث مورد نظر نقطه‌های برخورد خط $x-۲y=۸$ با محورهای مختصات هستند. این نقطه‌ها $(۰,-۴)$ و $(۸,۰)$ هستند. وسط پاره‌خط میان این دو نقطه، نقطهٔ $(\frac{۰+۸}{۲},\frac{-۴+۰}{۲})$ یعنی $(۴,-۲)$ است. معادلهٔ خطی که از مبدأ و این نقطه می‌گذرد $y=-\frac{۱}{۲}x$ یا $x+۲y=۰$ است.

۱۳۴۲- گزینهٔ ۳ معادلهٔ خط را به‌صورت $x-ky+۱=۰$ می‌نویسیم. پس

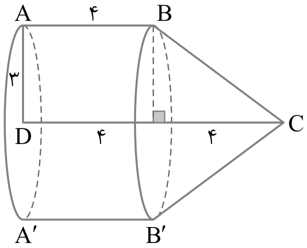
$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ A از خط}=\frac{|۳k-k(۱)+۱|}{\sqrt{۱^۲+(-k)^۲}}=۲\Rightarrow\frac{|۲k+۱|}{\sqrt{۱+k^۲}}=۲$$

$$|۲k+۱|=۲\sqrt{۱+k^۲}\Rightarrow۴k^۲+۴k+۱=۴+۴k^۲\Rightarrow k=\frac{۳}{۴}$$

۱۳۴۳- گزینهٔ ۱ حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر ۱− است. بنابراین شیب خطی که بر خط $۲y=-۳x$، یعنی $y=-\frac{۳}{۲}x$ عمود است، برابر $\frac{۲}{۳}$ است. معادلهٔ خطی که شیب آن $\frac{۲}{۳}$ است و از نقطهٔ $(۰,-۱)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y+۱=\frac{۲}{۳}(x-۰)\Rightarrow۳y-۲x+۳=۰$$

۱۳۴۴- گزینهٔ ۴ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۴ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۴ به آن اضافه شده است. بنابراین حجم جسم حاصل برابر است با



$$\pi\times۳^۲\times۴+\frac{\pi\times۳^۲\times۴}{۳}=۴۸\pi$$

۱۳۴۵- گزینهٔ ۳ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی تا کانون‌های بیضی برابر است با $۲a$. بنابراین $MF+MF'=۲a$ و $NF+NF'=۲a$. اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که محیط چهارضلعی $MFNF'$ برابر است با $۴a$. اکنون توجه کنید که $c=OF=۶$ و $۲b=BB'=۱۶$، بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲=۶۴+۳۶=۱۰۰\Rightarrow a=۱۰$$

پس محیط چهارضلعی $MFNF'$ برابر است با $۴a=۴۰$.

۱۳۴۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $۲c=FF'=۸$، پس $c=۴$. همچنین $\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳}$، پس $a=\frac{۳}{۲}c=۶$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۶^۲=b^۲+۴^۲\Rightarrow b=۲\sqrt{۵}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b=۴\sqrt{۵}$.

۱۳۴۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(۳x-۱)^۲+(۳y-۲)^۲=۴\Rightarrow۹(x-\frac{۱}{۳})^۲+۹(y-\frac{۲}{۳})^۲=۴$$

$$(x-\frac{۱}{۳})^۲+(y-\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}$$

بنابراین شعاع این دایره برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۱۳۴۸- گزینهٔ ۲ مرکز دایرهٔ داده شده نقطهٔ $(-\frac{-۶}{۲},-\frac{۱۰}{۲})$، یعنی $(۳,-۵)$ است. بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر هم $(۳,-۵)$ است. شعاع این دایره برابر فاصلهٔ نقطه‌های $(۳,-۵)$ و $(۸,۷)$ است که می‌شود

$$\sqrt{(۸-۳)^۲+(۷+۵)^۲}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

۱۳۴۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که در دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۶y+۵=۰$ نقطهٔ $O(۱,۳)$ مرکز دایره است و شعاع آن برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۳۶-۴(۵)}=\sqrt{۵}$$

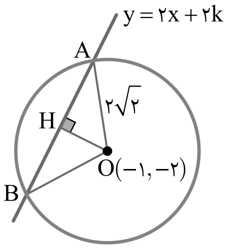
در دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۶y-۱۵=۰$ نقطهٔ $O'(-۱,۳)$ مرکز دایره است و شعاع آن برابر است با $r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۳۶-۴(-۱۵)}=۵$. بنابراین

$$r'-r=۵-\sqrt{۵},\quad OO'=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۳-۳)^۲}=۲$$

پس $OO'<r'-r$ و در نتیجه دو دایره متداخل‌اند.

۱۳۵۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که نقطهٔ $O(-۱,-۲)$ مرکز دایره و شعاع دایره برابر $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۱۲}=۲\sqrt{۲}$ است. با توجه به شکل زیر

$$AH=\frac{AB}{۲}=۲\Rightarrow OH=\sqrt{OA^۲-AH^۲}=\sqrt{۸-۴}=۲$$



از طرف دیگر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $۲x-y+۲k=۰$ برابر است با

$$OH=\frac{|-۲+۲+۲k|}{\sqrt{۴+۱}}$$

بنابراین

$$\frac{|۲k|}{\sqrt{۵}}=۲\Rightarrow|k|=\sqrt{۵}\Rightarrow k=\pm\sqrt{۵}$$

۱۳۵۱- گزینهٔ ۳ معادلهٔ خط دوم را به شکل $۲x-۲y+۲=۰$ می‌نویسیم. طول ضلع مربع برابر فاصلهٔ دو خط موازی $۲x-۲y-۳=۰$ و $۲x-۲y+۲=۰$ است. در نتیجه

$$\text{طول ضلع مربع}=\frac{|-۳-۲|}{\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۸}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $\frac{۲۵}{۸}=(\frac{۵}{\sqrt{۸}})^۲$.

تجربی - ۹۲

۱۳۵۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید فاصلهٔ نقطه $A(a,a-۱)$ که روی خط $y=x-۱$ قرار دارد از خط $۲x-۳y-۵=۰$ برابر $\sqrt{۱۳}$ باشد. در این صورت

$$\frac{|۲a-۳(a-۱)-۵|}{\sqrt{۴+۹}}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow|-a-۲|=۱۳\Rightarrow\begin{cases}a+۲=۱۳\\a+۲=-۱۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱۱\\a=-۱۵\end{cases}$$

تجربی - ۸۹

۱۳۵۳- گزینهٔ ۲ فرض کنید معادلهٔ دایره به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. نقاط $A(۰,۰)$، $B(۲,۱)$ و $C(-۲,۴)$ روی دایره قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

$$A:\ ۰+۰+۰+۰+c=۰\Rightarrow c=۰$$

$$B:\ ۴+۱+۲a+b+c=۰\Rightarrow ۲a+b=-۵$$

$$C:\ ۴+۱۶-۲a+۴b+c=۰\Rightarrow -۲a+۴b=-۲۰$$

پس $a=۰$ و $b=-۵$. در نتیجه شعاع دایره برابر است با

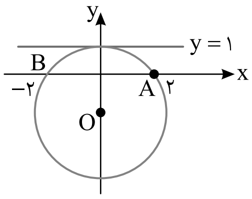
$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰+۲۵-۰}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

تجربی - ۹۱

۱۳۵۴- گزینهٔ ۳ با توجه به تقارن شکل، مرکز دایره روی محور y است. پس $O(۰,\beta)$ را مرکز دایره فرض می‌کنیم. توجه کنید که

فاصلهٔ O تا خط مماس = فاصلهٔ OA

از طرف دیگر فاصلهٔ نقطهٔ مرکز تا خط مماس $|۱-\beta|$ است و فاصلهٔ نقطهٔ مرکز تا نقطهٔ A برابر $\sqrt{(۰-۲)^۲+\beta^۲}$ است، پس



$$\sqrt{(۰-۲)^۲+(\beta)^۲}=|۱-\beta|$$

$$۴+\beta^۲=۱-۲\beta+\beta^۲\Rightarrow\beta=\frac{-۳}{۲}$$

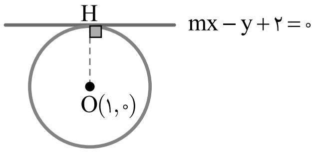
بنابراین $R=|۱-\beta|=|۱-(-\frac{۳}{۲})|=\frac{۵}{۲}$.

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۱۳۵۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ نقطهٔ $O(۱,۰)$ و شعاع آن برابر $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰-۴(-۳)}=۲$ است. اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است:

$$OH=\frac{|m\times۱-۰+۲|}{\sqrt{m^۲+۱}}=۲\Rightarrow\frac{|m+۲|}{\sqrt{m^۲+۱}}=۲\Rightarrow\frac{(m+۲)^۲}{m^۲+۱}=۴$$

$$m^۲+۴m+۴=۴m^۲+۴\Rightarrow ۳m^۲-۴m=۰\Rightarrow m=۰ \text{ یا } m=\frac{۴}{۳}$$



راه‌حل دوم ابتدا در معادلهٔ دایره به جای y قرار می‌دهیم $mx+۲$:

$$\begin{cases}x^۲+y^۲-۲x=۳\\y=mx+۲\end{cases}\Rightarrow x^۲+(mx+۲)^۲-۲x=۳$$

$$x^۲+m^۲x^۲+۴mx+۴-۲x-۳=۰\Rightarrow(m^۲+۱)x^۲+(۴m-۲)x+۱=۰$$

معادلهٔ به‌دست آمده باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=(۴m-۲)^۲-۴(m^۲+۱)(۱)=۱۶m^۲-۱۶m+۴-۴m^۲-۴$$

$$=۱۲m^۲-۱۶m=۰\Rightarrow ۳m^۲-۴m=۰\Rightarrow m=۰ \text{ یا } m=\frac{۴}{۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۳۵۶- گزینهٔ ۱ فاصلهٔ خطهای $y=x$ و $y=x+۴$ برابر است با $\frac{|۴-۰|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=۲\sqrt{۲}$ شعاع دایرهٔ مورد نظر نصف این فاصله است، یعنی برابر $\sqrt{۲}$ است. اگر مرکز دایره نقطهٔ $(-۱,y)$ باشد، فاصله‌اش از خط $y=x$ برابر $\sqrt{۲}$ است. پس $\frac{|y+۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow|y+۱|=۲\Rightarrow y=۱, y=-۳$

اگر $y=-۳$، آن‌گاه نقطهٔ $(-۱,-۳)$ بین دو خط $y=x$ و $y=x+۴$ نیست. پس $y=-۳$ قابل قبول نیست. بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $(-۱,۱)$ و شعاع آن $\sqrt{۲}$ است. پس معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$$

ریاضی - ۸۹

۱۳۵۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ نقطهٔ $O(۱,-۲)$ است و شعاع آن برابر است با $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۴}=۲$. فرض کنید شعاع دایرهٔ دیگر r' و مرکز آن $O'(-۲,۲)$ باشد. چون دو دایره بر هم مماس بیرونی هستند، پس $OO'=r+r'$. از طرف دیگر،

$$OO'=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

بنابراین

$$r+r'=۵\Rightarrow ۲+r'=۵\Rightarrow r'=۳$$

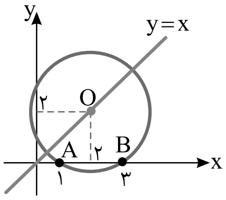
خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۵۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مرکز دایره روی نیمساز ربع اول است، پس مختصات آن به‌صورت $O(\alpha,\alpha)$ است. فاصلهٔ مرکز دایره از دو نقطهٔ $A(۱,۰)$ و $B(۳,۰)$ برابر هم و برابر شعاع دایره است، پس $OA=OB$، در نتیجه

$$\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(\alpha-۰)^۲}=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(\alpha-۰)^۲}$$

$$۲\alpha^۲-۶\alpha+۹=۲\alpha^۲-۲\alpha+۱\Rightarrow ۴\alpha=۸\Rightarrow \alpha=۲$$

بنابراین $r=OA=\sqrt{(۲-۱)^۲+۲^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$.



راه‌حل دوم مرکز دایره روی عمودمنصف وترهای دایره است، پس طول مرکز دایره برابر $\frac{۱+۳}{۲}=۲$ و در نتیجه عرض آن نیز برابر ۲ است و شعاع دایره برابر $OA=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۳۵۹- گزینهٔ ۳ چون خط‌های $y=۲x$ و $y=۲x+۱۰$ موازی‌اند، پس فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\frac{|۰-۱۰|}{\sqrt{۱+(-۲)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$. بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $\sqrt{۵}$. مرکز دایره روی خطی موازی دو خط داده شده است که فاصله‌اش از این خط‌ها برابر است. معادلهٔ این خط $y=۲x+\frac{۱۰}{۲}=۲x+۵$ است.

فرض کنید مرکز دایره $O(\alpha,۲\alpha+۵)$ باشد. چون دایره از مبدأ می‌گذرد، پس فاصلهٔ مرکز دایره تا مبدأ برابر شعاع دایره است:

$$\sqrt{\alpha^۲+(۲\alpha+۵)^۲}=\sqrt{۵}\Rightarrow \alpha^۲+(۲\alpha+۵)^۲=۵\Rightarrow ۵\alpha^۲+۲۰\alpha+۲۰=۰$$

$$\alpha^۲+۴\alpha+۴=۰\Rightarrow \alpha=-۲$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $(-۲,۱)$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۳۶۰- گزینهٔ ۱ شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۶y-۸=۰$ برابر است با $r_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۳۶+۳۲}=۳\sqrt{۲}$ و مرکز این دایره نقطهٔ $O_۱(۱,-۳)$ است.

شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲+۸x-۴y+۱۲=۰$ برابر است با

$$r_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴+۱۶-۴۸}=۲\sqrt{۲}$$

و مرکز این دایره نقطهٔ $O_۲(-۴,۲)$ است.

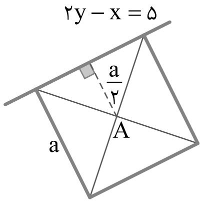
پس

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۱+۴)^۲+(-۳-۲)^۲}=۵\sqrt{۲}\ ,\ \ r_۱+r_۲=۳\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

بنابراین دو دایره مماس برون هستند.

تجربی - ۸۷

۱۳۶۱- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط $۲y-x-۵=۰$ برابر نصف طول ضلع مربع است:



$$\frac{a}{۲}=\frac{|۲(-۱)-۳-۵|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}\Rightarrow a=\frac{۲۰}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با

$$S=a^۲=۸۰$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۶۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** برای محاسبهٔ مساحت مثلث داده شده طول ضلع AB را به‌دست آورده سپس فاصلهٔ نقطهٔ C تا خط AB را محاسبه می‌کنیم. پس

$$AB=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۰-۵)^۲}=\sqrt{۲۶}\ ,\quad m_{AB}=\frac{۰-۵}{۳-۲}=-۵$$

$$y-y_A=m_{AB}(x-x_A)$$

$$y-۵=-۵(x-۲)\Rightarrow ۵x+y-۱۵=۰$$

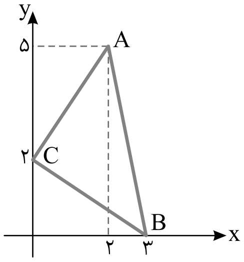
$$AB \text{ فاصلهٔ نقطهٔ } C \text{ تا خط } =\frac{|۵\times۰+۲-۱۵|}{\sqrt{۵^۲+۱^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۲۶}}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{\sqrt{۲۶}\times\frac{۱۳}{\sqrt{۲۶}}}{۲}=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$.

راه‌حل دوم ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به‌دست می‌آوریم

$$AB=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۰-۵)^۲}=\sqrt{۲۶}\ ,\ AC=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۱۳}$$

$$BC=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۱۳}$$



واضح است که تساوی

$$AC^۲+BC^۲=AB^۲$$

بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}AC\times BC=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۱۳۶۳- گزینهٔ ۱ فرض کنید معادلهٔ دایره به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. نقاط $A(۰,۰)$، $B(۲,۱)$ و $C(۱,-۲)$ روی دایره قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

$$A: ۰+۰+۰+۰+c=۰\Rightarrow c=۰$$

$$B: ۴+۱+۲a+b+c=۰\Rightarrow ۲a+b=-۵$$

$$C: ۱+۴+a-۲b+c=۰\Rightarrow a-۲b=-۵$$

از حل دستگاه معادلات فوق نتیجه می‌شود $a=-۳$، $b=۱$ و $c=۰$. بنابراین شعاع دایره برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۹+۱-۰}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

تجربی - ۹۳

۱۳۶۴- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم مرکز دایره $O(\alpha,\beta)$ باشد. مختصات نقطهٔ O در خط $x-y=۲$ صدق می‌کنند، پس مرکز دایره نقطهٔ $O(\alpha,\alpha-۲)$ است. همچنین، O از نقاط $A(۰,۱)$ و $B(۳,۰)$ به یک فاصله است:

$$OA=OB\Rightarrow\sqrt{\alpha^۲+(\alpha-۳)^۲}=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(\alpha-۲)^۲}$$

$$\alpha^۲+\alpha^۲+۹-۶\alpha=\alpha^۲+۹-۶\alpha+\alpha^۲+۴-۴\alpha$$

$$\alpha=۱\Rightarrow O(۱,-۱)\Rightarrow R=OA=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۰

۱۳۶۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول $y=x$ است. پس مرکز دایره به‌صورت (α,α) است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ $A(۶,۳)$ و خط $۲x-y=۰$ یکسان است:

$$\sqrt{(\alpha-۶)^۲+(\alpha-۳)^۲}=\frac{|۲\alpha-\alpha|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}$$

$$\alpha^۲+۳۶-۱۲\alpha+\alpha^۲+۹-۶\alpha=\frac{\alpha^۲}{۵}$$

$$۲\alpha^۲-۱۸\alpha+۴۵=\frac{\alpha^۲}{۵}\Rightarrow ۹\alpha^۲-۱۸\times۵\alpha+۴۵\times۵=۰$$

$$\alpha^۲-۱۰\alpha+۲۵=۰\Rightarrow(\alpha-۵)^۲=۰\Rightarrow\alpha=۵$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O(۵,۵)$ است و شعاع دایره برابر است با

$$r=OA=\sqrt{(۵-۶)^۲+(۵-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

ریاضی - ۹۲

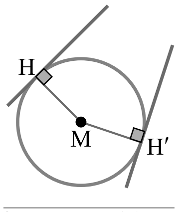
۱۳۶۶- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵},b)$ از دو خط مماس برابر است. فرض کنید نقاط تماس H و H' باشند. در این صورت

$$MH=MH'\Rightarrow\frac{|۲\sqrt{۵}-۲b|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|b-۴\sqrt{۵}|}{\sqrt{۱+۴}}$$

$$\begin{cases}۲\sqrt{۵}-۲b=b-۴\sqrt{۵}\Rightarrow b=۲\sqrt{۵}\Rightarrow M(۲\sqrt{۵},۲\sqrt{۵})\\ ۲\sqrt{۵}-۲b=-b+۴\sqrt{۵}\Rightarrow b=-۲\sqrt{۵}\Rightarrow M(۲\sqrt{۵},-۲\sqrt{۵})\end{cases}$$

اگر نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵},۲\sqrt{۵})$ مرکز دایره باشد، شعاع آن برابر می‌شود با

$$r=MH=\frac{|۲\sqrt{۵}-۴\sqrt{۵}|}{\sqrt{۵}}=۲$$



اگر نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵},-۲\sqrt{۵})$ مرکز دایره باشد، شعاع آن برابر می‌شود با

$$r=MH=\frac{|۲\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}|}{\sqrt{۵}}=۶$$

بنابراین شعاع دایرهٔ کوچک‌تر برابر ۲ است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۳۶۷- گزینهٔ ۱ فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس، برابر شعاع دایره است. فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,-۱)$ از خط $x-y-۱=۰$ برابر است با $r=\frac{|۲+۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$.

بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲\Rightarrow(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۲$$

در معادلهٔ بالا قرار می‌دهیم $y=۰$ تا محل تقاطع این دایره را با محور x به‌دست می‌آوریم:

$$(x-۲)^۲+(۰+۱)^۲=۲\Rightarrow(x-۲)^۲=۱\Rightarrow x-۲=\pm۱\Rightarrow x=۳\ ,\ x=۱$$

تجربی - ۹۵

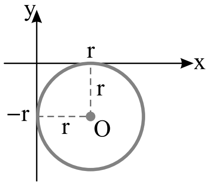
۱۳۶۸- گزینهٔ ۳ چون نقطهٔ $(۲,-۹)$ در ربع چهارم قرار دارد و دایرهٔ مورد نظر بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن در ناحیهٔ چهارم است. فرض کنید شعاع این دایره r باشد. با توجه به شکل زیر معلوم است که مرکز آن نقطهٔ $O(r,-r)$ است. بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-r)^۲+(y+r)^۲=r^۲$$

دایره از نقطهٔ $(۲,-۹)$ می‌گذرد، پس مختصات آن در معادلهٔ بالا صدق می‌کنند:

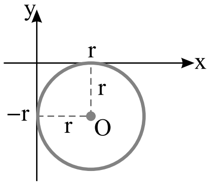
$$(۲-r)^۲+(-۹+r)^۲=r^۲\Rightarrow r^۲-۲۲r+۸۵=۰\Rightarrow r=۵ \text{ یا } r=۱۷$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.



ریاضی - ۹۵

۱۳۶۹- گزینهٔ ۲ چون نقطهٔ $(۱,-۲)$ در ناحیهٔ چهارم است و دایرهٔ مورد نظر بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن در ناحیهٔ چهارم است. اگر شعاع این دایره برابر r باشد، از روی شکل روبه‌رو معلوم است که مرکز آن نقطهٔ $(r,-r)$ است. بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $(x-r)^۲+(y+r)^۲=r^۲$ است. چون نقطهٔ $(۱,-۲)$ روی این دایره است، پس



$$(۱-r)^۲+(-۲+r)^۲=r^۲\Rightarrow r^۲-۶r+۵=۰$$

$$(r-۱)(r-۵)=۰\Rightarrow r=۱\ ,r=۵$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

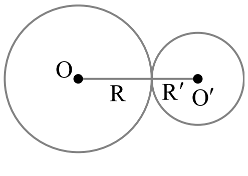
۱۳۷۰- گزینهٔ ۱ مطابق شکل اگر دو دایره مماس خارج باشند، باید

$$OO'=R+R' \qquad (۱)$$

بنابراین

$$x^۲+y^۲+۴x=۰\Rightarrow O(-۲,۰)\ ,\ R=۲$$

$$x^۲+y^۲-۲x+۸y+a\Rightarrow O'(۱,-۴)\ ,\ R'=\sqrt{۱۷-a}$$



اکنون با استفاده از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید

$$\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۲+\sqrt{۱۷-a}$$

$$۵=۲+\sqrt{۱۷-a}\Rightarrow ۳=\sqrt{۱۷-a}\Rightarrow a=۸$$

ریاضی - ۹۰

فصل هفتم

۱۳۷۱- گزینهٔ ۴ برای اینکه عمل ضرب پرانتزهای داده شده را انجام دهیم، از هر پرانتز یک جمله انتخاب و جمله‌های انتخابی را در هم ضرب می‌کنیم. برای انتخاب یک جمله از پرانتز اول، دو حالت، از پرانتز دوم، سه حالت و از پرانتز سوم، پنج حالت وجود دارد. یعنی در نهایت $۲×۳×۵=۳۰$ جمله تولید می‌شود.

۱۳۷۲- گزینهٔ ۲ ۵ رقم زوج داریم که از صفر نمی‌توان به عنوان اولین رقم از سمت چپ استفاده کرد. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با

۱ × ۵ × ۴

۲۰= رقم مشابه صدگان × تمام ارقام زوج × ارقام غیر صفر زوج

۱۳۷۳- گزینهٔ ۴ برای رقم هزارگان می‌توانیم هر یک از ارقام به جز صفر را انتخاب کنیم. بنابراین سه حالت برای نوشتن هزارگان وجود دارد. هر یک از رقم‌های صدگان، دهگان و یکان را می‌توان به چهار حالت انتخاب کرد. بنابراین $۳×۴×۴×۴$ عدد یعنی ۱۹۲ عدد چهار رقمی با شرایط سؤال وجود دارد.

۱۳۷۴- گزینهٔ ۳ یکان عدد می‌تواند ۱، ۳ یا ۵ باشد، پس سه حالت برای انتخاب یکان وجود دارد. صدگان عدد می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد، پس پنج حالت برای انتخاب صدگان وجود دارد. دهگان عدد هم می‌تواند هر یک از ارقام عضو مجموعه باشد یعنی شش حالت برای انتخاب دهگان وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب $۵×۶×۳=۹۰$ عدد با شرایط مسئله وجود دارد.

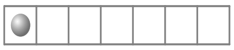
۱۳۷۵- گزینهٔ ۱ عدد ۲ را در زیرمجموعه قرار می‌دهیم. عددهای ۸ و ۹ را در زیرمجموعه قرار نمی‌دهیم. بنابراین باید تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۳,۴,۵,۶,۷\}$ را حساب کنیم که برابر است با $۶۴=۲^۶$.

۱۳۷۶- گزینهٔ ۳ هر تابع با ویژگی مورد نظر به‌صورت $f=\{(۱,x),(۲,y),(۳,z)\}$ است که x ، y و z می‌توانند هر یک از پنج رقم ۰ ، ۲، ۴، ۶ و ۸ باشند، یعنی x ، y و z هر کدام پنج مقدار مختلف می‌توانند داشته باشند. پس $۵×۵×۵=۱۲۵$ تابع با این شرایط وجود دارد.

۱۳۷۷- گزینهٔ ۱ هر مسافر می‌تواند در یکی از ۲۰ طبقه پیاده شود. پس تعداد انتخاب‌های مسافر اول ۲۰ تا، مسافر دوم ۲۰ تا، ... و مسافر دهم ۲۰ تاست. بنابراین $۲۰^{۱۰}=\underbrace{۲۰×۲۰×۲۰×\cdots×۲۰}_{۱۰\text{تا}}$ حالت برای پیاده شدن مسافران وجود دارد.

۱۳۷۸- گزینهٔ ۳ هر سؤال چهار گزینه دارد که دانش‌آموز می‌تواند یکی از آن‌ها را انتخاب نماید. همچنین دانش‌آموز می‌تواند به سؤال پاسخ ندهد. پس برای پاسخ‌گویی به هر سؤال ۵ حالت وجود دارد. بنابراین تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به ۲۰ سؤال برابر $\underbrace{۵×۵×\cdots×۵}_{۲۰\text{تا}}$ یعنی $۵^{۲۰}$ است.

۱۳۷۹- گزینهٔ ۲ می‌توان مهره را در هر یک از خانه‌ها به‌جز خانه‌های ابتدا و انتها قرار داد یا قرار نداد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۳۲=۲^۵$.



۱۳۸۰- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم تعداد اعضای مجموعه n باشد. در این صورت این مجموعه ۲^n زیرمجموعه دارد. اگر سه عضو به مجموعه اضافه کنیم، تعداد اعضای آن $n+۳$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^{n+۳}$ می‌شود. بنابراین تساوی $۲^{n+۳}=۲^n+۲۲۴$ درست است. در نتیجه

$$۲^n×۲^۳-۲^n=۲۲۴\Rightarrow ۷×۲^n=۲۲۴\Rightarrow ۲^n=۳۲$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ جدید $۲^n+۲۲۴=۳۲+۲۲۴=۲۵۶$ است.

۱۳۸۱- گزینهٔ ۲ برای رفتن از شهر A به شهر C تعداد مسیرها $۴×۳=۱۲$ تا است. برای برگشتن از شهر C به شهر A نیز ۱۲ مسیر وجود دارد که یکی از آن‌ها همان مسیر رفت است. پس ۱۱ مسیر برگشت باقی می‌ماند. پس برای رفت و برگشت $۱۲×۱۱=۱۳۲$ مسیر مختلف وجود دارد.

۱۳۸۲- گزینهٔ ۳ تعداد راه‌های رفتن از شهر A به شهر D برابر است با $۳×۵×۲=۳۰$. در مسیر برگشت از یکی از راه‌های بین هر دو شهر نمی‌توان عبور کرد. بنابراین تعداد راه‌های برگشت از شهر D به شهر A برابر است با $۱×۴×۲=۸$. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۳۰×۸=۲۴۰$.

۱۳۸۳- گزینهٔ ۲ جایگاه هر یک از ارقام را با یک دایره نشان می‌دهیم و سپس تعیین می‌کنیم که در هر یک از این جایگاه‌ها چند رقم می‌تواند قرار بگیرد. در نهایت طبق اصل ضرب، تعداد حالات ممکن برای قرار دادن ارقام در دایره‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

۱۶= ① × ② × ② × ② × ②

فقط ۲ ‎ ‎۲ یا ۵ ‎ ‎۲ یا ۵ ‎ ‎۲ یا ۵ ‎ ‎۲ یا ۵

۱۳۸۴- گزینهٔ ۲ بنابراین اصل متمم، تعداد عددهای مورد نظر برابر است با تعداد کل عددهای سه رقمی که می‌توان با این رقم‌ها نوشت، منهای تعداد عددهای سه رقمی با این ارقام که رقم تکراری ندارند.

یکان	دهگان	صدگان
۴	۴	۳

−

یکان	دهگان	صدگان
۲	۳	۳

بنابراین $۳۰=۱۸-۴۸=۲×۳×۳-۴×۴×۳=$ تعداد عددهای مورد نظر .

۱۳۸۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** دقت کنید که رقم‌ها می‌توانند تکراری باشند. حالا باید تعداد همهٔ عددهای طبیعی یک رقمی، دو رقمی و سه رقمی با ویژگی مورد نظر را پیدا کنیم.

تعداد عددهای سه رقمی:

یکان	دهگان	صدگان
۶	۴	۱
	۰,۱,۲,۳	۳

$\Rightarrow ۱×۴×۶=۲۴$

یکان	دهگان	صدگان
۶	۶	۱
		۲

$\Rightarrow ۱×۶×۶=۳۶$

یکان	دهگان	صدگان
۶	۶	۱
		۱

$\Rightarrow ۱×۶×۶=۳۶$

تعداد عددهای دو رقمی:

یکان	دهگان
۶	۵

$\Rightarrow ۵×۶=۳۰$

تعداد عددهای یک رقمی:

یکان
۵

$\Rightarrow ۵$

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $۲۴+۳۶+۳۶+۳۰+۵=۱۳۱$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که اعداد دو رقمی مانند ۲۳ را می‌توان به‌صورت ۰۲۳ نوشت و اعداد یک رقمی مانند ۷ را می‌توان به‌صورت ۰۰۷ نوشت. اکنون برای نوشتن اعداد طبیعی کوچک تر از ۳۴۰، دو حالت را در نظر می گیریم.

حالت ۱:

۶	۶	۳
۰تا۶	۰تا۶	۰,۱,۲

$\Rightarrow ۳\times۶\times۶=۱۰۸$

حالت ۲:

۶	۴	۱
۰تا۶	۰,۱,۲,۳	۳

$\Rightarrow ۱\times۴\times۶=۲۴$

پس در کل تعداد اعداد ایجاد شده برابرند با $۱۳۲=۲۴+۱۰۸$. اما عدد صفر یکی از عددهای تولید شده است و چون عددهای طبیعی مدنظر هستند، بنابراین پاسخ برابر ۱۳۱ است.

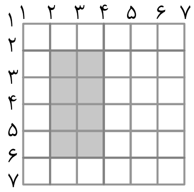
۱۳۸۶- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم مجموعهٔ اصلی n عضو داشته است. در این صورت، این مجموعه ۲^n زیرمجموعه دارد. اگر چهار عضو از این مجموعه کم کنیم، تعداد اعضای آن $n-۴$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^{n-۴}$ می‌شود. بنابراین تساوی $۲^{n-۴}=۲^n-۴۸۰$ برقرار است. در نتیجه

$$۲^n-۲^{n-۴}=۴۸۰\Rightarrow ۲^n-\frac{۲^n}{۲۴}=۴۸۰\Rightarrow\frac{۱۵}{۱۶}\times۲^n=۴۸۰\Rightarrow ۲^n=۵۱۲$$

پس

$$۲^{n-۴}=۲^n-۴۸۰\xrightarrow{۲^n=۵۱۲}۲^{n-۴}=۵۱۲-۴۸۰=۳۲$$

۱۳۸۷- گزینهٔ ۴ هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از هفت خط افقی و هفت خط عمودی شکل زیر به‌وجود می‌آید. برای اینکه مستطیل‌ها ۲×۴ باشند، باید فاصلهٔ دو خط موازی دو واحد و فاصلهٔ دو خط موازی دیگر ۴ واحد باشد. در مستطیل‌های افقی، اگر یکی از هفت خط عمودی را انتخاب کنیم خط بعدی باید به فاصلهٔ ۴ واحد از آن باشد. پس خطوط ۱ تا ۳ را می‌توان انتخاب کرد و دو خط عمودی را رسم کرد. همچنین اگر یکی از هفت خط افقی را انتخاب کنیم خط بعدی باید به فاصلهٔ ۲ واحد از آن باشد. پس خطوط ۱ تا ۵ را می‌توان انتخاب کرد. پس ۳×۵ یعنی ۱۵ مستطیل افقی ۴×۲ داریم. به همین ترتیب ۱۵ مستطیل عمودی ۲×۴ داریم و جمعاً ۳۰ مستطیل با ابعاد ۲ و ۴ وجود دارد.



۱۳۸۸- گزینهٔ ۲ عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۹ یا ۷ است از عدد ۵۹۷۳۱ بزرگ‌ترند. تعداد این عددها برابر است با

۱	۲	۳	۴	۲
				۷,۹

$۲\times۴\times۳\times۲\times۱=۴۸$

بعد از این‌ها بزرگ‌ترین عدد ۵۹۷۳۱ است، بنابراین عدد ۵۹۷۳۱، ۴۹ اُمین عددی است که نوشته‌ایم.

۱۳۸۹- گزینهٔ ۳ اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو به ترتیب ۶ و ۱۰ باشند، عضوهای دیگر زیرمجموعه می‌توانند اعداد ۷، ۸ و ۹ باشند که می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس تعداد این زیرمجموعه‌ها $۲^۳$ است. به همین ترتیب اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ۷ و ۹ باشند، عدد ۸ می‌تواند در زیرمجموعه باشد یا نباشد. یعنی ۲ زیرمجموعه به این شکل وجود دارد. پس تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب سؤال ۱۰تاست.

۱۳۹۰- گزینهٔ ۳ تعداد اعداد دو رقمی کمتر از ۵۰ برابر ۴۰ است. از این اعداد، ۱۱، ۲۲، ۳۳ و ۴۴ ارقام مشابه دارند، پس ۳۶ عدد ارقام متمایز دارند. بنابراین مجموعهٔ A، ۳۶ عضو و $۲^{۳۶}$ زیرمجموعه دارد. بنابراین

$$۲^{۳۶}=۱۶^a\Rightarrow ۲^{۳۶}=(۲^۴)^a\Rightarrow ۲^{۳۶}=۲^{۴a}\Rightarrow ۳۶=۴a\Rightarrow a=۹$$

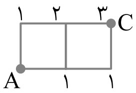
۱۳۹۱- گزینهٔ ۱ از دو طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت:

مسیر ABD: $۲\times۲=۴$,   مسیر ABCD: $۲\times۳\times۳=۱۸$

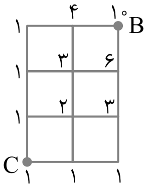
بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۲۲=۴+۱۸$.

۱۳۹۲- گزینهٔ ۳ از ۲ راه می‌توان مستقیماً از شهر A به شهر C رفت و می‌توان با ۲×۳ راه از شهر B عبور کرد و به شهر C رفت. بنابراین $۸=۶+۲$ راه برای رفت وجود دارد. از یک راه می‌توان مستقیماً از شهر C به شهر A برگشت و از ۲×۲ راه می‌توان از شهر B عبور کرد و به شهر A برگشت. پس $۵=۴+۱$ راه برای برگشت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب $۸\times۵=۴۰$ راه رفت و برگشت موجود است.

۱۳۹۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** به کمک اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن به نقطهٔ C از نقطهٔ A مطابق شکل به‌دست می‌آید که برابر ۳ است.

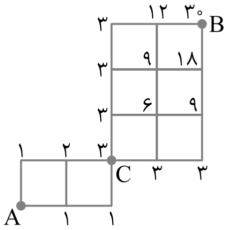


تعداد راه‌های رسیدن به نقطهٔ B از نقطهٔ C نیز به همین ترتیب به‌دست می‌آید. که مطابق شکل به کمک اصل جمع تعداد راه‌ها ۱۰ است.



توجه کنید که ابتدا باید با ۳ راه از نقطهٔ A به نقطهٔ C برویم. سپس با ۱۰ راه از نقطهٔ C به نقطهٔ B برویم. بنابراین $۳\times۱۰=۳۰$ راه با شرایط مسئله وجود دارد.

راه‌حل دوم چون باید ابتدا به C برویم، راه‌هایی را که از آن‌ها نمی‌توان به نقطهٔ C رسید حذف می‌کنیم. پس باید روی راه‌های شکل زیر حرکت کنیم، که به کمک اصل جمع تعداد راه‌ها ۳۰ به‌دست می‌آید.



۱۳۹۴- گزینهٔ ۴ رقم صدگان باید ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد. دو حالت در نظر می گیریم.

حالت اول رقم صدگان ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد.

یکان	دهگان	صدگان
۵	۶	۴
		۳,۴,۵,۶

$۴\times۶\times۵=۱۲۰$

حالت دوم رقم صدگان ۲ باشد. در این صورت رقم دهگان باید ۴، ۵ یا ۶ باشد.

یکان	دهگان	صدگان
۵	۳	۱
	۴,۵,۶	۲

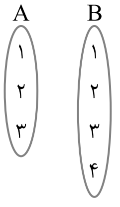
$۱\times۳\times۵=۱۵$

توجه کنید که در حالت دوم یکی از عددها ۲۴۰ است که باید این عدد را از مجموع تعداد عددهای حاصل کم کنیم. در نتیجه تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $۱۳۴=۱-۱۵+۱۲۰$.

۱۳۹۵- گزینهٔ ۲ عددهای ۲ و ۳ را به یک حالت در زیرمجموعه قرار می‌دهیم. عددهای ۴، ۵ و ۶ را به یک حالت کنار می‌گذاریم و در زیرمجموعه قرار نمی‌دهیم، پنج عدد دیگر را می‌توانیم در زیرمجموعه قرار دهیم یا قرار ندهیم، یعنی هر کدام از آن‌ها دو حالت دارد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط سؤال برابر است با $۳۲=۲^۵$.

۱۳۹۶- گزینهٔ ۲ هر مقسوم‌علیه طبیعی عدد a به‌صورت $۲^x\times۳^y\times۵^z$ است که x ، y و z اعدادی حسابی هستند. چون می‌خواهیم مقسوم‌علیه، زوج باشد پس باید حداقل یک عامل ۲ داشته باشد و چون می‌خواهیم بر ۱۰ بخش‌پذیر نباشد، پس نباید عامل ۵ داشته باشد. بنابراین باید $۱\leq x\leq۳$ ، $۰\leq y\leq۴$ و $z=۰$ ، یعنی برای x سه حالت، برای y پنج حالت و برای z یک حالت وجود دارد. پس تعداد این مقسوم‌علیه‌ها برابر است با $۳\times۵\times۱=۱۵$.

۱۳۹۷- گزینهٔ ۳ هر عضو مجموعهٔ A را می‌توانیم به یکی از اعضای مجموعهٔ B با یک پیکان وصل کنیم. همچنین می‌توانیم این عضو A را به هیچ عضوی از B وصل نکنیم، یعنی برای خارج کردن یک پیکان از هر عضو A ، پنج حالت وجود دارد. پس $۵\times۵\times۵=۱۲۵$ تابع می‌توان نوشت که دامنهٔ آن زیرمجموعهٔ A و برد آن زیرمجموعهٔ B است. یکی از این توابع تهی است که در آن دامنهٔ تابع تهی است. بنابراین ۱۲۴ تابع غیرتهی وجود دارد.



۱۳۹۸- گزینهٔ ۲ هر تابع به‌صورت $f=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),(۴,d)\}$ مطلوب مسئله است که در آن b ، c و d می‌توانند ۱ تا ۴ باشند (چهار انتخاب دارند) ولی a می‌تواند ۲ تا ۴ باشد (سه انتخاب دارد). بنابراین تعداد توابعی مانند f برابر است با $۴\times۴\times۴\times۳=۱۹۲$.

۱۳۹۹- گزینهٔ ۴ تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۹ است، برابر است با

$۱\times۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

۱	۲	۳	۴	۱

تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۸ است، برابر است با

$۱\times۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

۱	۲	۳	۴	۱

تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۶ است، برابر است با

$۱\times۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

۱	۲	۳	۴	۱

تعداد این عددها برابر است با $۷۲=۲۴+۲۴+۲۴$ ، پس هفتاد و دومین عددی که نوشته‌ایم کوچک‌ترین عددی است که با ارقام داده شده می‌توان نوشت به شرط آنکه اولین رقم سمت چپ آن برابر ۶ باشد. این عدد ۶۲۴۸۹ است.

۱۴۰۰- گزینهٔ ۲ به شکل زیر توجه کنید.

$$\text{شمارهٔ پرتاب‌ها: }\underbrace{۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳}_{\text{یکی رو و دوتا پشت}}\ ,\ \underset{\text{رو}}{\underset{\downarrow}{۴}}\ ,\ \underbrace{۵\ ,\ ۶\ ,\ ۷\ ,\ ۸\ ,\ ۹\ ,\ ۱۰}_{\text{پشت یا رو}}$$

پرتاب چهارم باید رو بیاید، پس ۱ حالت دارد. یکی از سه پرتاب اول باید رو بیاید که این کار به ۳ حالت امکان‌پذیر است. دو پرتاب دیگر باید پشت بیایند که ۱ حالت دارد. پرتاب‌های پنجم تا دهم می‌توانند رو یا پشت بیایند که هر کدام دو حالت دارند و کلاً $۲^۶$ حالت دارند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب سؤال $۳\times۲^۶=۱۹۲$ است.

۱۴۰۱- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{(n+۱)!+(n-۱)!}{n^۳-۱}=۱۲۰\Rightarrow\frac{(n-۱)!(n(n+۱)+۱)}{(n-۱)(n^۲+n+۱)}=۱۲۰$$

$$\frac{(n-۱)(n-۲)!(n^۲+n+۱)}{(n-۱)(n^۲+n+۱)}=۱۲۰\Rightarrow(n-۲)!=۱۲۰=۵!\Rightarrow n=۷$$

۱۴۰۲- گزینهٔ ۲ حروف صدادار a ، o و i هستند که به $۳!$ حالت می‌توانند کنار یکدیگر قرار بگیرند. این بستهٔ حروف صدادار به همراه شش حرف بی‌صدای دیگر هفت شیء متمایز هستند که به $۷!$ حالت می‌توانند در کنار هم قرار بگیرند. بنابراین تعداد جایگشت‌های مورد نظر سؤال برابر $۳!\times۷!$ یا $۶\times۷!$ است.

۱۴۰۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** کافی است بنابر اصل متمم، تعداد حالت‌هایی را که ارغوان و اردوان کنار هم ایستاده‌اند از تعداد کل حالت‌های ایستادن این شش نفر کم کنیم. اگر ارغوان و اردوان کنار هم ایستاده باشند، می‌توان آن‌ها را یک نفر در نظر گرفت، که البته به $۲!$ طریق می‌توانند کنار هم بایستند. بنابراین تعداد صف‌ها در این حالت برابر است با $۲\times۵!=۲۴۰$. تعداد صف‌هایی که بدون محدودیت می‌توان تشکیل داد برابر است با $۶!=۷۲۰$. بنابراین تعداد صف‌های مورد نظر برابر است با $۷۲۰-۲۴۰=۴۸۰$.

راه‌حل دوم ارغوان و اردوان را کنار می‌گذاریم. ابتدا تعداد حالت‌هایی که ۴ نفر در یک صف قرار می‌گیرند، محاسبه می‌کنیم که برابر با $۴!$ خواهد بود. در ابتدا و انتها صف و در بین این ۴ نفر، ۵ مکان وجود دارد که از این ۵ مکان ۲ تا را انتخاب می‌کنیم که ارغوان و اردوان در آن‌ها بایستند. پس تعداد کل صف‌ها برابر است با $P(۵,۲)\times۴!=۲۰\times۲۴=۴۸۰$.

۱۴۰۴- گزینهٔ ۳ اگر f تابعی با ویژگی مورد نظر باشد، معلوم است که $f(۱)$ ، $f(۲)$ ، $f(۳)$ و $f(۴)$ جایگشتی از عددهای ۵، ۶، ۷ و ۸ هستند. بنابراین تعداد تابع‌هایی مانند f برابر است با $۴!=۲۴$.

۱۴۰۵- گزینهٔ ۲ کتاب‌های ریاضی را به $۴!$ طریق می‌توان در یک ردیف چید. اکنون کتاب‌های فیزیک را می‌توان فقط در جاهای مشخص شده در سطر زیر گذاشت.

ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی

این کار به $۳!$ طریق ممکن است. بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با

$$۴!\times۳!=۱۴۴$$

۱۴۰۶- گزینهٔ ۴ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$۷۲P(n,r)=P(n+۲,r+۲)\Rightarrow۷۲\times\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{(n+۲)!}{(n+۲-r-۲)!}$$

$$\frac{۷۲n!}{(n-r)!}=\frac{n!(n+۱)(n+۲)}{(n-r)!}\Rightarrow(n+۱)(n+۲)=۷۲=۸\times۹\Rightarrow n=۷$$

بنابراین $P(n-۱,n-۲)=P(۶,۵)=\frac{۶!}{(۶-۵)!}=۷۲۰$.

۱۴۰۷- گزینهٔ ۴ کتاب‌های ریاضی را می‌توان به $۴!$ طریق کنار هم چید. بین این کتاب‌ها ۳ جای خالی وجود دارد که باید کتاب‌های فیزیک را در آن‌ها بگذاریم. این کار هم به $۳!$ حالت ممکن است.

ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی

کل این مجموعه و ۲ کتاب شیمی را می‌توان ۳ کتاب در نظر گرفت و آن‌ها را به $۳!$ حالت مرتب کرد. بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با $۴!۳!۳!$.

۱۴۰۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که ۴ کتاب فیزیک به $۴!$ طریق و ۳ کتاب ادبیات به $۳!$ طریق کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. حال کتاب‌های فیزیک را در یک بسته و کتاب‌های ادبیات را در بستهٔ دیگری درنظر می‌گیریم. این دو بسته به $۲!$ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند. بنابراین تعداد حالات مورد نظر برابر است با $۴!\times۳!\times۲!=۲۴\times۶\times۲=۲۸۸$.

۱۴۰۹- گزینهٔ ۴ ابتدا حرف a را قرار می‌دهیم که برای آن ۳ انتخاب داریم: حرف اول، دوم یا سوم. سپس ۲ حرف از ۴ حرف باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد کلمات مورد نظر برابر است با $۳P(۴,۲)$.

۱۴۱۰- گزینهٔ ۱ ۳ گلابی را باید بین ۳ پسر از ۵ پسر توزیع کنیم که این کار به $P(۵,۳)$ حالت امکان‌پذیر است. سپس باید ۲ سیب را بین ۲ نفر از ۸ نفر باقی‌مانده توزیع کنیم که این کار به $P(۸,۲)$ حالت امکان‌پذیر است. پس جواب مسئله برابر است با $P(۵,۳)P(۸,۲)=\frac{۵!}{۲!}\times\frac{۸!}{۶!}=\frac{۵!\times۸!}{۲\times۶\times۵!}=\frac{۸!}{۱۲}$.

۱۴۱۱- گزینهٔ ۲ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(n-۱)!}{(n+۱)n(n-۱)!}=\frac{۱}{۹۰}\Rightarrow\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{۱}{۹۰}$$

$$n(n+۱)=۹۰\Rightarrow n^۲+n-۹۰=۰\Rightarrow(n+۱۰)(n-۹)=۰$$

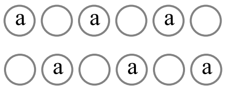
$$n=-۱۰\,(\text{غ.ق.ق.}),\Rightarrow n=۹$$

بنابراین $\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{۹!}{۷!}=\frac{۹\times۸\times۷!}{۷!}=۷۲$.

۱۴۱۲- گزینهٔ ۱ باید تعـداد حالت‌هایی را که در آن‌هـا عبارت log دیده می‌شـود، از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم. عبارت log و شش حرف a ، r ، i ، t ، h و m هفت شیء متمایز هستند که به $۷!$ حالت می‌توانند در کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد کل جایگشت‌ها نیز برابر $۹!$ است. بنابراین تعداد حالت‌های مورد نظر برابر است با $۹!-۷!=۷!(۹\times۸-۱)=۷۱\times۷!$.

۱۴۱۳- گزینهٔ ۳ تعداد کل حالت‌های ایسـتادن ۵ نفـر در یک صف $۵!$ اسـت. در نیمی از این حالات احمد در مکان جلوتری نسـبت به محمد ایستاده اسـت و در نیم دیگر حالات محمد در مکان جلوتری نسـبت به احمد ایسـتاده است. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب سؤال برابر است با $\frac{۵!}{۲}=۶۰$.

۱۴۱۴- گزینهٔ ۲ بـه دو روش می‌تـوان حروف را چیـد طوری‌که حروف a یکی در میان باشند:



در هر دو روش، سه حرف p ، n و m را به $۳!$ حالت می‌توان در جاهای خالی قرار داد. پس تعداد حالت‌های مورد نظر $۲\times۳!=۱۲$ است.

۱۴۱۵- گزینهٔ ۲ تعداد همهٔ عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری که می‌توان با شـش رقم ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ و ۶ نوشـت برابر است با $P(۶,۴)=۳۶۰$. از طـرف دیگر، تعداد عددهـای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکـراری که در آن‌ها هیچ‌یک از رقم‌های ۱ و ۵ نیامده است، برابر است با تعداد عددهای چهار رقمی بـا رقم‌های غیرتکراری که می‌توان با رقم‌های ۲ ، ۳ ، ۴ و ۶ نوشـت. تعداد این عددها برابر است با $۴!=۲۴$. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با

$$۳۶۰-۲۴=۳۳۶$$

۱۴۱۶- گزینهٔ ۴ تعـداد کل جایگشـت‌های شـش حرفی کلمهٔ نـه حرفی logarithm برابـر $P(۹,۶)$ اسـت. تعـداد جایگشـت‌های شـش حرفـی که هیچ‌کـدام از حـروف m و t را ندارنـد برابـر $P(۷,۶)$ اسـت. بنابرایـن تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با

$$P(۹,۶)-P(۷,۶)=\frac{۹!}{۳!}-\frac{۷!}{۱!}=\frac{۹\times۸\times۷!}{۶}-۷!=۱۲\times۷!-۷!=۱۱\times۷!$$

۱۴۱۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** تعداد کل جایگشـت‌های چهارحرفی هشـت حرف این کلمه برابر $P(۸,۴)$ اسـت. تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها حرف t وجود ندارد برابر اسـت با $P(۷,۴)$. بنابراین تعداد جایگشـت‌هایی که حرف t دارند می‌شود $P(۸,۴)-P(۷,۴)$ که برابر است با

$$P(۸,۴)-P(۷,۴)=\frac{۸!}{۴!}-\frac{۷!}{۳!}=۸\times۷\times۶\times۵-۷\times۶\times۵\times۴$$
$$=۷\times۶\times۵(۸-۴)=۷\times۶\times۵\times۴=۸۴۰$$

راه‌حل دوم ابتدا حرف t را به ۴ حالت در یکی از چهارخانهٔ خالی در نظر گرفته شده برای جایگشت قرار می‌دهیم. سپس سه خانهٔ خالی وجود دارد که باید با ۷ حرف باقی‌مانده پر شوند که تعداد حالت‌های پر شدن آن‌ها $P(۷,۳)$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها t وجود دارد برابر است با

$$۴P(۷,۳)=۴\times\frac{۷!}{۴!}=۴\times۷\times۶\times۵=۸۴۰$$

۱۴۱۸- گزینهٔ ۳ ابتدا مقدار n را از تساوی داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{n!}{(n-۳)!}-\frac{۳n!}{(n-۲)!}=۳۰\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)-۳n(n-۱)=۳۰$$

$$n^۳-۶n^۲+۵n-۳۰=۰\Rightarrow n^۲(n-۶)+۵(n-۶)=۰$$

$$(n-۶)(n^۲+۵)=۰\Rightarrow n=۶$$

بنابراین $P(n,۴)=P(۶,۴)=\frac{۶!}{۲!}=۶\times۵\times۴\times۳=۳۶۰$.

۱۴۱۹- گزینهٔ ۲ عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌هایش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. اکنون توجه کنید که از شش رقم داده شده، اگر فقط ۰ یا ۳ را حذف کنیم، مجموع پنج رقم دیگر بر ۳ بخش‌پذیر است. از طرف دیگر،

عددهای پنج رقمی بدون رقم صفر:

۱	۲	۳	۴	۵

$\Rightarrow ۵!=۱۲۰$

عددهای پنج رقمی بدون رقم ۳:

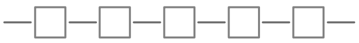
۱	۲	۳	۴	۴

$\Rightarrow ۴\times۴\times۳\times۲\times۱=۹۶$

۱, ۲, ۴, ۵

بنابراین، پاسخ سؤال برابر است با $۱۲۰+۹۶=۲۱۶$.

۱۴۲۰- گزینهٔ ۱ تعداد کل جایگشـت‌های ۸ حرفی این کلمه $۸!$ اسـت. ابتـدا تعـداد حالت‌هایی را که هیچ دو حرف صداداری کنـار یکدیگر قرار ندارند حساب می‌کنیم، سپس آن را از $۸!$ کم می‌کنیم تا تعداد حالت‌هایی که حداقل دو حـرف صدادار کنار یکدیگر قرار دارند، به‌دسـت آید. برای پیدا کردن تعداد جایگشـت‌هایی که هیچ دو حرف صداداری کنار هم قرار ندارند، ابتدا پنج حرف بی‌صـدا را کنـار هم قـرار می‌دهیم که ایـن کار به $۵!$ حالت انجام‌پذیر اسـت. سـپس در شش جای خالی مطابق شکل زیر ۳ حرف صدادار را قرار می‌دهیم که این‌کار به $P(۶,۳)$ حالت امکان‌پذیر است.



پس تعداد حالت‌های مطلوب مسئله $۸!-۵!P(۶,۳)$ است که برابر است با

$$۸!-۵!\times\frac{۶!}{۳!}=۸!-۲۰\times۶!=۶!(۵۶-۲۰)=۳۶\times۶!$$

۱۴۲۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{\begin{pmatrix}n+۱\\k\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}n\\k-۱\end{pmatrix}}=\frac{\frac{(n+۱)!}{k!(n+۱-k)!}}{\frac{n!}{(k-۱)!(n-k+۱)!}}=\frac{\frac{(n+۱)n!}{k(k-۱)!}}{\frac{n!}{(k-۱)!}}=\frac{n+۱}{k}$$

۱۴۲۲- گزینهٔ ۳ تعداد راه‌های انتخاب دو توپ از جعبهٔ A برابر $\begin{pmatrix}۳\\۲\end{pmatrix}$ و از جعبهٔ B برابر $\begin{pmatrix}۹\\۲\end{pmatrix}$ است. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\begin{pmatrix}۳\\۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۹\\۲\end{pmatrix}=۳\times\frac{۹\times۸}{۲}=۱۰۸$$

۱۴۲۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید فرد A یکی از این دوازده نفر باشد. اگر پنج نفر از یازده نفر دیگر را انتخاب کنیم و با A یک تیم شش نفره درست کنیم، شش نفر باقی‌مانده هم یک تیم شش نفرهٔ دیگر تشکیل خواهند داد. بنابراین جواب $\binom{۱۱}{۵}$ است.

۱۴۲۴- گزینهٔ ۲ اگر هر سه نقطه از این پنج نقطه را به هم وصل کنیم، یک مثلث تشکیل خواهند داد. پس تعداد مثلث‌ها برابر $\binom{۵}{۳}$ یعنی ۱۰تا است.

۱۴۲۵- گزینهٔ ۳ در یک صفحهٔ شطرنجی ۴×۷ تعداد خط‌های افقی ۵تا و تعداد خط‌های عمودی ۸تاست. از تقاطع هر دو خط عمودی و دو خط افقی یک مستطیل رسم می‌شود. پس باید دو خط از پنج خط افقی و دو خط از هشت خط عمودی را انتخاب کنیم، یعنی تعداد مستطیل‌ها برابر است با $\binom{۵}{۲}\binom{۸}{۲}=۲۸۰$.

۱۴۲۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** این کار را به چند روش می‌توانیم انجام دهیم:

الف) صفر مرد و سه زن را به $\binom{۷}{۰}\binom{۵}{۳}=۱\times۱۰=۱۰$ طریق انتخاب می‌کنیم.

ب) یک مرد و دو زن را به $\binom{۷}{۱}\binom{۵}{۲}=۷\times۱۰=۷۰$ طریق انتخاب می‌کنیم.

پ) دو مرد و یک زن را به $\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}=۲۱\times۵=۱۰۵$ طریق انتخاب می‌کنیم.

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با

$$\binom{۷}{۰}\binom{۵}{۳}+\binom{۷}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}=۱۰+۷۰+۱۰۵=۱۸۵$$

راه‌حل دوم تعداد حالت‌های انتخاب سه نفر از بین ۱۲ نفر برابر است با $\binom{۱۲}{۳}$.

همچنین تعداد حالت‌هایی که در آن سه مرد انتخاب شوند برابر $\binom{۷}{۳}$ است.

پس بنابر اصل متمم، تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با

$$\binom{۱۲}{۳}-\binom{۷}{۳}=۲۲۰-۳۵=۱۸۵$$

۱۴۲۷- گزینهٔ ۳ هر حالت پرتاب هفت سکه، یک رشتهٔ هفت حرفی مانند «ر پ ر ر پ پ ر» درست می‌کند. اگر جای ۳تا «رو» را در این رشته انتخاب کنیم، جای ۴تا «پشت» خودبه‌خود معلوم می‌شود. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $\binom{۷}{۳}=۳۵$.

۱۴۲۸- گزینهٔ ۲ ابتدا ۷ حرف دیگر را به !۷ طریق در یک ردیف قرار می‌دهیم. سپس در دو مکان از ۸ مکان به وجود آمده، دو حرف e را قرار می‌دهیم که این کار به $\binom{۸}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است. پس تعداد کل حالت‌ها $۷!\times\binom{۸}{۲}$ است که می‌شود ۲۸×۷!.

* * *

۱۴۲۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** بنابر اصل متمم، باید از تعداد کل زیرمجموعه‌ها، تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی، یک عضوی و دو عضوی را کم کنیم. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$۲^{۸}-\binom{۸}{۰}-\binom{۸}{۱}-\binom{۸}{۲}=۲۵۶-۱-۸-۲۸=۲۱۹$$

راه‌حل دوم تعداد زیرمجموعه‌های دست کم سه عضوی برابر با مجموع تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی، چهار عضوی، ... و هشت عضوی مجموعه است. پس

$$\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}+\binom{۸}{۷}+\binom{۸}{۸}=۵۶+۷۰+۵۶+۲۸+۸+۱=۲۱۹$$

۱۴۳۰- گزینهٔ ۳ بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی و دو عضوی یک مجموعهٔ n عضوی به‌ترتیب $\binom{n}{۱}$ و $\binom{n}{۲}$ است. بنابراین

$$\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}=۴۵\Rightarrow n+\frac{n(n-۱)}{۲}=۴۵$$

$$n^{۲}+n-۹۰=۰\Rightarrow n=۹\,,\,n=-۱۰\,(\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین مجموعهٔ مورد نظر ۹ عضو دارد و تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی آن برابر است با $\binom{۹}{۳}=۸۴$.

۱۴۳۱- گزینهٔ ۱ از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!(n+۱-(n-۱))!}=۶\Rightarrow\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!۲!}=۶$$

$$\frac{(n+۱)n(n-۱)!}{(n-۱)!\times۲}=۶\Rightarrow n(n+۱)=۱۲\Rightarrow n=۳$$

بنابراین باید $\binom{۵}{۳}$ را محاسبه کنیم که برابر است با $\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}=۱۰$.

۱۴۳۲- گزینهٔ ۱ دو نفر دیگر را می‌توان از میان هفت نفر دیگر به $\binom{۷}{۲}$ طریق انتخاب کرد. پنج نفر را هم می‌توان به !۵ طریق در یک صف مرتب کرد. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $\binom{۷}{۲}\times۵!=۲۱\times۱۲۰=۲۵۲۰$.

۱۴۳۳- گزینهٔ ۱ اگر سه نفر از هشت نفر را انتخاب کنیم و آن‌ها را به همراه A و B در یک تیم پنج‌نفره قرار دهیم، پنج نفر باقی‌مانده تیم دیگر را تشکیل خواهند داد. بنابراین جواب مسئله $\binom{۸}{۳}$ است.

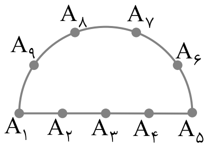
$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۳\times۲\times۵!}=۸\times۷=۵۶$$

۱۴۳۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** به شکل زیر توجه کنید.

به سه روش می‌توان مثلث را رسم کرد. در روش اول دو رأس مثلث را از نقاط $A_{۱}$ تا $A_{۵}$ انتخاب می‌کنیم و یک رأس دیگر را از بین نقاط $A_{۶}$ تا $A_{۹}$ انتخاب می‌کنیم. تعداد این مثلث‌ها $\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}=۴۰$ است. در روش دوم، یک رأس مثلث را از نقاط $A_{۱}$ تا $A_{۵}$ و دو رأس دیگر را از نقاط $A_{۶}$ تا $A_{۹}$ انتخاب می‌کنیم.

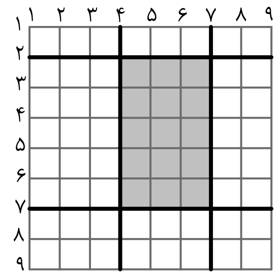
تعداد این مثلث‌ها $\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}=۳۰$ اسـت و در روش سوم، هر سه رأس مثلث را از نقاط $A_۶$ تا $A_۹$ انتخاب می‌کنیم که تعداد این مثلث‌ها $\binom{۴}{۳}=۴$ است.

پس در مجموع $۴۰+۳۰+۴=۷۴$ مثلث وجود دارد.



راه‌حل دوم تعداد انتخاب‌های ۳ نقطه از ۹ نقطه برابر $\binom{۹}{۳}$ اسـت که اگر هر سه نقطه روی یک خط نباشند، می‌توانند رأس‌های یک مثلث باشند. پس تعداد حالت هایی را که سـه نقطه روی یک خط هسـتند، یعنی $\binom{۵}{۳}$ را از تعداد کل حالت‌ها کم می‌کنیم: $\binom{۹}{۳}-\binom{۵}{۳}=۷۴$.

۱۴۳۵- گزینهٔ ۳ هر مسـتطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از ۹ خط افقی و ۹ خط عمودی شـکل زیر به‌وجود می‌آید. برای اینکه مسـتطیل‌ها ۳×۵ یا ۵×۳ باشـند، بایـد فاصلهٔ دو خط مـوازی ۳ واحـد و فاصلهٔ دو خط موازی دیگر ۵ واحد باشد. برای رسم مستطیل‌های ۵×۳ یکی از خطوط ۱ تا ۶ افقـی را می‌توانیم به $\binom{۶}{۱}$ روش انتخـاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصلهٔ ۳ واحد رسم می‌شود. همچنین یکی از خطوط عمودی ۱ تا ۴ را می‌توانیم به $\binom{۴}{۱}$ روش انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصلهٔ ۵ واحد رسم می‌شـود. بنابراین ۶×۴=۲۴ مستطیل ۵×۳ وجود دارد. به‌همین ترتیب ۲۴ مستطیل ۳×۵ وجود دارد. پس جمعاً ۴۸ مستطیل با ابعاد ۳ و ۵ وجود دارد.



۱۴۳۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** به چند روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

الف) یک بازیکن از تیم A و دو بازیکن از تیم B را به $\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}=۶\times۱۰=۶۰$ طریق انتخاب کنیم.

ب) دو بازیکن از تیم A و یک بازیکن از تیم B را به $\binom{۶}{۲}\binom{۵}{۱}=۱۵\times۵=۷۵$ طریق انتخاب کنیم.

پ) سه بازیکن از تیم A و صفر بازیکن از تیم B را به $\binom{۶}{۳}\binom{۵}{۰}=۲۰\times۱=۲۰$ طریق انتخاب کنیم.

بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با

$$\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۶}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۶}{۳}\binom{۵}{۰}=۱۵۵$$

راه‌حل دوم تعداد راه‌های انتخاب سـه نفر از یـازده نفر بازیکن هر دو تیم برابر $\binom{۱۱}{۳}=۱۶۵$ است و تعداد راه‌هایی که در آن‌ها هیچ بازیکنی از تیم A انتخاب نشـود برابر با $\binom{۵}{۳}=۱۰$ است. پس بنابر اصل متمم، تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{۱۱}{۳}-\binom{۵}{۳}=۱۵۵$$

۱۴۳۷- گزینهٔ ۴ شـش جای خالی در نظر بگیرید کـه می‌خواهیم در آن‌ها ارقام ۱ تا ۵ را بنویسـیم. ابتدا ۴ جای خالی را از این ۶ جا انتخاب می‌کنیم و در آن‌ها یکی از ارقام ۱، ۳ یا ۵ را می‌نویسـیم. سـپس در ۲ جای باقی‌مانده یکی از ارقام ۲ یا ۴ را می‌نویسیم:

$$\underbrace{\binom{۶}{۴}}_{\text{انتخاب جای ارقام فرد}}\times\overbrace{۳\times۳\times۳\times۳}^{\text{نوشتن ارقام فرد در ۴ جای انتخاب شده}}\times\underbrace{۲\times۲}_{\text{نوشتن ارقام ۲ یا ۴ در ۲ جای باقی مانده}}=۴۸۶۰$$

۱۴۳۸- گزینهٔ ۲ اعداد ۱ و ۲ را باید در زیرمجموعه قرار دهیم. اعداد ۳، ۴ و ۵ را کنار می‌گذاریم تا عضو زیرمجموعه نباشند. دو عضو دیگر زیرمجموعه را از بین اعـداد ۶ تـا ۲۰ بـه $\binom{۱۵}{۲}=۱۰۵$ حالـت انتخـاب می‌کنیـم. بنابرایـن تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط مسئله برابر است با

$$\binom{۱۵}{۲}=۱۰۵$$

۱۴۳۹- گزینهٔ ۱ توجـه کنید که $۷\times۵\times۳\times۲=۲۱۰$. اکنـون اگر دو تا از عددهـای ۲، ۳، ۵ و ۷ را انتخـاب کنیـم، حاصل‌ضـرب آن‌هـا و دو عدد دیگر، ویژگی مورد نظر را دارند. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $\binom{۴}{۲}=۶$.

۱۴۴۰- گزینهٔ ۳ ابتدا یک جفت کفش را از ۶ جفت کفش به $\binom{۶}{۱}$ حالت انتخـاب می‌کنیـم. اکنون بایـد ۳ لنگه کفش را از بین ۵ جفـت کفش باقیمانده انتخـاب کنیـم طوری که هیچ دو لنگـه‌ای متعلق به یک جفت نباشـند. به این منظـور ابتـدا ۳ جفت کفش را از بیـن ۵ جفت کفش بـه $\binom{۵}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم، سپس از هر جفت کفش انتخاب شده یک لنگه را انتخاب می‌کنیم که ایـن کار به ۲×۲×۲ حالت امکان‌پذیر اسـت. پس تعـداد حالت‌های مورد نظر مسئله $\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۳}\times۲^۳=۴۸۰$ است.

۱۴۴۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-۱}}=\frac{\frac{n!}{r!(n-r)!}}{\frac{n!}{(r-۱)!(n-(r-۱))!}}=\frac{n-r+۱}{r}$$

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r+۱}}=\frac{\frac{n!}{r!(n-r)!}}{\frac{n!}{(r+۱)!(n-(r+۱))!}}=\frac{r+۱}{n-r}$$

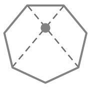
بنابراین

$$\begin{cases}\frac{n-r+۱}{r}=\frac{۸۴}{۳۶}=\frac{۷}{۳}\\ \frac{r+۱}{n-r}=\frac{۸۴}{۱۲۶}=\frac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳n-۱۰r+۳=۰\\ ۲n-۵r-۳=۰\end{cases}\Rightarrow n=۹\,,\,r=۳$$

پس $n+r=۱۲$.

۱۴۴۲- گزینهٔ ۲ چون ۲ معلم خاص باید حتماً در تیم باشند، پس باید تیمی ۳ نفره انتخاب کنیم که ۲ دانش‌آموز خاص در آن نباشند. این ۲ دانش‌آموز را حذف می‌کنیم. بنابراین باید تیمی ۳ نفره از میان ۹ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{۹}{۳}=۸۴$.

۱۴۴۳- گزینهٔ ۲ هر نقطهٔ برخورد مربوط به دو قطر و در نتیجه مربوط به ۴ رأس است. بنابراین تعداد نقطه‌های مورد نظر برابر است با



$$\binom{۷}{۴}=۳۵$$

۱۴۴۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** به دو روش می‌توان مثلث را رسم کرد:

روش اول دو رأس مثلث را از بین نقاط $A_۱$ تا $A_۴$ انتخاب کنیم و یک رأس مثلث را از بین نقاط $B_۱$ تا $B_۳$ انتخاب کنیم. تعداد این مثلث‌ها برابر است با

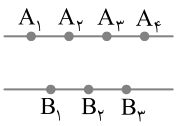
$$\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}=۶×۳=۱۸$$

روش دوم دو رأس مثلث را از بین نقاط $B_۱$ تا $B_۳$ انتخاب کنیم و یک رأس مثلث را از بین نقاط $A_۱$ تا $A_۴$ انتخاب کنیم. تعداد این مثلث‌ها برابر است با

$$\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}=۳×۴=۱۲$$

بنابراین تعداد کل مثلث‌ها برابر است با

$$\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}=۱۸+۱۲=۳۰$$



راه‌حل دوم ابتدا تعداد مثلث‌های قابل رسم با ۷ نقطه را محاسبه می‌کنیم. سپس تعداد مثلث‌هایی را که با ۴ نقطهٔ $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ و با ۳ نقطهٔ $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ قابل رسم هستند از آن کم می‌کنیم. پس

$$\binom{۷}{۳}-\binom{۴}{۳}-\binom{۳}{۳}=۳۵-۴-۱=۳۰$$

۱۴۴۵- گزینهٔ ۳ اگر سه سؤال از پنج سؤال اول را انتخاب کنیم، باید سه سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر $\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۳}=۱۰×۱۰=۱۰۰$ است. اگر چهار سؤال از پنج سؤال اول را انتخاب کنیم، باید دو سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر $\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۲}=۵×۱۰=۵۰$ است. اگر پنج سؤال از پنج سؤال اول را انتخاب کنیم باید یک سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر $\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۱}=۱×۵=۵$ است. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با

$$\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۱}=۱۰۰+۵۰+۵=۱۵۵$$

۱۴۴۶- گزینهٔ ۴ اگر هیچ مردی را انتخاب نکنیم، تعداد راه‌های انتخاب اعضای تیم برابر است با $\binom{۶}{۴}=۱۵$ و اگر یک مرد و سه زن انتخاب کنیم، تعداد راه‌ها برابر است با $\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۳}=۴×۲۰=۸۰$. بنابراین تعداد راه‌های انتخاب تیمی چهار نفره که حداکثر یک مرد عضو آن باشد (بدون انتخاب مدیر) برابر است با $\binom{۶}{۴}+\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۳}=۱۵+۸۰=۹۵$. تعداد راه‌های انتخاب مدیر هم برابر است با $\binom{۴}{۱}$. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{۴}{۱}\left(\binom{۶}{۴}+\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۳}\right)=۴×۹۵=۳۸۰$$

۱۴۴۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که در آن‌ها حرف t وجود دارد ولی حرف a وجود ندارد برابر است با $\binom{۶}{۴}×۵!=۱۵×۵!$.

به همین ترتیب، تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که در آن‌ها حرف a وجود دارد ولی حرف t وجود ندارد برابر است با $۱۵×۵!$. حال تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که در آن‌ها هر دو حرف a و t وجود دارند برابر است با $\binom{۶}{۳}×۵!=۲۰×۵!$

در نتیجه تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی مورد نظر برابر است با

$$۱۵×۵!+۱۵×۵!+۲۰×۵!=۵۰×۵!$$

راه‌حل دوم تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی حروف کلمهٔ هشت حرفی triangle برابر $P(۸,۵)$ اسـت. تعـداد جایگشـت‌های پنج حرفـی که هیچ کـدام از حـروف a و t را ندارند، برابر $P(۶,۵)$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با

$$P(۸,۵)-P(۶,۵)=\frac{۸!}{۳!}-\frac{۶!}{۱!}=\frac{۸!}{۶}-۶!=۶!(\frac{۷\times۸-۶}{۶})=۵!\times۵۰$$

۱۴۴۸- گزینهٔ ۳ عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰ را بر حسب زوج یا فرد بودن‌شان به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

عددهای دستهٔ اول: ۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹

عددهای دستهٔ دوم: ۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۰

بـرای اینکه مجموع چهار عدد مورد نظر زوج باشـد، یا بایـد هر چهار عدد را از دسـتهٔ اول انتخاب کنیم، یا باید دوتا از دسـتهٔ اول و دوتا از دسـتهٔ دوم انتخاب کنیـم، یـا باید هر چهار تا را از دسـتهٔ دوم انتخاب کنیـم. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۴}=۵+۱۰\times۱۰+۵=۱۱۰$.

۱۴۴۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حـل اول** ابتـدا یـک زوج را از شـش زوج به $\binom{۶}{۱}$ حالـت انتخـاب می‌کنیم. حالا باید دو نفر را از بیـن پنج زوج باقی‌مانده انتخاب کنیم به‌طوری که هیچ دو نفری زن و شـوهر نباشند. به این منظور ابتدا دو زوج را از بین پنج زوج به $\binom{۵}{۲}$ حالت انتخاب می‌کنیم، سـپس از هر زوج انتخاب شـده یک نفر را انتخاب می‌کنیم که این کار به ۲×۲ طریق امکان‌پذیر اسـت. پس تعداد راه‌های مورد نظر مسئله برابر است با

$$\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}\times۲^۲=۶\times۱۰\times۴=۲۴۰$$

راه‌حل دوم ابتدا یک زوج را از میان شش زوج به $\binom{۶}{۱}$ طریق انتخاب می‌کنیم و بـرای انتخـاب دو نفـر دیگـر، دو نفـر را از ده نفر باقی‌مانـده به $\binom{۱۰}{۲}$ طریق انتخاب می‌کنیم و پنج حالتی را که ممکن اسـت این دو نفر زن و شـوهر باشند، از انتخاب‌هایمان کم می‌کنیم. بنابراین تعداد انتخاب‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{۶}{۱}\times(\binom{۱۰}{۲}-۵)=۶\times(۴۵-۵)=۲۴۰$$

۱۴۵۰- گزینهٔ ۲ به شکل زیر توجه کنید:

$$\underbrace{۱\quad ۲\quad ۳\quad ۴}_{\text{دوتا رو و دوتا پشت}}\underbrace{۵}_{\text{رو}}\underbrace{۶\quad ۷\quad ۸\quad ۹\quad ۱۰}_{\text{پشت یا رو}}$$

پرتـاب پنجم باید رو بیاید پس یک حالت دارد. دو تا از چهار پرتاب اول باید رو بیایند که این کار به $\binom{۴}{۲}$ حالت امکان‌پذیر اسـت. دو پرتاب دیگر باید پشت بیایند که یک حالت دارد. پرتاب‌های ششـم تا دهم می‌توانند رو یا پشت بیایند که هر کدام دو حالت و کلاً $۲^۵$ حالت دارند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب مسئله برابر است با $\binom{۴}{۲}\times۲^۵=۶\times۳۲=۱۹۲$.

۱۴۵۱- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$n(S)=۲^۳=۸,\quad n(A)=\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}=۳+۳+۱=۷$$

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۸}$.

راه‌حل دوم احتمال اینکه سـکه هر سـه بار پشـت بیایـد، برابر $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$ است. بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر A باشد، $P(A)=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$.

۱۴۵۲- گزینهٔ ۱ تعـداد اعـداد دو رقمـی برابر $n(S)=۹۰$ اسـت. اعداد دو رقمـی مربـع کامل عبارت‌انـد از $۴^۲$، $۵^۲$، $۶^۲$، $۷^۲$، $۸^۲$ و $۹^۲$ که تعداد آن‌ها برابر $n(A)=۶$ اسـت. بنابراین احتمال مربـع کامل بودن عدد انتخاب شده برابر است با $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۹۰}=\frac{۱}{۱۵}$.

۱۴۵۳- گزینهٔ ۱ فضـای نمونـه‌ای این آزمایش ۶×۶=۳۶ عضـو دارد و پیشامد مطلوب به شکل زیر است

$$A=\{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۴),$$
$$(۵,۱),(۵,۵),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۶)\}$$

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۳۶}=\frac{۷}{۱۸}$.

۱۴۵۴- گزینهٔ ۳ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۴ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ که تعداد آن‌ها $n(S)=۸$ است. تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعـی و زوج ۲۴ برابـر $n(A)=۶$ اسـت. بنابرایـن احتمـال زوج بـودن مقسوم‌علیه انتخاب شده $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$ است.

۱۴۵۵- گزینهٔ ۴ تعـداد کل حالت‌های ممکن برای چیدن ۸ کتاب در یک قفسـه برابر !۸ است. اگر بخواهیم کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم باشند، ابتدا کتاب‌های ادبیات را به !۵ حالت کنار هم می‌چینیم. سـپس کتاب‌های ریاضی را به !۳ حالت کنار هم می‌چینیم و در آخر به !۲ حالت این دو دسته کتاب را در قفسـه قـرار می‌دهیـم. بنابرایـن اگـر A پیشـامد مـورد نظـر باشـد، آن‌گاه $n(A)=۵!۳!۲!$، پس $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!۳!۲!}{۸!}=\frac{۱}{۲۸}$.

۱۴۵۶- گزینهٔ ۲ تعداد کل مسـیرهایی که از شـهر A به شهر C می‌روند، برابر اسـت با ۴×۳+۲=۱۴ . دو مسـیر مستقیم از شهر A به شهر C است که از شـهر B عبور نمی‌کنند، ۱۲ مسـیر دیگر از شـهر B عبـور می‌کنند. بنابراین احتمال اینکه در مسیرمان از شهر B عبور کنیم، برابر $\frac{۱۲}{۱۴}=\frac{۶}{۷}$.

۱۴۵۷- گزینهٔ ۲ تعداد راه‌های انتخاب سـه مهره از ده مهره برابر است با $\binom{۱۰}{۳}$ و تعداد راه‌های انتخاب سـه مهرهٔ سفید از پنج مهرهٔ سفید برابر است با $\binom{۵}{۳}$. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۱۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۲}$.

۱۴۵۸- گزینهٔ ۳ چون A و B ناسازگارند، $P(A\cap B)=۰$. در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۱}{۹}+\frac{۵}{۶}=\frac{۱۷}{۱۸}$$

۱۴۵۹- گزینهٔ ۴ چون A و B ناسازگارند، پس $P(A\cap B)=۰$. از طرف دیگر $P(B)=۱-P(B')=\frac{۱}{۴}$. در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۴۶۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$۰/۶=P(A)+P(B)-۰/۲\Rightarrow P(A)+P(B)=۰/۸$$

بنابراین

$$P(A')+P(B')=(۱-P(A))+(۱-P(B))$$

$$=۲-(P(A)+P(B))=۲-۰/۸=۱/۲$$

۱۴۶۱- گزینهٔ ۱ فضای نمونه‌ای آزمایش ۶×۶ عضو دارد و پیشامد مطلوب برابر است با $A=\{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\}$.

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۶}$.

۱۴۶۲- گزینهٔ ۳ تعداد کل عددهای سه رقمی با رقم‌های متمایز که رقم‌های آن عضو مجموعهٔ $\{۰,۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشند برابر است با $۵\times۵\times۴$، یعنی $n(S)=۱۰۰$. توجه کنید که اگر رقم صفر را انتخاب کنیم نمی‌توان عدد سه رقمی با شرایط گفته شده نوشت. پس از ۵ رقم دیگر سه رقم را انتخاب می‌کنیم. با این سه رقم انتخاب شده فقط به یک طریق می‌توانیم یک عدد با شرایط خواسته شده بنویسیم بنابراین اگر A پیشامد این باشد که رقم‌ها صعودی باشند، آن‌گاه $n(A)=\binom{۵}{۳}=۱۰$. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰}$.

۱۴۶۳- گزینهٔ ۲ تعداد کل اعداد سه رقمی برابر $۹\times۱۰\times۱۰$ است. اگر بخواهیم رقم تکراری نداشته باشیم، تعداد اعداد برابر $۹\times۹\times۸$ خواهد بود. بنابراین احتمال اینکه عدد نوشته شده دارای رقم‌های تکراری نباشد یعنی رقم‌های آن متفاوت باشند، برابر است با $\frac{۹\times۹\times۸}{۹\times۱۰\times۱۰}=۰/۷۲$.

۱۴۶۴- گزینهٔ ۱ تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ هفت حرفی society برابر با $۷!$ است. سه حرف صدادار کلمهٔ society را یک حرف در نظر می‌گیریم. در این صورت پنج حرف داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر $۵!$ است و چون تعداد جایگشت‌های حروف صدادار هم $۳!$ است، پس تعداد جایگشت‌هایی که حروف صدادار کنار هم هستند برابر $۵!\times۳!$ است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{۵!\times۳!}{۷!}=\frac{۱}{۷}$.

۱۴۶۵- گزینهٔ ۴ فضای نمونه‌ای این آزمایش $۷!$ عضو دارد، یعنی $n(S)=۷!$. اگر A پیشامد مطلوب مسئله باشد، تعداد اعضای A برابر است با $n(A)=۴!\times۳!$. (ابتدا کتاب‌های ریاضی را به $۴!$ حالت در ◯ها می‌چینیم، سپس در مکان‌های بین آن‌ها کتاب‌های فیزیک را به $۳!$ حالت در ▭ها می‌چینیم.)

◯▭◯▭◯▭◯

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴!\times۳!}{۷!}=\frac{۱}{۳۵}$$

۱۴۶۶- گزینهٔ ۲ تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ برابر $۲^۶-۱$ است و تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن برابر $\binom{۶}{۲}$ است. بنابراین احتمال دو عضوی بودن زیرمجموعهٔ انتخاب شده برابر است با

$$\frac{\binom{۶}{۲}}{۲^۶-۱}=\frac{۱۵}{۶۳}=\frac{۵}{۲۱}$$

۱۴۶۷- گزینهٔ ۳ انتخاب سه مهره از ۹ مهره به $\binom{۹}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است و تعداد راه‌هایی که دو تا از آن‌ها سفید باشند برابر است با

$$\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}=۱۸$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{۱۸}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱۸}{۸۴}=\frac{۳}{۱۴}$.

۱۴۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۶}\ ,\quad P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین

$$P((A\cup B)')=۱-P(A\cup B)=۱-P(A)-P(B)=۱-\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

۱۴۶۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(A)+P(B)=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

$$P(A')+P(B')=۱-P(A)+۱-P(B)=۲-(P(A)+P(B))=۲-\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۱۴۷۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۹}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}$.

از طرف دیگر،

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{۱}{۲}=P(A)+\frac{۱}{۱۰}-P(A\cap B)$$

بنابراین $P(A)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$.

۱۴۷۱- گزینهٔ ۴ فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو است که در ۶ عضو آن به‌صورت $(۱,۱),(۲,۲),\ldots,(۶,۶)$ عددهای روی دو تاس برابر هستند و در بقیه برابر نیستند. پس در ۳۰ حالت عدد روی تاس‌ها فرق دارند. بنابراین احتمال پیشامد مطلوب $\frac{۳۰}{۳۶}$ یا همان $\frac{۵}{۶}$ است.

۱۴۷۲- گزینهٔ ۲ تعداد کل عددهای سه رقمی با رقم‌های متمایز برابر است با $۹\times۹\times۸$. پس $n(S)=۹\times۹\times۸$. اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $n(A)=۸\times۸\times۵$. بنابراین

$$P(A)=\frac{۸\times۸\times۵}{۹\times۹\times۸}=\frac{۴۰}{۸۱}$$

۱۴۷۳- گزینهٔ ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش به شکل زیر است:

$$S=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

پیشامد اینکه حاصل جمع دو عدد ۵ باشد به شکل $A=\{(۲,۳),(۳,۲)\}$ است. بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$.

۱۴۷۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فضای نمونه‌ای $۲^۵$ عضو دارد، پس $n(S)=۲^۵=۳۲$. اگر تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد، باید تعداد فرزندان دختر ۵، ۴ یا ۳ باشد. پس تعداد اعضای این پیشامد برابر است با $n(A)=\binom{۵}{۵}+\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۳}=۱۶$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۳۲}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم چون تعداد کل فرزندان خانواده فرد است، پس در نیمی از حالات تعداد دختران بیشتر از تعداد پسران و در نیمی دیگر از حالات برعکس است. همچنین، هرگز تعداد دختران و پسران این خانواده برابر نمی‌شود. بنابراین $P(A)=\frac{۱}{۲}$.

۱۴۷۵- گزینهٔ ۲ تعداد راه‌های انتخاب دو عدد از میان ده عدد داده شده برابر است با $n(S)=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$. از طرف دیگر، اگر A پیشامد مورد نظر باشد $A=\{\{۱,۳\},\{۲,۴\},\ldots,\{۸,۱۰\}\}$. پس $n(A)=۸$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۴۵}$$

۱۴۷۶- گزینهٔ ۴ تعداد راه‌های انتخاب زیرمجموعه‌ای سه عضوی از مجموعهٔ هفت عضوی داده شده برابر است با $n(S)=\binom{۷}{۳}=۳۵$. برای اینکه حاصل‌ضرب عضوهای زیرمجموعهٔ انتخاب شده منفی باشد، باید یک عضوش منفی باشد و دو عضو دیگرش مثبت باشند یا هر سه عضوش منفی باشند. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

$$n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}=۱۰$$

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۳۵}=\frac{۲}{۷}$.

۱۴۷۷- گزینهٔ ۴ تعداد کل مهره‌های کیسه برابر ۱۴ است و تعداد راه‌های انتخاب سه مهره از این ۱۴ مهره برابر است با $n(S)=\binom{۱۴}{۳}$. اگر A پیشامد این باشد که دقیقاً یک مهرهٔ سبز انتخاب شود، دو مهرهٔ دیگر را باید از هفت مهرهٔ آبی یا قرمز انتخاب کنیم. بنابراین $n(A)=\binom{۷}{۱}\binom{۷}{۲}$.

در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۷}{۱}\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۴}{۳}}=\frac{۲۱}{۵۲}$$

۱۴۷۸- گزینهٔ ۳ با توجه به رابطهٔ $P(A)=۱-P(A')$،

$$P(A)=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\quad,\quad P(B)=۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{۱۷}{۲۴}=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}$$

در نتیجه $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۵}{۲۴}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۵}{۶}$.

۱۴۷۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فرض کنید $n(S)=s$. در این صورت

$$P(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}\Rightarrow n(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}s\;,\quad P(A')=\frac{۵}{۸}\Rightarrow n(A')=\frac{۵}{۸}s$$

از روی نمودار وِن زیر و تساوی‌های بالا معلوم می‌شود که

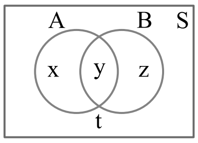
$$y=\frac{۵}{۲۴}s\;,\quad z+t=\frac{۵}{۸}s$$

اکنون توجه کنید که

$$x+y+z+t=s\Rightarrow x+\frac{۵}{۲۴}s+\frac{۵}{۸}s=s\Rightarrow x=s-\frac{۵}{۲۴}s-\frac{۵}{۸}s=\frac{۱}{۶}s$$

به این ترتیب

$$P(A\cap B')=\frac{n(A\cap B')}{n(S)}=\frac{x}{s}=\frac{۱}{۶}$$



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$=(۱-\frac{۵}{۸})-\frac{۵}{۲۴}=\frac{۳}{۸}-\frac{۵}{۲۴}=\frac{۴}{۲۴}=\frac{۱}{۶}$$

۱۴۸۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** می‌دانیم $۰\le P(A)\le۱$، پس

$$۰\le\frac{k}{۳}\le۱\Rightarrow۰\le k\le۳\qquad(۱)$$

چون A و B ناسازگارند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{k}{۳}+P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}-\frac{k}{۳}$$

از طرفی $۰\le P(B)\le۱$، در نتیجه

$$۰\le\frac{۱}{۲}-\frac{k}{۳}\le۱\Rightarrow-\frac{۱}{۲}\le-\frac{k}{۳}\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow-\frac{۳}{۲}\le k\le\frac{۳}{۲}\qquad(۲)$$

با توجه به نابرابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $۰\le k\le\frac{۳}{۲}$.

راه‌حل دوم چون $A\subseteq A\cup B$ پس $۰\le P(A)\le P(A\cup B)$.

بنابراین $۰\le\frac{k}{۳}\le\frac{۱}{۲}$، پس $۰\le k\le\frac{۳}{۲}$.

۱۴۸۱- گزینهٔ ۲ فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس ۳۶ عضو دارد. اگر A پیشامد این باشد که مجموع عددهای رو شده در تاس‌ها بیشتر از ۸ باشد، آن‌گاه

$$A=\{(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),$$
$$(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$.

۱۴۸۲- گزینهٔ ۳ در اینجا $n(S)=۴×۳×۲=۲۴$. اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$A=\{\{۱,-۱,۰\},\{۲,-۲,۰\},\{۳,۰,-۳\},\{۴,-۱,-۳\}\}$$

در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۲۴}=\frac{۱}{۶}$.

۱۴۸۳- گزینهٔ ۴ چون می‌دانیم عدد رو شده روی دو تاس، اول است، پس هریک از تاس‌ها می‌توانند ۲، ۳ یا ۵ بیایند. بنابراین فضای نمونه‌ای این آزمایش دارای ۳×۳ حالت است یعنی $n(S)=۹$. فقط در یک حالت که عدد روی هر دو تاس ۲ بیاید، عدد روی هر دو تاس زوج خواهد بود. پس $n(A)=۱$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۹}$$

۱۴۸۴- گزینهٔ ۱ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $۸!$ و تعداد حالت‌هایی که دو برادر در ابتدا و انتهای صف می ایستند برابر $۲×۶!$ است. بنابراین احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با $\frac{۲×۶!}{۸!}=\frac{۱}{۲۸}$.

۱۴۸۵- گزینهٔ ۲ تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی کلمهٔ نُه حرفی logarithm برابر $P(۹,۵)$ است. تعداد جایگشت‌هایی که هیچ‌کدام از حروف t و g را ندارند برابر $P(۷,۵)$ است، پس تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با $P(۹,۵)-P(۷,۵)$. بنابراین احتمال اینکه در جایگشت انتخاب شده حداقل یکی از حروف t و g وجود داشته باشد، برابر است با

$$\frac{P(۹,۵)-P(۷,۵)}{P(۹,۵)}=۱-\frac{P(۷,۵)}{P(۹,۵)}=۱-\frac{\frac{۷!}{۲!}}{\frac{۹!}{۴!}}=۱-\frac{۷!×۴!}{۹!×۲!}=۱-\frac{۴×۳}{۸×۹}=\frac{۵}{۶}$$

۱۴۸۶- گزینهٔ ۳ در کل تعداد افراد برابر است با $۲×۵=۱۰$ ، در نتیجه تعداد راه‌های انتخاب سه نفر از این ده نفر برابر است با $n(S)=\binom{۱۰}{۳}$. برای اینکه از این سه نفر هیچ دو نفری زن و شوهر نباشند، باید از هر زوج حداکثر یک نفر را انتخاب کنیم، یعنی باید ابتدا سه زوج را انتخاب کنیم و سپس از هر زوج، یک نفر را انتخاب کنیم. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد، $n(A)=\binom{۵}{۳}×۲×۲×۲$. به این ترتیب

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۵}{۳}۲^۳}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۸۰}{۱۲۰}=\frac{۲}{۳}$$

۱۴۸۷- گزینهٔ ۱ تعداد کل مهره‌ها برابر است با $۳+۴+۵=۱۲$ و تعداد راه‌های انتخاب سه مهره از این ۱۲ مهره برابر است با

$$n(S)=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$$

اگر A پیشامد این باشد که مهره‌ها به سه رنگ مختلف باشند، آن‌گاه

$$n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}=۶۰$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۰}{۲۲۰}=\frac{۳}{۱۱}$$

۱۴۸۸- گزینهٔ ۳ فضای نمونه‌ای آزمایش $\binom{n}{۲}$ عضو دارد. اگر A پیشامد سفید بودن هر دو مهره باشد، تعداد اعضای A برابر $\binom{۴}{۲}$ است.

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{n}{۲}}=\frac{۶}{\frac{n(n-۱)}{۲}}=\frac{۱۲}{n(n-۱)}=\frac{۲}{۱۵}$$

پس

$$n(n-۱)=۹۰\Rightarrow n^۲-n-۹۰=۰\Rightarrow(n-۱۰)(n+۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۱۰\\ n=-۹\ \text{(غ.ق.ق.)}\end{cases}$$

۱۴۸۹- گزینهٔ ۱ از تساوی $P(B')=۳P(A')$ نتیجه می‌شود

$$۱-P(B)=۳(۱-P(A))\Rightarrow۱-P(B)=۳-۳P(A)\Rightarrow P(B)=۳P(A)-۲$$

با توجه به اینکه $P(A)=۲P(B)$ ، در تساوی فوق به جای $P(A)$ قرار می‌دهیم $۲P(B)$ و نتیجه می‌شود

$$P(B)=۶P(B)-۲\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۵}$$

پس $P(A)=\frac{۴}{۵}$ و در نتیجه $P(A)+P(B)=\frac{۶}{۵}$.

۱۴۹۰- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$ ، نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۶}\le\frac{k}{۳}\le\frac{۲}{۳}\xrightarrow{×۳}\frac{۱}{۲}\le k\le۲$$

۱۴۹۱- گزینهٔ ۴ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش $۶^۴$ است. یعنی $n(S)=۶^۴$. اگر A پیشامد این باشد که دقیقاً در دو پرتاب عدد ۶ ظاهر شود، آن‌گاه $n(A)=\binom{۴}{۲}×۱×۱×۵^۲$ (توجه کنید که کافی است دو پرتاب از چهار پرتاب را انتخاب کنیم که در آن‌ها به یک حالت عدد ۶ ظاهر می‌شود و در دو پرتاب باقی‌مانده به پنج حالت عددهای دیگری ظاهر شوند). بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}×۵^۲}{۶^۴}=\frac{۲۵}{۲۱۶}$$

۱۴۹۲- گزینهٔ ۱ تعداد راه‌های انتخاب ۲ عدد از میان ۲۰ عدد داده شده برابر است با $n(S)=\binom{۲۰}{۲}=۱۹۰$. از طرف دیگر، اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

$$A=\{\{۱,۲\},\{۲,۳\},\{۳,۴\},\{۴,۵\},\dots,\{۱۹,۲۰\}\}$$

پس $n(A)=۱۹$ و در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۹}{۱۹۰}=\frac{۱}{۱۰}$.

۱۴۹۳- گزینهٔ ۳ در اینجا $n(S)=\binom{۲۵}{۲}=۳۰۰$. فرض کنید A پیشامد مورد نظر باشد. در این صورت A' پیشامد این است که هر دو خانه در یک سطر یا یک ستون باشند. همچنین، تعداد راه‌های انتخاب دو خانه از یک سطر یا دو خانه از یک ستون هر کدام برابر است با $\binom{۵}{۲}$ و چون ۵ سطر و ۵ ستون داریم، پس

$$n(A')=۵\times\binom{۵}{۲}+۵\times\binom{۵}{۲}=۵\times۱۰+۵\times۱۰=۱۰۰$$

بنابراین $P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۱۰۰}{۳۰۰}=\frac{۱}{۳}$، پس

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۱۴۹۴- گزینهٔ ۲ تعداد مهره‌ها $۲n-۲$ است، پس $n(S)=\binom{۲n-۲}{۲}$. اگر A پیشامد غیرهمرنگ بودن مهره باشد، $n(A)=\binom{n}{۱}\binom{n-۲}{۱}$. زیرا باید یک مهرهٔ آبی و یک مهرهٔ قرمز انتخاب کنیم. بنابراین

$$P(A)=\frac{\binom{n}{۱}\binom{n-۲}{۱}}{\binom{۲n-۲}{۲}}=\frac{n(n-۲)}{\frac{(۲n-۲)(۲n-۳)}{۲}}=\frac{n(n-۲)}{(n-۱)(۲n-۳)}=\frac{۸}{۱۵}$$

پس

$$۱۵n(n-۲)=۸(n-۱)(۲n-۳)\Rightarrow ۱۵n^{۲}-۳۰n=۱۶n^{۲}-۴۰n+۲۴$$

$$n^{۲}-۱۰n+۲۴=۰\Rightarrow (n-۶)(n-۴)=۰\Rightarrow n=۶ \quad \text{یا} \quad n=۴$$

تعداد کل مهره‌ها $۲n-۲$ است، پس تعداد مهره‌ها در کیسه ۶ یا ۱۰ تاست.

۱۴۹۵- گزینهٔ ۱ اگر A را پیشامد مضرب ۳ بودن عدد و B را پیشامد مضرب ۸ بودن آن در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$n(A)=\frac{۶۹-۳}{۳}+۱=۲۳\Rightarrow P(A)=\frac{۲۳}{۷۰}$$

$$n(B)=\frac{۶۴-۸}{۸}+۱=۸\Rightarrow P(B)=\frac{۸}{۷۰}$$

اعدادی که مضرب ۳ و ۸ باشند، مضرب ۲۴ هستند.

$$A\cap B=\{۲۴,۴۸\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۷۰}$$

بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲۳}{۷۰}+\frac{۸}{۷۰}-\frac{۲}{۷۰}=\frac{۲۹}{۷۰}$$

۱۴۹۶- گزینهٔ ۲ در مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰\}$، تعداد اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیرند، ۳۳ تا $(۳,۶,۹,\dots,۹۶,۹۹)$ و تعداد اعدادی که بر ۷ بخش‌پذیرند، ۱۴ تا $(۷,۱۴,۲۱,\dots,۹۱,۹۸)$ است. پس اگر A را پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد بر ۳ و B را پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد بر ۷ بنامیم، آن‌گاه

$$P(A)=\frac{۳۳}{۱۰۰}\ ,\ P(B)=\frac{۱۴}{۱۰۰}\Rightarrow P(B')=۱-\frac{۱۴}{۱۰۰}=\frac{۸۶}{۱۰۰}$$

تعداد اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۷ بخش‌پذیر هستند، ۴ تا $(۲۱,۴۲,۶۳,۸۴)$ است. پس تعداد اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیر هستند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نیستند، برابر ۳۳−۴ تا است. پس

$$n(A\cap B')=۲۹\Rightarrow P(A\cap B')=\frac{۲۹}{۱۰۰}$$

می‌خواهیم $P(A\cup B')$ را محاسبه کنیم:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=\frac{۳۳}{۱۰۰}+\frac{۸۶}{۱۰۰}-\frac{۲۹}{۱۰۰}=\frac{۹۰}{۱۰۰}$$

۱۴۹۷- گزینهٔ ۲ کل حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۱۲ نفر برابر $\binom{۱۲}{۴}$ است. یعنی $n(S)=\binom{۱۲}{۴}$. تعداد حالت‌هایی که کمیته شامل هیچ زنی نیست برابر است با $\binom{۹}{۴}$. بنابراین اگر A پیشامد این باشد که کمیته شامل هیچ زنی نباشد آن‌گاه $n(A)=\binom{۹}{۴}$. بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۹}{۴}}{\binom{۱۲}{۴}}=\frac{۱۴}{۵۵}$.

پیشامد اینکه کمیته حداقل شامل یک زن باشد، متمم A است. پس

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱۴}{۵۵}=\frac{۴۱}{۵۵}$$

۱۴۹۸- گزینهٔ ۴ چون باید چهار نفر را از میان دوازده نفر انتخاب کنیم، پس $n(S)=\binom{۱۲}{۴}=۴۹۵$. توجه کنید که باید یک زوج انتخاب شوند، سپس باید دو زوج از پنج زوج دیگر انتخاب شوند و از هر کدام یک نفر انتخاب شوند. چون از هر یک از این زوج‌ها می‌توانیم زن یا شوهر را انتخاب کنیم، تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با $\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}۲^{۲}=۶\times۱۰\times۴=۲۴۰$.

به این ترتیب، احتمال موردنظر برابر است با $\frac{۱۶}{۳۳}$.

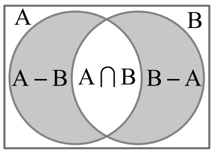
۱۴۹۹- گزینهٔ ۳ از تساوی‌های داده شده نتیجه می‌گیریم $P(A)=\frac{۱}{۸}$، $P(B)=\frac{۱}{۱۲}$ و $P(C)=\frac{۱}{۲۰}$. چون A، B و C پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار هستند، پس

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۰}=\frac{۳۱}{۱۲۰}$$

۱۵۰۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ اشتراک ندارند و اجتماع آن‌ها برابر $A\cup B$ است. پس

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B-A)+P(A\cap B)$$

$$=\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۱۰}+P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}+P(A\cap B)$$



چون $P(A\cup B)\le ۱$، پس

$$\frac{۱}{۲}+P(A\cap B)\le ۱\Rightarrow P(A\cap B)\le\frac{۱}{۲}$$

یعنی بیشترین مقدار $P(A\cap B)$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۵۰۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=۰/۳+۰/۲-۰/۵=۰$$

بنابراین $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۰$.

۱۵۰۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(A|B)=۴P(B|A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۴P(A\cap B)}{P(A)},\quad P(A\cap B)\neq ۰$$

$$۴P(B)=P(A)\Rightarrow\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{۱}{۴}$$

۱۵۰۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فرض کنید A پیشامد این باشد که نفر اول عضو تیم باشد و B پیشامد این باشد که نفر دوم نیز عضو تیم باشد. توجه کنید که $P(A)=\frac{۲}{۲۴}=\frac{۱}{۱۲}$. از طرف دیگر $P(B|A)=\frac{۱}{۲۳}$، پس احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۲۳}=\frac{۱}{۲۷۶}$$

راه‌حل دوم فضای نمونه‌ای این آزمایش انتخاب دو دانش‌آموز از ۲۴ دانش‌آموز این کلاس است که تعداد عضوهای آن برابر است با

$$n(S)=\binom{۲۴}{۲}=۲۷۶$$

اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $n(A)=\binom{۲}{۲}=۱$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۲۷۶}$$

۱۵۰۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که اختلاف عددهایی که آمده‌اند ۳ باشد و B پیشامد این باشد که دست‌کم یک بار ۲ آمده باشد. در این صورت

$$A=\{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۶),(۴,۱),(۵,۲),(۶,۳)\}$$

$$B=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶)\}$$

به این ترتیب، $A\cap B=\{(۲,۵),(۵,۲)\}$ و در نتیجه

$$P(B|A)=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۱۵۰۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** پیشامد «به هدف زدن شخص اول» را A و پیشامد «به هدف زدن شخص دوم» را B می‌نامیم. پس

$$P(A)=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(A')=۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶},\quad P(B)=\frac{۳}{۵}\Rightarrow P(B')=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

پیشامد «حداقل یکی از آن‌ها به هدف نزند» برابر $A'\cup B'$ است که چون A' و B' مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A')P(B')=\frac{۵}{۶}+\frac{۲}{۵}-\frac{۵}{۶}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۹}{۱۰}$$

راه‌حل دوم فرض کنید A پیشامد آن باشد که هر دو فرد تیر را به هدف بزنند. در این صورت مطلوب مسئله $P(A')$ است. چون زدن تیر دو شخص به هدف پیشامدهایی مستقل هستند، پس $P(A)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱}{۱۰}$. بنابراین

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}$$

۱۵۰۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A\cap B=\varnothing,\quad A\cap C=\{۲\},\quad A\cap D=\{۱\},\quad A\cap E=\{۱,۲\}$$

بنابراین A و B مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A\cap B)=۰,\quad P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

A و C مستقل از هم هستند، زیرا

$$P(A\cap C)=\frac{۱}{۴},\quad P(A)\times P(C)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

A و D مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A\cap D)=\frac{۱}{۴},\quad P(A)\times P(D)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۸}$$

A و E مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A\cap E)=\frac{۱}{۲},\quad P(A)\times P(E)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۸}$$

۱۵۰۷- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض مسئله،

$$P(A)=۱-P(A')=۰/۶,\quad P(B)=۱-P(B')=۰/۸$$

در نتیجه $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۶\times۰/۸=۰/۴۸$، بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۶+۰/۸-۰/۴۸=۰/۹۲$$

۱۵۰۸- گزینهٔ ۱ اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آن‌گاه A' و B نیز مستقل از هم هستند. بنابراین $P(B|A)=P(B)=\frac{۱}{۳}$ و

$$P(A'|B)=P(A')=\frac{۳}{۵}\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۵}$$

و در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۵}$$

۱۵۰۹- گزینهٔ ۴ فرض کنید A و B به‌ترتیب پیشامد این باشند که آقای فیضی و آقای تقوی در روز پنج‌شنبه سرکار بیایند. در این صورت $P(A\cup B)$ را می‌خواهیم. توجه کنید که پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۶}$$

۱۵۱۰- گزینهٔ ۱ بایـد احتمال متمم این پیشـامد را که عمـل برای هر دو ناموفق باشد، بیابیم.

احتمال عدم موفقیت برای هر دو نفر $=۰/۲\times۰/۳=۰/۰۶$

در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با $۱-۰/۰۶=۰/۹۴$.

۱۵۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B)+P(A')-P(B\cup A')}{P(A')}$$

$$=\frac{۱-P(B')+۱-P(A)-P(B\cup A')}{۱-P(A)}=\frac{۰/۲+۰/۳-۰/۴}{۰/۳}=\frac{۰/۱}{۰/۳}=\frac{۱}{۳}$$

۱۵۱۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$

$$=(۱-۰/۳)+(۱-۰/۴)-۰/۵=۰/۸$$

از طرف دیگر،

$$P(B|A\cup B')=\frac{P(B\cap(A\cup B'))}{P(A\cup B')}$$

$$=\frac{P(B)+P(A\cup B')-P(\overbrace{B\cup(A\cup B')}^{S})}{۰/۸}=\frac{۰/۴+۰/۸-۱}{۰/۸}=\frac{۰/۲}{۰/۸}=\frac{۱}{۴}$$

۱۵۱۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A|B)=۱۶P(B)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۱۶(B)\Rightarrow P(A\cap B)=۱۶(P(B))^۲$$

$$P(B|A)=۴P(A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=۴P(A)\Rightarrow P(A\cap B)=۴(P(A))^۲$$

بنابراین

$$۱۶(P(B))^۲=۴(P(A))^۲\Rightarrow\frac{(P(A))^۲}{(P(B))^۲}=۴\Rightarrow\frac{P(A)}{P(B)}=۲$$

۱۵۱۴- گزینهٔ ۲ اگـر A را پیشـامد مبتـلا شـدن فرد بـه بیمـاری و B را پیشامد بهبود یافتن فرد مبتلا شده در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$P(A)=۰/۰۷,\quad P(B|A)=۰/۶$$

بنابراین

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow۰/۶=\frac{P(A\cap B)}{۰/۰۷}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۰۴۲$$

پس احتمال اینکه فردی از این جامعه به بیماری مبتلا شـود، سـپس بهبود یابد برابر ۰/۰۴۲ است.

۱۵۱۵- گزینهٔ ۱ اگر A را پیشـامد «مضرب ۵ بودن عدد» و B را پیشامد «زوج بودن عدد» در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$n(A)=\frac{۱۰۰}{۵}=۲۰,\quad n(A\cap B)=\frac{۱۰۰}{۱۰}=۱۰$$

زیرا عددی که زوج و مضرب ۵ باشد، مضرب ۱۰ است. بنابراین

$$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

۱۵۱۶- گزینهٔ ۴ پیشامدهای A و B مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A\cap B=\{۲,۵\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)\times P(B)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

پیشامدهای A و C مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A\cap C=\{۲\}\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(A)\times P(C)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۴}$$

پیشامدهای A و D مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A\cap D=\{۲,۳\}\Rightarrow P(A\cap D)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)\times P(D)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

پیشامدهای A و E مستقل از هم هستند، زیرا

$$A\cap E=\{۲,۳\}\Rightarrow P(A\cap E)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)\times P(E)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۱۵۱۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید A پیشـامد این باشد که نفر اول به هدف بزند و B پیشـامد این باشـد که نفر دوم به هدف بزند. توجه کنید که $P(A)=۰/۷۵$ و $P(B)=۰/۸$. پیشـامدهای A و B مسـتقل‌اند و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=۰/۷۵+۰/۸-۰/۷۵\times۰/۸=۰/۹۵$$

راه‌حل دوم فرض کنید A پیشامد آن باشد که هیچ یک از این دو نفر به هدف نزنند. در این صورت مطلوب مسئله $P(A')$ است. چون به هدف زدن دو نفر پیشامدهای مستقل هستند، بنابراین به هدف نزدن آن‌ها نیز دو پیشامد مستقل هستند، پس $P(A)=۰/۲۵\times۰/۲=۰/۰۵$، بنابراین

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۰۵=۰/۹۵$$

۱۵۱۸- گزینهٔ ۳ چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$P(A\cap B)=P(A)(\frac{۱}{۴}-P(A))=\frac{۱}{۴}P(A)-P^۲(A)$$

اگـر فـرض کنیـم $P(A)=x$ آن‌گاه $P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}x-x^۲$. حداکثـر مقـدار عبارت $-x^۲+\frac{۱}{۴}x$ به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{\frac{۱}{۴}}{۲(-۱)}=\frac{۱}{۸}$ به‌دسـت می‌آید و برابر است با $-(\frac{۱}{۸})^۲+\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۸})=\frac{۱}{۶۴}$. پس حداکثر مقدار $P(A\cap B)$ برابر $\frac{۱}{۶۴}$ است.

۱۵۱۹- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشـامد این باشد که مهرهٔ بیرون آمده از کیسـهٔ اول سفید باشد و B پیشامد این باشد که مهرهٔ بیرون آمده از کیسهٔ دوم سـفید باشد. در این صورت $P(A)=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$. توجه کنید که پیشامدهای A و B مستقل‌اند. پس احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۵۲۰- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشـامد این باشـد کـه در روز مورد نظر، دانشجوی اول در کلاس حاضر باشد و B پیشامد این باشد که در روز مورد نظر، دانشـجوی دوم در کلاس حاضـر باشـد. در ایـن صـورت $P(A)=۰/۸$ و $P(B)=۰/۶$. توجه کنید که پیشـامدهای A و B مستقل‌اند، بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$=۰/۸+۰/۶-(۰/۸)(۰/۶)=۰/۹۲$$

۱۵۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا مقدار $P(A\cap B)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow۰/۳=\frac{P(A\cap B)}{۰/۴}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱۲$$

اکنون مقدار $P(B)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow۰/۸=\frac{۰/۱۲}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{۰/۱۲}{۰/۸}=۰/۱۵$$

۱۵۲۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A\cap B\subset A\cup B\Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cap B)=A\cap B$$

بنابراین

$$P(A\cup B|A\cap B)=\frac{P((A\cup B)\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=۱$$

۱۵۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۵}{۶}}=\frac{۶}{۵}P(A\cap B)$$

بنابراین باید حداکثر و حداقل مقدار $P(A\cap B)$ را حساب کنیم. توجه کنید که

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\frac{۴}{۵}+\frac{۵}{۶}-P(A\cup B)=\frac{۴۹}{۳۰}-P(A\cup B)$$

چون $P(A\cup B)\le ۱$ ، پس $P(A\cap B)\ge\frac{۴۹}{۳۰}-۱=\frac{۱۹}{۳۰}$ ، همچنین $P(A\cap B)\le P(A)$ ، در نتیجه حداکثر مقدار $P(A\cap B)$ برابر است با $\frac{۴}{۵}$ است. بنابراین $\frac{۱۹}{۳۰}\le P(A\cap B)\le\frac{۴}{۵}$. در نتیجه

$$\frac{۶}{۵}\times\frac{۱۹}{۳۰}\le P(A|B)\le\frac{۶}{۵}\times\frac{۴}{۵}\Rightarrow\frac{۱۹}{۲۵}\le P(A|B)\le\frac{۲۴}{۲۵}$$

بنابراین اختلاف بیشترین مقدار ممکن $P(A|B)$ و کمترین مقدار ممکن آن برابر است با $\frac{۲۴}{۲۵}-\frac{۱۹}{۲۵}=\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵}$.

۱۵۲۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که دست‌کم یک دستیار انتخاب شده باشد و B پیشامد این باشد که دقیقاً دو پزشک انتخاب شوند. توجه کنید که A' پیشامد این است که هیچ دستیاری انتخاب نشود، یعنی هر چهار نفر از میان هفت نفر پزشک انتخاب شده‌اند. بنابراین

$$P(A')=\frac{\binom{۷}{۴}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=\frac{۵}{۶}$$

از طرف دیگر، $A\cap B$ پیشامد این است که دو نفر پزشک و دو نفر دستیار انتخاب شده باشند. بنابراین

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{۷}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۳}{۱۰}$$

در نتیجه $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۳}{۱۰}}{\frac{۵}{۶}}=\frac{۹}{۲۵}$.

۱۵۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$A\cap B=\{۲\},\quad A\cap C=\{۲\},\quad B\cap C=\{۲,۵\}$$

از طرف دیگر

$$P(A)=\frac{۲}{۵},\quad P(B)=\frac{۳}{۵},\quad P(C)=\frac{۳}{۵}$$

بنابراین

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۵},\quad P(A)\times P(B)=\frac{۶}{۲۵}\neq P(A\cap B)$$

$$P(A\cap C)=\frac{۱}{۵},\quad P(A)\times P(C)=\frac{۶}{۲۵}\neq P(A\cap C)$$

$$P(B\cap C)=\frac{۲}{۵},\quad P(B)\times P(C)=\frac{۹}{۲۵}\neq P(B\cap C)$$

بنابراین هیچ دوتایی از پیشامدهای A ، B و C مستقل نیستند.

۱۵۲۶- گزینهٔ ۳ چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

اگر فرض کنیم $P(A)=x$ ، آن‌گاه

$$\frac{۲}{۳}=x+\frac{۳}{۲}x-x(\frac{۳}{۲}x)\Rightarrow ۹x^۲-۱۵x+۴=۰$$

$$(۳x-۱)(۳x-۴)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\ ,\ x=\frac{۴}{۳}$$

چون $۰\le P(A)\le ۱$ ، پس $x=\frac{۴}{۳}$ غیرقابل قبول است، بنابراین $P(A)=\frac{۱}{۳}$.

۱۵۲۷- گزینهٔ ۱ چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

فرض می‌کنیم $P(A)=x$ و در نتیجه

$$P(A\cup B)=\frac{۱}{۸}-x(\frac{۱}{۸}-x)=x^۲-\frac{۱}{۸}x+\frac{۱}{۸}$$

حداقل مقدار عبارت $x^۲-\frac{۱}{۸}x+\frac{۱}{۸}$ به‌ازای $x=-\frac{-\frac{۱}{۸}}{۲\times ۱}=\frac{۱}{۱۶}$ به‌دست می‌آید که برابر است با $(\frac{۱}{۱۶})^۲-\frac{۱}{۸}(\frac{۱}{۱۶})+\frac{۱}{۸}=\frac{۳۱}{۲۵۶}$.

بنابراین حداقل مقدار $P(A\cup B)$ برابر $\frac{۳۱}{۲۵۶}$ است.

۱۵۲۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ و $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگارند. بنابراین

$$P(A)=P((A-B)\cup(A\cap B))=P(A-B)+P(A\cap B)$$

بنابراین $P(A)-P(A-B)=P(A\cap B)$ و چون A و B مستقل از هم هستند، پس $P(A)-P(A-B)=P(A)\times P(B)$.

۱۵۲۹- گزینهٔ ۴ پیشامد A را تنها به مسافرت رفتن علی و پیشامد B را تنها به مسافرت رفتن محسن تعریف می‌کنیم. در نتیجه

$$P(A)=۰/۲,\quad P(B)=۰/۲۵$$

اکنون باید $P(A\cap B')$ را حساب کنیم. می‌دانیم این دو پیشامد مستقل هستند. در نتیجه

$$P(A\cap B')=P(A)\times P(B')=P(A)(۱-P(B))$$

$$=\frac{۲}{۱۰}\times(۱-۰/۲۵)=\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}=۰/۱۵=٪۱۵$$

۱۵۳۰- گزینهٔ ۴ احتمال قبولی مهدی در ریاضی را با $P(A)$ و احتمال قبولی در فیزیک را با $P(B)$ نشان می‌دهیم. با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت

$$P(B\cap A')=۰/۱۸$$

می‌دانیم این دو پیشامد (قبولی در فیزیک و ریاضی) مستقل از یکدیگرند. در نتیجه

$$P(B\cap A')=P(B)\times P(A')=P(B)(۱-P(A))=P(B)(۱-۰/۶)=۰/۱۸$$

بنابراین $P(B)=۰/۴۵$. در نتیجه $P(B')=۱-P(B)=۰/۵۵$.

۱۵۳۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در اینجا فضای نمونه‌ای $S=\{$ق آ, آ آ, آ ق, ق ق$\}$ است. فرض کنید $B_۲$ پیشامد این باشد که توپ دوم آبی و $R_۱$ و $B_۱$ به‌ترتیب پیشامدهای این باشند که توپ اول قرمز و توپ اول آبی باشد. در این صورت، چون $R_۱$ و $B_۱$ فضای نمونه‌ای S را افراز می‌کنند، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B_۲)=P(R_۱)P(B_۲|R_۱)+P(B_۱)P(B_۲|B_۱)$$

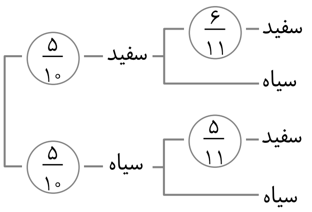
$$=\frac{۲}{۷}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۵}{۷}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۳۰}{۴۲}=\frac{۵}{۷}$$

۱۵۳۲- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که توپی که در کیسهٔ ۲ گذاشته‌ایم، سفید باشد و B پیشامد این باشد که توپی که از کیسهٔ ۲ بیرون آورده‌ایم، سفید باشد. روشن است که $P(A)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$. بنابر قانون احتمال کل،

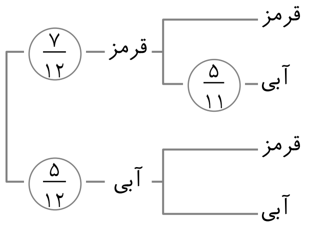
$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')=\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۱۶}$$

۱۵۳۳- گزینهٔ ۳ پیشامد اگر سفید بودن مهرهٔ آخر را با A نشان دهیم، با توجه به نمودار درختی زیر می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۱}+\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۱}=۰/۵$$



۱۵۳۴- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۵}{۱۱}=\frac{۳۵}{۱۳۲}$$

۱۵۳۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید B_i پیشامد انتخاب جعبهٔ i ام، $i=۱,۲,۳$ و A پیشامد سالم بودن لامپ انتخاب شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. چون $B_۱$ ، $B_۲$ و $B_۳$ فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+P(B_۳)P(A|B_۳)$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۸}=\frac{۵}{۱۸}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۰+۶+۹}{۳۶}=\frac{۲۵}{۳۶}$$

۱۵۳۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید B پیشامد انتخاب جعبهٔ اول برای افزودن ۳ مهرهٔ سیاه باشد. در این صورت B' پیشامد انتخاب جعبهٔ دوم برای افزودن ۳ مهرهٔ سیاه است. همچنین فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهرهٔ انتخاب شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم.

توجه کنید که اگر سه مهرهٔ سیاه به جعبهٔ اول اضافه شود، این جعبه شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه می‌شود، پس احتمال سفید بودن مهرهٔ انتخابی از این جعبه برابر $\frac{۵}{۱۰}$ می‌شود، یعنی $P(A|B)=\frac{۵}{۱۰}$ ، به طور مشابه $P(A|B')=\frac{۲}{۸}$. طبق قانون احتمال کل،

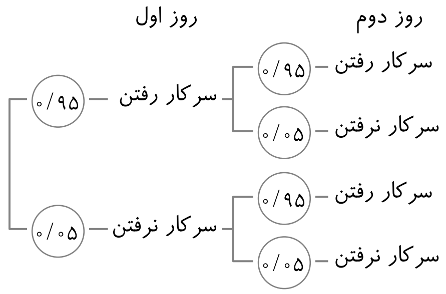
$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

۱۵۳۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید B پیشامد «رو» آمدن سکه و A پیشامد سفید بودن همهٔ مهره‌های خارج شده از ظرف باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=\overset{\text{سکه «رو» بیاید}}{P(B)}\ \overset{\text{انتخاب دو مهرهٔ سفید}}{P(A|B)}+\overset{\text{سکه «پشت» بیاید}}{P(B')}\ \overset{\text{انتخاب سه مهرهٔ سفید}}{P(A|B')}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۲۱}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳۵}=\frac{۱}{۷}+\frac{۲}{۳۵}=\frac{۷}{۳۵}=\frac{۱}{۵}$$

۱۵۳۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



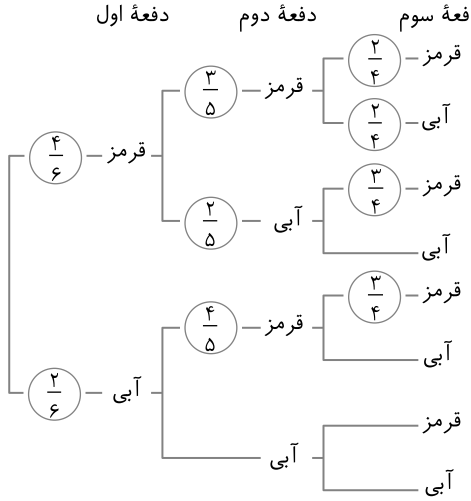
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$۰/۹۵\times۰/۹۵+۰/۹۵\times۰/۰۵+۰/۰۵\times۰/۹۵=۰/۹۹۷۵$$

راه‌حل دوم اگر A را پیشامد سرکار نرفتن حاج داود در آن دو روز متوالی در نظر بگیریم: $P(A)=(۱-\frac{۹۵}{۱۰۰})\times(۱-\frac{۹۵}{۱۰۰})=۰/۰۰۲۵$. پس احتمال آنکه حاج داود حداقل یک روز از آن دو روز را سرکار برود برابر است با

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۰۰۲۵=۰/۹۹۷۵$$

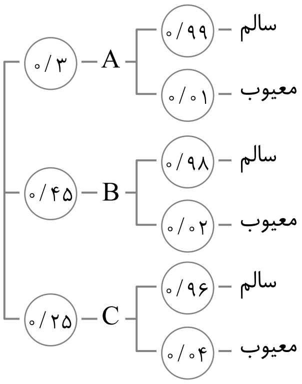
۱۵۳۹- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۴}{۵}$$

۱۵۴۰- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید.



راه‌حل اول

$$P(\text{سالم انتخاب شده})=۰/۳\times۰/۹۹+۰/۴۵\times۰/۹۸+۰/۲۵\times۰/۹۶=۰/۹۷۸$$

راه‌حل دوم اگر A را پیشامد معیوب بودن محصول را در نظر بگیریم:

$$P(A)=۰/۳\times۰/۰۱+۰/۴۵\times۰/۰۲+۰/۲۵\times۰/۰۴=۰/۰۲۲$$

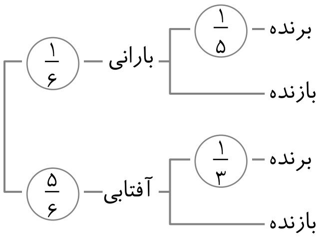
بنابراین احتمال سالم بودن این محصول برابر است با

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۰۲۲=۰/۹۷۸$$

۱۵۴۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$P(\text{مهرهٔ انتخابی سفید})$$
$$=P(\text{انتخاب جعبهٔ اول})P(\text{مهرهٔ انتخابی سفید}|\text{انتخاب جعبهٔ اول})$$
$$+P(\text{انتخاب جعبهٔ دوم})P(\text{مهرهٔ انتخابی سفید}|\text{انتخاب جعبهٔ دوم})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۷+۵}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۵}{۱۵+۲۱}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۷}{۲۴}+\frac{۵}{۲۴}=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$$

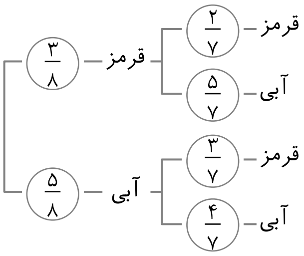
۱۵۴۲- گزینهٔ ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲۸}{۹۰}=\frac{۱۴}{۴۵}$$

۱۵۴۳- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



راه‌حل اول از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۷}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۵۰}{۵۶}=\frac{۲۵}{۲۸}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$P(\text{دست‌کم یکی آبی باشد})=۱-P(\text{هر دو قرمز باشند})=۱-\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۵۰}{۵۶}=\frac{۲۵}{۲۸}$$

۱۵۴۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید B این پیشامد باشد که فردا باران ببارد و A این پیشـامد باشد که فردا برق قطع شـود. باید $P(A')$ را حساب کنیم. ابتدا $P(A)$ را به کمک قانون احتمال کل به‌دست می‌آوریم:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$
$$=۰/۸\times۰/۱۵+(۱-۰/۸)\times۰/۰۵=۰/۱۲+۰/۰۱=۰/۱۳$$

در نتیجه

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۱۳=۰/۸۷$$

۱۵۴۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$P(\text{مطلوب})=\overset{\text{احتمال انتخاب جعبهٔ A}}{\frac{۱}{۲}}\times(\underset{\substack{\text{احتمال زوج}\\\text{بودن مهرهٔ اول}}}{\frac{۶}{۱۱}}\times\underset{\substack{\text{احتمال زوج}\\\text{بودن مهرهٔ دوم}}}{\frac{۵}{۱۰}})+\overset{\text{احتمال انتخاب جعبهٔ B}}{\frac{۱}{۲}}\times(\underset{\substack{\text{احتمال زوج}\\\text{بودن مهرهٔ اول}}}{\frac{۴}{۹}}\times\underset{\substack{\text{احتمال زوج}\\\text{بودن مهرهٔ دوم}}}{\frac{۳}{۸}})=\frac{۳}{۲۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲۹}{۱۳۲}$$

۱۵۴۶- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشـامد سفید بودن مهرهٔ انتخابی باشد و B پیشامد آن باشد که مهرهٔ انتخابی جزء مهره‌های اولیهٔ داخل ظرف باشد. در این صورت B' پیشـامد آن اسـت که مهرهٔ انتخابی جزء ۵ مهرهٔ سـفید اضافه شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

چون مهرهٔ انتخابی از بین ۱۰تا از مهره‌های اولیه و ۵ مهرهٔ اضافه شـده انتخاب شـده اسـت، پس $P(B)=\frac{۱۰}{۱۵}$ و $P(B')=\frac{۵}{۱۵}$. همچنین اگر مهرهٔ انتخابی از مهره‌های اولیه باشـد، احتمال سفید بودن آن برابر $\frac{۵}{۱۴}$ است و اگر از مهره‌های اضافه شده باشد، احتمال سفید بودن آن برابر ۱ است.

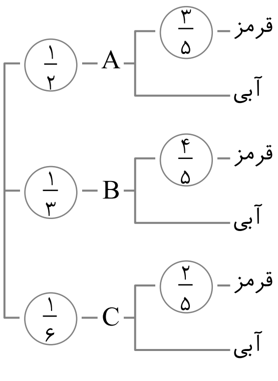
بنابراین

$$P(A|B)=\frac{۵}{۱۴},\quad P(A|B')=۱$$

در نتیجه

$$P(A)=\frac{۱۰}{۱۵}\times\frac{۵}{۱۴}+\frac{۵}{۱۵}\times۱=\frac{۵}{۲۱}+\frac{۱}{۳}=\frac{۵+۷}{۲۱}=\frac{۴}{۷}$$

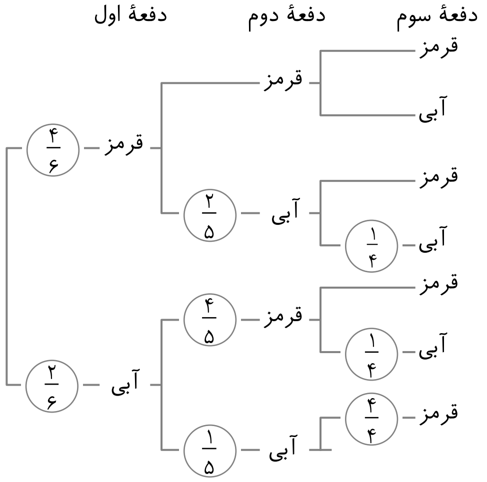
۱۵۴۷- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱۹}{۳۰}$$

۱۵۴۸- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۴}=\frac{۱}{۵}$$

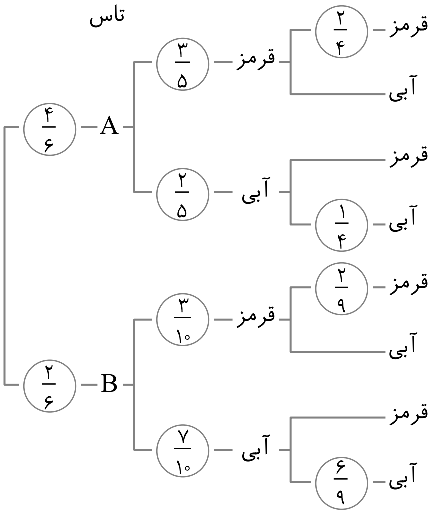
۱۵۴۹- گزینهٔ ۴ از احتمال متمم استفاده می‌کنیم، یعنی ابتدا احتمال این را که رنگ مهره‌ها یکسان باشد، پیدا می‌کنیم و از ۱ کم می‌کنیم. حالا اگر بخواهیم رنگ مهره‌ها یکسان باشد یعنی اینکه یا هر دو مهره سبز باشد یا هر دو سفید:

$$P(\text{رنگ‌ها یکسان باشد})=P(\text{هر دو سفید})+P(\text{هر دو سبز})$$

$$=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۶}{۸}+\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۲}{۸}=\frac{۲۶}{۸۰}=\frac{۱۳}{۴۰}$$

$$P(\text{رنگ‌ها متفاوت باشد})=۱-\frac{۱۳}{۴۰}=\frac{۲۷}{۴۰}$$

۱۵۵۰- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



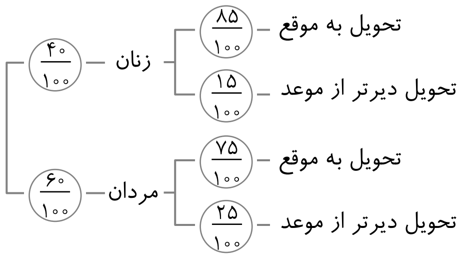
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۲}{۹}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}=\frac{۴}{۹}$$

۱۵۵۱- گزینهٔ ۲ فرض کنید R پیشامد قرمز بودن مهره و B پیشامد آبی بودن مهره باشد. در این صورت، اگر A پیشامد این باشد که یکی از مهره‌ها قرمز و دیگری آبی باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(R)P(A|R)+P(B)P(A|B)=\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۳۰}{۵۶}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

۱۵۵۲- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}+\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۲۱}{۱۰۰}=۰/۲۱$$

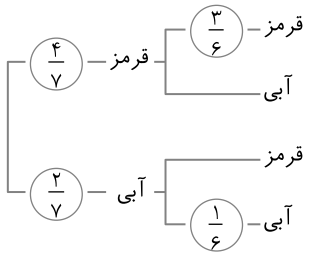
۱۵۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(\text{دو مهره همرنگ نباشند})=۱-P(\text{دو مهره همرنگ باشند})$$

بنابراین کافی است احتمال این را که دو مهره همرنگ باشند، حساب کنیم. توجه کنید که چون فقط یک مهرهٔ سبز در جعبه وجود دارد، امکان ندارد دو مهره سبز رنگ باشند. اکنون نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید. از روی این نمودار معلوم است که

$$P(\text{دو مهره همرنگ باشند})=\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}+\frac{۲}{۷}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱۴}{۴۲}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$.



۱۵۵۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید B پیشامد سفید بودن مهرهٔ اول و A پیشامد سفید بودن مهرهٔ دوم باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. چون B و B' فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند (توجه کنید B' پیشامد سیاه بودن مهرهٔ اول است)، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=\frac{۲}{۷}\times\frac{۵}{۷}+\frac{۵}{۷}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۳۰}{۴۹}$$

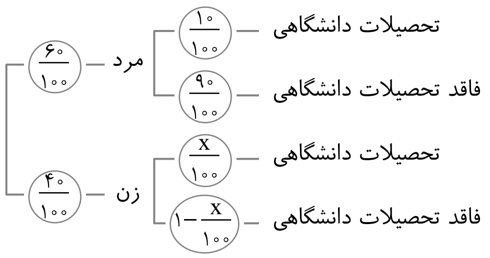
توجه کنید که اگر مهرهٔ اول سفید باشد، مهرهٔ دوم از بین ۵ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه انتخاب می‌شود، پس $P(A|B)=\frac{۵}{۷}$ و اگر مهرهٔ اول سیاه باشد، مهرهٔ دوم از بین ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه انتخاب می‌شود، پس $P(A|B')=\frac{۴}{۷}$.

۱۵۵۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که عددهای برابر نیایند (که از این‌ها $(۱,۳)$ و $(۳,۱)$ مطلوب‌اند)، B پیشامد این باشد که عددهای دو تاس برابر بیایند (که از اینها $(۱,۱)$ و سپس بار دیگر $(۱,۱)$ مطلوب‌اند) و C پیشامد این باشد که مجموع نهایی برابر ۴ باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$$

$$=\frac{۳۰}{۳۶}\times\frac{۲}{۳۰}+\frac{۶}{۳۶}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{۳۶^۲}=\frac{۷۲+۱}{۳۶^۲}=\frac{۷۳}{۳۶^۲}$$

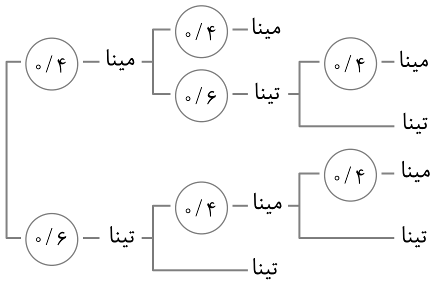
۱۵۵۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید x درصد زنانی باشند که تحصیلات دانشگاهی دارند، نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



با توجه به فرض مسئله،

$$(\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۰}{۱۰۰})+(\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{x}{۱۰۰})=\frac{۹۲}{۱۰۰۰}\Rightarrow ۰/۰۶+۰/۰۰۴x=۰/۰۹۲\Rightarrow x=۸$$

۱۵۵۷- گزینهٔ ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



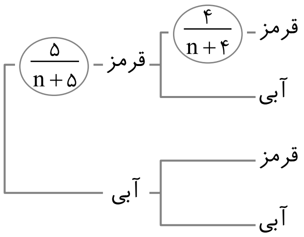
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$۰/۴\times۰/۴+۰/۴\times۰/۶\times۰/۴+۰/۶\times۰/۴\times۰/۴=\frac{۳۵۲}{۱۰۰۰}=\frac{۴۴}{۱۲۵}$$

۱۵۵۸- گزینهٔ ۱ فرض کنید $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ به‌ترتیب پیشامد این باشند که دانش‌آموز انتخاب شده در پایهٔ دهم، یازدهم یا دوازدهم باشد و A پیشامد این باشد که این دانش‌آموز به کارهای هنری علاقه‌مند است. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(A_۱)P(A|A_۱)+P(A_۲)P(A|A_۲)+P(A_۳)P(A|A_۳)$$
$$=۰/۴\times۰/۳+۰/۳\times۰/۴+۰/۳\times۰/۲=۰/۳$$

۱۵۵۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید تعداد مهره‌های آبی برابر n باشد. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۵}{n+۵}\times\frac{۴}{n+۴}=\frac{۲}{۱۱}\Rightarrow(n+۵)(n+۴)=۱۱\times۱۰\Rightarrow n^۲+۹n-۹۰=۰$$

$(n-۶)(n+۱۵)=۰\Rightarrow n=۶\ ,\ n=-۱۵$ (غ.ق.ق.)

۱۵۶۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید A، B و C به‌ترتیب پیشامد تیراندازی با این کمان‌ها باشند و D پیشامد اصابت تیر به هدف باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)$$
$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۹}{۱۰}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۸۵}{۱۰۰}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۸}{۱۰}=\frac{۲۵۵}{۳۰۰}=۰/۸۵$$

۱۵۶۱- گزینهٔ ۱

۱۵۶۲- گزینهٔ ۲

۱۵۶۳- گزینهٔ ۴

۱۵۶۴- گزینهٔ ۱

۱۵۶۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید $\overline{x}=\frac{x_۱+\cdots+x_n}{n}$. در این صورت

$$\frac{۳x_۱-۲+\cdots+۳x_n-۲}{n}=۳(\frac{x_۱+\cdots+x_n}{n})-۲=۳\overline{x}-۲=۱۳$$

بنابراین $\overline{x}=۵$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{۵x_۱+۲+\cdots+۵x_n+۲}{n}=۵(\frac{x_۱+\cdots+x_n}{n})+۲=۵\overline{x}+۲=۲۷$$

۱۵۶۶- گزینهٔ ۴ برای تعیین میانه، ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم. سپس اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، دادهٔ وسط و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو دادهٔ وسط را به عنوان میانه برمی‌گزینیم. پس

$$۳,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۲۰\Rightarrow m=\frac{۱۰+۱۲}{۲}=۱۱$$

۱۵۶۷- گزینهٔ ۴ ابتدا داده‌ها را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم

$$۵,۱۰,۱۲,۱۳,۱۴,۱۴,۱۵,۱۵,۱۵,۱۶,۱۷,۱۷,۱۸,۱۸,۱۹,۲۰$$

در نتیجه میانهٔ داده‌ها برابر است با ۱۵. برای داده‌های قبل و بعد از میانه، میانه‌ها برابر هستند با ۱۳/۵ و ۱۷/۵:

$$۵,۱۰,۱۲,\underbrace{۱۳,۱۴}_{۱۳/۵},۱۴,۱۵,۱۵ \qquad ۱۵,۱۶,۱۷,\underbrace{۱۷,۱۸}_{۱۷/۵},۱۸,۱۹,۲۰$$

۱۵۶۸- گزینهٔ ۲ واریانس داده‌ها تنها زمانی صفر است که همگی برابر باشند. فرض کنید $x_۱=x_۲=\cdots=x_۵=a$. در نتیجه با افزودن سه عدد جدید، $\overline{x}=۶=\frac{۵a+۵+۸+۱۰}{۸}=\frac{۵a+۲۳}{۸}$. در نتیجه $a=۵$. بنابراین واریانس داده‌ها برابر است با

$$\sigma^۲=\frac{۶\times(۵-۶)^۲+(۸-۶)^۲+(۱۰-۶)^۲}{۸}=\frac{۶+۴+۱۶}{۸}=\frac{۲۶}{۸}=۳/۲۵$$

۱۵۶۹- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $\overline{x}=\frac{x_۱+...+x_n}{n}$. در نتیجه میانگین عددهای $\frac{x_n}{۴}-۲,\ldots,\frac{x_۱}{۴}-۲$ برابر با $\frac{\overline{x}}{۴}-۲$ است. بنابراین

$$\sigma_۱^۲=\frac{(۲-\frac{x_۱}{۴}-۲+\frac{\overline{x}}{۴})^۲+\cdots+(۲-\frac{x_n}{۴}-۲+\frac{\overline{x}}{۴})^۲}{n}$$

در نتیجه

$$(۱/۲)^۲=\frac{۱}{۱۶}\times\frac{(x_۱-\overline{x})^۲+\cdots+(x_n-\overline{x})^۲}{n}$$
$$\frac{(x_۱-\overline{x})^۲+\cdots+(x_n-\overline{x})^۲}{n}=۱۶\times(۱/۲)^۲$$

همچنین با استدلال مشابه می‌توان دید

$$\sigma_۲^۲=\frac{(x_۱-۲-\overline{x}+۲)^۲+\cdots+(x_n-۲-\overline{x}+۲)^۲}{n}$$
$$=\frac{(x_۱-\overline{x})^۲+\cdots+(x_n-\overline{x})^۲}{n}=۱۶\times(۱/۲)^۲$$

بنابراین $\sigma_۲=۴\times۱/۲=۴/۸$.

۱۵۷۰- گزینهٔ ۱ اگـر به هر داده، $\overline{x}$ را اضافه کنیم، میانگین نیز به اندازهٔ $\overline{x}$ اضافه می‌شود اما انحراف معیار تغییر نمی‌کند. بنابراین

$$\overline{x}_{\text{جدید}}=\overline{x}+\overline{x}=۲\overline{x}\ ,\quad CV_{\text{جدید}}=\frac{\sigma}{۲\overline{x}}=\frac{۱}{۲}CV_{\text{قدیم}}=\frac{۱}{۲}\times۱/۲=۰/۶$$

۱۵۷۱- گزینهٔ ۱

۱۵۷۲- گزینهٔ ۲

۱۵۷۳- گزینهٔ ۳

۱۵۷۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\overline{x}=\frac{\text{مجموع نمرات ۸ درس}}{۸}=۱۲/۵$$

$$\text{مجموع نمرات ۸ درس}=۱۲/۵\times۸=۱۰۰$$

$$\overline{x'}=\frac{۱۰۰+۱۴+۱۶}{۱۰}=\frac{۱۳۰}{۱۰}=۱۳$$

۱۵۷۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\overline{x}=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}$. بنابراین

$$\overline{x'}=\frac{(x_۱+\overline{x})+(x_۲+۲\overline{x})+\cdots+(x_n+n\overline{x})}{n}$$

$$=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}+\overline{x}(\frac{۱+۲+\cdots+n}{n})$$

$$=\overline{x}+\overline{x}\,\frac{n(n+۱)}{۲n}=\overline{x}+(\frac{n+۱}{۲})\overline{x}=\overline{x}(\frac{n+۳}{۲})$$

۱۵۷۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\text{میانگین}:\overline{x}=\frac{۵+۲+۸}{۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵,\quad \sigma^۲=\frac{(۵-۵)^۲+(۲-۵)^۲+(۸-۵)^۲}{۳}=۶$$

۱۵۷۷- گزینهٔ ۱ ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x}=\frac{۱۰+۳\times۱۲+۲\times۱۳}{۶}=۱۲,\quad \sigma=\sqrt{\frac{(۱۰-۱۲)^۲+۳\times۰+۲\times۱}{۶}}=۱$$

۱۵۷۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\overline{x}=\frac{۸+۶+۵+۴+۲}{۵}\Rightarrow\overline{x}=۵$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(۸-۵)^۲+(۶-۵)^۲+(۵-۵)^۲+(۴-۵)^۲+(۲-۵)^۲}{۵}}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{۲۰}{۵}}=\sqrt{۴}=۲\ ,\quad CV=\frac{\sigma}{\overline{x}}\Rightarrow CV=\frac{۲}{۵}$$

۱۵۷۹- گزینهٔ ۳ اگر انحراف معیار داده‌ها برابر با صفر باشد، آن‌گاه داده‌ها با هم برابرند، پس

$$x_۱=x_۲=x_۳=۱۰$$

$$\overline{x}=\frac{x_۱+x_۲+x_۳+۲۰}{۴}=\frac{۱۰+۱۰+۱۰+۲۰}{۴}=\frac{۵۰}{۴}=۱۲/۵$$

۱۵۸۰- گزینهٔ ۳ می‌دانیم واریانس پانزده دادهٔ اول برابر ۱۴ و واریانس ده دادهٔ دوم برابر ۷/۹ است. از طرف دیگر میانگین هر دو گروه یکسان است، بنابراین

$$\frac{(x_۱-\overline{x})^۲+(x_۲-\overline{x})^۲+\cdots+(x_{۱۵}-\overline{x})^۲}{۱۵}=۱۴$$

$$\frac{(y_۱-\overline{x})^۲+(y_۲-\overline{x})^۲+\cdots+(y_{۱۰}-\overline{x})^۲}{۱۰}=۷/۹$$

واریانس همهٔ این داده‌ها برابر است با

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\overline{x})^۲+(x_۲-\overline{x})^۲+\cdots+(x_{۱۵}-\overline{x})^۲}{۲۵}$$

$$+\frac{(y_۱-\overline{x})^۲+(y_۲-\overline{x})^۲+\cdots+(y_{۱۰}-\overline{x})^۲}{۲۵}$$

$$=\frac{۱۴\times۱۵+۷/۹\times۱۰}{۲۵}=\frac{۲۱۰+۷۹}{۲۵}=\frac{۲۸۹}{۲۵}\Rightarrow\sigma=\frac{۱۷}{۵}=۳/۴$$

۱۵۸۱- گزینهٔ ۲ بـرای پیدا کـردن تعداد عددهـای مورد نظـر می‌توانیم تعـداد عددهایـی را که در آن‌ها رقـم ۵ و ۶ وجود ندارد از تعـداد کل عددهای سه‌رقمی کم کنیم. تعداد عددهای سه‌رقمی که در آن‌ها رقم ۵ و ۶ وجود ندارد، برابر است با تعداد عددهای سه‌رقمی که می‌توان با ۸ رقم ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷، ۸ و ۹ نوشـت. تعداد این عددها برابر اسـت با $۷\times۸\times۸=۴۴۸$. بنابراین تعداد عددهای سه‌رقمی که در آن‌ها ۵ یا ۶ وجود دارد برابر است با $۹۰۰-۴۴۸=۴۵۲$.

۱۵۸۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(n+۱,۳)=\frac{(n+۱)!}{(n-۲)!}=(n+۱)n(n-۱)$$

بنابراین

$$\frac{P(n+۱,۳)}{n+۱}=۵۶\Rightarrow\frac{(n+۱)n(n-۱)}{n+۱}=۵۶$$

$$n^۲-n-۵۶=۰\Rightarrow(n-۸)(n+۷)=۰\Rightarrow n=۸$$

۱۵۸۳- گزینهٔ ۳ تعـداد زیرمجموعه‌هـای k عضـوی یـک مجموعـهٔ n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است. بنابراین

$$۸\binom{n}{۳}=\binom{n}{۴}\Rightarrow\frac{۸n!}{۳!(n-۳)!}=\frac{n!}{۴!(n-۴)!}$$

$$\frac{۸n!}{۳!(n-۳)(n-۴)!}=\frac{n!}{۳!\times۴(n-۴)!}\Rightarrow n-۳=۳۲\Rightarrow n=۳۵$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی این مجموعه برابر است با

$$\binom{۳۵}{۲}=۵۹۵$$

۱۵۸۴- گزینهٔ ۱ فضـای نمونه‌ای ایـن آزمایش ۶×۶ عضـو دارد. فرض کنید A پیشـامد این باشـد که عدد پرتاب اول دو برابر عدد پرتاب دوم باشد. در این صورت $A=\{(۲,۱),(۴,۲),(۶,۳)\}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

بنابراین بنابر اصل متمم، احتمال مورد نظر برابر است با $P(A')=۱-P(A)=\frac{۱۱}{۱۲}$.

۱۵۸۵- گزینهٔ ۳ در اینجـا $n(S)=\binom{۱۰}{۳}$. بـرای اینکه هیـچ دو مهره‌ای همرنـگ نباشـند، بایـد از هـر رنـگ یـک مهـره خـارج شـود، یعنـی $n(A)=\binom{۵}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}$. بنابراین $P(A)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۱}{۴}$.

۱۵۸۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۷}{۸}=\frac{۱}{۸}$. از طرف دیگر،

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{۳}{۴}=P(A)+\frac{۱}{۸}-P(A\cap B)$$

بنابراین $P(A)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۸}=\frac{۵}{۸}$.

۱۵۸۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\begin{cases} P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{P(A|B)}{P(B|A)}=\frac{P(A)}{P(B)}$$

$$\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{۴}{۹}$$

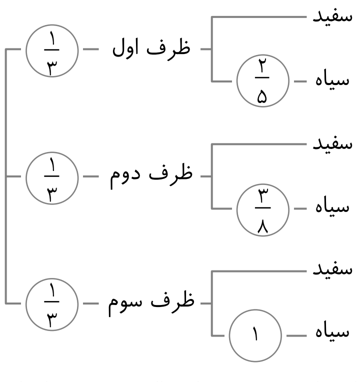
۱۵۸۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید B پیشامد سفید بودن مهرهٔ اول و A پیشامد سفید بودن مهرهٔ دوم باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم چون B و B' فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند (توجه کنید B' پیشـامد سـیاه بودن مهرهٔ اول است)، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=\frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۷}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۲۲}{۳۵}$$

توجه کنید که اگر مهرهٔ اول سفید باشد، مهرهٔ دوم از بین پنج مهرهٔ سفید و دو مهرهٔ سیاه انتخاب می‌شود، پس $P(A|B)=\frac{۵}{۷}$ و اگر مهرهٔ اول سیاه باشد، مهرهٔ دوم از بین چهار مهرهٔ سفید و سه مهرهٔ سیاه انتخاب می‌شود. پس

$$P(A|B')=\frac{۴}{۷}$$

۱۵۸۹- گزینهٔ ۱ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۳}\times۱=\frac{۷۱}{۱۲۰}$$

۱۵۹۰- گزینهٔ ۴ می‌دانیـم اگـر از هـر یـک از داده‌ها ۱۰ واحد کـم کنیم، واریانـس تغییـر نمی‌کنـد، پس بایـد مقدار a را طـوری پیدا کنیم کـه واریانس داده‌های $-۲,۱,۲,-۱,a-۱۰$ برابر ۶ شود.

توجه کنید که

$$\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲}{n}-(\overline{x})^۲$$

$$۶=\frac{۱}{۵}\left((-۲)^۲+۱^۲+۲^۲+(-۱)^۲+(a-۱۰)^۲\right)-\left(\frac{(-۲)+۱+۲+(-۱)+(a-۱۰)}{۵}\right)^۲$$

$$۶=\frac{۱۰+(a-۱۰)^۲}{۵}-\frac{(a-۱۰)^۲}{۲۵}\Rightarrow ۶=۲+\frac{۴(a-۱۰)^۲}{۲۵}$$

$$۴=\frac{۴(a-۱۰)^۲}{۲۵}\Rightarrow (a-۱۰)^۲=۲۵\Rightarrow a-۱۰=\pm۵\Rightarrow a=۱۵ \text{ یا } a=۵$$

۱۵۹۱- گزینهٔ ۲ هر تابع به‌صورت

$$f=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),(۴,d)\}$$

مطلوب مسئله است که در آن $a\neq۱$، $b\neq۲$، $c\neq۳$ و $d\neq۴$. در نتیجه برای a، b، c و d هـر کـدام سـه انتخـاب داریـم و تعـداد توابـع مـورد برابـر بـا $۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$ است.

۱۵۹۲- گزینهٔ ۲ ایـن دانش‌آموز یـا باید چهار تا از پنج سـؤال نخسـت را انتخاب کند و شـش سؤال از هشت سـؤال آخر، یا پنج سؤال نخست را انتخاب کند و پنج تا از هشت سؤال آخر. بنابراین تعداد انتخاب‌های او برابر است با

$$\binom{۵}{۴}\binom{۸}{۶}+\binom{۵}{۵}\binom{۸}{۵}=۱۹۶$$

۱۵۹۳- گزینهٔ ۲ هرطـور کـه دو نقطه از یک خـط و دو نقطـه از خط دیگر انتخاب کنیم، می‌توانیم یک چهارضلعی که رأس‌هایش این نقطه‌ها هسـتند رسم کنیم. بنابراین تعداد چهارضلعی‌های مورد نظر برابر است با $\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۲}=۶۰$.

۱۵۹۴- گزینهٔ ۲ چـون می‌دانیم حاصل‌جمع عددهای ظاهر شـده عددی اول است، پس فضای نمونه‌ای آزمایش به‌صورت زیر است

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۴),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲)$$
$$(۳,۴),(۴,۱),(۴,۳),(۵,۲),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۵)\}$$

پیشـامد مطلـوب کـه در آن مجمـوع عددهای ظاهر شـده ۷ اسـت به شـکل $A=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$ است. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

۱۵۹۵- گزینهٔ ۴ در اینجا $n(S)=۲^۵$. فرض کنید A پیشـامد مورد نظر باشـد. در این صـورت باید از پنج جای زیـر حداکثر دو جا را برای نوشـتن «ر» انتخاب کنیم. مثلاً

پ پ ر پ ر   یا   پ پ پ پ پ   یا   پ پ ر پ پ

بنابراین $n(A)=\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۰}=۱۰+۵+۱=۱۶$. در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۲^۵}=\frac{۱}{۲}$$

۱۵۹۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A'\cap B'\subseteq A'\cup B'\Rightarrow (A'\cup B')\cap(A'\cap B')=A'\cap B'$$

بنابراین

$$P(A'\cup B'|A'\cap B')=\frac{P((A'\cup B')\cap(A'\cap B'))}{P(A'\cap B')}=\frac{P(A'\cap B')}{P(A'\cap B')}=۱$$

۱۵۹۷- گزینهٔ ۴ از تساوی $P(B')=۳P(A')$ نتیجه می‌شود

$$۱-P(B)=۳(۱-P(A))\Rightarrow ۱-P(B)=۳-۳P(A)\Rightarrow P(B)=۳P(A)-۲$$

در تساوی فوق به جای $P(A)$ قرار می‌دهیم $۲P(B)$ و نتیجه می‌شود

$$P(B)=۶P(B)-۲\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۵}$$

پس $P(A)=\frac{۴}{۵}$ و چون A و B مستقل از هم هستند، در نتیجه

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{۸}{۲۵}$$

۱۵۹۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ به‌ترتیب پیشامد این باشند که دانش‌آموز انتخاب شده در پایهٔ دهم، یازدهم یا دوازدهم است و A پیشامد این باشد که این دانش‌آموز به کارهای هنری علاقه‌مند است. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(A_۱)P(A|A_۱)+P(A_۲)P(A|A_۲)+P(A_۳)P(A|A_۳)$$

$$=۰/۴\times ۰/۲+۰/۳\times ۰/۴+۰/۳\times ۰/۳۵=۰/۳۰۵$$

۱۵۹۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید A پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی باشد و B پیشامد آن باشد که لامپ انتخابی به جعبهٔ اول تعلق داشته باشد. در این صورت B' پیشامد تعلق این لامپ به جعبهٔ دوم است. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل، $P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$. چون در جعبهٔ جدید ۸ لامپ از جعبهٔ اول و ۶ لامپ از جعبهٔ دوم است، پس $P(B)=\frac{۸}{۱۴}$ و $P(B')=\frac{۶}{۱۴}$. همچنین احتمال معیوب بودن یک لامپ انتخابی از جعبهٔ اول برابر $\frac{۴}{۲۴}$ و احتمال معیوب بودن یک لامپ انتخابی از جعبهٔ دوم برابر $\frac{۲}{۱۵}$ است، پس $P(A|B)=\frac{۴}{۲۴}$ و $P(A|B')=\frac{۲}{۱۵}$. در نتیجه

$$P(A)=\frac{۸}{۱۴}\times\frac{۴}{۲۴}+\frac{۶}{۱۴}\times\frac{۲}{۱۵}=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۲}{۳۵}=\frac{۱۰+۶}{۱۰۵}=\frac{۱۶}{۱۰۵}$$

۱۶۰۰- گزینهٔ ۱ چون میانگین ۹ دادهٔ آماری برابر ۸ است و دادهٔ جدید نیز برابر ۸ است، پس میانگین کل ۱۰ داده نیز برابر ۸ است (زیرا مجموع ۹ داده برابر $۹\times ۸=۷۲$ است، پس مجموع آن‌ها به همراه دادهٔ جدید برابر ۸۰ می‌شود، بنابراین میانگین کل ۱۰ داده برابر $\frac{۸۰}{۱۰}=۸$ است). چون انحراف معیار ۹ داده برابر ۲ است، پس واریانس این داده‌ها برابر $۲^۲=۴$ است. از فرمول $\sigma^۲=\frac{۱}{n}((x_۱-\overline{x})^۲+(x_۲-\overline{x})^۲+\cdots+(x_n-\overline{x})^۲)$ نتیجه می‌گیریم

$$۴=\frac{۱}{۹}((x_۱-۸)^۲+(x_۲-۸)^۲+\cdots+(x_۹-۸)^۲)$$

$$(x_۱-۸)^۲+(x_۲-۸)^۲+\cdots+(x_۹-۸)^۲=۴\times ۹=۳۶$$

$$\text{واریانس کل ۱۰ داده}=\sigma^۲=\frac{۱}{۱۰}((x_۱-۸)^۲+(x_۲-۸)^۲+\cdots+(x_{۱۰}-۸)^۲)$$

$$=\frac{۱}{۱۰}\left(((x_۱-۸)^۲+(x_۲-۸)^۲+\cdots+(x_۹-۸)^۲)+(x_{۱۰}-۸)^۲\right)$$

$$=\frac{۱}{۱۰}\left(۳۶+(۸-۸)^۲\right)=\frac{۳۶}{۱۰}=۳/۶$$

۱۶۰۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $n(S)=۶\times ۶=۳۶$. از طرف دیگر، اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه

$$A=\{(۱,۳),(۲,۲),(۲,۶),(۳,۱),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲),(۶,۶)\}$$

بنابراین $n(A)=۹$ ، در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$.

تجربی - ۹۷

۱۶۰۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $n(S)=\binom{۱۲}{۳}$. باید از هر رنگ یک مهره انتخاب کنیم. در نتیجه اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۳}{۱۱}$$

تجربی - ۹۶

۱۶۰۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $n(S)=\binom{۱۰}{۲}$. برای اینکه دو مهره همرنگ نباشند باید یکی سفید یکی سیاه، یکی سفید یکی قرمز، یا یکی سیاه و یکی قرمز باشد. بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه

$$n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}+\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}=۳۱$$

بنابراین $P(A)=\frac{۳۱}{۴۵}$.

راه‌حل دوم اگر پیشامد مورد نظر A باشد، A' پیشامد این است که هر دو مهره همرنگ باشند. بنابراین

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=۱-\frac{۳+۱+۱۰}{۴۵}=\frac{۳۱}{۴۵}$$

تجربی - ۹۴

۱۶۰۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $n(S)=۵!=۱۲۰$. فرض کنید ابتدا عددی زوج خارج شود. در این صورت امکان ندارد که دو عدد فرد کنار هم نباشند.

ف ف ز ف ز

اگر ابتدا عددی فرد خارج شود، عددهای فرد را به $۳!$ طریق می‌توان خارج کرد و عددهای زوج را هم به $۲!$ طریق.

ف ز ف ز ف

بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه $n(A)=۳!\times ۲!=۱۲$ ، پس

$$P(A)=\frac{۱۲}{۱۲۰}=۰/۱$$

تجربی - ۹۲

۱۶۰۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $n(S)=۲^۲\times ۶=۲۴$. اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$A=\{(\text{ر},\text{ر},۳),(\text{پ},\text{ر},۳),(\text{ر},\text{پ},۳),(\text{ر},\text{ر},۶),(\text{پ},\text{ر},۶),(\text{ر},\text{پ},۶)\}$$

پس $n(A)=۶$ و $P(A)=\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۶۰۶- گزینهٔ ۴

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۶۰۷- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $y_i=۲x_i-۷$ ، بنابراین

$$CV_y=\frac{۳}{۲}CV_x\xrightarrow[\sigma_y=۲\sigma_x]{\overline{y}=۲\overline{x}-۷}\frac{۲\sigma_x}{۲\overline{x}-۷}=\frac{\sigma_x}{\overline{x}}\times\frac{۳}{۲}$$

$$۴\overline{x}=۶\overline{x}-۲۱\Rightarrow\overline{x}=\frac{۲۱}{۲}$$

اکنون از اینکه $\overline{x}=\frac{۲۱}{۲}$ به‌دست می‌آید

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_{۲۰}}{۲۰}=\frac{۲۱}{۲}\Rightarrow x_۱+x_۲+\cdots+x_{۲۰}=۲۱۰$$

ریاضی - ۸۶

۱۶۰۸- گزینهٔ ۲ داده‌ها را بدون در نظر گرفتن x مرتب می‌کنیم:

$$۵۰, ۶۳, ۶۴, ۶۵, ۶۶, ۷۰, ۷۷$$

در حال حاضر میانه ۶۵ است. اگر عدد x را خود ۶۵ در نظر بگیریم،

$$\overline{x}=\frac{۵۰+۶۳+۶۴+۶۵+۶۵+۶۶+۷۰+۷۷}{۸}$$

$$=۶۵+\frac{-۱۵-۲-۱+۰+۰+۱+۵+۱۲}{۸}$$

$$=۶۵+\frac{-۱۸+۱۸}{۸}\Rightarrow \overline{x}=۶۵$$

پس $x=۶۵$ قابل قبول است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۶۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌های x_i را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x}=\frac{۱+۲+۳+۴+۵}{۵}=۳, \quad \overline{x^۲}=\frac{۱+۴+۹+۱۶+۲۵}{۵}=\frac{۵۵}{۵}=۱۱$$

$$\sigma_x^۲=۱۱-(۳)^۲=۲\Rightarrow \sigma_x=\sqrt{۲}$$

اکنون برای داده‌های u_i به‌دست می‌آید

$$\overline{u}=۱۲\overline{x}+۶=۱۲\times۳+۶=۴۲, \quad \sigma_u=۱۲\times\sigma_x=۱۲\sqrt{۲}$$

$$(CV)_u=\frac{\sigma_u}{\overline{u}}=\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۴۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۷}\simeq\frac{۲\times۱/۴}{۷}=۰/۴$$

ریاضی - ۹۵

۱۶۱۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم واریانس ۱۵ دادهٔ اول برابر ۱۲ و واریانس ۱۰ دادهٔ دوم برابر ۷/۶ است، بنابراین

$$\frac{(x_۱-\overline{x})^۲+(x_۲-\overline{x})^۲+\cdots+(x_n-\overline{x})^۲}{۱۵}=۱۲$$

$$\frac{(y_۱-\overline{y})^۲+(y_۲-\overline{y})^۲+\cdots+(y_n-\overline{y})^۲}{۱۰}=۷/۶$$

بنابراین از آنجا که $\overline{x}=\overline{y}$، واریانس همهٔ این داده‌ها برابر است با

$$\sigma^۲=\frac{((x_۱-\overline{x})^۲+(x_۲-\overline{x})^۲+\cdots+(x_n-\overline{x})^۲)}{۲۵}$$

$$+\frac{((y_۱-\overline{y})^۲+(y_۲-\overline{y})^۲+\cdots+(y_n-\overline{y})^۲)}{۲۵}$$

$$=\frac{۷۶+۱۸۰}{۲۵}=\frac{۲۵۶}{۲۵}\Rightarrow\sigma=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

ریاضی - ۸۹

۱۶۱۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $n(S)=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$. باید دو مهره از یک رنگ و یک مهره از رنگ دیگر انتخاب کنیم. بنابراین اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه

$$n(A)=\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۲}{۲}\binom{۸}{۱}=۷۹$$

در نتیجه $P(A)=\frac{۷۹}{۱۲۰}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱۶۱۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $P(A)=۰/۹$ و $P(B)=۰/۸$. چون پیشامدهای A و B مستقل‌اند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$=۰/۹+۰/۸-۰/۹\times۰/۸=۱/۷-۰/۷۲=۰/۹۸$$

تجربی - ۹۵

۱۶۱۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $n(S)=\binom{۱۴}{۴}$. اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه $n(A)=\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۳}=۲۸۰$.

بنابراین

$$P(A)=\frac{۲۸۰}{\binom{۱۴}{۴}}=\frac{۴۰}{۱۴۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۶۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $n(S)=\binom{۹}{۳}=۸۴$. باید سه مهره از ۴ مهرهٔ سفید یا سه مهره از ۵ مهرهٔ سیاه انتخاب کنیم. بنابراین اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن‌گاه $n(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}=۴+۱۰=۱۴$. پس

$$P(A)=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۱۶۱۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $n(S)=\binom{۱۱}{۳}$. فرض کنید پیشامد مورد نظر A باشد. در این صورت A' پیشامد این است که هیچ‌کدام از موش‌ها سفید نباشد، یعنی هر سه موش سیاه هستند. بنابراین

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=۱-\frac{۴}{۳۳}=\frac{۲۹}{۳۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۶۱۶- گزینهٔ ۲ ابتدا میانگین داده‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\overline{x}=\frac{۸۰+۸۱+۸۵+۹۲+۹۴+۹۶+۹۷+۱۰۰+۱۰۰+۱۰۳+۱۰۴+۱۰۸}{۱۲}=۹۵$$

اگر داده‌ها را سه برابر کنیم و سپس با ۴۰- جمع کنیم، میانگین هم سه برابر شده و با ۴۰- جمع می‌شود. در نتیجه $\overline{x}_{\text{جدید}}=۳\times۹۵-۴۰=۲۴۵$.

ریاضی - ۹۲

۱۶۱۷- گزینهٔ ۴ با توجه به $n=۲۵$ ، $\overline{x}=۳۰$ و $\sigma=۸$،

$$۶۴=\frac{\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها}}{۲۵}$$

$$۱۶۰۰=۲۵\times۶۴=\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها}$$

از طرفی داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ نیز دارای میانگین ۳۰ هستند. در نتیجه

x_i	۱۰	۱۵	۴۵	۵۰
$x_i-۳۰$	۲۰-	۱۵-	۱۵	۲۰

مجموع مربعات اختلاف از میانگین داده‌های دور افتاده برابر است با

$$۴۰۰+۲۲۵+۲۲۵+۴۰۰=۱۲۵۰$$

اکنون واریانس ۲۱ دادهٔ باقی‌مانده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\sigma^{۲}=\frac{۶۴\times۲۵-۱۲۵۰}{۲۵-۴}=\frac{۱۶۰۰-۱۲۵۰}{۲۱}=\frac{۳۵۰}{۲۱}=\frac{۵۰}{۳}\simeq۱۶/۶۶$$

تجربی - ۹۳

۱۶۱۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا میانگین داده‌های جدید را به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{y}=\frac{۱۸\times۲۵+۲۰+۲۷+۲۸}{۱۸+۳}\Rightarrow\overline{y}=۲۵$$

$$\sigma^{۲}=\frac{(x_{۱}-\overline{x})^{۲}+(x_{۲}-\overline{x})^{۲}+\cdots+(x_{۲۱}-\overline{x})^{۲}}{۲۱}$$

$$=\frac{۱۸\times۹+(۲۰-۲۵)^{۲}+(۲۷-۲۵)^{۲}+(۲۸-۲۵)^{۲}}{۲۱}=\frac{۲۰۰}{۲۱}\simeq۹/۵۲$$

دقت کنید که برای ۱۸ دادهٔ اولیه مجموع مربع اختلاف مقادیر داده‌ها از میانگین برابر ۹×۱۸ است.

راه‌حل دوم ابتدا میانگین داده‌های جدید را به‌دست می‌آوریم

$$\overline{y}=\frac{۱۸\times۲۵+۲۰+۲۷+۲۸}{۱۸+۳}\Rightarrow\overline{y}=۲۵$$

برای محاسبهٔ واریانس از فرمول زیر کمک می‌گیریم:

$$\sigma^{۲}=\frac{x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}+\cdots+x_{n}^{۲}}{n}-(\overline{x})^{۲}\Rightarrow۹=\frac{x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}+\cdots+x_{n}^{۲}}{۱۸}-۶۲۵$$

$$x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}+\cdots+x_{n}^{۲}=۱۸\times۶۳۴=۱۱۴۱۲$$

بنابراین مجموع مربعات داده‌های قبلی برای ۱۱۴۱۲ است. مجموع مربعات داده‌های جدید برابر است با $A=۱۱۴۱۲+۲۰^{۲}+۲۷^{۲}+۲۸^{۲}=۱۳۳۲۵$. در نتیجه

$$\sigma_{\text{جدید}}^{۲}=\frac{A}{۲۱}-(۲۵)^{۲}=\frac{۱۳۳۲۵}{۲۱}-۶۲۵\simeq۹/۵۲$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۶۱۹- گزینهٔ ۴ میانگین ۳ دادهٔ ۱۶، ۲۴ و ۲۶ برابر است با $۲۲=\frac{۱۶+۲۴+۲۶}{۳}$. بنابراین میانگین ۱۱ دادهٔ دیگر نیز ۲۲ است و چون واریانس آن‌ها صفر است پس تمام آن‌ها با هم برابرند و ۲۲ هستند.

بنابراین واریانس این ۱۴ داده برابر است با

$$\sigma^{۲}=\frac{(۲۲-۲۲)^{۲}+(۲۲-۲۲)^{۲}+\cdots+(۲۲-۲۲)^{۲}}{۱۴}$$

$$+\frac{(۱۶-۲۲)^{۲}+(۲۴-۲۲)^{۲}+(۲۶-۲۲)^{۲}}{۱۴}=\frac{۳۶+۴+۱۶}{۱۴}=۴$$

بنابراین انحراف معیار برابر $\sigma=۲$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۶۲۰- گزینهٔ ۱ برای مقایسهٔ دقت عمل این دو دستگاه کافی است که ضریب تغییرات آن‌ها را مقایسه کنیم

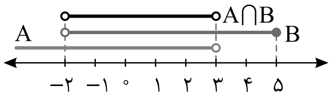
$$\begin{cases}CV_{A}=\dfrac{\sigma_{A}}{\overline{x}_{A}}=\dfrac{۳/۶}{۱۵۰}=۰/۰۲۴\\CV_{B}=\dfrac{\sigma_{B}}{\overline{x}_{B}}=\dfrac{۳/۸۴}{۱۶۰}=۰/۰۲۴\end{cases}\Rightarrow CV_{A}=CV_{B}$$

با توجه به برابری ضریب تغییرات دو دستگاه A و B ، دقت عمل هر دو پیرامون میانگین یکسان است.

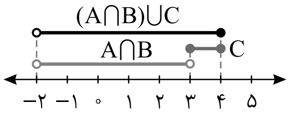
خارج از کشور ریاضی - ۹۵

فصل هشتم

۱۶۲۱- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ $A\cap B$ به کمک شکل زیر پیدا می‌شود:

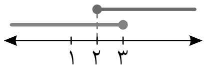


پس $A\cap B=(-۲,۳)$. اجتماع دو مجموعهٔ $A\cap B$ و C به شکل زیر است:



یعنی $(A\cap B)\cup C=(-۲,۴]$.

۱۶۲۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر $\mathbb{R}=(-\infty,۳)\cup[۲,+\infty)$ ، بنابراین می‌خواهیم $\mathbb{R}-(۱,۴]$ را پیدا کنیم که حاصل آن $(-\infty,۱]\cup(۴,+\infty)$ است.



۱۶۲۳- گزینهٔ ۲ عدد $\frac{۱}{۴}$ باید از $\frac{۱}{n+۳}$ بزرگ‌تر باشد، یعنی

$$\frac{۱}{n+۳}<\frac{۱}{۴}\Rightarrow n+۳>۴\Rightarrow n>۱$$

عدد $\frac{۱}{۴}$ نباید از $\frac{۱}{n+۱}$ بیشتر باشد، یعنی

$$\frac{۱}{n+۱}\geq\frac{۱}{۴}\Rightarrow n+۱\leq۴\Rightarrow n\leq۳$$

بنابراین عدد طبیعی n می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۱۶۲۴- گزینهٔ ۳ نقطهٔ وسط پاره‌خط، متناظر با میانگین ابتدا و انتهای بازه است، یعنی

$$\frac{۲a^۲+۱+(-a^۲)}{۲}=\frac{a^۲+۱}{۲}=۵\Rightarrow a^۲=۹$$

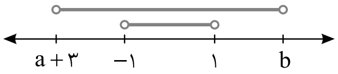
بنابراین بازهٔ مورد نظر $[-۹,۱۹]$ است و طول این بازه برابر است با

$$۱۹-(-۹)=۲۸$$

۱۶۲۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم است که باید

$$\begin{cases}a+۳\leq-۱\\ b\geq۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\leq-۴\\ b\geq۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\geq۴\\ b\geq۱\end{cases}$$

بنابراین $b-a\geq۱+۴=۵$. در ضمن اگر $a=-۴$ و $b=۱$ ، شرط داده شده در مسئله برقرار است.



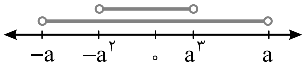
۱۶۲۶- گزینهٔ ۱ طول بازهٔ $(a,b+۲)$ برابر است با $b+۲-a=b-a+۲$ و طول بازهٔ $(۲a-۱,۲b+۳)$ برابر است با

$$۲b+۳-(۲a-۱)=۲(b-a+۲)$$

بنابراین طول بازهٔ $(a,b+۲)$ نصف طول بازهٔ $(۲a-۱,۲b+۳)$ است.

۱۶۲۷- گزینهٔ ۳ چون $۰<a<۱$ ، پس $a^۳<a$ و $-a<-a^۲$ ، بنابراین

$$(-a,a)\cap(-a^۲,a^۳)=(-a^۲,a^۳)$$



۱۶۲۸- گزینهٔ ۲ مجموعه‌های $A_۲$ ، $A_۳$ ، ... و $A_{۱۰}$ به شکل زیر هستند:

$$A_۲=[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}],\quad A_۳=[\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳}],\quad \ldots,\quad A_{۱۰}=[\frac{۹}{۱۰},\frac{۱۱}{۱۰}]$$

واضح است که مجموعهٔ $A_۲$ شامل همهٔ مجموعه‌های دیگر است. یعنی همهٔ مجموعه‌های دیگر زیرمجموعهٔ مجموعهٔ $A_۲$ هستند. پس اجتماع همهٔ این مجموعه‌ها همان $A_۲$ است.

۱۶۲۹- گزینهٔ ۴ از تساوی $(-۱,۱]\cap[a,b)=[۰,۱]$ معلوم می‌شود $a=۰$ و $b\geq۱$. از تساوی $(-۱,۱]\cup[a,b)=(-۱,۴)$ معلوم می‌شود $b=۴$. بنابراین

$$a+b=۴$$

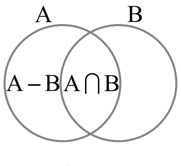
۱۶۳۰- گزینهٔ ۴ اشتراک این دو بازه فقط زمانی تک‌عضوی است که ابتدای بازهٔ $[-۲a+۱,+\infty)$ بر انتهای بازهٔ $(-\infty,a+۴]$ منطبق باشد. در نتیجه

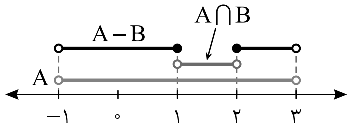
$$-۲a+۱=a+۴\Rightarrow a=-۱$$

۱۶۳۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم عضوهای A کوچک‌تر از یا مساوی با ۲ هستند و مجموعهٔ مورد نظر شامل اعضای A نیست، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) رد می‌شوند. اکنون دقت کنید که $B-A=(۰,۴)-[-۲,۲]=(۲,۴)$.

۱۶۳۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A-B=A-(A\cap B)=(-۱,۳)-(۱,۲)=(-۱,۱]\cup[۲,۳)$$





۱۶۳۳- گزینهٔ ۲ چون a عضو بازه است، پس $۲a-۱<a<۳-۳a$. از نابرابری $۲a-۱<a$ نتیجه می‌شود $a<۱$ و از نابرابری $a<۳-۳a$ نتیجه می‌شود $a<\frac{۳}{۴}$. بنابراین باید $a<\frac{۳}{۴}$. اکنون توجه کنید که شرط اینکه $(۲a-۱,۳-۳a)$ بازه باشد این است که $۲a-۱<۳-۳a$ ، یعنی $a<\frac{۴}{۵}$ ، که اگر $a<\frac{۳}{۴}$ ، این شرط هم برقرار است. بنابراین مجموعهٔ مقادیر ممکن a بازهٔ $(-\infty,\frac{۳}{۴})$ است.

۱۶۳۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که طول بازهٔ $(a-۵,۲a+۱)$ برابر است با $(۲a+۱)-(a-۵)$. بنابراین $۲a+۱-a+۵\leq۴$ ، پس $a\leq-۲$.

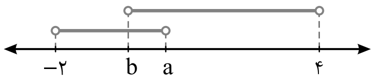
از طرف دیگر طول بازهٔ $(a-۶,۳a-۱)$ برابر است با

$$(۳a-۱)-(a-۶)=۲a+۵$$

چون $a\leq-۲$ ، پس $۲a\leq-۴$ و در نتیجه $۲a+۵\leq۱$. پس حداکثر طول بازهٔ مورد نظر برابر ۱ است.

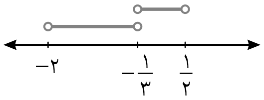
۱۶۳۵- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض مسئله و شکل زیر، نتیجه می‌شود

$$(b,۴)\cap[-۲,a)=(b,a)$$



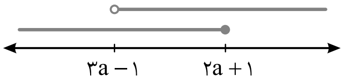
بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-\frac{۱}{۳}$. اکنون می‌توان نوشت

$$(b,a)\cup(-۲a-۱,b)=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})\cup(-۲,-\frac{۱}{۳})=(-۲,\frac{۱}{۲})-\{-\frac{۱}{۳}\}$$



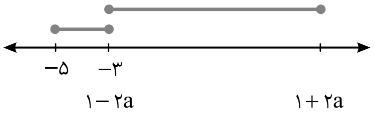
۱۶۳۶- گزینهٔ ۱ چون اشتراک دو بازه از عدد -۲ شروع می‌شود و $a<a+۲$، پس $a+۲=-۲$، یعنی $a=-۴$. بنابراین تساوی داده شده به‌صورت $[-۴,۲]\cap[-۲,b]=[-۲,۱]$ است. چون اشتراک در سمت چپ به عدد ۱ ختم شده است و $۱<۲$، پس $b=۱$. در نتیجه $a-b=-۵$.

۱۶۳۷- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $(-\infty,۲a+۱]\cup(۳a-۱,+\infty)=\mathbb{R}$ وقتی برقرار است که $۳a-۱\leq ۲a+۱$، یعنی $a\leq ۲$.



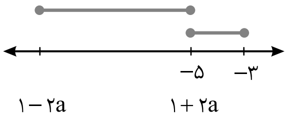
۱۶۳۸- گزینهٔ ۳ در دو حالت زیر، اشتراک دو بازه مجموعه‌ای تک‌عضوی می‌شود.

حالت اول



$$۱-۲a=-۳\Rightarrow a=۲$$

حالت دوم



$$۱+۲a=-۵\Rightarrow a=-۳$$

اکنون توجه کنید شرط اینکه $[۱-۲a,۱+۲a]$ بازه باشد این است که $۱-۲a<۱+۲a$، یعنی $a>۰$. بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای a برابر ۲ است.

۱۶۳۹- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $I=(\frac{۱}{n},\frac{n+۲}{۲})$، بنابراین به ازای $n=۱$

$$I=(۱,\frac{۳}{۲})\Rightarrow$$ شامل هیچ عدد طبیعی‌ای نیست.

به‌ازای $n=۲$،

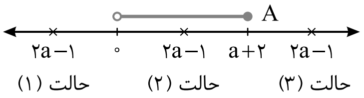
$$I=(\frac{۱}{۲},۲)\Rightarrow ۱\in I$$

به ازای $n=۳$،

$$I=(\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۲})\Rightarrow ۱,۲\in I$$

به این ترتیب به ازای $n\geq ۳$، بازهٔ I حداقل شامل اعداد طبیعی ۱ و ۲ است. پس فقط به ازای $n=۲$، بازهٔ داده شده فقط شامل یک عدد طبیعی است.

۱۶۴۰- گزینهٔ ۳ اگر به بازهٔ A دقت کنید معلوم می‌شود که $a+۲>۰$، پس $a>-۲$. از روی محور زیر، برحسب اینکه $۲a-۱$ در کدام ناحیه باشد، حاصل $A\cap B$ را به‌دست آورده‌ایم و در جدول زیر آن نوشته‌ایم.



حالت (۳)	حالت (۲)	حالت (۱)	
$\varnothing$	$(۲a-۱,a+۲]$	$(۰,a+۲]$	$A\cap B$

حالت (۱) قابل قبول نیست، زیرا در این حالت $A\cap B\not\subseteq(۱,۳]$. در حالت (۲) باید $۱\leq ۲a-۱$ و $a+۲\leq ۳$. از نابرابری اول به‌دست می‌آید $a\geq ۱$ و از نابرابری دوم به‌دست می‌آید $a\leq ۱$ پس $a=۱$. در حالت (۳) باید $۲a-۱\geq a+۲$ و در نتیجه $a\geq ۳$. در این حالت اشتراک A و B برابر تهی است که زیرمجموعهٔ $(۱,۳]$ است. پس $a\in[۳,+\infty)\cup\{۱\}$.

۱۶۴۱- گزینهٔ ۴ چون A نامتناهی است و $A\subseteq B$، پس B هم نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعهٔ دیگری نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ نامتناهی است.

۱۶۴۲- گزینهٔ ۱ B نامتناهی است، پس B' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، ولی چون A متناهی است، پس $A\cap B'$ متناهی است. همچنین چون B نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ و $A\cup B$ نامتناهی هستند. توجه کنید که چون B نامتناهی است، پس مجموعهٔ مرجع هم نامتناهی است. در نتیجه A' نامتناهی است. پس متناهی یا نامتناهی بودن $A'\cap B$ مشخص نیست.

۱۶۴۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$B=\{۳,۴,۶,۸,۹,۱۰,\ldots\}\ ,\quad C=\{۱,۳,۴,۶,۷,۸,۹,\ldots\}$$

بنابراین $B\cap C=\{۳,۴,۶,۸,۹,\ldots\}$ و در نتیجه $A-(B\cap C)=\{۱,۵\}$.

۱۶۴۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$|x-۵|>۳\Rightarrow\begin{cases}x-۵>۳\\x-۵<-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۸\\x<۲\end{cases}$$

بنابراین $A=\{\ldots,۰,۱,۹,۱۰,\ldots\}$. در نتیجه $A'=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$.

یعنی $n(A')=۷$.

راه‌حل دوم چون $A=\{x\,\big|\,|x-۵|>۳\}$، پس $A'=\{x\,\big|\,|x-۵|\leq ۳\}$.

از نابرابری $|x-۵|\leq ۳$ نتیجه می‌شود

$$-۳\leq x-۵\leq ۳\Rightarrow ۲\leq x\leq ۸$$

مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ است، پس $A'=\{۲,۳,\ldots,۸\}$، بنابراین $n(A')=۷$.

۱۶۴۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\begin{cases}n(A)+n(B')=۱۷\\n(B)+n(A')=۱۳\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{c}n(A)+n(A')+n(B)+n(B')=۳۰\\n(U)+n(U)=۳۰\Rightarrow n(U)=۱۵\end{array}$$

بنابراین $n(C)+n(C')=n(U)=۱۵$.

۱۶۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

بنابراین

$$n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲n(B)+n(B)\Rightarrow ۲۴=۳n(B)\Rightarrow n(B)=۸$$

۱۶۴۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

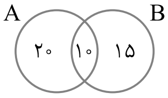
$$۱۶=۲۴-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۸$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$$

$$۱۶=n(A-B)+۸+۳\Rightarrow n(A-B)=۱۶-۱۱=۵$$

۱۶۴۸- گزینهٔ ۲ تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند برابر است با $۳۰-۲۰$ ، یعنی ۱۰ محصول. تعداد محصولاتی که عیب B را دارند برابر $۴۵-۲۰=۲۵$ است، که ۱۰ تا از آن‌ها عیب A را نیز دارند. پس ۱۵ محصول فقط عیب B را دارند و ۲۰ تا از آن‌ها فقط عیب A را دارند. پس ۳۵ تا از محصولات فقط یک عیب دارند.



۱۶۴۹- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ بینندگان شبکهٔ ۱ را با A و مجموعهٔ بینندگان شبکهٔ ۲ را با B نشان می‌دهیم:

$$n(A)=۶۵,\quad n(B)=۴۵,\quad n(A\cap B)=۲۰$$

در نتیجه $n(A\cup B)=۶۵+۴۵-۲۰=۹۰$. یعنی ۹۰ نفر حداقل یکی از شبکه‌ها را تماشا می‌کنند، پس ۱۰ نفر هیچ‌یک از این دو شبکه را تماشا نمی‌کنند.

۱۶۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳k-۱+۳-(k-۲)=۲k+۴$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cap B)\le n(B)\Rightarrow k-۲\le ۳\Rightarrow k\le ۵$$

بنابراین $n(A\cup B)=۲k+۴\le ۲\times ۵+۴=۱۴$.

۱۶۵۱- گزینهٔ ۳ گزینهٔ (۳) ممکن است نادرست باشد. برای مثال، $A=(۰\,,۱]$ و $B=[۱\,,۲)$ نامتناهی هستند، اما $A\cap B=\{۱\}$ متناهی است.

۱۶۵۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $A\cap B=\{۳,۵\}$ ، پس

$$(A\cap B)'=\{۱,۲,۴,۶\},\quad C\cap(A\cap B)'=\{۱,۲\}$$

۱۶۵۳- گزینهٔ ۴ ابتدا مجموعه‌های A' ، B' و C' را پیدا می‌کنیم:

$$A'=(-\infty,۱]\cup(۲,+\infty)\ ,\quad B'=(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)\ ,\quad C'=[۰,+\infty)$$

بنابراین $A'-B'=(-۱,۱]$ و در نتیجه $(A'-B')-C'=(-۱,۰)$.

۱۶۵۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** مجموعهٔ مرجع $\{۱,۲,۳,\dots,۹\}$ است، پس $B'=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $C=\{۲,۳,۷,۸,۹\}$. در نتیجه

$$A\cap B'=\{۱,۶\}\Rightarrow(A\cap B')\cup C=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸,۹\}$$

$n((A\cap B')\cup C)=۷$ ، بنابراین مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$ ، هفت عضو دارد.

راه‌حل دوم توجه کنید که

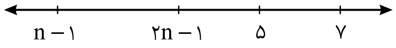
$$A\cap B'=A-B=\{۱,۶\}\ ,\quad C=\{۲,۳,۷,۸,۹\}$$

بنابراین $(A\cap B')\cup C=\{۱,۶\}\cup\{۲,۳,۷,۸,۹\}=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸,۹\}$.

پس مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$ ، هفت عضو دارد.

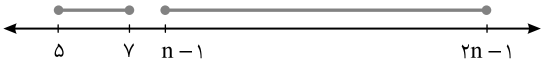
۱۶۵۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید برای اینکه $[n-۱\,,۲n-۱]$ بازه باشد، باید $n>۰$. اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول



$$۲n-۱<۵\Rightarrow n<۳$$

حالت دوم



$$n-۱>۷\Rightarrow n>۸$$

بنابراین n اعداد طبیعی ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ و ۸ نمی‌تواند باشد.

۱۶۵۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

پس

$$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲۴$$

به این ترتیب

$$\begin{cases}n(A)+n(B)=۲۴\\ n(A)-n(B)=۴\end{cases}\Rightarrow n(B)=۱۰$$

۱۶۵۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow n(A\cup B)=n(B)$$

طبق فرض $n(A\cup B)=۹$ ، پس $n(B)=۹$. از طرف دیگر،

$$n(A)+n(A')=n(B)+n(B')\Rightarrow n(A)+۱۴=۹+۱۰\Rightarrow n(A)=۵$$

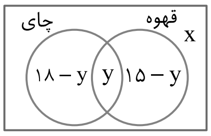
۱۶۵۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۱۰۰-x=۸۵+۷۰-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=۵۵+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد، باید $x=۰$ ، بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A\cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۱۶۵۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید x نفر نه چای دوست دارند، نه قهوه، بنابراین $۳۰-x$ نفر یا چای دوست دارند یا قهوه و y نفر هم چای و هم قهوه دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو را دوست دارند در نمودار ون مقابل مشخص کرده‌ایم.



$$x+۱۸-y+y+۱۵-y=۳۰\Rightarrow x=y-۳$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x\ge ۰\ ,\ y\ge ۰\ ,\quad ۱۵-y\ge ۰\Rightarrow y\le ۱۵\Rightarrow ۰\le y\le ۱۵$$

پس

$$۰\le y-۳\le ۱۲\Rightarrow ۰\le x\le ۱۲$$

پس حداکثر ۱۲ نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

راه‌حل دوم فرض کنید A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=۱۲+۱۵-n(A\cup B)=۲۷-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B)\ge n(B)=۱۵$ ، بنابراین

$$n(A\cap B)=۲۷-n(A\cup B)\le ۲۷-۱۵=۱۲$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که اگر $A\subseteq B$ ، این وضعیت پیش می‌آید).

۱۶۶۰- گزینهٔ ۳ چون $A\subseteq B$ ، پس $A\cup B=B$. از طرف دیگر،

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\le n(B)$$

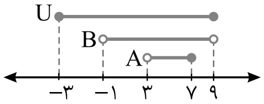
اکنون توجه کنید که $۱۴=n(A)+۲n(B)\le n(B)+۲n(B)=۳n(B)$

و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\ge ۵$. بنابراین

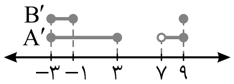
$$n(A\cup B)=n(B)\ge ۵$$

۱۶۶۱- گزینهٔ ۲ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که

$$A'=[-۳,۳]\cup(۷,۹],\quad B'=[-۳,-۱]\cup\{۹\}$$

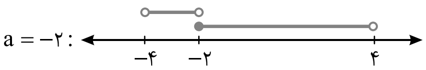


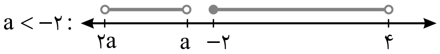
بنابراین از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A'-B'=(-۱,۳]\cup(۷,۹)$.



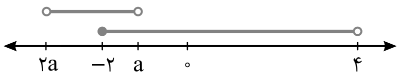
بنابراین، عددهای صحیح در مجموعهٔ $A'-B'$ عبارت‌اند از صفر، ۱، ۲، ۳ و ۸، که مجموعشان می‌شود ۱۴.

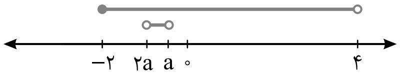
۱۶۶۲- گزینهٔ ۲ چون $(۲a,a)$ یک بازه است، پس $۲a<a$ و در نتیجه $a<۰$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $a\le-۲$ اشتراک بازه‌های $[-۲,۴)$ و $(۲a,a)$ تهی است:



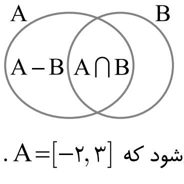


بنابراین $a>-۲$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $-۲<a<۰$ ، اشتراک بازه‌های $[-۲,۴)$ و $(۲a,a)$ تهی نیست.

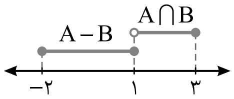




۱۶۶۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ (شکل زیر را ببینید).



از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A=[-۲,۳]$.



۱۶۶۴- گزینهٔ ۳ اگر از مجموعه‌ای نامتناهی تعدادی متناهی عضو حذف کنیم، مجموعه‌ای که به‌دست می‌آید نامتناهی است. پس $B-A$ نامتناهی است. بقیهٔ گزینه‌ها ممکن است متناهی باشند.

گزینهٔ (۱) اگر $U=\mathbb{N}$ ، $A=\{۱\}$ و $B=\{۲,۳,۴,...\}$ ، آن‌گاه

$$A'-B=\varnothing$$

گزینهٔ (۲) چون A متناهی است، پس $A-B'$ نیز متناهی است.

گزینهٔ (۴) اگر $U=\mathbb{N}$ ، $A=\{۱\}$ و $B=\mathbb{N}$ ، آن‌گاه $B'-A'=\varnothing$.

۱۶۶۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} n(A)=۳n(A') \\ n(A)=۱۲ \end{cases}\Rightarrow n(A')=۴$$

در نتیجه،

$$n(U)=n(A)+n(A')=۱۲+۴=۱۶$$

اکنون توجه کنید که

$$n(U)=n(B)+n(B')\Rightarrow ۱۶=n(B)+۷\Rightarrow n(B)=۹$$

۱۶۶۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$n(A)+n(A')=n(U)\xrightarrow{n(A)=n(A')}۲n(A)=۲۶\Rightarrow n(A)=۱۳$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۱۴=۱۳+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(B)-n(A\cap B)=۱\Rightarrow n(B-A)=۱$$

۱۶۶۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$n(A-B)=۲n(B-A)\Rightarrow n(A)-n(A\cap B)=۲n(B)-۲n(A\cap B)$$
$$n(A)=۲n(B)-n(A\cap B)=۲n(B)-۵$$

بنابراین

$$\begin{cases} n(A)=۲n(B)-۵ \\ n(A)=n(B)+۳ \end{cases}\Rightarrow n(A)=۱۱,\ n(B)=۸$$

در نتیجه $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۱+۸-۵=۱۴$.

۱۶۶۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$n(A')=n(U)-n(A)=۲۳-۱۰=۱۳$$
$$n(B')=n(U)-n(B)=۲۳-۷=۱۶$$

اکنون توجه کنید که $n(A'\cap B')\le n(A')=۱۳$.

۱۶۶۹- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم تعداد دانش‌آموزان کلاس برابر x باشد. همچنین، فرض می‌کنیم A و B به‌ترتیب مجموعهٔ کسانی باشند که به فیزیک و ریاضیات علاقه دارند. در این صورت $n(A)=۰/۶x$ و $n(B)=۰/۷x$. از طرف دیگر، چون هر دانش‌آموز کلاس حداقل به یکی از درس‌های فیزیک یا ریاضی علاقه‌مند است، پس مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس برابر $A\cup B$ است، در نتیجه، $n(A\cup B)=x$. به این ترتیب،

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$x=۰/۶x+۰/۷x-۶\Rightarrow x=۲۰$$

۱۶۷۰- گزینهٔ ۳ فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$۱۲۰-x=۱۰۵+۹۵-n(A\cap B)\Rightarrow ۱۲۰-x=۲۰۰-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=۸۰+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد و با توجه به اینکه $x\ge۰$ است، باید $x=۰$ ؛ پس حداقل مقدار $n(A\cap B)$ برابر با ۸۰ است.

فصل نهم

۱۶۷۱- گزینهٔ ۳ شکل اول دارای ۴ چوب کبریت است و هر شکل ۳ چوب کبریت بیشتر از قبلی دارد. پس شکل nاُم دارای $۴+۳(n-۱)$ چوب کبریت است. یعنی $۳n+۱$ چوب کبریت دارد. پس شکل بیستم ۶۱ چوب کبریت دارد.

۱۶۷۲- گزینهٔ ۳ شکل اول دارای ۵ چوب کبریت است و در هر مرحله ۴ چوب کبریت به شکل مرحلهٔ قبل اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم $۵+۴(n-۱)$ چوب کبریت وجود دارد. یعنی $۴n+۱$ چوب کبریت در شکل n اُم وجود دارد. پس در شکل پانزدهم، ۶۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۶۷۳- گزینهٔ ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله nاُم به تعداد $۴\times(n-۱)$ نقطه به ۵ نقطهٔ شکل (۱) اضافه شده است: $۴(n-۱)+۵=۴n+۱$، یعنی شکل n اُم، $۴n+۱$ نقطه دارد. پس شکل دهم ۴۱ نقطه دارد.

۱۶۷۴- گزینهٔ ۱ در شکل nاُم تعداد مثلث‌های رنگ شده برابر است با

$$۰+۱+۲+\cdots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

برای اینکه بدانیم در کدام شکل ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد، معادلهٔ زیر را حل می کنیم:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}=۳۶\Rightarrow n^۲-n-۷۲=۰\Rightarrow(n-۹)(n+۸)=۰$$

چون n عددی طبیعی است، پس $n=۹$، یعنی در شکل نهم ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد.

۱۶۷۵- گزینهٔ ۴ در شکل n اُم، $(n+۱)^۲$ دایره وجود دارد که $(n+۱)$ تای آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی $(n+۱)^۲-(n+۱)$ است که برابر است با $n^۲+n$.

۱۶۷۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_n=۳n^۲-n+۲a_۱\xrightarrow{n=۱}a_۱=۳-۱+۲a_۱\Rightarrow a_۱=-۲$$

بنابراین $a_۴=۳\times۱۶-۴+۲(-۲)=۴۰$.

۱۶۷۷- گزینهٔ ۳ با حل معادلهٔ $a_n=\frac{۱}{۸۰}$ مقدار n را که شمارهٔ جملهٔ مورد نظر است، می‌یابیم:

$$\frac{n^۲+۱}{۸۱n^۲-۱}=\frac{۱}{۸۰}\Rightarrow ۸۰n^۲+۸۰=۸۱n^۲-۱\Rightarrow n^۲=۸۱\Rightarrow n=۹$$

بنابراین $a_۹$ برابر $\frac{۱}{۸۰}$ است.

۱۶۷۸- گزینهٔ ۲ باید ببینیم نامعادلهٔ $a_n<۳/۹$ برای کدام مقادیر n درست است:

$$\frac{۴n-۱}{n+۶}<\frac{۳۹}{۱۰}\Rightarrow ۴۰n-۱۰<۳۹n+۳۹\times۶\Rightarrow n<۲۴۴$$

بنابراین $n\le۲۴۳$، یعنی ۲۴۳ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۳/۹ هستند.

۱۶۷۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۷۲<a_n<۱۶۰\Rightarrow ۷۲<n^۲+۲n-۸<۱۶۰$$

بنابراین

$$n^۲+۲n-۸<۱۶۰\Rightarrow(n-۱۲)(n+۱۴)<۰\Rightarrow ۱\le n<۱۲\Rightarrow ۱\le n\le۱۱$$

$$n^۲+۲n-۸>۷۲\Rightarrow(n-۸)(n+۱۰)>۰\Rightarrow n>۸\Rightarrow n\ge۹$$

در نتیجه n می‌تواند عددهای ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد.

۱۶۸۰- گزینهٔ ۱ عدد آخر دستهٔ اول ۵ ، عدد آخر دستهٔ دوم ۳×۵ ، عدد آخر دستهٔ سوم ۵×۵ ،... و عدد آخر دستهٔ nاُم برابر $۵\times(۲n-۱)$ است. پس عدد آخر دستهٔ چهل‌ونهم $۴۸۵=۵\times(۲\times۴۹-۱)$ است. پس عدد اول دستهٔ پنجاهم، برابر ۴۸۷ خواهد بود.

۱۶۸۱- گزینهٔ ۳ شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم، $۴+۹(n-۱)$ یعنی $۹n-۵$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۶۸۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می کنید:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	…	n
تعداد نقاط	$۱+۳+۱$	$۲+۴+۲$	$۳+۵+۳$	…	$n+(n+۲)+n$

بنابراین در شکل nاُم، $۳n+۲$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

راه‌حل دوم اگر ۴ نقطه به چهار گوشهٔ شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل nاُم برابر $۳(n+۲)$ خواهد بود. پس در شکل nاُم، $۳(n+۲)-۴$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۱۶۸۳- گزینهٔ ۳ تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل nاُم برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdots+n$$

تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل nاُم برابر است با $۰+۱+۲+\cdots+(n-۱)$.

بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل nاُم، n تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ نشدهٔ آن است. پس در شکل سی‌اُم، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰تا است.

۱۶۸۴- گزینهٔ ۲ تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل nاُم برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با $\frac{\frac{n(n-۱)}{۲}}{n^۲}=\frac{n-۱}{۲n}$. به این ترتیب $\frac{۸}{۱۷}=\frac{n-۱}{۲n}$. پس $n=۱۷$.

۱۶۸۵- گزینهٔ ۲ با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها زوج است، نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^۲}{۲}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها فرد است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها $n^۲-۱$ خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می کنیم. پس $\frac{n^۲-۱}{۲}+۱$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر n عددی زوج باشد، $\frac{n^۲}{۲}$ نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شمارهٔ زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است و در شکل‌هایی با شمارهٔ فرد، تعداد گوی‌های رنگ شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل nاُم وجود دارد، پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^۲-۱}{۲}+۱=۱۱۳\Rightarrow n^۲-۱=۲۲۴\Rightarrow n^۲=۲۲۵\Rightarrow n=۱۵$$

۱۶۸۶- گزینهٔ ۳ چون همهٔ جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_۱=a_۲\Rightarrow\frac{۲-k}{۸}=\frac{۴-k}{۱۳}\Rightarrow ۲۶-۱۳k=۳۲-۸k\Rightarrow ۵k=-۶\Rightarrow k=-\frac{۶}{۵}$$

توجه کنید که اگر $k=-\frac{۶}{۵}$، آن‌گاه $a_n=\frac{۲}{۵}$.

۱۶۸۷- گزینهٔ ۲ چند جملهٔ اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینهٔ (۱) $۲,۳,۴,۵,\dots$ **گزینهٔ (۲)** $۲,۳,۱۰,۱۵,\dots$

گزینهٔ (۳) $۲,۳,۱۰,۲۳,\dots$ **گزینهٔ (۴)** $۲,۳,۸,۱۷,\dots$

بنابراین فقط $n^۲-(-۱)^n$ می‌تواند جملهٔ عمومی دنباله باشد.

۱۶۸۸- گزینهٔ ۲ به چند جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_۲=\frac{۱}{۲}a_۱=\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱}{۲}\ ,\quad a_۳=\frac{۲}{۳}a_۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}\ ,\quad a_۴=\frac{۳}{۴}a_۳=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_n=\frac{۱}{n}$، پس $a_{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$.

۱۶۸۹- گزینهٔ ۴ بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=-۳x^۲+۱۲x+c$ به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۲}{-۶}=۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ مورد نظر برابر $a_۲$ است. در نتیجه

$$a_۲=۸\Rightarrow -۳\times۴+۱۲\times۲+c=۸\Rightarrow c=-۴$$

۱۶۹۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a_۱=\log_۲\frac{۱}{۲}\ ,\quad a_۲=\log_۲\frac{۲}{۳}\ ,\quad a_۳=\log_۲\frac{۳}{۴}\ ,\quad \dots$$

بنابراین مجموع n جملهٔ اول دنباله به‌صورت زیر است:

$$S_n=\log_۲\frac{۱}{۲}+\log_۲\frac{۲}{۳}+\log_۲\frac{۳}{۴}+\cdots+\log_۲\frac{n-۱}{n}+\log_۲\frac{n}{n+۱}$$

$$=\log_۲(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\cdots\times\frac{n-۱}{n}\times\frac{n}{n+۱})=\log_۲\frac{۱}{n+۱}=-\log_۲(n+۱)$$

بنابراین

$$-\log_۲(n+۱)=-۳\Rightarrow n+۱=۲^۳=۸\Rightarrow n=۷$$

۱۶۹۱- گزینهٔ ۳ چون $a_{n+۱}-a_n=-۲$، پس دنبالهٔ مورد نظر دنباله‌ای حسابی است که قدرنسبت آن -۲ است. چون جملهٔ اول برابر ۳ است، پس

$$a_{۱۰}=a_۱+۹d=۳+۹(-۲)=-۱۵\ ,\quad a_۵=a_۱+۴d=۳+۴(-۲)=-۵$$

بنابراین $\frac{a_{۱۰}}{a_۵}=\frac{-۱۵}{-۵}=۳$.

۱۶۹۲- گزینهٔ ۲ از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$۳(a_۱+۳d)+۴(a_۱+۴d)-۷(a_۱+۸d)=۱۲۴$$

پس $-۳۱d=۱۲۴$ و در نتیجه $d=-۴$.

۱۶۹۳- گزینهٔ ۴ قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$۳x-۴-(۳x-۱)=-۳$$

بنابراین

$$۴x-۲=(۳x-۴)-۳\Rightarrow x=-۵$$

بنابراین جملهٔ سوم دنباله برابر است با $۴(-۵)-۲=-۲۲$ و جملهٔ چهارم برابر است با $-۲۲-۳=-۲۵$.

۱۶۹۴- گزینهٔ ۲ چون $a_۱=-۱$ و $d=۲-(-۱)=۳$، پس $a_n=-۱+۳(n-۱)$ یعنی $a_n=۳n-۴$. بنابراین $a_k=۳k-۴=۲۱۸$، پس $k=۷۴$.

۱۶۹۵- گزینهٔ ۲ چون $a_۱=۲$ و $d=۴$، پس جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=۲+۴(n-۱)=۴n-۲$ است. برای اینکه جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند، باید $a_n<۵۰۰$ باشد. یعنی

$$۴n-۲<۵۰۰\Rightarrow n<\frac{۵۰۲}{۴}\Rightarrow n\le۱۲۵$$

پس ۱۲۵ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

۱۶۹۶- گزینهٔ ۲ اندازهٔ زاویه‌های مثلث را به‌صورت $a-d\,,a\,,a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع اندازهٔ زاویه‌های مثلث برابر ۱۸۰° است. پس

$$a-d+a+a+d=۱۸۰^\circ\Rightarrow a=۶۰^\circ$$

میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث همان a است که برابر ۶۰° است.

۱۶۹۷- گزینهٔ ۴ زاویه‌های پنج‌ضلعی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-۲d\,,a-d\,,a\,,a+d\,,a+۲d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازهٔ زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر ۵۴۰° است، پس

$$a-۲d+a-d+a+a+d+a+۲d=۵۴۰^\circ$$

بنابراین $۵a=۵۴۰^\circ$ و در نتیجه $a=۱۰۸^\circ$. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه ۸۶° است، پس $a-۲d=۸۶^\circ$ و در نتیجه $d=۱۱^\circ$. پس اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه یعنی $a+۲d$ برابر است با $۱۰۸^\circ+۲\times۱۱^\circ=۱۳۰^\circ$.

۱۶۹۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** چون $a_۱=\sqrt{۳}-۵$ و $a_۶=\sqrt{۳}+۵$، پس

$$a_۶=a_۱+۵d\Rightarrow\sqrt{۳}+۵=\sqrt{۳}-۵+۵d\Rightarrow d=۲$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $\sqrt{۳}-۵+۲$ یا همان $\sqrt{۳}-۳$ است.

راه‌حل دوم قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر است با

$$d=\frac{(\sqrt{۳}+۵)-(\sqrt{۳}-۵)}{۴+۱}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با

$$(\sqrt{۳}-۵)+۲=\sqrt{۳}-۳$$

۱۶۹۹- گزینهٔ ۴ سه جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-d\,,a\,,a+d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-d+a+a+d=۱۵\Rightarrow ۳a=۱۵\Rightarrow a=۵$$

از طرف دیگر،

$$(a-d)\times a\times(a+d)=۴۵\Rightarrow a(a^۲-d^۲)=۴۵$$

چون $a=۵$، پس

$$۵(۲۵-d^۲)=۴۵\Rightarrow d^۲=۱۶\Rightarrow d=\pm۴$$

۱۷۰۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر d باشد. در این صورت

$$a_۱=d\ ,\quad a_n=a_۱+(n-۱)d=d+(n-۱)d=nd$$

به این ترتیب

$$a_۱a_۲a_۳\dots a_۹=۱۰^۸\times۱۰!\Rightarrow d(۲d)(۳d)\cdots(۹d)=۱۰^۸\times۱۰!$$

$$d^۹\times۹!=۱۰^۹\times۹!\Rightarrow d=۱۰$$

بنابراین $a_{۱۰}=۱۰d=۱۰۰$.

۱۷۰۱- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** با قرار دادن $n=۱$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_۱=۱$. با قرار دادن $n=۲$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_۲=\frac{۱}{۳}$.

بنابراین $d=a_۲-a_۱=-\frac{۲}{۳}$. پس $a_۱-d=۱+\frac{۲}{۳}=\frac{۵}{۳}$.

راه‌حل دوم جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و جملهٔ اول $a_۱$ به‌صورت $a_n=a_۱+(n-۱)d$ است، بنابراین $a_n=dn+(a_۱-d)=-\frac{۲}{۳}n+\frac{۵}{۳}$. پس

$$a_۱-d=\frac{۵}{۳}$$

۱۷۰۲- گزینهٔ ۲ از $a_۱+a_۳=۱۶$ نتیجه می‌شود

$$a_۱+a_۱+۲d=۱۶\Rightarrow a_۱+d=۸$$

چون $a_۲+a_۵+a_۸=۵۱$، پس

$$a_۱+d+a_۱+۴d+a_۱+۷d=۵۱\Rightarrow ۳a_۱+۱۲d=۵۱$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a_۱+d=۸ \\ ۳a_۱+۱۲d=۵۱ \end{cases}$ به‌دست می‌آید $d=۳$.

۱۷۰۳- گزینهٔ ۱ چون دنباله حسابی است، پس

$$۲a-۱=\frac{a+۱-۳a}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $d=(۲a-۱)-a=a-۱=-\frac{۱}{۲}$. پس جملهٔ عمومی دنباله به شکل زیر است:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(n-۱)=۱-\frac{n}{۲}$$

۱۷۰۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c-(a+b)=(b+c)-(a+c)\Rightarrow c-b=b-a$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

راه‌حل دوم چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c=\frac{a+b+b+c}{۲}\Rightarrow ۲(a+c)=a+۲b+c\Rightarrow a+c=۲b$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

۱۷۰۵- گزینهٔ ۳ جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت زیر است

$$a_n=۱۹۶-۴(n-۱)=۲۰۰-۴n$$

بنابراین $a_{۵۰}=۰$، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر -۴ است، پس

$$a_{۴۷}=۱۲,\quad a_{۴۸}=۸,\quad a_{۴۹}=۴,\quad a_{۵۰}=۰$$

۱۷۰۶- گزینهٔ ۲ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d=\frac{a_{۱۰}-a_۲}{۱۰-۲}=-\frac{۳۲}{۸}=-۴$$

بنابراین $a_۴=a_۱+۳d=a_۱-۱۲=۱۵$ و در نتیجه $a_۱=۲۷$. بنابراین جملهٔ عمومی دنباله می‌شود $a_n=۲۷-۴(n-۱)=۳۱-۴n$. اکنون توجه کنید که

$$a_n>۰\Rightarrow ۳۱-۴n>۰\Rightarrow n\le ۷$$

بنابراین هفت جملهٔ نخست دنباله مثبت هستند.

۱۷۰۷- گزینهٔ ۲ چون $x^۲-۸x+۱۲=(x-۶)(x-۲)$، پس جواب‌های معادلهٔ مورد نظر a ، ۲ و ۶ هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$۶,۲,a\Rightarrow\frac{۶+a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۲\ ,\qquad ۲,۶,a\Rightarrow\frac{۲+a}{۲}=۶\Rightarrow a=۱۰$$

$$۶,a,۲\Rightarrow\frac{۶+۲}{۲}=a\Rightarrow a=۴\ ,\qquad ۲,a,۶\Rightarrow\frac{۲+۶}{۲}=a\Rightarrow a=۴$$

$$a,۶,۲\Rightarrow\frac{a+۲}{۲}=۶\Rightarrow a=۱۰\ ,\qquad a,۲,۶\Rightarrow\frac{a+۶}{۲}=۲\Rightarrow a=-۲$$

بنابراین a ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

۱۷۰۸- گزینهٔ ۳ اضلاع مثلث را $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$(a-d)^۲+a^۲=(a+d)^۲\Rightarrow a^۲+d^۲-۲ad+a^۲=a^۲+d^۲+۲ad$$

$$a^۲=۴ad\Rightarrow a=۴d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه a و $a-d$ است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a}{a-d}=\frac{۴d}{۴d-d}=\frac{۴d}{۳d}=\frac{۴}{۳}$$

۱۷۰۹- گزینهٔ ۳ چهار جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-۳d, a-d, a+d, a+۳d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-۳d+a-d+a+d+a+۳d=۰\Rightarrow ۴a=۰\Rightarrow a=۰$$

پس دنباله به‌صورت $-۳d, -d, d, ۳d$ است و

$$۹d^۲+d^۲+d^۲+۹d^۲=۸۰\Rightarrow d^۲=۴$$

بنابراین، حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(۳d)(-۳d)=-۹d^۲=-۳۶$$

۱۷۱۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که m باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد. پس $m^۲+۴<m^۲+۳m+۴$.

اگر $m-۱$ عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ حاصل، برابر است با

$$d=\frac{m^۲+۳m+۴-m^۲-۴}{(m-۱)+۱}=\frac{۳m}{m}=۳$$

۱۷۱۱- گزینهٔ ۱ دنبالهٔ a_n، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه

$$a_۳=a_۱r^۲\Rightarrow a_۳=a_۱(\frac{۳}{۲})^۲=۳\Rightarrow a_۱=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $a_{۲۹}=a_۱(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۴}{۳}\times(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۲۶}}$.

۱۷۱۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[۴]{۲}$ واسطهٔ هندسی $\sqrt{a}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ است، پس

$$(\sqrt[۴]{۲})^۲=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}}$، در نتیجه

$$a_{۱۳}=a_۱r^{۱۲}=\sqrt{a}(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}})^{۱۲}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{۲^۴}{۲^۳})=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}\times۲=\frac{\sqrt[۶]{۲^۳}}{\sqrt[۶]{۲^۲}}(۲)=۲\sqrt[۶]{۲}$$

۱۷۱۳- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم جواب‌های معادله $x_۱$ و $x_۲$ باشند. در این صورت

$$\frac{x_۱+x_۲}{۲}=۴/۵\Rightarrow x_۱+x_۲=۹\ ,\quad \sqrt{x_۱x_۲}=۱/۵=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x_۱x_۲=\frac{۹}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل $x^۲-۹x+\frac{۹}{۴}=۰$ است که اگر طرفین آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $۴x^۲-۳۶x+۹=۰$.

۱۷۱۴- گزینهٔ ۳ از تساوی $a_۱a_۶=۲۷$ نتیجه می‌شود

$$a_۱\times a_۱r^۵=۲۷\Rightarrow a_۱^۲r^۵=۲۷$$

از تساوی $a_۲a_۴=۹$ به‌دست می‌آید

$$a_۱r\times a_۱r^۳=۹\Rightarrow a_۱^۲r^۴=۹$$

از تقسیم طرفین دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$\frac{a_۱^۲r^۵}{a_۱^۲r^۴}=\frac{۲۷}{۹}\Rightarrow r=۳$$

با جای‌گذاری $r=۳$ در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود $a_۱=\pm\frac{۱}{۳}$. چون جملات دنباله مثبت هستند، پس $a_۱=\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه $a_۵=a_۱r^۴=\frac{۱}{۳}\times۳^۴=۲۷$.

۱۷۱۵- گزینهٔ ۲ مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_۵+a_۸=a_۱r^۴+a_۱r^۷=a_۱r^۴(۱+r^۳)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با

$$a_۷+a_۸=a_۱r^۶+a_۱r^۷=a_۱r^۶(۱+r)$$

بنابراین $\frac{a_۵+a_۸}{a_۷+a_۸}=\frac{a_۱r^۴(۱+r^۳)}{a_۱r^۶(۱+r)}=\frac{۱+r^۳}{r^۲(۱+r)}=\frac{۱-\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۴}(۱-\frac{۱}{۲})}=۷$.

۱۷۱۶- گزینهٔ ۳ این جملات را به‌صورت $\frac{a}{r^۲},\frac{a}{r},a\,,ar\,,ar^۲$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{a}{r^۲}\times\frac{a}{r}\times a\times ar\times ar^۲=۱۰۲۴\Rightarrow a^۵=۲^{۱۰}=۴^۵$$

در نتیجه جملهٔ وسط برابر ۴ است.

۱۷۱۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{۲},\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,۱۶\sqrt{۲}$$

پس $a_۱=\sqrt{۲}$ و $a_۹=۱۶\sqrt{۲}$. بنابراین

$$a_۱r^۸=۱۶\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}r^۸=۱۶\sqrt{۲}\Rightarrow r^۸=۱۶\Rightarrow(r^۲)^۴=۲^۴\Rightarrow r^۲=۲$$

در نتیجه $a_۳=a_۱r^۲=۲\sqrt{۲}$.

راه‌حل دوم ابتدا قدرنسبت دنبالهٔ هندسی حاصل را به دست می‌آوریم:

$$r^{۷+۱}=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow r^۸=۱۶=۲^۴\Rightarrow r=\pm\sqrt{۲}$$

$$a_۳=a_۱r^۲=\sqrt{۲}\times(\pm\sqrt{۲})^۲=۲\sqrt{۲}$$

۱۷۱۸- گزینهٔ ۲ قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر است با $-\frac{۹۵}{۸}-(-۱۲)=\frac{۱}{۸}$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت $a_n=-۱۲+\frac{۱}{۸}(n-۱)$ است. در نتیجه جملهٔ هشتادونهم این دنباله برابر است با $a_{۸۹}=-۱۲+\frac{۱}{۸}\times(۸۹-۱)=-۱$. اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را با r نشان دهیم، آن‌گاه $(۳r)^۵=۲۴۳r^۵=$ جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی. بنابراین

$$(۳r)^۵=-۱\Rightarrow۳r=-۱\Rightarrow r=-\frac{۱}{۳}$$

۱۷۱۹- گزینهٔ ۱ چون ۸ واسطهٔ حسابی عددهای a و b است، پس

$$a+b=۱۶\Rightarrow b=۱۶-a$$

اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، ۸ واسطهٔ هندسی عددهای a و $b+۴$ می‌شود. بنابراین $۶۴=a(b+۴)=a(۱۶-a+۴)=۲۰a-a^۲$.

پس $a^۲-۲۰a+۶۴=۰$ و مجموع مقادیر ممکن a برابر مجموع جواب‌های این معادله، یعنی برابر ۲۰ است (توجه کنید در این معادله $\Delta>۰$).

۱۷۲۰- گزینهٔ ۴ جملات دوم، ششم و چهاردهم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب به‌صورت $a+d$، $a+۵d$ و $a+۱۳d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+۵d)^۲=(a+d)(a+۱۳d)\Rightarrow۱۲d^۲=۴ad\Rightarrow a=۳d$$

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با $r=\frac{a+۵d}{a+d}=\frac{۳d+۵d}{۳d+d}=\frac{۸d}{۴d}=۲$.

۱۷۲۱- گزینهٔ ۲ چون $\frac{a_۸}{a_۶}=\sqrt{۲}$، پس $\frac{a_۱r^۷}{a_۱r^۵}=\sqrt{۲}$. در نتیجه $r^۲=\sqrt{۲}$. بنابراین $\frac{a_۷}{a_۳}=\frac{a_۱r^۶}{a_۱r^۲}=r^۴=(r^۲)^۲=\sqrt{۲}^۲=۲$.

۱۷۲۲- گزینهٔ ۳ چون $۴^{۳x}$ واسطهٔ هندسی $۲^{x-۴}$ و $۸^{۲-۳x}$ است، پس

$$(۴^{۳x})^۲=۲^{x-۴}\times۸^{۲-۳x}\Rightarrow۲^{۱۲x}=۲^{x-۴}\times۲^{۶-۹x}\Rightarrow۲^{۱۲x}=۲^{۲-۸x}$$

بنابراین $۱۲x=۲-۸x$، یعنی $x=\frac{۱}{۱۰}$.

۱۷۲۳- گزینهٔ ۲ قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر است با

$$r=\frac{\log_{۱۶}a}{\log_۴a}=\frac{\frac{\log a}{\log۱۶}}{\frac{\log a}{\log۴}}=\frac{\log۴}{\log۱۶}=\frac{\log۴}{۲\log۴}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$a_۷=a_۱r^۶\Rightarrow\frac{۱}{۳۲}=\log_۴a\times\frac{۱}{۶۴}\Rightarrow\log_۴a=۲\Rightarrow a=۴^۲=۱۶$$

۱۷۲۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_۵-a_۱=۱۳۰\Rightarrow a_۱r^۴-a_۱=۱۳۰\Rightarrow a_۱(r^۴-۱)=۱۳۰$$

$$a_۴-a_۲=۲۵\Rightarrow a_۱r^۳-a_۱r=۲۵\Rightarrow a_۱r(r^۲-۱)=۲۵$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{r^۴-۱}{r(r^۲-۱)}=\frac{۱۳۰}{۲۵}\Rightarrow\frac{(r^۲-۱)(r^۲+۱)}{r(r^۲-۱)}=\frac{۲۶}{۵}\Rightarrow\frac{r^۲+۱}{r}=\frac{۲۶}{۵}$$

$$۵(r^۲+۱)=۲۶r\Rightarrow۵r^۲-۲۶r+۵=۰\Rightarrow r=۵\ ,\ r=\frac{۱}{۵}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

به این ترتیب،

$$a_۱r(r^۲-۱)=۲۵\Rightarrow a_۱\times۵\times۲۴=۲۵\Rightarrow a_۱=\frac{۵}{۲۴}$$

در نتیجه $a_۲=a_۱r=\frac{۲۵}{۲۴}$.

۱۷۲۵- گزینهٔ ۳ در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r^6=\frac{b}{a}$.

در حالتی که چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r'^5=(2r)^5=\frac{b}{a}$. بنابراین

$$r^6=(2r)^5\Rightarrow r^6=32r^5\Rightarrow r=32$$

۱۷۲۶- گزینهٔ ۳ این سه عدد را به‌صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم.

پس

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=64\Rightarrow a^3=64\Rightarrow a=4$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r}+a+ar=14\Rightarrow a(\frac{1}{r}+1+r)=14$$

$$4(\frac{1}{r}+1+r)=14\Rightarrow 2r^2-5r+2=0\Rightarrow r=\frac{1}{2}, r=2$$

بنابراین سه جملهٔ مورد نظر به ازای $r=\frac{1}{2}$، به‌صورت $8, 4, 2$ و به ازای $r=2$، به‌صورت $2, 4, 8$ هستند. در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد برابر ۶ است.

۱۷۲۷- گزینهٔ ۲ طول اضلاع مثلث را a، ar و ar^2 در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس، $a^2+(ar)^2=(ar^2)^2$. بنابراین

$$a^2(1+r^2)=a^2r^4\Rightarrow r^4-r^2-1=0\Rightarrow r^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۱۷۲۸- گزینهٔ ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases}2y+x=2x+y\Rightarrow y=x\\ 2y+x=x+4\Rightarrow 2y=4\Rightarrow y=2\end{cases}$$

پس $x=y=2$، بنابراین $x+2y=6$.

۱۷۲۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$a_3=a-3, \quad a_5=a-5, \quad a_6=a-6$$

بنابر فرض، $(a-5)^2=(a-3)(a-6)$. بنابراین

$$a^2-10a+25=a^2-9a+18\Rightarrow a=7$$

در نتیجه $a_{10}=7-10=-3$.

۱۷۳۰- گزینهٔ ۳ جملات سوم، پنجم و هشتم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب $a+2d$، $a+4d$ و $a+7d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+4d)^2=(a+2d)(a+7d)\Rightarrow 2d^2=ad\Rightarrow a=2d$$

بنابراین دنبالهٔ هندسی به‌صورت $4d, 6d, 9d, \ldots$ است که جملهٔ چهارم آن $\frac{27}{2}d$ است زیرا $r=\frac{3}{2}$ و $9d\times\frac{3}{2}=\frac{27}{2}d$. همچنین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت زیر است:

$$a_n=a+(n-1)d=2d+(n-1)d=(n+1)d$$

به این ترتیب $a_{12}=13d$ و نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{27}{2}d}{13d}=\frac{27}{26}$.

۱۷۳۱- گزینهٔ ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحلهٔ n اُم به تعداد $4\times(n-1)$ نقطه به ۵ نقطهٔ شکل (۱) اضافه شده است: $4(n-1)+5=4n+1$، یعنی شکل n اُم $4n+1$ نقطه دارد. پس شکل پانزدهم ۶۱ نقطه دارد.

۱۷۳۲- گزینهٔ ۲ از شرط $a_n>0$ مقادیری از n را پیدا می‌کنیم که به‌ازای آن‌ها a_n مثبت است:

$$a_n>0\Rightarrow 95n-n^2>0\Rightarrow n(95-n)>0$$

چون $n>0$، پس $95-n>0$، در نتیجه $n<95$، یعنی $n\leq 94$. بنابراین ۹۴ جملهٔ دنباله مثبت هستند.

۱۷۳۳- گزینهٔ ۴ فرض کنید قدرنسبت این دنباله d باشد. بنابراین

$$a_5=2a_{10}\Rightarrow a_1+4d=2(a_1+9d)\Rightarrow a_1+14d=0\Rightarrow a_{15}=0\Rightarrow 15a_{15}=0$$

۱۷۳۴- گزینهٔ ۳ جملهٔ وسط، واسطهٔ حسابی دو جملهٔ دیگر است:

$$\log_2 a+\log_2(16a)=2\log_2(3a+4)\Rightarrow \log_2(a(16a))=\log_2(3a+4)^2$$

$$16a^2=(3a+4)^2\Rightarrow 16a^2=9a^2+24a+16$$

$$7a^2-24a-16=0\Rightarrow a=4, a=-\frac{4}{7}\ (\text{غ.ق.ق})$$

۱۷۳۵- گزینهٔ ۳ جمله‌های اول و دوم دنبالهٔ $a_n=2-3n$ به‌ترتیب برابر -1 و -4 است. پس قدرنسبت آن برابر $-4-(-1)=-3$ است. اگر جملهٔ اول را ۴ واحد کاهش دهیم، به -5 تبدیل می‌شود و اگر قدرنسبت را ۶ واحد افزایش دهیم، به ۳ تبدیل می‌شود. پس دنبالهٔ حسابی جدید $-5, -2, 1, \ldots$ است که جملهٔ عمومی آن به‌صورت $b_n=-5+3(n-1)=3n-8$ است، پس جملهٔ بیست‌ویکم دنبالهٔ جدید $b_{21}=3\times21-8=55$ است.

۱۷۳۶- گزینهٔ ۲ مجموع سه جملهٔ اول و سه جملهٔ آخر را حساب می‌کنیم:

$$(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})=6-\sqrt{2}+6+\sqrt{2}=12$$

چون $a_3+a_{n-2}=a_2+a_{n-1}=a_1+a_n$، پس

$$3(a_1+a_n)=12\Rightarrow a_1+a_n=4$$

۱۷۳۷- گزینهٔ ۴ چون $a_1=\frac{1}{2}$ و $r=1\div\frac{1}{2}=2$، حاصل‌ضرب پانزده جملهٔ اول دنباله برابر است با

$$P=a_1\times a_1r\times\cdots\times a_1r^{14}=a_1^{15}\times r^{1+2+\cdots+14}=a_1^{15}r^{\frac{14\times15}{2}}=a_1^{15}r^{7\times15}$$

$$=(\frac{1}{2})^{15}2^{7\times15}=(\frac{1}{2})^{15}\times2^{105}=2^{90}$$

۱۷۳۸- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر دنباله‌ای هم حسابی و هم هندسی باشد جمله‌های آن با هم برابرند، پس هر سه جمله باید برابر باشند. در نتیجه

$$y-9=2x+3=3x-1$$

بنابراین $x=4$ و $y=20$، پس $x+y=24$.

۱۷۳۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $y=rx$، $z=r^2x$ و $t=r^3x$ به شرط آنکه r قدرنسبت دنباله باشد. پس

$$x+z=20\Rightarrow x+r^2x=20\Rightarrow x(1+r^2)=20 \qquad (1)$$

$$y+t=60\Rightarrow rx+r^3x=60\Rightarrow rx(1+r^2)=60 \qquad (2)$$

از تقسیم طرفین تساوی (۲) بر طرفین تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{rx(1+r^2)}{x(1+r^2)}=\frac{60}{20}\Rightarrow r=3$$

۱۷۴۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که اگر قدرنسبت دنباله r و جملهٔ اول آن $a_۱$ باشد، آن‌گاه

$$a_۵-a_۳=۹۶\Rightarrow a_۱r^۴-a_۱r^۲=۹۶\Rightarrow a_۱r^۲(r^۲-۱)=۹۶ \qquad (۱)$$

$$a_۸-a_۶=۱۲\Rightarrow a_۱r^۷-a_۱r^۵=۱۲\Rightarrow a_۱r^۵(r^۲-۱)=۱۲ \qquad (۲)$$

طرفین تساوی (۲) را بر طرفین تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_۱r^۵(r^۲-۱)}{a_۱r^۲(r^۲-۱)}=\frac{۱۲}{۹۶}\Rightarrow r^۳=\frac{۱}{۸}\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}$$

پس

$$a_۱r^۲(r^۲-۱)=۹۶\Rightarrow a_۱(\frac{۱}{۴})(\frac{۱}{۴}-۱)=۹۶\Rightarrow a_۱=-۵۱۲$$

بنابراین

$$a_۵=a_۱r^۴=-۵۱۲(\frac{۱}{۲})^۴=-۳۲$$

۱۷۴۱- گزینهٔ ۴ با استفاده از رابطهٔ $a_n=۲a_{n-۱}+۱$ و جملهٔ اول $a_۱=۱$، جملهٔ هشتم را محاسبه می‌کنیم:

$a_۲=۲\times۱+۱=۳$, $a_۳=۲\times۳+۱=۷$, $a_۴=۲\times۷+۱=۱۵$

$a_۵=۲\times۱۵+۱=۳۱$, $a_۶=۲\times۳۱+۱=۶۳$

$a_۷=۲\times۶۳+۱=۱۲۷$, $a_۸=۲\times۱۲۷+۱=۲۵۵$

تجربی - ۹۵

۱۷۴۲- گزینهٔ ۴ در این دنباله، هر جمله از دو برابر جملهٔ قبل، دو واحد کمتر است، پس هشت جملهٔ اول برابر است با

$a_۱=۳$, $a_۲=۲\times۳-۲=۴$, $a_۳=۲\times۴-۲=۶$

$a_۴=۲\times۶-۲=۱۰$, $a_۵=۲\times۱۰-۲=۱۸$, $a_۶=۲\times۱۸-۲=۳۴$

$a_۷=۲\times۳۴-۲=۶۶$, $a_۸=۲\times۶۶-۲=۱۳۰$

بنابراین $a_۸-a_۷=۱۳۰-۶۶=۶۴$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۷۴۳- گزینهٔ ۱ عدد $۴\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی ۲^a و ۲^b است، پس

$$(۴\sqrt{۲})^۲=۲^a\times۲^b \Rightarrow ۲^۵=۲^{a+b} \Rightarrow a+b=۵$$

واسطهٔ حسابی دو عدد a و b برابر $\frac{a+b}{۲}$، یعنی $۲/۵=\frac{۵}{۲}$ است.

ریاضی - ۸۷

۱۷۴۴- گزینهٔ ۴ جملات را به‌صورت $a, a+۳d, a+۱۰d$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$(a+۳d)^۲=a(a+۱۰d)\Rightarrow a^۲+۹d^۲+۶ad=a^۲+۱۰ad$$

$$۹d^۲=۴ad\Rightarrow d=\frac{۴}{۹}a$$

بنابراین جملات دنبالهٔ هندسی $a, \frac{۷}{۳}a, \frac{۴۹}{۹}a$ هستند و قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\frac{۷}{۳}a}{a}=\frac{۷}{۳}$.

تجربی - ۹۲

۱۷۴۵- گزینهٔ ۱ جملات $a_۴$، $a_۶$ و $a_{۱۲}$ از دنبالهٔ حسابی، دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس جملهٔ ششم واسطهٔ هندسی جملات چهارم و دوازدهم است:

$$a_۶^۲=a_۴\times a_{۱۲}\Rightarrow (a_۱+۵d)^۲=(a_۱+۳d)(a_۱+۱۱d)$$

$$a_۱^۲+۱۰a_۱d+۲۵d^۲=a_۱^۲+۱۴a_۱d+۳۳d^۲$$

$$۴a_۱d=-۸d^۲\Rightarrow a_۱=-۲d$$

بنابراین $r=\frac{a_۶}{a_۴}=\frac{a_۱+۵d}{a_۱+۳d}=\frac{-۲d+۵d}{-۲d+۳d}=۳$.

ریاضی - ۸۱

۱۷۴۶- گزینهٔ ۴ شرط اینکه سه عدد a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند این است که $۲b=a+c$. بنابراین

$$۲(۳p+۴)=(۲p+۳)+(۵p-۱)\Rightarrow p=۶$$

$$d=۳p+۴-۲p-۳=p+۱\xrightarrow{p=۶} d=۷$$

ریاضی - ۸٤

۱۷۴۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_۵^۲=a_۱a_{۱۱}\Rightarrow (a_۱+۴d)^۲=a_۱(a_۱+۱۰d)$$

$$a_۱^۲+۸a_۱d+۱۶d^۲=a_۱^۲+۱۰a_۱d\Rightarrow ۱۶d^۲=۲a_۱d\Rightarrow a_۱=۸d$$

$$a_۵=a_۱+۴d=۱۲d, a_{۱۱}=a_۱+۱۰d=۱۸d\Rightarrow r=\frac{a_{۱۱}}{a_۵}=\frac{۱۸d}{۱۲d}=\frac{۳}{۲}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۷۴۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید $t_۳$، $t_۷$ و $t_۹$ جملات دنبالهٔ حسابی و $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند. در این صورت

$$a_۲^۲=a_۱a_۳\Rightarrow t_۷^۲=t_۳t_۹\Rightarrow (t_۱+۶d)^۲=(t_۱+۲d)(t_۱+۸d)$$

$$t_۱^۲+۱۲t_۱d+۳۶d^۲=t_۱^۲+۸dt_۱+۲t_۱d+۱۶d^۲$$

$$۲t_۱d+۲۰d^۲=۰\Rightarrow ۲d(t_۱+۱۰d)=۰\xrightarrow{d\neq۰} t_۱+۱۰d=۰$$

بنابراین جملهٔ یازدهم دنبالهٔ حسابی برابر صفر است.

تجربی - ۸۸

۱۷۴۹- گزینهٔ ۳ طبق فرض،

$$\begin{cases} a_{۱۲}-a_{۱۰}=۵ \\ a_{۱۲}+a_{۱۰}=۲۵ \end{cases}\Rightarrow a_{۱۲}=۱۵, a_{۱۰}=۱۰\Rightarrow d=\frac{a_{۱۲}-a_{۱۰}}{۱۲-۱۰}=\frac{۵}{۲}$$

از طرف دیگر،

$$d=\frac{a_{۲۱}-a_{۱۰}}{۲۱-۱۰}\Rightarrow a_{۲۱}=a_{۱۰}+۱۱d=۱۰+۱۱(\frac{۵}{۲})=\frac{۷۵}{۲}=۳۷/۵$$

خارج از کشور ریاضی - ۸٤

۱۷۵۰- گزینهٔ ۲ سه جمله را به‌صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ فرض می‌کنیم، در این صورت

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=۲۱۶\Rightarrow a^۳=۲۱۶\Rightarrow a=۶$$

$$\frac{a}{r}+a+ar=۱۹\Rightarrow \frac{۶}{r}+۶+۶r=۱۹\Rightarrow ۶r^۲-۱۳r+۶=۰$$

$$(۳r-۲)(۲r-۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} r=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \text{سه جملهٔ متوالی: } ۹,۶,۴ \\ r=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \text{سه جملهٔ متوالی: } ۴,۶,۹ \end{cases}$$

در هر دو صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله برابر ۵ است.

تجربی - ۹۰

فصل دهم

۱۷۵۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $۰<a<b$، آن‌گاه $\sqrt{a}<\sqrt{b}$. بنابراین

$$۵<۹\Rightarrow\sqrt{۵}<\sqrt{۹}\Rightarrow\sqrt{۵}<۳\Rightarrow\sqrt{۵}-۳<۰$$

در نتیجه $\sqrt{(\sqrt{۵}-۳)^۲}=|\sqrt{۵}-۳|=-(\sqrt{۵}-۳)=۳-\sqrt{۵}$. از طرف دیگر، $\sqrt[۳]{(\sqrt{۳}-۲)^۳}=\sqrt{۳}-۲$. همین‌طور

$$۴<۵\Rightarrow\sqrt{۴}<\sqrt{۵}\Rightarrow۲<\sqrt{۵}\Rightarrow\sqrt{۵}-۲>۰$$

بنابراین $\sqrt[۴]{(\sqrt{۵}-۲)^۴}=|\sqrt{۵}-۲|=\sqrt{۵}-۲$. به این ترتیب عبارت مورد نظر برابر است با $۳-\sqrt{۵}+\sqrt{۳}-۲+\sqrt{۵}-۲=\sqrt{۳}-۱$.

۱۷۵۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[۷]{۸\sqrt[۴]{۴}}=\sqrt[۷]{۲^۳\sqrt[۴]{۲^۲}}=\sqrt[۷]{۲^۳\sqrt{۲}}=۲^{\frac{۳}{۷}}\times۲^{\frac{۱}{۱۴}}=۲^{\frac{۳}{۷}+\frac{۱}{۱۴}}=۲^{\frac{۷}{۱۴}}=\sqrt{۲}$$

۱۷۵۳- گزینهٔ ۴ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت ساده می‌شود:

$$\frac{\sqrt[۳]{۹}}{\sqrt[۵]{۲۷}}-\frac{\sqrt[۵]{۹}}{\sqrt[۳]{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}\times\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۵]{۹}\times\sqrt[۵]{۲۷}}{\sqrt[۵]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۲۷}-\sqrt[۵]{۳^۵}}{\sqrt[۵]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۳-۳}{\sqrt[۵]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۳}}=۰$$

۱۷۵۴- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر را به شکل اعداد توان‌دار با نمای گویا می‌نویسیم:

$$۳\sqrt{۲\sqrt{۳\sqrt{۲}}}=۳^۱\times۲^{\frac{۱}{۲}}\times۳^{\frac{۱}{۴}}\times۲^{\frac{۱}{۸}}=۳^{\frac{۵}{۴}}\times۲^{\frac{۵}{۸}}$$

$$۲\sqrt{۳\sqrt{۲\sqrt{۳}}}=۲^۱\times۳^{\frac{۱}{۲}}\times۲^{\frac{۱}{۴}}\times۳^{\frac{۱}{۸}}=۲^{\frac{۵}{۴}}\times۳^{\frac{۵}{۸}}$$

بنابراین $A=\frac{۳^{\frac{۵}{۴}}\times۲^{\frac{۵}{۸}}}{۲^{\frac{۵}{۴}}\times۳^{\frac{۵}{۸}}}=\frac{۳^{\frac{۵}{۸}}}{۲^{\frac{۵}{۸}}}=(\frac{۳}{۲})^{\frac{۵}{۸}}=\sqrt[۸]{(\frac{۳}{۲})^۵}$.

۱۷۵۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}\times\sqrt[۳]{x\sqrt[۴]{x}}\times\sqrt[۴]{x\sqrt[۵]{x}}=x^{\frac{۱}{۲}}x^{\frac{۱}{۶}}x^{\frac{۱}{۳}}x^{\frac{۱}{۱۲}}x^{\frac{۱}{۴}}x^{\frac{۱}{۲۰}}$$

$$=x^{\frac{۳۰+۱۰+۲۰+۵+۱۵+۳}{۶۰}}=x^{\frac{۸۳}{۶۰}}=x^{۱+\frac{۲۳}{۶۰}}=x\sqrt[۶۰]{x^{۲۳}}$$

۱۷۵۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[n]{۹}\times\sqrt[۲n]{۳}=۹^{\frac{۱}{n}}\times۳^{\frac{۱}{۲n}}=۳^{\frac{۲}{n}}\times۳^{\frac{۱}{۲n}}=۳^{\frac{۵}{۲n}}=\sqrt{۳}=۳^{\frac{۱}{۲}}$$

پس

$$\frac{۵}{۲n}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow n=۵$$

در نتیجه $\sqrt[n]{۳۷-n}=\sqrt[۵]{۳۷-۵}=\sqrt[۵]{۳۲}=۲$.

۱۷۵۷- گزینهٔ ۴ چون x عددی مثبت است، تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}=۳\Rightarrow\sqrt[۳]{\sqrt{x^۲\times x}}=۳\Rightarrow\sqrt[۶]{x^۳}=۳\Rightarrow\sqrt{x}=۳$$

بنابراین $x=۹$ و در نتیجه

$$\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}=\sqrt{۹\sqrt[۳]{۹}}=\sqrt{۹}\sqrt{\sqrt[۳]{۹}}=۳\sqrt[۶]{۳^۲}=۳\sqrt[۳]{۳}$$

۱۷۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^{\frac{۵}{۲}}=۳۲\Rightarrow(x^{\frac{۵}{۲}})^{\frac{۲}{۵}}=(۲^۵)^{\frac{۲}{۵}}\Rightarrow x=۲^۲$$

بنابراین

$$x^{\frac{۲}{۳}}=(۲^۲)^{\frac{۲}{۳}}=۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{۱+\frac{۱}{۳}}=۲\sqrt[۳]{۲}$$

۱۷۵۹- گزینهٔ ۳ ابتدا x ، y و z را ساده‌تر می‌کنیم:

$$x=a^{\frac{۳}{۴}}\ ,\quad y=a^{\frac{۴}{۳}}\ ,\quad z=a^{\frac{۱۰}{۱۲}}=a^{\frac{۵}{۶}}$$

از طرف دیگر، $\frac{۴}{۳}>\frac{۵}{۶}>\frac{۳}{۴}$ و چون $۰<a<۱$، پس

$$a^{\frac{۴}{۳}}<a^{\frac{۵}{۶}}<a^{\frac{۳}{۴}}\Rightarrow y<z<x$$

۱۷۶۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اولاً واضح است که $\sqrt[۴]{۰}=۰$ و ریشهٔ چهارم عدد صفر در بازهٔ مورد نظر قرار دارد. اکنون فرض می‌کنیم a عددی مثبت باشد که ریشهٔ چهارم مثبت آن در بازهٔ $(۰,۴)$ قرار دارد. یعنی

$$۰<\sqrt[۴]{a}<۴\Rightarrow۰<(\sqrt[۴]{a})^۴<۴^۴\Rightarrow۰<a<۲۵۶$$

همچنین فرض می‌کنیم b عددی مثبت باشد که ریشهٔ چهارم منفی آن در بازهٔ $(-۳,۰)$ قرار دارد. یعنی

$$-۳<-\sqrt[۴]{b}<۰\Rightarrow۰<\sqrt[۴]{b}<۳\Rightarrow۰<(\sqrt{b})^۴<۳^۴\Rightarrow۰<b<۸۱$$

بنابراین a می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۲۵۵ و b می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۸۰ باشد. اگر عدد صفر را هم در نظر بگیریم، می‌توان گفت اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ... و ۲۵۵ حداقل یک ریشهٔ چهارم در بازهٔ $(-۳,۴)$ دارند. تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶تاست.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$-۳<\sqrt[۴]{x}<۴\Rightarrow-\sqrt[۴]{۸۱}<\sqrt[۴]{x}<\sqrt[۴]{۲۵۶}\Rightarrow۰\le x<۲۵۶$$

پس تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶تاست.

۱۷۶۱- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $x<۰$.

$$\sqrt[۴]{-x^۵}=\sqrt[۴]{(-x)x^۴}=\sqrt[۴]{-x}\times\sqrt[۴]{x^۴}=\sqrt[۴]{-x}\times|x|=-x\sqrt[۴]{-x}$$

راه‌حل دوم چون $x<۰$ ، حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-۱$ می‌یابیم:

$$\sqrt[۴]{-x^۵}=\sqrt[۴]{۱}=۱$$

فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $x=-۱$ برابر ۱ است.

۱۷۶۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{\sqrt[۵]{۸۱}}=\sqrt[۴\times۵]{۸۱}=\sqrt[۵]{\sqrt[۴]{۸۱}}=\sqrt[۵]{۳}$$

$$\sqrt[۵]{۹۶}=\sqrt[۵]{۲^۵\times۳}=\sqrt[۵]{۲^۵}\times\sqrt[۵]{۳}=۲\sqrt[۵]{۳}$$

$$\frac{۳}{\sqrt[۵]{۸۱}}=\frac{۳}{\sqrt[۵]{۳^۴}}\times\frac{\sqrt[۵]{۳}}{\sqrt[۵]{۳}}=\frac{۳\times\sqrt[۵]{۳}}{\sqrt[۵]{۳^۵}}=\frac{۳\sqrt[۵]{۳}}{۳}=\sqrt[۵]{۳}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[۵]{۳}-۲\sqrt[۵]{۳}-\sqrt[۵]{۳}=-۲\sqrt[۵]{۳}$.

۱۷۶۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $\sqrt[۶]{۲}=a$ ، در این صورت

$$\sqrt[۶]{۲}=a\Rightarrow ۲^{\frac{۱}{۶}}=a\Rightarrow (۲^{\frac{۱}{۶}})^۳=a^۳\Rightarrow ۲^{\frac{۱}{۲}}=a^۳\Rightarrow \sqrt{۲}=a^۳$$

و

$$\sqrt[۶]{۲}=a\Rightarrow ۲^{\frac{۱}{۶}}=a\Rightarrow (۲^{\frac{۱}{۶}})^۲=a^۲\Rightarrow ۲^{\frac{۱}{۳}}=a^۲\Rightarrow \sqrt[۳]{۲}=a^۲$$

بنابراین $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲}}{۱+\sqrt[۶]{۲}}=\frac{a^۳+a^۲}{۱+a}=\frac{a^۲(a+۱)}{۱+a}=a^۲=\sqrt[۳]{۲}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲}}{۱+\sqrt[۶]{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۶]{۲}+۱)}{۱+\sqrt[۶]{۲}}=\sqrt[۳]{۲}$$

۱۷۶۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$x(\sqrt[۷]{\frac{۱}{x^۸}-\frac{۱}{x^۷}})=\sqrt[۷]{x^۷(\frac{۱}{x^۸}-\frac{۱}{x^۷})}=\sqrt[۷]{\frac{x^۷}{x^۸}-\frac{x^۷}{x^۷}}=\sqrt[۷]{\frac{۱}{x}-۱}$$

در نتیجه $\sqrt[۷]{\frac{۱}{x}-۱}=\frac{۱}{۲}$ ، پس

$$\frac{۱}{x}-۱=\frac{۱}{۱۲۸}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۱۲۹}{۱۲۸}\Rightarrow x=\frac{۱۲۸}{۱۲۹}$$

راه‌حل دوم از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$x\sqrt[۷]{\frac{۱}{x^۷}(\frac{۱}{x}-۱)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x(\frac{۱}{x})\sqrt[۷]{\frac{۱}{x}-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{x}-۱=(\frac{۱}{۲})^۷=\frac{۱}{۱۲۸}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۱۲۹}{۱۲۸}\Rightarrow x=\frac{۱۲۸}{۱۲۹}$$

۱۷۶۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که x مثبت است. می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{۳}}=\sqrt[۳]{۳\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt[۴]{۳}=\sqrt[۳]{\sqrt{۹x}}=\sqrt[۶]{۹x}\Rightarrow(\sqrt[۴]{۳})^{۱۲}=(\sqrt[۶]{۹x})^{۱۲}$$

$$۳^۳=(۹x)^۲\Rightarrow ۳\sqrt{۳}=۹x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۷۶۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x>۰$. می‌توان نوشت

$$\sqrt[۴]{x\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}=\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳\sqrt[۴]{۳^۲}}}$$

$$x^{\frac{۱}{۴}}\times x^{\frac{۱}{۱۲}}\times x^{\frac{۱}{۲۴}}=۳^{\frac{۱}{۲}}\times۳^{\frac{۱}{۶}}\times(۳^۲)^{\frac{۱}{۲۴}}\Rightarrow x^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۴}}=۳^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}}$$

$$x^{\frac{۹}{۲۴}}=۳^{\frac{۹}{۱۲}}\Rightarrow x^{\frac{۱}{۲۴}}=۳^{\frac{۱}{۱۲}}\Rightarrow(x^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۱۲}}=۳^{\frac{۱}{۱۲}}\Rightarrow x^{\frac{۱}{۲}}=۳\Rightarrow x=۹$$

۱۷۶۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[۶]{۹^{۳x-۶}}=\sqrt[۶]{(۳^۲)^{۳(x-۲)}}=۳^{\frac{۶(x-۲)}{۶}}=۳^{x-۲}$$

$$\sqrt[۳]{۲۷^{۴x-۲}}=\sqrt[۳]{۳^{۳(۴x-۲)}}=۳^{\frac{۳(۴x-۲)}{۳}}=۳^{۴x-۲}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{۳^{x-۲}}{۳^{۴x-۲}}=۲۷\Rightarrow ۳^{x-۲-(۴x-۲)}=۳^۳\Rightarrow ۳^{-۳x}=۳^۳\Rightarrow-۳x=۳\Rightarrow x=-۱$$

۱۷۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $a>۰$. در تساوی داده شده اعداد را با نمای گویا می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{a^{\frac{۱}{۲}}\times a^{\frac{۱}{۳}}\times a^{\frac{۱}{۶}}}{a^{\frac{۱}{۴}}\times a^{\frac{۱}{۵}}\times a^{\frac{۱}{۲۰}}}=۳\Rightarrow\frac{a^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}}}{a^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۰}}}=۳\Rightarrow\frac{a^۱}{a^{\frac{۱}{۲}}}=۳\Rightarrow a^{\frac{۱}{۲}}=۳\Rightarrow(a^{\frac{۱}{۲}})^۲=۳^۲$$

بنابراین $a=۹$.

۱۷۶۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt[۳]{b}}=a^{\frac{۱}{۲}}\times b^{\frac{۱}{۶}}\ ,\quad \sqrt[۳]{b\sqrt{a}}=b^{\frac{۱}{۳}}\times a^{\frac{۱}{۶}}$$

بنابراین

$$\sqrt{a\sqrt[۳]{b}}\times\sqrt[۳]{b\sqrt{a}}=a^{\frac{۱}{۲}}\times b^{\frac{۱}{۶}}\times b^{\frac{۱}{۳}}\times a^{\frac{۱}{۶}}=a^{\frac{۴}{۶}}\times b^{\frac{۳}{۶}}=(a^۴)^{\frac{۱}{۶}}\times(b^۳)^{\frac{۱}{۶}}$$

$$=(a^۴b^۳)^{\frac{۱}{۶}}=(۲۷)^{\frac{۱}{۶}}=۳^{\frac{۳}{۶}}=۳^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}$$

راه‌حل دوم فرض کنید $a=۱$ و $b=۳$. در این صورت

$$\sqrt{a\sqrt[۳]{b}}\times\sqrt[۳]{b\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt[۳]{۳}}\ \sqrt[۳]{۳}=۳^{\frac{۱}{۶}}\times۳^{\frac{۱}{۳}}=۳^{\frac{۳}{۶}}=\sqrt{۳}$$

۱۷۷۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون $\sqrt[۳]{a}>\sqrt{a}$ ، پس $۰<a<۱$ و در نتیجه واضح است که $\sqrt[۴]{a}>\sqrt{a}$ و $\sqrt{a}>a$. همچنین از فرض $۰<a<۱$ نتیجه می‌شود $a^۸>a^۹$ و در نتیجه $\sqrt[۱۲]{a^۸}>\sqrt[۱۲]{a^۹}$ ، یعنی $\sqrt[۳]{a^۲}>\sqrt[۴]{a^۳}$. ولی $\sqrt{a^۳}>\sqrt[۳]{a^۲}$ درست نیست، زیرا

$$۰<a<۱\Rightarrow a^۹<a^۴\Rightarrow\sqrt[۶]{a^۹}<\sqrt[۶]{a^۴}\Rightarrow\sqrt{a^۳}<\sqrt[۳]{a^۲}$$

راه‌حل دوم چون $\sqrt[۳]{a}>\sqrt{a}$ ، پس $a^{\frac{۱}{۳}}>a^{\frac{۱}{۲}}$ و چون $\frac{۱}{۲}>\frac{۱}{۳}$ ، پس $۰<a<۱$.

بررسی گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) $\frac{۱}{۴}<۱\Rightarrow a^{\frac{۱}{۴}}>a\Rightarrow\sqrt[۴]{a}>a$

گزینهٔ (۲) $\frac{۱}{۲}<۱\Rightarrow a^{\frac{۱}{۲}}>a\Rightarrow\sqrt{a}>a$

گزینهٔ (۳) $\frac{۳}{۲}>\frac{۲}{۳}\Rightarrow a^{\frac{۳}{۲}}<a^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow\sqrt{a^۳}<\sqrt[۳]{a^۲}$

گزینهٔ (۴) $\frac{۲}{۳}<\frac{۳}{۴}\Rightarrow a^{\frac{۲}{۳}}>a^{\frac{۳}{۴}}\Rightarrow\sqrt[۳]{a^۲}>\sqrt[۴]{a^۳}$

بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۱۷۷۱- گزینهٔ ۴ طرفین رابطهٔ $x+y=۴$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^۲+y^۲+۲xy=۱۶$$

چون $xy=۲$ ، پس

$$x^۲+y^۲+۴=۱۶\Rightarrow x^۲+y^۲=۱۲$$

حال، طرفین رابطهٔ اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^۴+y^۴+۲x^۲y^۲=۱۴۴\Rightarrow x^۴+y^۴+۲(xy)^۲=۱۴۴$$

$$x^۴+y^۴+۲\times۴=۱۴۴\Rightarrow x^۴+y^۴=۱۳۶$$

۱۷۷۲- گزینهٔ ۳ اعداد $۱۴+۶\sqrt{۵}$ و $۱۴-۶\sqrt{۵}$ مربع کامل هستند. زیرا $(۳+\sqrt{۵})^۲=۳^۲+\sqrt{۵}^۲+۲(۳\sqrt{۵})=۹+۵+۲\times۳\sqrt{۵}=۱۴+۶\sqrt{۵}$. به همین ترتیب $۱۴-۶\sqrt{۵}=(۳-\sqrt{۵})^۲$. بنابراین

$$\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}}=۳+\sqrt{۵}-(۳-\sqrt{۵})=۲\sqrt{۵}$$

۱۷۷۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج،

$$(\sqrt{x+۱۱}-\sqrt{x+۳})(\sqrt{x+۱۱}+\sqrt{x+۳})=(x+۱۱)-(x+۳)=۸$$

بنابراین

$$\sqrt{۲}(\sqrt{x+۱۱}+\sqrt{x+۳})=۸\Rightarrow\sqrt{x+۱۱}+\sqrt{x+۳}=۴\sqrt{۲}$$

۱۷۷۴- گزینهٔ ۱ ابتدا عبارت را به‌صورت $\frac{\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴}}{\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴}}-\frac{\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴}}{\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴}}$ می‌نویسیم. اکنون با مخرج مشترک‌گیری و استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود که عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(\sqrt{۲۴}-۴)-(\sqrt{۲۴}+۴)}{\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴}\times\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴}}=\frac{-۸}{\sqrt{(\sqrt{۲۴})^۲-۴^۲}}=\frac{-۸}{\sqrt{۸}}=-\sqrt{۸}=-۲\sqrt{۲}$$

۱۷۷۵- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد مربع مجموع سه جمله عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(a+b-c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲ac-۲bc$$

$$(a-b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲-۲ab+۲ac-۲bc$$

بنابراین

$$A=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲ac-۲bc-۳a^۲-۳b^۲-۳c^۲$$
$$+۶ab-۶ac+۶bc+۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲$$
$$=۸ab-۸ac+۴bc=۴(۲ab-۲ac+bc)$$

۱۷۷۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(x^۲-۲x)^۳-۲x^۴=x^۶-۶x^۵+۱۲x^۴-۸x^۳-۲x^۴$$
$$=x^۶-۶x^۵+۱۰x^۴-۸x^۳$$

بنابراین ضریب $x^۴$ برابر ۱۰ است.

۱۷۷۷- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف تساوی $\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{۴}$ را به توان سه برسانیم، از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله نتیجه می‌شود

$$a-b-۳\sqrt[۳]{a}\sqrt[۳]{b}(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})=۴\Rightarrow a-b-۳\sqrt[۳]{ab}(\sqrt[۳]{۴})=۴$$

$$a-b-۳\sqrt[۳]{۲}\sqrt[۳]{۴}=۴\Rightarrow a-b-۳(۲)=۴\Rightarrow a-b=۱۰$$

۱۷۷۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{b^۲})=۴(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{b^۲}) \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}=(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})^۲+\frac{۲}{ab}=۴^۲+\frac{۲}{۳}$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=۴(۱۶+\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳})=۶۸$$

راه‌حل دوم توجه کنید که اگر طرفین رابطهٔ $\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=۴$ را به توان سه برسانیم.

$$(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})^۳=۴^۳\Rightarrow\frac{۱}{a^۳}-\frac{۳}{a^۲b}+\frac{۳}{ab^۲}-\frac{۱}{b^۳}=۶۴$$

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}-\frac{۳}{ab}(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})=۶۴$$

$$\xrightarrow{ab=۳,\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=۴}\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=۶۴+\frac{۳}{۳}\times۴=۶۸$$

۱۷۷۹- گزینهٔ ۴ اگر از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۵}{(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۳}^۲-\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲}^۲)}=\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳}^۳+\sqrt[۳]{۲}^۳}=\frac{۵}{۳+۲}=\frac{۵}{۵}=۱$$

۱۷۸۰- گزینهٔ ۳ به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=x(x-۱)(x+۱)(x-۲)+۱=(x^۲-x)(x^۲-x-۲)+۱$$
$$=(x^۲-x)((x^۲-x)-۲)+۱=(x^۲-x)^۲-۲(x^۲-x)+۱$$

اکنون به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=(x^۲-x-۱)^۲$$

۱۷۸۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^۲+\frac{۴}{۹x^۲}=(x+\frac{۲}{۳x})^۲-۲(x)(\frac{۲}{۳x})$$
$$=(x+\frac{۲}{۳x})^۲-\frac{۴}{۳}=۳^۲-\frac{۴}{۳}=\frac{۲۳}{۳}$$

بنابراین $۳x^۲+\frac{۴}{۳x^۲}=۳(x^۲+\frac{۴}{۹x^۲})=۳\times\frac{۲۳}{۳}=۲۳$.

۱۷۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\frac{۱}{a}=۲+|a|>۰$، در نتیجه $a>۰$.

بنابراین، فرض مسئله به شکل $\frac{۱}{a}-a=۲$ درمی‌آید. اکنون توجه کنید که $\frac{۱}{a}+|a|=\frac{۱}{a}+a>۰$. از طرف دیگر، $(a+\frac{۱}{a})^۲-(a-\frac{۱}{a})^۲=۴$. بنابراین

$$(a+\frac{۱}{a})^۲=۴+۴=۸\xrightarrow{a+\frac{۱}{a}>۰}a+\frac{۱}{a}=۲\sqrt{۲}$$

۱۷۸۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $۳-۲\sqrt{۲}=(\sqrt{۲}-۱)^۲$. بنابراین

$$(\sqrt{۲}-۱)(۳-۲\sqrt{۲})=(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}-۱)^۲=(\sqrt{۲}-۱)^۳$$

و در نتیجه

$$\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-۱)(۳-۲\sqrt{۲})}=\sqrt{۲}-۱$$

۱۷۸۴- گزینهٔ ۲ فرض کنید $A=(۳^{\frac{۱}{۸}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$.

دو طرف این تساوی را در $۳^{\frac{۱}{۸}}-۱$، که همان a است، ضرب می‌کنیم:

$$(۳^{\frac{۱}{۸}}-۱)A=(۳^{\frac{۱}{۸}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۸}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$

$$=((۳^{\frac{۱}{۸}})^۲-۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)=(۳^{\frac{۱}{۴}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$

$$=(۳^{\frac{۱}{۲}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)=۳-۱=۲$$

بنابراین $A=\frac{۲}{۳^{\frac{۱}{۸}}-۱}=\frac{۲}{a}$.

۱۷۸۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(a-b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲-۲ab-۲bc+۲ac$$

بنابراین

$$۱۰^۲=۶۶-۲(ab+bc-ca)\Rightarrow ۳۴=-۲(ab+bc-ca)$$

پس $ab+bc-ca=-۱۷$.

۱۷۸۶- گزینهٔ ۴ بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله،

$$(a-b)^۳-a^۳+b^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳-a^۳+b^۳$$

$$=-۳ab(a-b)=-۳ab(\frac{۳}{ab})=-۹$$

۱۷۸۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$a^۳+b^۳=(a+b)((a+b)^۲-۳ab)$$

از طرف دیگر،

$$a+b=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳-۲}=۲\sqrt{۳}$$

$$ab=\frac{۱}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{۳-۲}=۱$$

بنابراین $a^۳+b^۳=۲\sqrt{۳}(۴\times۳-۳)=۱۸\sqrt{۳}$.

۱۷۸۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$(a-b)^۲=a^۲+b^۲-۲ab\Rightarrow ۲۵=۱۷-۲ab\Rightarrow ab=-۴$$

بنابراین، طبق اتحاد چاق و لاغر،

$$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+b^۲+ab)=۵(۱۷-۴)=۶۵$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $a=۴$ و $b=-۱$ در تساوی‌های داده شده صدق می‌کنند، در این صورت $a^۳-b^۳=۶۵$.

۱۷۸۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}=۷\Rightarrow\frac{a^۲+b^۲}{a^۲b^۲}=۷\xrightarrow{ab=۱}a^۲+b^۲=۷$$

از طرف دیگر،

$$(a+b)^۲=a^۲+b^۲+۲ab=۷+۲=۹$$

چون a و b عددهایی منفی‌اند، پس $a+b$ نیز منفی است، در نتیجه $a+b=-۳$. به این ترتیب، بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲+b^۲-ab)=(-۳)(۷-۱)=-۱۸$$

۱۷۹۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(a-۱)(a^۴+a^۳+a^۲+a+۱)(a^{۱۰}+a^۵+۱)=(a^۵-۱)(a^{۱۰}+a^۵+۱)$$

$$=(a^۵-۱)((a^۵)^۲+a^۵\times۱+۱)=(a^۵)^۳-۱=a^{۱۵}-۱$$

$$=(\sqrt[۵]{۳})^{۱۵}-۱=۳^۳-۱=۲۶$$

۱۷۹۱- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{a^۴+b^۴}{a^۲b^۲}=\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}=(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})^۲+۲\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=۸^۲+۲=۶۶$$

۱۷۹۲- گزینهٔ ۳ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را با ۱ جمع می‌کنیم:

$$a+\frac{۱}{a+۱}=۴\Rightarrow a+۱+\frac{۱}{a+۱}=۵$$

اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(a+۱+\frac{۱}{a+۱})^۲=۵^۲\Rightarrow(a+۱)^۲+\frac{۱}{(a+۱)^۲}+۲(a+۱)\times\frac{۱}{a+۱}=۲۵$$

$$(a+۱)^۲+\frac{۱}{(a+۱)^۲}+۲=۲۵\Rightarrow(a+۱)^۲+\frac{۱}{(a+۱)^۲}=۲۵-۲=۲۳$$

۱۷۹۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا مقدار $(a-b)^۲$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-b)^۲=(\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}-\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}})^۲$$

$$=۳-۲\sqrt{۲}+۳+۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}=۶-۲=۴$$

بنابراین

$$(a-b)^۶=((a-b)^۲)^۳=۴^۳=۶۴$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a=\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}=\sqrt{۲}-۱$$

$$b=\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}+۱)^۲}=\sqrt{۲}+۱$$

پس $(a-b)^۶=(\sqrt{۲}-۱-\sqrt{۲}-۱)^۶=(-۲)^۶=۶۴$.

۱۷۹۴- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم $(\sqrt{x-a}+\sqrt{x})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x})=a+۱$. بنابراین

$$x-a-x=a+۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۱۷۹۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(a-b-c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(bc-ab-ac)$$

پس $(a-b-c)^۲=۲۸+۲(۴)=۳۶$. بنابراین $a-b-c=\pm۶$.

۱۷۹۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(a+b)^۳=a^۳+b^۳+۳ab(a+b)$.

دو طرف تساوی داده شده را به توان سه می‌رسانیم:

$$x^۳=(\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-۲})^۳+(\sqrt[۳]{\sqrt{۳}+۲})^۳$$

$$+۳\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-۲}\ \sqrt[۳]{\sqrt{۳}+۲}(\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-۲}+\sqrt[۳]{\sqrt{۳}+۲})$$

$$=\sqrt{۳}-۲+\sqrt{۳}+۲+۳\sqrt[۳]{۳-۴}(x)=۲\sqrt{۳}-۳x$$

بنابراین $x^۳+۳x=۲\sqrt{۳}$.

۱۷۹۷- گزینهٔ ۲ اگر تساوی دوم را یک بار با تساوی اول جمع و بار دیگر از آن کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$a^۳+۳ab^۲+b^۳+۳a^۲b=۱۲۵\Rightarrow(a+b)^۳=۱۲۵\Rightarrow a+b=۵$$

$$a^۳+۳ab^۲-b^۳-۳a^۲b=۲۷\Rightarrow(a-b)^۳=۲۷\Rightarrow a-b=۳$$

بنابراین $\frac{a+b}{a-b}=\frac{۵}{۳}$.

۱۷۹۸- گزینهٔ ۳ بنابر فرض،

$$\frac{a-۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a}}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۲}$$

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{a}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۲}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید

$$a+\frac{۱}{a}-۲=۲\Rightarrow a+\frac{۱}{a}=۴$$

و اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به‌دست می‌آید

$$a^۳+\frac{۱}{a^۳}+۳a+\frac{۳}{a}=۶۴$$

به این ترتیب $a^۳+\frac{۱}{a^۳}=۶۴-۳(۴)=۵۲$.

۱۷۹۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[۳]{۲\times۹}+\sqrt[۳]{۲\times۱۵}+\sqrt[۳]{۲\times۲۵}=\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۱۵}+\sqrt[۳]{۲۵})$$

$$=\sqrt[۳]{۲}((\sqrt[۲]{۳})^۲+\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۵}+(\sqrt[۳]{۵})^۲)$$

در نتیجه، از اتحاد چاق و لاغر نتیجه می‌شود:

$$ab=(\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۵})((\sqrt[۳]{۳})^۲+\sqrt[۳]{۳}\sqrt[۳]{۵}+(\sqrt[۳]{۵})^۲)(\sqrt[۳]{۲})$$

$$=((\sqrt[۳]{۳})^۳-(\sqrt[۳]{۵})^۳)(\sqrt[۳]{۲})=(۳-۵)\sqrt[۳]{۲}=-۲\sqrt[۳]{۲}$$

۱۸۰۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$A=(x-۲y)(x^۴+۲x^۳y+۴x^۲y^۲+۸xy^۳+۱۶y^۴)$$
$$=(x-۲y)(x^۴+x^۳(۲y)+x^۲(۲y)^۲+x(۲y)^۳+(۲y)^۴)$$
$$=x^۵-(۲y)^۵=x^۵-۳۲y^۵$$

بنابراین به‌ازای $x=۲\sqrt[۵]{۲}$ و $y=\sqrt[۵]{۴}$ مقدار A برابر است با

$$A=(۲\sqrt[۵]{۲})^۵-۳۲(\sqrt[۵]{۴})^۵=۳۲\times۲-۳۲\times۴=-۶۴$$

۱۸۰۱- گزینهٔ ۲ مقدار عبارت $\frac{a+b}{a-b}$ مثبت است، بنابراین این عبارت را می‌توان به‌صورت $\sqrt{(\frac{a+b}{a-b})^۲}$ نوشت. به این ترتیب

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{(\frac{a+b}{a-b})^۲}=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲+۲ab}{a^۲+b^۲-۲ab}}=\sqrt{\frac{۸ab+۲ab}{۸ab-۲ab}}=\sqrt{\frac{۱۰ab}{۶ab}}=\sqrt{\frac{۵}{۳}}$$

۱۸۰۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با توجه به اینکه $x\neq۰$، دو طرف تساوی داده شده را معکوس می‌کنیم و مقدار $x+\frac{۱}{x}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x^۲+۱}{x}=۴\Rightarrow\frac{x^۲}{x}+\frac{۱}{x}=۴\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۴$$

برای محاسبهٔ مقدار $\frac{x^۲}{x^۴+۱}$، ابتدا مقدار معکوس آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{x^۴+۱}{x^۲}=\frac{x^۴}{x^۲}+\frac{۱}{x^۲}=x^۲+\frac{۱}{x^۲}=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲=۴^۲-۲=۱۴$$

بنابراین $\frac{x^۲}{x^۴+۱}=\frac{۱}{۱۴}$.

راه‌حل دوم از تساوی $\frac{x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۴}$ نتیجه می‌شود

$$x^۲+۱=۴x\Rightarrow x^۲=۴x-۱$$

دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $x^۴=۱۶x^۲-۸x+۱$. به جای $x^۲$ قرار می‌دهیم $۴x-۱$:

$$x^۴=۱۶(۴x-۱)-۸x+۱=۶۴x-۸x-۱۵=۵۶x-۱۵$$

بنابراین $\frac{x^۲}{x^۴+۱}=\frac{۴x-۱}{۵۶x-۱۴}=\frac{۴x-۱}{۱۴(۴x-۱)}=\frac{۱}{۱۴}$.

۱۸۰۳- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{۵}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۵}-۲}$$
$$=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳}\times\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}-۲)^۲}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۵}-۲}$$
$$=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳(\sqrt{۵}-۲)^۲(\sqrt{۵}-۲)}=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳(\sqrt{۵}-۲)^۳}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}=\sqrt{(\sqrt{۵})^۲-۲^۲}=\sqrt{۵-۴}=۱$$

۱۸۰۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید

$$\sqrt{۳+\sqrt{۸}}+\sqrt{۳-\sqrt{۸}}=a$$

طرفین این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$a^۲=۳+\sqrt{۸}+۳-\sqrt{۸}+۲\sqrt{(۳+\sqrt{۸})(۳-\sqrt{۸})}=۶+۲\sqrt{۹-۸}=۸$$

بنابراین $a=\sqrt{۸}$. از طرف دیگر، می‌دانیم

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt[۶]{۲^۳}=\sqrt{۲}$$

پس مقدار عبارت داده شده برابر $\sqrt{۸}\times\sqrt{۲}$ یا همان ۴ است.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۳+\sqrt{۸}}=\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}+۱)^۲}=\sqrt{۲}+۱$$
$$\sqrt{۳-\sqrt{۸}}=\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}=\sqrt{۲}-۱$$
$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt{۲}$$

پس $(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}+\sqrt{۳-\sqrt{۸}})\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=(\sqrt{۲}+۱+\sqrt{۲}-۱)\sqrt{۲}=۴$.

۱۸۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})^۲=\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}+۲(\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{bc}+\frac{۱}{ca})$$

از طرف دیگر،

$$a+b+c=۶abc\Rightarrow\frac{a+b+c}{abc}=۶\Rightarrow\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{bc}+\frac{۱}{ca}=۶$$

بنابراین $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}+۲(۶)=۵^۲$. در نتیجه $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}=۱۳$.

۱۸۰۶- گزینهٔ ۴ ابتدا دو طرف تساوی را به توان سه می‌رسانیم و از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$۱=(\sqrt[۳]{a+۵}-\sqrt[۳]{a-۵})^۳=a+۵-(a-۵)-۳\sqrt[۳]{a^۲-۲۵}(\underbrace{\sqrt[۳]{a+۵}-\sqrt[۳]{a-۵}}_{۱})$$

در نتیجه $۱۰-۳\sqrt[۳]{a^۲-۲۵}=۱$. بنابراین $\sqrt[۳]{a^۲-۲۵}=۳$ و در نتیجه

$$a^۲-۲۵=۲۷$$

۱۸۰۷- گزینهٔ ۲ ابتدا به کمک اتحاد $(a-\frac{۱}{a})^۲=a^۲+\frac{۱}{a^۲}-۲$ مقدار $a-\frac{۱}{a}$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-\frac{۱}{a})^۲=۱۸-۲=۱۶\Rightarrow a-\frac{۱}{a}=\pm۴$$

از $۰<a<۱$ نتیجه می‌شود $a<\frac{۱}{a}$. بنابراین $a-\frac{۱}{a}=-۴$ درست است. اکنون با استفاده از اتحاد $(a-\frac{۱}{a})^۳=a^۳-\frac{۱}{a^۳}-۳(a-\frac{۱}{a})$ مقدار $a^۳-\frac{۱}{a^۳}$ را حساب می‌کنیم:

$$(-۴)^۳=a^۳-\frac{۱}{a^۳}-۳(-۴)\Rightarrow a^۳-\frac{۱}{a^۳}=-۷۶$$

۱۸۰۸- گزینهٔ ۳ طبق اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$(\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳})(\underbrace{(\sqrt[۳]{۵})^۲-\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۵}+(\sqrt[۳]{۳})^۲}_{a})=(\sqrt[۳]{۵})^۳+(\sqrt[۳]{۳})^۳=۵+۳=۸$$

بنابراین $\frac{۸}{a}=\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳}$.

۱۸۰۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(a^۲-۲ab+b^۲)(a^۲+ab+b^۲)^۲=(a-b)^۲(a^۲+ab+b^۲)^۲$$
$$=((a-b)(a^۲+ab+b^۲))^۲=(a^۳-b^۳)^۲$$

اگر تساوی‌های داده شده را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$۵a^۳-۵b^۳=۱۵\Rightarrow a^۳-b^۳=۳$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۹ است.

۱۸۱۰- گزینهٔ ۲ با توجه به اینکه $x\neq\pm۱$ ، دو طرف معادلهٔ داده شده را در $x^{۲}-۱$ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود

$$(x^{۲}-۱)(۱+x+\cdots+x^{۵})=x^{۶}+x^{۷}-x^{۲}+۱$$

$$(x+۱)(x-۱)(۱+x+\cdots+x^{۵})=x^{۶}+x^{۷}-x^{۲}+۱$$

$$(x+۱)(x^{۶}-۱)=x^{۶}+x^{۷}-x^{۲}+۱$$

$$x^{۷}+x^{۶}-x-۱=x^{۶}+x^{۷}-x^{۲}+۱\Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰$$

$$(x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲\ ,\ \ x=-۱\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۸۱۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** عبارت مورد نظر را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$۶x^{۲}+۷x-۳=۶x^{۲}-۲x+۹x-۳=۲x(۳x-۱)+۳(۳x-۱)$$
$$=(۳x-۱)(۲x+۳)$$

پس عامل $۳x-۱$ در تجزیهٔ عبارت وجود دارد.

راه‌حل دوم عبارت مورد نظر را A می‌نامیم و آن را به کمک اتحاد جملهٔ مشترک به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$A=۶x^{۲}+۷x-۳\Rightarrow ۶A=۳۶x^{۲}+۴۲x-۱۸=(۶x-۲)(۶x+۹)$$
$$=۲\times۳(۳x-۱)(۲x+۳)$$

بنابراین $A=(۳x-۱)(۲x+۳)$ و عامل $۳x-۱$ در تجزیهٔ وجود دارد.

۱۸۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^{۲}-۲x+۴y-y^{۲}-۳=x^{۲}-۲x+۱-(y^{۲}-۴y+۴)=(x-۱)^{۲}-(y-۲)^{۲}$$
$$=(x-۱-(y-۲))(x-۱+y-۲)=(x-y+۱)(x+y-۳)$$

بنابراین $x-y+۱$ عاملی از عبارت است.

۱۸۱۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^{۴}+۱۶x^{۲}+۱۰۰=(x^{۴}+۲۰x^{۲}+۱۰۰)-۴x^{۲}=(x^{۲}+۱۰)^{۲}-۴x^{۲}$$
$$=(x^{۲}+۱۰-۲x)(x^{۲}+۱۰+۲x)$$

بنابراین $x^{۲}-۲x+۱۰$ عامل $x^{۴}+۱۶x^{۲}+۱۰۰$ است.

۱۸۱۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$x^{۳}+۲x^{۲}+۲x+۱=(x^{۳}+۱)+۲x^{۲}+۲x$$
$$=(x+۱)(x^{۲}-x+۱)+۲x(x+۱)$$
$$=(x+۱)(x^{۲}-x+۱+۲x)=(x+۱)(x^{۲}+x+۱)$$

بنابراین $x^{۲}+x+۱$ عامل $x^{۳}+۲x^{۲}+۲x+۱$ است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$x^{۳}+۲x^{۲}+۲x+۱=(x^{۳}+x^{۲})+(x^{۲}+۲x+۱)$$
$$=x^{۲}(x+۱)+(x+۱)^{۲}=(x+۱)(x^{۲}+x+۱)$$

بنابراین $x^{۲}+x+۱$ عامل $x^{۳}+۲x^{۲}+۲x+۱$ است.

۱۸۱۵- گزینهٔ ۳ ابتدا به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله، عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=x^{۴}+y^{۴}+x^{۲}y^{۲}=(x^{۲}+y^{۲})^{۲}-۲x^{۲}y^{۲}+x^{۲}y^{۲}=(x^{۲}+y^{۲})^{۲}-x^{۲}y^{۲}$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$A=(x^{۲}+y^{۲}-xy)(x^{۲}+y^{۲}+xy)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $x^{۲}+y^{۲}-xy$ وجود دارد.

۱۸۱۶- گزینهٔ ۱ صورت و مخرج کسر دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$x^{۳}-۱=(x-۱)(x^{۲}+x+۱)$$

$$۲x^{۲}+۳x-۵=۲x^{۲}+۵x-۲x-۵=x(۲x+۵)-(۲x+۵)=(۲x+۵)(x-۱)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{x^{۲}+x+۱}{x(۲x+۵)}\times\frac{(۲x+۵)(x-۱)}{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}=\frac{۱}{x}$.

۱۸۱۷- گزینهٔ ۱ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^{۲}+۱}+\frac{۱}{x^{۳}+x}=\frac{x}{x^{۲}+۱}+\frac{۱}{x(x^{۲}+۱)}=\frac{x^{۲}+۱}{x(x^{۲}+۱)}=\frac{۱}{x}$$

۱۸۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{a^{۶}-a^{۴}+a^{۲}-۱}{-a^{۲}+a^{۴}}=\frac{a^{۵}(a-\frac{۱}{a})+a(a-\frac{۱}{a})}{a^{۳}(a-\frac{۱}{a})}=\frac{a^{۵}+a}{a^{۳}}$$
$$=a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}=(a-\frac{۱}{a})^{۲}+۲=۳^{۲}+۲=۱۱$$

۱۸۱۹- گزینهٔ ۲ ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$a^{۶}-a^{۴}-a^{۲}+۱=a^{۴}(a^{۲}-۱)-(a^{۲}-۱)=(a^{۲}-۱)(a^{۴}-۱)$$

$$a^{۳}-a^{۲}-a+۱=a^{۲}(a-۱)-(a-۱)=(a-۱)(a^{۲}-۱)$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{(a^{۴}-۱)(a^{۲}-۱)}{(a-۱)(a^{۲}-۱)}=\frac{a^{۴}-۱}{a-۱}$. چون $a^{۴}=(\sqrt{۲})^{۴}=۴$ ، پس عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۳}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۳}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=۳\sqrt{۲}+۳$$

۱۸۲۰- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $A=\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}$. در این صورت، بنابر اتحاد مکعب تفاضل دو جمله،

$$A^{۳}=(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})^{۳}=a-b-۳\sqrt[۳]{a}\sqrt[۳]{b}(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})$$
$$=۷۶-۳\sqrt[۳]{ab}(A)=۷۶-۳A$$

بنابراین

$$A^{۳}+۳A-۷۶=۰\Rightarrow A^{۳}-۶۴-۱۲+۳A=۰\Rightarrow A^{۳}-۴^{۳}+۳(A-۴)=۰$$

$$(A-۴)(A^{۲}+۴A+۱۶)+۳(A-۴)=۰\Rightarrow(A-۴)(A^{۲}+۴A+۱۹)=۰$$

چون $A^{۴}+۴A+۱۹=(A+۲)^{۲}+۱۵\neq۰$. پس $A-۴=۰$ ، در نتیجه $A=۴$.

۱۸۲۱- گزینهٔ ۳ عبارت را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$۲a^{۲}-۳ab-۲b^{۲}=(۲a^{۲}-۴ab)+(ab-۲b^{۲})=۲a(a-۲b)+b(a-۲b)$$
$$=(a-۲b)(۲a+b)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $a-۲b$ وجود دارد.

۱۸۲۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $x^{۲}-x=A$. در این‌صورت

$$(x^{۲}-x)^{۲}-۱۴(x^{۲}-x)+۲۴=A^{۲}-۱۴A+۲۴=(A-۲)(A-۱۲)$$

اکنون توجه کنید که

$$A-۲=x^{۲}-x-۲=(x+۱)(x-۲)$$

$$A-۱۲=x^{۲}-x-۱۲=(x-۴)(x+۳)$$

بنابراین $x+۱$ ، $x-۲$ ، $x-۴$ و $x+۳$ عامل‌های عبارت مورد نظر هستند. اکنون توجه کنید که

$$x^۲+۴x+۳=(x+۱)(x+۳)\ ,\quad x^۲-۲x-۳=(x+۱)(x-۳)$$

$$x^۲+x-۶=(x-۲)(x+۳)\ ,\quad x^۲-۳x-۴=(x-۴)(x+۱)$$

بنابراین $x^۲-۲x-۳$ عامل عبارت مورد نظر نیست.

راه‌حل دوم با توجه به عامل‌های عبارت‌های ذکر شده در گزینه‌ها، که در راه‌حل اول نوشته‌ایم، کافی است بررسی کنیم که کدام‌یک از عبارت‌های $x+۱$ ، $x+۳$ ، $x-۳$ ، $x-۲$ و $x-۴$ عامل عبارت داده شده در صورت سؤال نیست.

فرض کنید $P(x)=(x^۲-x)^۲-۱۴(x^۲-x)+۲۴$. در این‌صورت

$$P(-۱)=۴-۲۸+۲۴=۰\ ,\quad P(-۳)=۱۴۴-۱۶۸+۲۴=۰$$

$$P(۳)=۳۶-۸۴+۲۴=-۲۴\neq۰$$

پس $x-۳$ عامل عبارت مورد نظر نیست. در نتیجه گزینهٔ (۲) عامل عبارت مورد نظر نیست.

۱۸۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۴x^۴+۳x^۲+۱=(۴x^۴+۴x^۲+۱)-x^۲=(۲x^۲+۱)^۲-x^۲$$

$$=(۲x^۲+۱-x)(۲x^۲+۱+x)$$

بنابراین عامل‌های $۴x^۴+۳x^۲+۱$ عبارت‌های $۲x^۲-x+۱$ و $۲x^۲+x+۱$ هستند، یعنی مقادیر ممکن a عددهای -۱ و ۱ هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -۱ است.

۱۸۲۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$۴x^۴-۱۶x^۲y^۲+۹y^۴=۴x^۴-۱۲x^۲y^۲+۹y^۴-۴x^۲y^۲$$

$$=(۲x^۲-۳y^۲)^۲-۴x^۲y^۲$$

طبق اتحاد مزدوج این عبارت به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(۲x^۲-۲xy-۳y^۲)(۲x^۲+۲xy-۳y^۲)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $۲x^۲-۲xy-۳y^۲$ وجود دارد.

۱۸۲۵- گزینهٔ ۱ عبارت را ابتدا به کمک فاکتورگیری و سپس به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$۳a^۳-۳ab^۲-۲a^۲b+۲b^۳=۳a(a^۲-b^۲)-۲b(a^۲-b^۲)$$

$$=(a^۲-b^۲)(۳a-۲b)=(a-b)(a+b)(۳a-۲b)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $۳a-۲b$ وجود دارد.

۱۸۲۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱)\ ,\quad x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$$

$$x^۲+۲x-۳=(x+۳)(x-۱)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)}{(x-۱)(x+۱)}\times\frac{(x+۳)(x-۱)}{x^۲-x+۱}=x+۳$$

۱۸۲۷- گزینهٔ ۳ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۲}{x^۲-۱}-\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}=\frac{۲}{(x-۱)(x+۱)}-\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}=\frac{۲-(x-۱)-(x+۱)}{(x-۱)(x+۱)}$$

$$=\frac{۲-۲x}{(x-۱)(x+۱)}=-\frac{۲(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=-\frac{۲}{x+۱}$$

۱۸۲۸- گزینهٔ ۱ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۲}{\sqrt{x}-۲}-\frac{۲}{\sqrt{x}+۲}-\frac{۲x}{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)}=\frac{۲(\sqrt{x}+۲)-۲(\sqrt{x}-۲)-۲x}{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)}$$

$$=\frac{۸-۲x}{x-۴}=-\frac{۲(x-۴)}{x-۴}=-۲$$

۱۸۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a}{b^۲}-\frac{b}{a^۲}=\frac{a^۳-b^۳}{a^۲b^۲}\ ,\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+۱=\frac{a^۲+b^۲+ab}{ab}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a^۳-b^۳}{a^۲b^۲}\div\frac{a^۲+b^۲+ab}{ab}=\frac{a^۳-b^۳}{(a^۲+b^۲+ab)ab}=\frac{(a-b)(a^۲+b^۲+ab)}{(a^۲+b^۲+ab)ab}$$

$$=\frac{a-b}{ab}=\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=-۲\sqrt{۲}$$

۱۸۳۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a^۴+a^۲+۱=a^۴+۲a^۲+۱-a^۲=(a^۲+۱)^۲-a^۲$$

$$=(a^۲+a+۱)(a^۲-a+۱)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(a-۱)(a^۲+a+۱)(a^۲-a+۱)}{a^۲-a+۱}=a^۳-۱=۵-۱=۴$$

راه‌حل دوم اگر صورت و مخرج عبارت داده شده را در $(a+۱)$ ضرب کنیم، می‌توان نوشت

$$\frac{(a+۱)(a-۱)(a^۴+a^۲+۱)}{(a+۱)(a^۲-a+۱)}=\frac{(a^۲-۱)(a^۴+a^۲+۱)}{a^۳+۱}$$

$$=\frac{a^۶-۱}{a^۳+۱}=\frac{(a^۳-۱)(a^۳+۱)}{(a^۳+۱)}=a^۳-۱$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر به ازای $a=\sqrt[۳]{۵}$ برابر است با $(\sqrt[۳]{۵})^۳-۱=۴$.

۱۸۳۱- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}(۲+\sqrt{۲})}{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}=\frac{\sqrt{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})^۲}}{۲}$$

$$=\frac{\sqrt{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}}{۲}=\frac{\sqrt{۲(۲+\sqrt{۲})}}{۲}$$

$$=\sqrt{\frac{۲(۲+\sqrt{۲})}{۴}}=\sqrt{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

۱۸۳۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا مخرج کسرها را گویا می‌کنیم، سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}+\frac{۷}{۳-\sqrt{۲}}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{(۱-\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲})}+\frac{۷(۳+\sqrt{۲})}{(۳-\sqrt{۲})(۳+\sqrt{۲})}$$

$$=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱-۲}+\frac{۷(۳+\sqrt{۲})}{۹-۲}=-۱-\sqrt{۲}+۳+\sqrt{۲}=۲$$

راه‌حل دوم ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}+\frac{۷}{۳-\sqrt{۲}}=\frac{۳-\sqrt{۲}+۷-۷\sqrt{۲}}{(۱-\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})}=\frac{۱۰-۸\sqrt{۲}}{۵-۴\sqrt{۲}}=\frac{۲(۵-۴\sqrt{۲})}{(۵-۴\sqrt{۲})}=۲$$

۱۸۳۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=\frac{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt[۴]{۲}+۱)}{(\sqrt[۴]{۲}-۱)(\sqrt[۴]{۲}+۱)}=\frac{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt[۴]{۲}+۱)}{\sqrt{۲}-۱}=\sqrt[۴]{۲}+۱$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[۴]{۲}+۱-\sqrt[۴]{۲}=۱$.

راه‌حل دوم با مخرج مشترک گیری می‌توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}-\sqrt[۴]{۲}=\frac{\sqrt{۲}-۱-\sqrt[۴]{۲}(\sqrt[۴]{۲}-۱)}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}-۱-\sqrt{۲}+\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=۱$$

۱۸۳۴- گزینهٔ ۲ صورت و مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}$ را در $\sqrt[۴]{۲}-۱$ ضرب می‌کنیم: $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}\times\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}$. بنابراین

$$\frac{\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt{۲}-۱}-\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt{۲}-۱}-\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}-\sqrt[۴]{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}+۱$$

۱۸۳۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{۸\sqrt{۵}-۸}{\sqrt{۵}+۱}=۸\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۵}+۱}=۸\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۵}+۱}\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۵}-۱}=\frac{۸(\sqrt{۵}-۱)^۲}{۴}=۲(\sqrt{۵}-۱)^۲$$

$$\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}=\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}\times\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}-۲}=\frac{(\sqrt{۵}-۲)^۲}{۵-۴}=(\sqrt{۵}-۲)^۲$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$۲(\sqrt{۵}-۱)^۲-(\sqrt{۵}-۲)^۲=۲(۶-۲\sqrt{۵})-(۹-۴\sqrt{۵})=۳$$

۱۸۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا مخرج کسر $\frac{\sqrt{۸}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$ را گویا می‌کنیم. برای این کار صورت و مخرج را در $۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۸}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۸}(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}{(۱+\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۳})^۲}$$

$$=\frac{\sqrt{۸}(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}{۲\sqrt{۲}}=۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$$

بنابراین $x=۱+\sqrt{۲}$ و در نتیجه $(x-۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲=۲$.

۱۸۳۷- گزینهٔ ۲ برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج آن را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}$$

$$=\frac{(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^۲}{(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^۲-(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^۲}$$

$$=\frac{۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}+۲\sqrt{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}}{۲+\sqrt{۳}-(۲-\sqrt{۳})}$$

$$=\frac{۴+۲\sqrt{۴-۳}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۶}{۲\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

۱۸۳۸- گزینهٔ ۳ چون در مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}$ ریشهٔ سوم وجود دارد، برای گویا کردن مخرج این کسر از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

به این ترتیب، صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt[۳]{۳^۲}+\sqrt[۳]{۳}\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲^۲}=\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}{(\sqrt[۳]{۳})^۳-(\sqrt[۳]{۲})^۳}$$

$$=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}{۳-۲}=\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}$$

به این ترتیب، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}-(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}-\sqrt[۳]{۴})=۲\sqrt[۳]{۴}$$

۱۸۳۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$۲-\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)$$

بنابراین

$$A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}-\frac{۳\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}-\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}$$

اکنون با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج کسرها را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{(\sqrt[۳]{۲}-۱)(\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱)}-\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)(\sqrt[۳]{۲}+۱)}$$

$$=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{(\sqrt[۳]{۲})^۳-۱}-\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{(\sqrt[۳]{۲})^۳+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{۲-۱}-\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۲+۱}$$

$$=\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱-\sqrt[۳]{۲}-۱=\sqrt[۳]{۴}$$

۱۸۴۰- گزینهٔ ۳ چون $\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱=\sqrt[۳]{۳}^{۲}+۱\times\sqrt[۳]{۳}+۱^۲$. برای اینکه مخرج کسر اول را گویا کنیم (با استفاده از اتحاد چاق و لاغر)، صورت و مخرج آن را در $\sqrt[۳]{۳}-۱$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۳}^{۲}+\sqrt[۳]{۳}+۱^۲}\times\frac{\sqrt[۳]{۳}-۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}$$

$$=\frac{۲(\sqrt[۳]{۳}-۱)}{\sqrt[۳]{۳}^{۳}-۱^۳}=\frac{۲(\sqrt[۳]{۳}-۱)}{۳-۱}=\sqrt[۳]{۳}-۱$$

به همین ترتیب،

$$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}^{۲}-\sqrt[۳]{۲}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}+۱}{\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{\sqrt[۳]{۲}^{۳}+۱^۳}=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۲+۱}=\sqrt[۳]{۲}+۱$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[۳]{۳}-۱+\sqrt[۳]{۲}+۱=\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲}$.

۱۸۴۱- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر است با $P(۲)=۲^۵-۳(۲)^۳+۳(۲)^۲-۲+۲=۲۰$.

۱۸۴۲- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ برابر است با $P(۱)=۳-۴a-۱=-۴a+۲$. چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است، پس این باقی‌مانده صفر است، در نتیجه

$$-۴a+۲=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۱۸۴۳- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۴$ برابر با $P(۴)$ است، و چون بنابر فرض این باقی‌مانده ۱۶ است، پس $P(۴)=۱۶$. در نتیجه

$$P(x)=ax^{۱۳}+bx^{۹۷}-۵\Rightarrow P(۴)=a(۴)^{۱۳}+b(۴)^{۹۷}-۵$$

$$۱۶=۴^{۱۳}a+۴^{۹۷}b-۵\Rightarrow ۴^{۱۳}a+۴^{۹۷}b=۲۱$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۴$ برابر با $P(-۴)$ است. اکنون توجه کنید که

$$P(-۴)=-۴^{۱۳}a-۴^{۹۷}b-۵\xrightarrow{۴^{۱۳}a+۴^{۹۷}b=۲۱}-۲۱-۵=-۲۶$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر -۲۶ است.

۱۸۴۴- گزینهٔ ۳ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر است، پس $P(-۳)=۰$، در نتیجه $P(-۳)=(-۳)^۸+۳(-۳)^۷+a(-۳)^۲-۹=۰$. بنابراین $a=۱$ و $P(x)=x^۸+۳x^۷+x^۲-۹$. از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر $x-۲$ برابر است با $P(۲-۱)=P(۱)$. اکنون توجه کنید که $P(۱)=۱+۳+۱-۹=-۴$.

۱۸۴۵- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر با ۴ است، پس $P(۲)=۴$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(۲x-۴)$ بر $x-۳$ برابر است با $P(۲\times۳-۴)=P(۲)=۴$.

۱۸۴۶- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x-۳$ برابر است با $P(۳+۱)=P(۴)$. از طرف دیگر،

$$P(x-۲)=x^۲-۳x+۲\xrightarrow{x=۶}P(۴)=(۶)^۲-۳(۶)+۲=۲۰$$

۱۸۴۷- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر $x-۲$ برابر ۱۲ است، پس $P(۲-۱)=۱۲$، یعنی $P(۱)=۱۲$. در نتیجه

$$P(۱)=۱+a+۶+b+۱۰=۱۲\Rightarrow a+b=-۵$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۲)$ بر $x+۳$ برابر است با $P(-۳+۲)=P(-۱)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-۱)=۱-a+۶-b+۱۰=۱۷-(a+b)=۱۷-(-۵)=۲۲$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۲۲ است.

۱۸۴۸- گزینهٔ ۱ چون $x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$، پس چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای‌های $x-۱$ و $x+۱$ بخش‌پذیر است. بنابراین

$$\begin{cases}P(۱)=۰\\P(-۱)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b+۱-۲=۰\\a+b-۱-۲=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\b=۱\end{cases}$$

در نتیجه، $P(x)=۲x^۶-x^۵+x-۲$. به این ترتیب، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $x-۲$ برابر است با

$$P(۲)=۲\times۲^۶-۲^۵+۲-۲=۹۶$$

۱۸۴۹- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x+۱)$ و $Q(x+۱)$ بر $x-۲$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۵ است، پس

$$P(۲+۱)=۳\Rightarrow P(۳)=۳\ ,\quad Q(۲+۱)=۵\Rightarrow Q(۳)=۵$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)Q(x-۱)$ بر $x-۴$ برابر است با $P(۴-۱)Q(۴-۱)=P(۳)Q(۳)=۳\times۵=۱۵$.

۱۸۵۰- گزینهٔ ۳ بنابر فرض مسئله،

$$x^۴-۳x^۳+۴x^۲+۱=(x-۱)Q(x)+۳\qquad(۱)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-۳$ برابر با $Q(۳)$ است. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=۳$، به‌دست می‌آید $۳^۴-۳(۳)^۳+۴(۳)^۲+۱=(۳-۱)Q(۳)+۳$. در نتیجه $Q(۳)=۱۷$.

۱۸۵۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $P(x)=(x-۱)^۳+۷$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-\sqrt[۳]{۳}-۱$ برابر است با

$$P(\sqrt[۳]{۳}+۱)=(\sqrt[۳]{۳}+۱-۱)^۳+۷=۳+۷=۱۰$$

۱۸۵۲- گزینهٔ ۴ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+۲)^۲$ بخش‌پذیر است، پس بر $x+۲$ نیز بخش‌پذیر است، بنابراین

$$P(-۲)=۰\Rightarrow-۳۲+۴۸+۲a+۱۶=۰\Rightarrow a=-۱۶$$

۱۸۵۳- گزینهٔ ۱ چون ۱، ۲ و -۲ ریشه‌های $P(x)$ هستند، پس $x-۱$، $x-۲$ و $x+۲$ عامل‌های $P(x)$ هستند. از طرف دیگر، چون $P(x)$ درجهٔ سوم است، پس عامل دیگری ندارد. بنابراین می‌توان نوشت

$$P(x)=a(x-۱)(x-۲)(x+۲)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-۱$، چون $P(-۱)=۲۴$، به‌دست می‌آید

$$۲۴=a(-۲)(-۳)(۱)\Rightarrow a=۴$$

به این ترتیب، $P(x)=۴(x-۱)(x-۲)(x+۲)$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ برابر است با

$$P(-۳)=۴(-۳-۱)(-۳-۲)(-۳+۲)=-۸۰$$

۱۸۵۴- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۳)$ بر $x-۵$ برابر است با $P(۵-۳)=P(۲)$. بنابراین $P(۲)=-۳$. اگر در تساوی $P(x+۳)=x^۳-mx^۲+mx+۲$ قرار دهیم $x=-۱$، به‌دست می‌آید

$$P(۲)=(-۱)^۳-m(-۱)^۲+m(-۱)+۲=-۳\Rightarrow m=۲$$

۱۸۵۵- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۴$ برابر است با $P(-۴)$. اکنون اگر در تساوی $P^۲(x)-۸xP(x)=-۱۶x^۲$ قرار دهیم $x=-۴$، به‌دست می‌آید

$$P^۲(-۴)+۳۲P(-۴)+۱۶^۲=۰\Rightarrow(P(-۴)+۱۶)^۲=۰\Rightarrow P(-۴)=-۱۶$$

۱۸۵۶- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x-۱$ برابر $P(۱+۱)=P(۲)$ است. اگر در تساوی $P(x-۲)=x^۳-x^۲+۴m$ قرار دهیم $x=۴$، مقدار $P(۲)$ به‌دست می‌آید: $P(۲)=۶۴-۱۶+۴m=۴۸+۴m$. بنابراین

$$۴۸+۴m=۴\Rightarrow m=-۱۱$$

۱۸۵۷- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-۳$ برابر $Q(۳)$ است، پس $Q(۳)=۲$. اگر در تساوی $P(Q(x-۱))=x^۲-۳x+۲$ قرار دهیم $x=۴$، نتیجه می‌شود

$$P(Q(۳))=۱۶-۱۲+۲\Rightarrow P(۲)=۶$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=P(x+۱)$ بر $x-۱$ برابر $f(۱)$ یا همان $P(۲)$ است که برابر ۶ است.

۱۸۵۸- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-۱$ برابر $Q(۱)$ است. پس $Q(۱)=۵$. اگر در تساوی $P(x-۳)=(x^۲-۳)Q(x+۲)$ قرار دهیم $x=-۱$، نتیجه می‌شود $P(-۴)=-۲Q(۱)=-۲\times۵=-۱۰$. بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۴$ برابر -۱۰ است.

۱۸۵۹- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسـیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x+۳$ برابر $Q(-۳)$ است. پس $Q(-۳)=-۴$. اکنون توجه کنید که

$$P(x)=x^{۳}+۳xQ(۲x+۱)+۳x-۲$$

$$P(-۲)=-۸-۶Q(-۳)-۶-۲=-۱۶-۶Q(-۳)=-۱۶-۶\times(-۴)=۸$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۲$ برابر ۸ است.

۱۸۶۰- گزینهٔ ۲ چـون باقی‌ماندهٔ تقسـیم چندجمله‌ای‌های $P(x)+x$ و $Q(x)-x$ بر $x+۲$ به‌ترتیب برابر ۱ و ۲− است، پس

$$P(-۲)-۲=۱\Rightarrow P(-۲)=۳$$

$$Q(-۲)-(-۲)=-۲\Rightarrow Q(-۲)=-۴$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسـیم چندجمله‌ای $kP^{۲}(x)+xQ(x)+۱$ بر $x+۲$ برابر است با $kP^{۲}(-۲)+(-۲)Q(-۲)+۱=۹k+۸+۱=۹k+۹$. چون چندجمله‌ای داده شده بر $x+۲$ بخش‌پذیر است پس این باقی‌مانده برابر صفر است، بنابراین

$$۹k+۹=۰\Rightarrow k=-۱$$

۱۸۶۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sqrt{\sqrt{۵}+۲}=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^{۳}}$. بنابراین

$$\frac{\sqrt{\sqrt{۵}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}}{\sqrt[۶]{\sqrt{۵}+۲}}=\frac{\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^{۳}}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}}{\sqrt[۶]{\sqrt{۵}+۲}}$$

$$=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^{۲}}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}=\sqrt[۳]{\sqrt{۵}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}$$

$$=\sqrt[۳]{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}=\sqrt[۳]{۵-۴}=۱$$

۱۸۶۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a=۲^{\frac{۱}{۲}}\ ,\quad b=۴^{\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۳}}\ ,\quad c=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۱}{۶}}$$

اکنون توجه کنید که $c=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۱}{۶}}<۲^{\frac{۱}{۳}}\times۴^{\frac{۱}{۶}}=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۲^{\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۳}}=b$. از طرف دیگر، $b>a$ ، بنابراین باید a و c را مقایسه کنیم. توجه کنید که

$$c=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۱}{۶}}>۲^{\frac{۱}{۳}}\times۲^{\frac{۱}{۶}}=۲^{\frac{۳}{۶}}=۲^{\frac{۱}{۲}}=a$$

بنابراین $a<c<b$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a=۲^{\frac{۱}{۲}}\ ,\quad b=۴^{\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۳}}\ ,\quad c=(۲\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۳}}$$

هر سه عدد را به توان شش می‌رسانیم (مخرج مشترک توان‌ها):

$$a^{۶}=(۲^{\frac{۱}{۲}})^{۶}=۲^{۳}=۸\ ,\quad b^{۶}=(۲^{\frac{۲}{۳}})^{۶}=۲^{۴}=۱۶$$

$$c^{۶}=((۲\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۳}})^{۶}=(۲\sqrt{۳})^{۲}=۱۲$$

پس $a^{۶}<c^{۶}<b^{۶}$ و چون a ، b و c مثبت هستند، پس $a<c<b$.

۱۸۶۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a^{۲}+ab+bc+ca=a^{۲}+a(b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{cases}a+b=۸\\ b-c=۱۱\end{cases}\Rightarrow(a+b)-(b-c)=۸-۱۱\Rightarrow a+c=-۳$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $۸\times(-۳)=-۲۴$.

راه‌حل دوم فرض کنید $b=۰$. در این صورت

$$\begin{cases}a+b=۸\Rightarrow a=۸\\ b-c=۱۱\Rightarrow c=-۱۱\end{cases}$$

بنابراین $a^{۲}+ab+bc+ca=۶۴-۸۸=-۲۴$.

۱۸۶۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$a-b+\sqrt{c}=۶\Rightarrow a-(b-\sqrt{c})=۶$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}})(\sqrt{a}+\sqrt{b-\sqrt{c}})=۶$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}})(۳)=۶\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}}=۲$$

به این ترتیب

$$\begin{cases}\sqrt{a}+\sqrt{b-\sqrt{c}}=۳\\ \sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}}=۲\end{cases}\Rightarrow۲\sqrt{a}=۵\Rightarrow a=\frac{۲۵}{۴}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a-b+\sqrt{c}=۶\Rightarrow b-\sqrt{c}=a-۶$$

به‌جای $b-\sqrt{c}$ در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم $a-۶$:

$$\sqrt{a}+\sqrt{a-۶}=۳\Rightarrow\sqrt{a-۶}=۳-\sqrt{a}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}a-۶=۹-۶\sqrt{a}+a$$

$$۶\sqrt{a}=۱۵\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=\frac{۲۵}{۴}$$

۱۸۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}=(a+\frac{۱}{a})^{۲}-۲=۹-۲=۷$$

$$a^{۳}+\frac{۱}{a^{۳}}=(a+\frac{۱}{a})^{۳}-۳a(\frac{۱}{a})(a+\frac{۱}{a})=۲۷-۳\times۳=۱۸$$

اکنون می‌توان نوشت

$$(a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}})(a^{۳}+\frac{۱}{a^{۳}})=a^{۵}+\frac{۱}{a}+a+\frac{۱}{a^{۵}}$$

$$۷\times۱۸=a^{۵}+۳+\frac{۱}{a^{۵}}\Rightarrow a^{۵}+\frac{۱}{a^{۵}}=۱۲۳$$

۱۸۶۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a^{۲}}{۴}+\frac{۴}{a^{۲}}=۲۳\Rightarrow(\frac{a}{۲}+\frac{۲}{a})^{۲}-۲=۲۳$$

$$(\frac{a}{۲}+\frac{۲}{a})^{۲}=۲۵\xrightarrow{a>۰}\frac{a}{۲}+\frac{۲}{a}=۵$$

اکنون اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{a^{۳}}{۸}+\frac{۸}{a^{۳}}+۳(\frac{a}{۲})(\frac{۲}{a})(\frac{a}{۲}+\frac{۲}{a})=۵^{۳}$$

$$\frac{a^{۳}}{۸}+\frac{۸}{a^{۳}}+۳\times۵=۱۲۵\Rightarrow\frac{a^{۳}}{۸}+\frac{۸}{a^{۳}}=۱۱۰$$

۱۸۶۷- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $y=x^{۲}+x+۱$ ، آن‌گاه

$$(x^{۲}+x+۱)(x^{۲}+x+۲)-۱۲=y(y+۱)-۱۲=y^{۲}+y-۱۲=(y-۳)(y+۴)$$

از طرف دیگر،

$$y-۳=x^{۲}+x-۲=(x-۱)(x+۲),\quad y+۴=x^{۲}+x+۵$$

چون $y+۴$ درجهٔ دوم اسـت و ریشـه‌ای ندارد، پس تجزیه نمی‌شـود. بنابراین عامل‌های عبارت مورد نظر $x-۱$ ، $x+۲$ و $x^{۲}+x+۵$ هستند.

۱۸۶۸- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $A=\frac{۱}{۳}(\sqrt{۷}-۱)\sqrt{۴+\sqrt{۷}}$. در این صورت،

$$A^{۲}=\frac{۱}{۹}(\sqrt{۷}-۱)^{۲}(۴+\sqrt{۷})=\frac{۱}{۹}(۷+۱-۲\sqrt{۷})(۴+\sqrt{۷})$$

$$=\frac{۲}{۹}(۴-\sqrt{۷})(۴+\sqrt{۷})=\frac{۲}{۹}(۱۶-۷)=۲$$

چون A عددی مثبت است، $A=\sqrt{۲}$.

۱۸۶۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{۲}{۱-\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}=\frac{۲}{۱-\sqrt{۳}+\sqrt{۲}(۱-\sqrt{۳})}=\frac{۲}{(۱-\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۲})}$$

$$=\frac{۲(۱+\sqrt{۳})(۱-\sqrt{۲})}{(۱-۳)(۱-۲)}=(۱+\sqrt{۳})(۱-\sqrt{۲})$$

۱۸۷۰- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر $x-۲$ برابر ۱۲ است، پس $P(۲-۱)=۱۲$، یعنی $P(۱)=۱۲$. در نتیجه

$$P(۱)=۱+a+۶+b+۱۰=۱۲\Rightarrow a+b=-۵$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x+۲$ برابر است با $P(-۲+۱)=P(-۱)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-۱)=۱-a+۶-b+۱۰=۱۷-(a+b)=۱۷-(-۵)=۲۲$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۲۲ است.

۱۸۷۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x=\sqrt[۷]{۳\sqrt[۳]{۳}}=۳^{\frac{۱}{۷}}\times۳^{\frac{۱}{۲۱}}=۳^{\frac{۴}{۲۱}}$، بنابراین

$$\sqrt[۴]{x^{۲۱}}=x^{\frac{۲۱}{۴}}=(۳^{\frac{۴}{۲۱}})^{\frac{۲۱}{۴}}=۳$$

۱۸۷۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۴\sqrt[۳]{۴}}}=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۴^{\frac{۱}{۱۲}}\times۴^{\frac{۱}{۳۶}}=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۲^{\frac{۱}{۶}}\times۲^{\frac{۱}{۱۸}}=۲^{\frac{۵}{۹}}$$

بنابراین

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۴\sqrt[۳]{۴}}}\times\sqrt[۹]{۱۶}=۲^{\frac{۵}{۹}}\times۲^{\frac{۴}{۹}}=۲$$

۱۸۷۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sqrt{\frac{a}{b^{۳}}}=\sqrt{ab^{-۳}}=a^{\frac{۱}{۲}}b^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$\sqrt[۳]{\frac{b^{۲}}{a^{۵}}}=\sqrt[۳]{b^{۲}a^{-۵}}=b^{\frac{۲}{۳}}a^{-\frac{۵}{۳}}$$

$$\sqrt[۱۲]{a^{۱۴}b^{۱۰}}=a^{\frac{۱۴}{۱۲}}b^{\frac{۱۰}{۱۲}}=a^{\frac{۷}{۶}}b^{\frac{۵}{۶}}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^{\frac{۱}{۲}}b^{-\frac{۳}{۲}}b^{\frac{۲}{۳}}a^{-\frac{۵}{۳}}a^{\frac{۷}{۶}}b^{\frac{۵}{۶}}=a^{\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۳}+\frac{۷}{۶}}\times b^{-\frac{۳}{۲}+\frac{۲}{۳}+\frac{۵}{۶}}=a^{۰}b^{۰}=۱$$

۱۸۷۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$۳^{x-۱}+۳^{-x-۱}=۲\Rightarrow\frac{۳^{x}}{۳}+\frac{۳^{-x}}{۳}=۲\Rightarrow۳^{x}+۳^{-x}=۶$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید

$$۳^{۲x}+۳^{-۲x}+۲\times۳^{x}\times۳^{-x}=۳۶\Rightarrow۹^{x}+۹^{-x}+۲=۳۶$$

$$۹^{x}+۹^{-x}=۳۴$$

۱۸۷۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$b=(a+b)-a=\sqrt{۱۷}-\frac{\sqrt{۱۷}+۳}{۲}=\frac{\sqrt{۱۷}-۳}{۲}$$

بنابراین $a-b=۳$ و $ab=۲$. به این ترتیب،

$$a^{۳}-b^{۳}+۹ab=(a-b)((a-b)^{۲}+۳ab)+۹ab=۳(۹+۶)+۱۸=۶۳$$

۱۸۷۶- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف تساوی داده شده را در $\sqrt[۸]{۲}-۱$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$(۱+\sqrt{۲})(۱+\sqrt[۴]{۲})(۱+\sqrt[۸]{۲})(۱-\sqrt[۸]{۲})=\frac{۱-\sqrt[۸]{۲}}{x^{۳}-۱}$$

$$(۱+\sqrt{۲})(۱+\sqrt[۴]{۲})(۱-\sqrt[۴]{۲})=\frac{۱-\sqrt[۸]{۲}}{x^{۳}-۱}$$

$$(۱+\sqrt{۲})(۱-\sqrt{۲})=\frac{۱-\sqrt[۸]{۲}}{x^{۳}-۱}\Rightarrow۱-۲=\frac{۱-\sqrt[۸]{۲}}{x^{۳}-۱}$$

$$-۱=\frac{۱-\sqrt[۸]{۲}}{x^{۳}-۱}\Rightarrow x^{۳}-۱=\sqrt[۸]{۲}-۱\Rightarrow x^{۳}=\sqrt[۸]{۲}$$

$$(x^{۳})^{۱۶}=(\sqrt[۸]{۲})^{۱۶}\Rightarrow x^{۴۸}=۲^{۲}=۴$$

۱۸۷۷- گزینهٔ ۱ ابتدا همهٔ ریشه‌ها را به ریشهٔ ششم تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{\sqrt{۲}+۱}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۲}-۱}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۲}-۱}=\sqrt[۶]{(\sqrt{۲}+۱)^{۳}}\times\sqrt[۶]{(\sqrt{۲}-۱)^{۲}}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۲}-۱}$$

$$=\sqrt[۶]{(\sqrt{۲}+۱)^{۳}(\sqrt{۲}-۱)^{۲}(\sqrt{۲}-۱)}=\sqrt[۶]{(\sqrt{۲}+۱)^{۳}(\sqrt{۲}-۱)^{۳}}$$

$$=\sqrt[۶]{((\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱))^{۳}}=\sqrt[۶]{(۲-۱)^{۳}}=\sqrt[۶]{۱}=۱$$

۱۸۷۸- گزینهٔ ۲ ابتدا مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱}$ را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱}=\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۱}{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{۲}-۱}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۱}{۳+۲+۲\sqrt{۶}-۱}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۱}{۲(\sqrt{۶}+۲)}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۱}{۲(\sqrt{۶}+۲)}\times\frac{\sqrt{۶}-۲}{\sqrt{۶}-۲}$$

$$=\frac{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۶}-۲)}{۲(۶-۴)}=\frac{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۶}-۲)}{۴}$$

$$=\frac{۳\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۶}-۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}+۲}{۴}=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}+۲}{۴}$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱}-\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}+۲}{۴}-\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۸۷۹- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$x^{۲}y^{۲}-x^{۲}-y^{۲}-۴xy+۱=x^{۲}y^{۲}-۲xy+۱-(x^{۲}+y^{۲}+۲xy)$$

$$=(xy-۱)^{۲}-(x+y)^{۲}=(xy-۱-x-y)(xy-۱+x+y)$$

۱۸۸۰- گزینهٔ ۳ چون چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است، پس $P(۲+۱)=P(۳)=۰$. اکنون اگر در تساوی $P(۱-x)=ax^{۲}-x+۲a$ قرار دهیم $x=-۲$، به‌دست می‌آید

$$P(۳)=a(-۲)^{۲}-(-۲)+۲a=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

فصل یازدهم

۱۸۸۱- گزینهٔ ۳ چون معادله ریشهٔ مضاعف دارد، پس $\Delta=۰$. در نتیجه

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۰\Rightarrow ۲^{۲}-۴\times ۲\times(k-۲)=۰\Rightarrow ۴-۸(k-۲)=۰\Rightarrow k=\frac{۵}{۲}$$

۱۸۸۲- گزینهٔ ۴ دلتای معادله باید مثبت باشد:

$$\Delta=۴k^{۲}-k=k(۴k-۱)>۰\Rightarrow k>\frac{۱}{۴} \text{ یا } k<۰$$

بنابراین k متعلق به مجموعهٔ $\mathbb{R}-[۰,\frac{۱}{۴}]$ است.

۱۸۸۳- گزینهٔ ۳ چون معادلهٔ $x^{۲}-۴x+k-۱=۰$ جواب حقیقی ندارد، پس

$$\Delta=۱۶-۴(k-۱)<۰\Rightarrow k-۱>۴\Rightarrow k>۵$$

در معادلهٔ $x^{۲}+۲x-k+۶=۰$ مقدار Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=۴-۴(-k+۶)=۴k-۲۰=۴(k-۵)$$

چون $k>۵$، پس $۴(k-۵)>۰$ و در نتیجه این معادله دو جواب حقیقی دارد.

۱۸۸۴- گزینهٔ ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{۲})(x-\sqrt{۵})=۰\xrightarrow{x_{۱}<x_{۲}}x_{۱}=\sqrt{۲}\ ,\ x_{۲}=\sqrt{۵}$$

بنابراین $x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۴}=(\sqrt{۲})^{۲}+(\sqrt{۵})^{۴}=۲+۲۵=۲۷$.

۱۸۸۵- گزینهٔ ۱ چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است و دیگری $\frac{-\sqrt{۱۲}}{۳}$. چون $x_{۱}<x_{۲}$، بنابراین

$$x_{۱}=-\frac{\sqrt{۱۲}}{۳},\ \ x_{۲}=۱\Rightarrow ۳x_{۱}+x_{۲}=۱-\sqrt{۱۲}$$

۱۸۸۶- گزینهٔ ۳ چون a جواب معادلهٔ $x^{۲}-x-۵=۰$ است، پس در این معادله صدق می‌کند، یعنی

$$a^{۲}-a-۵=۰\Rightarrow a^{۲}-a=۵$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود $b^{۲}-b=۵$. بنابراین

$$(a^{۲}-a-۲)(b^{۲}-b+۲)=(۵-۲)(۵+۲)=۲۱$$

۱۸۸۷- گزینهٔ ۱ اگـر انـدازهٔ طول مسـتطیل را y و اندازهٔ عـرض آن را x فـرض کنیـم، انـدازهٔ قطـر آن می‌شـود $\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$. پـس $y=۴+x$ و $x^{۲}+y^{۲}=۳۰$. در نتیجه

$$x^{۲}+(۴+x)^{۲}=۳۰\Rightarrow x^{۲}+۱۶+۸x+x^{۲}=۳۰$$

$$x^{۲}+۴x-۷=۰\Rightarrow x=-۲+\sqrt{۱۱}\ ,\ x=-۲-\sqrt{۱۱}$$

اگر $x=-۲-\sqrt{۱۱}$، x عددی منفی می‌شـود، بنابراین قابل قبول نیسـت. پس $x=-۲+\sqrt{۱۱}$ و در نتیجـه $y=۴+(-۲+\sqrt{۱۱})=۲+\sqrt{۱۱}$. بنابرایـن مساحت مستطیل برابر است با

$$S=xy=(\sqrt{۱۱}-۲)(\sqrt{۱۱}+۲)=۱۱-۴=۷$$

۱۸۸۸- گزینهٔ ۱ دو عـدد را x و y می‌نامیـم. پـس $\frac{y}{x}=۴$ و $xy=x+y+۶$. بنابراین $y=۴x$ و

$$x(۴x)=x+۴x+۶\Rightarrow ۴x^{۲}-۵x-۶=۰$$

$$\Delta=۲۵+۹۶=۱۲۱\Rightarrow x=\frac{۵\pm ۱۱}{۸}\Rightarrow x_{۱}=۲\ ,\ x=-\frac{۳}{۴}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

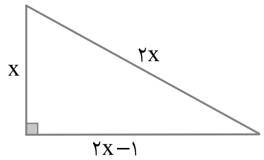
بنابراین $y=۸$ و در نتیجه $y-x=۶$.

۱۸۸۹- گزینهٔ ۳ بـا توجه به شـکل زیـر و بنابر قضیهٔ فیثاغـورس، معادلهٔ $(۲x)^{۲}=x^{۲}+(۲x-۱)^{۲}$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$۴x^{۲}=x^{۲}+۴x^{۲}-۴x+۱\Rightarrow x^{۲}-۴x+۱=۰\Rightarrow x=۲-\sqrt{۳}, x=۲+\sqrt{۳}$$

چـون $۲x-۱$ انـدازهٔ یکـی از ضلع‌هـای مثلث اسـت، پـس $۲x-۱>۰$، یعنی $x>\frac{۱}{۲}$. بنابراین $x=۲-\sqrt{۳}$ قابل قبول نیست و در نتیجه $x=۲+\sqrt{۳}$. از طرف دیگر محیط مثلث برابر است با

$$P=x+۲x+۲x-۱=۵x-۱=۵(۲+\sqrt{۳})-۱=۹+۵\sqrt{۳}$$



۱۸۹۰- گزینهٔ ۲ ایـن دو عـدد را x و $x+۲$ در نظـر می‌گیریـم. بنابراین تساوی $(x+۲)^{۳}-x^{۳}=۴۸۸$ برقرار است. پس

$$x^{۳}+۶x^{۲}+۱۲x+۸-x^{۳}=۴۸۸\Rightarrow ۶x^{۲}+۱۲x-۴۸۰=۰$$

$$x^{۲}+۲x-۸۰=۰\Rightarrow(x-۸)(x+۱۰)=۰\Rightarrow x=۸\ ,\ x=-۱۰$$

چون عددها طبیعی و زوج هسـتند، پس $x=-۱۰$ قابل قبول نیسـت. بنابراین $x=۸$ و دو عـدد مـورد نظـر ۸ و ۱۰ هسـتند و تفاضـل مربعـات آن‌هـا برابر $۱۰^{۲}-۸^{۲}=۱۰۰-۶۴$، یعنی ۳۶ است.

۱۸۹۱- گزینهٔ ۲ دلتای معادله باید برابر با صفر باشد:

$$\Delta=۴(m+۱)^{۲}-۴m(m+۱)=۴(m+۱)(m+۱-m)=۴(m+۱)=۰$$

بنابراین $m=-۱$.

۱۸۹۲- گزینهٔ ۲ اگر معادله حداکثر یک جواب حقیقی داشـته باشد، باید $\Delta\leq ۰$. پس

$$\Delta=۳۶-۴\times ۴(k-۲)\leq ۰\Rightarrow ۶۸-۱۶k\leq ۰\Rightarrow k\geq\frac{۱۷}{۴}$$

پس حداقل مقدار k برابر $\frac{۱۷}{۴}$ است.

۱۸۹۳- گزینهٔ ۲ چون معادلهٔ $x^{۲}+۲x+b=۰$ دو جواب حقیقی دارد، پس $\Delta=۴-۴b>۰$. اکنون دلتای معادلهٔ $x^{۲}-۶x+b+۸=۰$ را حسـاب می‌کنیم $\Delta=۳۶-۴(b+۸)=۴-۴b>۰$. بنابراین، معادلهٔ اخیر نیز دو جواب دارد.

۱۸۹۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول**

$$x^{۲}+(m-۱)x+m-۲m^{۲}=۰$$

$$\Delta=(m-۱)^{۲}-۴(m-۲m^{۲})=m^{۲}-۲m+۱-۴m+۸m^{۲}$$

$$=۹m^{۲}-۶m+۱=(۳m-۱)^{۲}$$

$$x=\frac{(۱-m)\pm\sqrt{(۳m-۱)^{۲}}}{۲}=\frac{(۱-m)\pm(۳m-۱)}{۲}\Rightarrow x_{۱}=۱-۲m, x_{۲}=m$$

حالت اول

$$x_{۱}=۱-۲m<۰\Rightarrow m>\frac{۱}{۲}, x_{۲}=m<۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}<m<۲$$

حالت دوم

$$x_۱=۱-۲m<۲\Rightarrow m>-\frac{۱}{۲}\,,\, x_۲=m<۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<m<۰$$

پس می‌توان گفت $m\in(-\frac{۱}{۲},۰)\cup(\frac{۱}{۲},۲)$.

راه‌حل دوم اگر معادله را به‌صورت $x^۲+(m-۱)x-m(۲m-۱)=۰$ بنویسیم، به کمک تجزیه می‌توانیم آن را حل کنیم. در واقع به دنبال دو عدد هستیم که حاصل‌ضربشان $-m(۲m-۱)$ و حاصل‌جمعشان $m-۱$ باشد. پس یکی از این دو عدد $۲m-۱$ و دیگر $-m$ است. بنابراین $(x-m)(x+۲m-۱)=۰$. پس جواب‌های معادله $x_۱=۱-۲m$ و $x_۲=m$ هستند. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

حالت اول $x_۱=۱-۲m<۰\Rightarrow m>\frac{۱}{۲}\;,\quad x_۲=m<۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}<m<۲$

حالت دوم $x_۱=۱-۲m<۲\Rightarrow m>-\frac{۱}{۲}\;,\quad x_۲=m<۰\Rightarrow-\frac{۱}{۲}<m<۰$

بنابراین $m\in(-\frac{۱}{۲},۰)\cup(\frac{۱}{۲},۲)$.

۱۸۹۵- گزینهٔ ۱ مجموع ضرایب معادله برابر است با $۲-m+m-۲=۰$. پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است.

۱۸۹۶- گزینهٔ ۲ در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a-b+c=۰$ ، آن‌گاه جواب‌های معادله $x=-۱$ و $x=-\frac{c}{a}$ هستند.

در معادلهٔ $(\sin^۲\alpha)x^۲+x+\cos^۲\alpha=۰$ ،

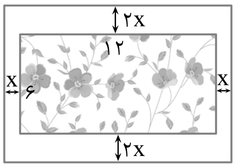
$$a=\sin^۲\alpha\;,\;b=۱\;,\;c=\cos^۲\alpha\Rightarrow a-b+c=\cos^۲\alpha-۱+\sin^۲\alpha=۰$$

بنابراین $x_۱=-\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}=-\cot^۲\alpha$ و $x_۲=-۱$. توجه کنید که چون $۰^\circ<\alpha<۴۵^\circ$ ، پس $\cot\alpha>۱$ و در نتیجه $-\cot^۲\alpha<-۱$. بنابراین

$$x_۲^۲-x_۱=(-۱)^۲-(-\cot^۲\alpha)=۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

۱۸۹۷- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل واضح است که ابعاد قاب $۱۲+۲x$ و $۶+۴x$ است. بنابراین مساحت قاب برابر است با $(۶+۴x)(۱۲+۲x)$. پس

$$(۶+۴x)(۱۲+۲x)=۱۰۴\Rightarrow ۲x^۲+۱۵x-۸=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲},\;\; x=-۸$$



$x=-۸$ قابل قبول نیست. پس $x=\frac{۱}{۲}$ و محیط قاب برابر است با

$$P=۲(۶+۴x+۱۲+۲x)$$
$$=۲(۶x+۱۸)=۴۲cm$$

۱۸۹۸- گزینهٔ ۱ سن کنونی مریم را x و سن کنونی برادرش را y در نظر می‌گیریم. در این صورت $x-۲=۷(y-۲)$ و $x=y^۲$. اگر در معادلهٔ اول به جای x قرار دهیم $y^۲$ ، به‌دست می‌آید:

$$y^۲-۲=۷(y-۲)\Rightarrow y^۲-۷y+۱۲=۰\Rightarrow(y-۳)(y-۴)=۰\Rightarrow y=۳,۴$$

اگر $y=۳$ ، آن‌گاه $x=۹$ یعنی مریم و برادرش در مجموع ۱۲ سال دارند که در گزینه‌ها نیست. اگر $y=۴$ ، آن‌گاه $x=۱۶$. یعنی مریم و برادرش در مجموع ۲۰ سال دارند که در گزینهٔ (۱) آمده است.

۱۸۹۹- گزینهٔ ۳ اگر طول ضلع مربع x باشد، اندازهٔ مساحت آن $x^۲$ و طول قطر آن $\sqrt{۲}x$ است. بنابراین طول ضلع مربع را از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+\sqrt{۲}x=\frac{۷}{۲}\Rightarrow x^۲+\sqrt{۲}x-\frac{۷}{۲}=۰$$

$$x=۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\;,\; x=-۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\text{ (غ.ق.ق.)}$$

محیط مربع $۴x$ است که می‌شود $۸-۲\sqrt{۲}$.

۱۹۰۰- گزینهٔ ۳ طول یک تکه را x بگیرید. در این صورت طول تکهٔ دیگر $۲۰-x$ است. بنابراین طول هر ضلع مربع نظیر تکهٔ اول $\frac{x}{۴}$ و طول هر ضلع مربع نظیر تکهٔ دوم $\frac{۲۰-x}{۴}$ است. در نتیجه، مساحت این مربع‌ها $(\frac{x}{۴})^۲$ و $(\frac{۲۰-x}{۴})^۲$ است. به این ترتیب،

$$(\frac{x}{۴})^۲+(\frac{۲۰-x}{۴})^۲=۱۳\Rightarrow x^۲-۲۰x+۹۶=۰\Rightarrow x=۱۲\;,\; x=۸$$

چون $۲۰=۸+۱۲$ ، پس، طول یکی از تکه‌ها ۱۲ سانتی‌متر و طول تکهٔ دیگر ۸ سانتی‌متر و اختلاف اندازه‌های آن‌ها برابر ۴ سانتی‌متر است.

۱۹۰۱- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=m+۱=۵\Rightarrow m=۴$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با $\alpha\beta=-۲m-۱=-۹$.

۱۹۰۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_۱x_۲=-۵$ و $x_۱+x_۲=۳$. در نتیجه

$$x_۱(x_۲-۲)+x_۲(x_۱-۲)=۲x_۱x_۲-۲(x_۱+x_۲)=۲(-۵)-۲(۳)=-۱۶$$

۱۹۰۳- گزینهٔ ۴ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۵=۰$ را با α و β نشان می‌دهیم. در نتیجه باید حاصل $(\alpha-۲)(\beta-۲)=(۲-\alpha)(۲-\beta)$ را بیابیم. برای این کار می‌توانیم یکی از روش‌های زیر را به کار ببریم.

راه‌حل اول دقت کنید که $(\alpha-۲)(\beta-۲)=\alpha\beta-۲(\alpha+\beta)+۴$. از طرف دیگر، $\alpha+\beta=۲$ و $\alpha\beta=-۵$. بنابراین $(\alpha-۲)(\beta-۲)=-۵-۴+۴=-۵$ ، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

راه‌حل دوم می‌دانیم $x^۲-۲x-۵=(x-\alpha)(x-\beta)$. اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم ۲، به دست می‌آید $(۲-\alpha)(۲-\beta)=-۵$. چون $\alpha\beta=-۵$ ، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

۱۹۰۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x_۱+x_۲=-(k+۱)=-۱-k\;,\quad x_۱x_۲=۸$$

بنابراین

$$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{-۱-k}{۸}=-\frac{۳}{۴}$$

بنابراین $k=۵$.

۱۹۰۵- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=\frac{۲}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=۲$. بنابراین

$$\frac{m-۱}{۲}=۲\Rightarrow m-۱=۴\Rightarrow m=۵$$

۱۹۰۶- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=\beta^{۲}$. از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=-\frac{۲۷}{۸}\Rightarrow\beta^{۳}=-\frac{۲۷}{۸}\Rightarrow\beta=-\frac{۳}{۲}$$

پس $\alpha=\frac{۹}{۴}$، همچنین $\alpha+\beta=-\frac{m}{۸}$. بنابراین

$$\frac{۹}{۴}-\frac{۳}{۲}=-\frac{m}{۸}\Rightarrow m=-۶$$

۱۹۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(x_۱+x_۲)^{۳}=x_۱^{۳}+x_۲^{۳}+۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)\quad(۱)$$

از طرف دیگر، $x_۱+x_۲=۲$ و $x_۱x_۲=k$. در نتیجه، از تساوی (۱) و اینکه $x_۱^{۳}+x_۲^{۳}=۶$ به‌دست می‌آید $۸=۶+۶k$. بنابراین $k=\frac{۱}{۳}$.

۱۹۰۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۳k$ و $x_۱x_۲=۹$. از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}=۶\Rightarrow(\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲})^{۲}=۶^{۲}$$

$$x_۱+x_۲-۲\sqrt{x_۱x_۲}=۳۶\Rightarrow۳k-۲\sqrt{۹}=۳۶\Rightarrow k=۱۴$$

۱۹۰۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\alpha+\beta=۳\Rightarrow(\alpha+\beta)^{۲}=۹,\quad|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow(\alpha-\beta)^{۲}=۱۳$$

پس معادله‌ای مورد نظر است که جواب‌های آن ۹ و ۱۳ باشند. چون مجموع این جواب‌ها برابر ۲۲ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۱۷ است، پس معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است

$$x^{۲}-Sx+P=۰\Rightarrow x^{۲}-۲۲x+۱۱۷=۰$$

۱۹۱۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا جواب‌های معادلهٔ $۲x^{۲}+۳x-۹=۰$ را می‌یابیم:

$$۲x^{۲}+۳x-۹=۰\Rightarrow(۲x-۳)(x+۳)=۰\Rightarrow x_۱=\frac{۳}{۲}\ ,\ x_۲=-۳$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ $۹x^{۲}-ax+b=۰$ به صورت زیر هستند:

$$\alpha=\frac{۱}{x_۱^{۲}}-۳=\frac{۴}{۹}-۳=-\frac{۲۳}{۹}\ ,\quad\beta=\frac{۱}{x_۲^{۲}}-۳=\frac{۱}{۹}-۳=-\frac{۲۶}{۹}$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{a}{۹}$. بنابراین

$$\frac{a}{۹}=-\frac{۴۹}{۹}\Rightarrow a=-۴۹$$

راه‌حل دوم جواب‌های معادلهٔ $۲x^{۲}+۳x-۹=۰$ را با α و β نشان می‌دهیم. اگر جواب‌های معادلهٔ $۹x^{۲}-ax+b=۰$ را با z و t نشان دهیم، آن‌گاه $z=\frac{۱}{\alpha^{۲}}-۳$ و $t=\frac{۱}{\beta^{۲}}-۳$.

توجه کنید که $z+t=\frac{a}{۹}=\frac{۱}{\alpha^{۲}}+\frac{۱}{\beta^{۲}}-۶=\frac{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}{(\alpha\beta)^{۲}}-۶$. چون $\alpha+\beta=-\frac{۳}{۲}$ و $\alpha\beta=-\frac{۹}{۲}$، پس $\alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=\frac{۹}{۴}+۹=\frac{۴۵}{۴}$. بنابراین

$$\frac{a}{۹}=\frac{\frac{۴۵}{۴}}{\frac{۸۱}{۴}}-۶=\frac{۵}{۹}-۶\Rightarrow a=-۴۹$$

۱۹۱۱- گزینهٔ ۳ مجموع جواب‌های معادله برابر $\frac{m^{۲}}{m}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $\frac{۱}{m}$ است. بنابراین

$$\frac{m^{۲}}{m}=\frac{۱}{m}\Rightarrow m^{۲}=۱\Rightarrow m=\pm۱$$

اگر $m=۱$، آن‌گاه معادله به‌صورت $x^{۲}-x+۱=۰$ است که جواب ندارد چون $\Delta=-۳<۰$. اگر $m=-۱$، آن‌گاه معادله به‌صورت $-x^{۲}-x+۱=۰$ است که دو جواب دارد.

۱۹۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $\frac{۳}{۲}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $-\frac{۵}{۲}$ است. بنابراین

$$\alpha^{۲}\beta+\alpha\beta^{۲}=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۱۵}{۴}$$

۱۹۱۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\frac{۱}{۲}$ و $\alpha\beta=-\frac{۵}{۲}$. بنابراین

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{۱}{۴}-۲(-\frac{۵}{۲})}{-\frac{۵}{۲}}=-\frac{۲۱}{۱۰}$$

۱۹۱۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. بنابراین

$$۳=\frac{\sqrt{۵^{۲}-۴(k+۱)(-۲)}}{|-۲|}\Rightarrow۶=\sqrt{۸k+۳۳}$$

$$۶^{۲}=۸k+۳۳\Rightarrow۸k=۳\Rightarrow k=\frac{۳}{۸}$$

۱۹۱۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۱$ و

$$|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{۱-۴(۲k-۳)}=\sqrt{۱۳-۸k}$$

از طرف دیگر،

$$x_۱^{۲}-x_۲^{۲}=۶\Rightarrow(x_۱-x_۲)(x_۱+x_۲)=۶\Rightarrow\ x_۱-x_۲=۶$$

پس $x_۱-x_۲>۰$، در نتیجه

$$\sqrt{۱۳-۸k}=۶\Rightarrow۱۳-۸k=۳۶\Rightarrow k=-\frac{۲۳}{۸}$$

۱۹۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۱۵$ و $x_۱x_۲=۹$. بنابراین $x_۱,x_۲>۰$ و

$$\sqrt{\frac{x_۱}{x_۲}}+\sqrt{\frac{x_۲}{x_۱}}=\frac{\sqrt{x_۱}}{\sqrt{x_۲}}+\frac{\sqrt{x_۲}}{\sqrt{x_۱}}=\frac{\sqrt{x_۱}^{۲}+\sqrt{x_۲}^{۲}}{\sqrt{x_۱x_۲}}=\frac{x_۱+x_۲}{\sqrt{x_۱x_۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۹}}=۵$$

۱۹۱۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_۱+x_۲=-(\frac{-۶}{۳})=۲$ و $x_۱x_۲=-\frac{۴}{۳}$.

از طرف دیگر،

$$S=x_۱^{۲}+x_۱x_۲+x_۲^{۲}+x_۱x_۲=x_۱^{۲}+x_۲^{۲}+۲x_۱x_۲=(x_۱+x_۲)^{۲}=۴$$

$$P=(x_۱^{۲}+x_۱x_۲)(x_۲^{۲}+x_۱x_۲)=(x_۱(x_۱+x_۲))(x_۲(x_۱+x_۲))$$

$$=x_۱x_۲(x_۱+x_۲)^{۲}=-\frac{۴}{۳}\times۴=-\frac{۱۶}{۳}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر $x^{۲}-۴x-\frac{۱۶}{۳}=۰$ یا $۳x^{۲}-۱۲x-۱۶=۰$ است.

۱۹۱۸- گزینهٔ ۱ اگـر جواب‌هـای معادلـهٔ $x^{۲}-۳x-۵=۰$ را α و β بنامیـم، آن‌گاه $\alpha+\beta=۳$ و $\alpha\beta=-۵$. جواب‌هـای معادلهٔ مورد نظر $\alpha^{۳}$ و $\beta^{۳}$ هستند. بنابراین

$$S=\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۲۷-۳\times(-۵)\times۳=۷۲$$

$$P=\alpha^{۳}\beta^{۳}=(\alpha\beta)^{۳}=(-۵)^{۳}=-۱۲۵$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است

$$x^{۲}-Sx+P=۰\Rightarrow x^{۲}-۷۲x-۱۲۵=۰$$

۱۹۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=-۱$ و $\alpha\beta=-۳$، بنابراین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$S=\alpha^{۲}+\frac{۱}{\beta}+\beta^{۲}+\frac{۱}{\alpha}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۱+۶+\frac{-۱}{-۳}=\frac{۲۲}{۳}$$

$$P=(\alpha^{۲}+\frac{۱}{\beta})(\beta^{۲}+\frac{۱}{\alpha})=(\alpha\beta)^{۲}+\alpha+\beta+\frac{۱}{\alpha\beta}=۹-۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲۳}{۳}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^{۲}-Sx+P=۰\Rightarrow x^{۲}-\frac{۲۲}{۳}x+\frac{۲۳}{۳}=۰\Rightarrow ۳x^{۲}-۲۲x+۲۳=۰$$

۱۹۲۰- گزینهٔ ۳ اگر دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}(x_{۱}+x_{۲})+x_{۱}x_{۲}=-۱\\(x_{۱}+x_{۲})-x_{۱}x_{۲}=-۱۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S+P=-۱\\S-P=-۱۱\end{cases}$$

را حل کنیم، به‌دست می‌آید $S=-۶$ و $P=۵$. بنابراین $x_{۱}$ و $x_{۲}$ جواب‌های معادلهٔ $x^{۲}+۶x+۵=۰$ هستند.

۱۹۲۱- گزینهٔ ۲ کافـی اسـت در معادلـهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ نابرابـری $\frac{c}{a}<۰$ برقرار باشـد تا معادله دو جواب داشـته باشد که یکی مثبت و یکی منفی است. پس $\frac{m-۴}{m+۲}<۰$ در نتیجه $-۲<m<۴$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح -۱، ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد.

۱۹۲۲- گزینهٔ ۲ اگـر $a=۰$، آن‌گاه معادله فقـط یک جواب دارد که قابل قبول نیست. اگر $a\neq۰$، آن‌گاه حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با $\frac{۱-a^{۲}}{a^{۲}}$ که باید منفی باشد. پس

$$\frac{۱-a^{۲}}{a^{۲}}<۰\Rightarrow ۱-a^{۲}<۰\Rightarrow a^{۲}>۱\Rightarrow|a|>۱$$

۱۹۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\Delta=۴m^{۲}+۴m+۴\Rightarrow(۲m+۱)^{۲}+۳>۰$$

پـس معادله حتماً دو جواب دارد. برای اینکه جواب‌ها هم‌علامت باشـند، کافی است حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد، پس

$$\frac{c}{a}>۰\Rightarrow -m-۱>۰\Rightarrow m<-۱$$

۱۹۲۴- گزینهٔ ۴ ابتـدا توجه کنید که اگر $a=۰$، آن‌گاه معادله به صورت $-۸x+۹=۰$ درمی‌آیـد که فقط یـک جواب دارد. با شـرط $a\neq۰$ باید دلتای معادله مثبت باشد:

$$\Delta=۱۶(a+۲)^{۲}-۱۶a\times۹=۱۶((a+۲)^{۲}-۹a)=۱۶(a^{۲}-۵a+۴)$$
$$=۱۶(a-۱)(a-۴)>۰$$

بنابرایـن $a\in(-\infty,۰)\cup(۰,۱)\cup(۴,+\infty)$. همچنیـن مجمـوع و حاصل‌ضـرب جواب‌هـا بایـد مثبـت باشـند: $\frac{a+۲}{a}>۰$ و $\frac{۹}{۴a}>۰$. پـس $a>۰$، در نتیجـه $a\in(۰,۱)\cup(۴,+\infty)$، یعنی a مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را نمی‌تواند داشته باشند.

۱۹۲۵- گزینهٔ ۱ اگر α و β جواب‌های معادله باشـند، باید شـرط‌های $\Delta>۰$، $\alpha\beta>۰$ و $\alpha+\beta<۰$ برقـرار باشـند تا معادله دو جواب منفی داشـته باشد. در نتیجه

$$\Delta=m^{۲}-۸(m-۲)>۰\Rightarrow m^{۲}-۸m+۱۶>۰\Rightarrow(m-۴)^{۲}>۰\Rightarrow m\neq۴$$

$$\alpha+\beta<۰\Rightarrow\frac{-m}{۲}<۰\Rightarrow m>۰\,,\quad \alpha\beta>۰\Rightarrow\frac{m-۲}{۲}>۰\Rightarrow m>۲$$

بنابراین $m\in(۲,+\infty)-\{۴\}$.

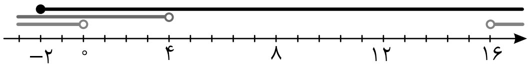
۱۹۲۶- گزینهٔ ۲ برای اینکه معادله دو جواب داشته باشد باید

$$\Delta>۰\Rightarrow(m-۴)^{۲}-۴(۲m+۴)>۰\Rightarrow m^{۲}-۱۶m>۰\Rightarrow m<۰ \text{ یا } m>۱۶$$

بـرای اینکـه دو جـواب معادلـه نامنفـی باشـند، بایـد مجمـوع آن‌هـا مثبت و حاصل‌ضربشان نامنفی باشد:

$$\frac{c}{a}\geq۰\Rightarrow ۲m+۴\geq۰\Rightarrow m\geq-۲\,,\quad -\frac{b}{a}>۰\Rightarrow ۴-m>۰\Rightarrow m<۴$$

بـا توجه به شـکل زیر، اشـتراک جواب‌های به‌دسـت آمده بـرای m به‌صورت $-۲\leq m<۰$ است و در نتیجه m می‌تواند مقادیر صحیح -۲ و -۱ را داشته باشد.



۱۹۲۷- گزینهٔ ۳ معادلهٔ مورد نظر همواره دو جواب دارد $(\Delta=m^{۲}+۸>۰)$. اگر معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع آن‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. بنابراین

$$m-۲<۰\Rightarrow m<۲,\quad -(m+۱)>۰\Rightarrow m<-۱$$

پس $m<-۱$.

۱۹۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنیـد که $\Delta=(۲m+۱)^{۲}$. چون معادله دو جواب دارد، بایـد $m\neq-\frac{۱}{۲}$. چـون قدرمطلق جواب منفی از جـواب مثبت کوچک‌تر اسـت، پس مجمـوع جواب‌ها مثبت اسـت و چـون جواب‌هـا مختلف‌العلامت هستند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها منفی است. بنابراین

$$x_{۱}+x_{۲}=-\frac{۲m-۱}{m}>۰\Rightarrow ۰<m<\frac{۱}{۲}\,,\quad x_{۱}x_{۲}=-\frac{۲}{m}<۰\Rightarrow m>۰$$

بنابراین $۰<m<\frac{۱}{۲}$.

۱۹۲۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $\Delta\geq۰$، پس

$$۴-۴m+۸\geq۰\Rightarrow m\leq۳$$

از طرف دیگر، اگر معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، آن‌گاه

$$\frac{c}{a}\leq۰\Rightarrow m-۲\leq۰\Rightarrow m\leq۲$$

همچنین، ممکن اسـت معادله دو جواب نامثبت داشـته باشد، که در این صورت باید مجموع آن‌ها نامثبت باشد، یعنی $-\frac{b}{a}\leq۰$، که ممکن نیست، زیرا $-\frac{b}{a}=۲$.

بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۲ است.

۱۹۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\Delta=۴m^۲+۴m+۸=(۲m+۱)^۲+۷>۰$$

بنابراین معادله حتماً دو جواب دارد. از طرف دیگر، برای اینکه معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع جواب‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. یعنی باید

$$-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow ۲m<۰\Rightarrow m<۰\ ,\qquad \frac{c}{a}>۰\Rightarrow -m-۲>۰\Rightarrow m<-۲$$

پس اگر $m<-۲$، معادله دو جواب منفی دارد. اکنون توجه کنید که اگر $m=-۲$، معادله به‌صورت $x^۲+۴x=۰$ درمی‌آید که یک جواب آن $x=۰$ و جواب دیگر $x=-۴$ است. پس در این حالت نیز معادله جواب مثبت ندارد. بنابراین اگر $m>-۲$، معادله یا دو جواب مثبت، یا دو جواب مختلف‌العلامت دارد، که در هر صورت یکی از جواب‌ها مثبت است.

۱۹۳۱- گزینهٔ ۳ چون $x=\frac{۱}{۳}$ و $x=-۱$ جواب‌های معادله هستند، پس

$$\begin{cases} ۶(\frac{۱}{۲۷})-۵(\frac{۱}{۹})+a(\frac{۱}{۳})+b=۰ \\ ۶(-۱)-۵\times۱-a+b=۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+۳b=۱ \\ a-b=-۱۱ \end{cases}$$

بنابراین $a=-۸$ و $b=۳$. پس معادله به شکل $۶x^۳-۵x^۲-۸x+۳=۰$ در می‌آید که چون $\frac{۱}{۳}$ و -۱ جواب‌های آن هستند، پس $۳x-۱$ و $x+۱$ عامل‌های عبارت سمت چپ معادله هستند و به کمک تقسیم می‌توان نوشت $(x+۱)(۳x-۱)(۲x-۳)=۰$. بنابراین جواب دیگر معادله $x=\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه $k=\frac{۳}{۲}$ و $\frac{ab}{k}=\frac{(-۸)\times۳}{\frac{۳}{۲}}=-۱۶$.

۱۹۳۲- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۳+۸+x^۲-۵x-۱۴=۰\Rightarrow(x+۲)(x^۲-۲x+۴)+(x+۲)(x-۷)=۰$$

$$(x+۲)(x^۲-۲x+۴+x-۷)=۰\Rightarrow(x+۲)(x^۲-x-۳)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\ ,\qquad x^۲-x-۳=۰\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های منفی معادله برابر است با

$$(\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲})(-۲)=\sqrt{۱۳}-۱$$

۱۹۳۳- گزینهٔ ۴ واضح است که $x=-۱$ جواب معادله است. پس $x+۱$ عامل عبارت سمت چپ معادله است

$$x^۳+x^۲+x^۲-mx-m-۱=۰\Rightarrow x^۲(x+۱)+(x+۱)(x-m-۱)=۰$$

$$(x+۱)(x^۲+x-(m+۱))=۰$$

برای اینکه معادله سه جواب داشته باشد، باید معادلهٔ $x^۲+x-(m+۱)=۰$ دو جواب داشته باشد و هیچ یک از این جواب‌ها برابر -۱ نباشند. بنابراین

$$\Delta=۱+۴(m+۱)>۰\Rightarrow ۵+۴m>۰\Rightarrow m>-\frac{۵}{۴}$$

$$(-۱)^۲-۱-(m+۱)\neq۰\Rightarrow m\neq-۱$$

پس $m\in(-\frac{۵}{۴},+\infty)-\{-۱\}$.

۱۹۳۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $t=x^۲\geq۰$، معادله به‌صورت $t^۲-۵t-۳=۰$ در می‌آید که جواب‌های آن $t=\frac{۵\pm\sqrt{۳۷}}{۲}$ هستند. جواب $\frac{۵-\sqrt{۳۷}}{۲}$ قابل قبول نیست چون عددی منفی است. بنابراین

$$x^۲=\frac{۵+\sqrt{۳۷}}{۲}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۵+\sqrt{۳۷}}{۲}}$$

یعنی معادله دو جواب دارد.

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم $t=x^۲\geq۰$، معادله به‌صورت $t^۲-۵t-۳=۰$ در می‌آید، که در آن $\frac{c}{a}<۰$ است. پس معادله دو جواب مختلف العلامت دارد. که با توجه به فرض $t\geq۰$، جواب منفی غیرقابل قبول و جواب مثبت قابل قبول خواهد بود و $x=\pm\sqrt{t}$. پس معادلهٔ داده شده دو جواب دارد.

۱۹۳۵- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود $t^۲-۴t-۱۲=۰$، پس

$$t^۲-۴t-۱۲=۰\Rightarrow(t-۶)(t+۲)=۰$$

$$t=-۲\quad (\text{غ.ق.ق}),\quad t=۶\Rightarrow x^۲=۶\Rightarrow x=\pm\sqrt{۶}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -۶ است.

۱۹۳۶- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $x^۲=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر می‌شود $t^۲+(۲m-۱)t-۲m=۰$. چون معادلهٔ اصلی چهار جواب دارد، پس این معادلهٔ درجهٔ دوم دو جواب مثبت دارد. بنابراین

$$\Delta>۰\Rightarrow(۲m-۱)^۲+۸m>۰\Rightarrow(۲m+۱)^۲>۰\Rightarrow m\neq-\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{c}{a}>۰\Rightarrow -۲m>۰\Rightarrow m<۰$$

$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow -(۲m-۱)>۰\Rightarrow ۲m-۱<۰\Rightarrow m<\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر m به‌صورت $(-\infty,۰)-\{-\frac{۱}{۲}\}$ است.

۱۹۳۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، به‌معادلهٔ $t^۲-kt+\frac{۳-۲k}{۴}=۰$ می‌رسیم. اگر این معادله فقط یک جواب مثبت مانند $t_۱$ داشته باشد، معادلهٔ اصلی دو جواب به‌صورت $x=\pm\sqrt{t_۱}$ دارد:

$$\begin{cases} \Delta=۰ \\ t_۱=-\frac{b}{۲a}>۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k^۲-(۳-۲k)=۰ \\ \frac{k}{۲}>۰\Rightarrow k>۰ \end{cases}$$

$$k^۲+۲k-۳=۰\Rightarrow k=-۳\ (\text{غ.ق.ق}),\ k=۱$$

همچنین اگر معادلهٔ درجهٔ دوم یک جواب منفی و یک جواب مثبت داشته باشد، جواب منفی قابل‌قبول نیست، چون $x^۲$ نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین معادلهٔ اصلی دو جواب به‌صورت $x=\pm\sqrt{t}$ دارد، پس

$$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow\frac{۳-۲k}{۴}<۰\Rightarrow ۳-۲k<۰\Rightarrow k>\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $k>\frac{۳}{۲}$ یا $k=۱$ جواب مسئله است.

۱۹۳۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$، $t\geq ۰$ و معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^۲-۲mt+m^۲-۴=۰ \quad (*)$$

در این معادله $\Delta=۴m^۲-۴(m^۲-۴)=۱۶>۰$. بنابراین معادلهٔ (*) به ازای هر مقدار m دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادلهٔ اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت. بنابراین اگر $t_۱$ و $t_۲$ جواب‌های معادلهٔ (*) باشند، باید

$$t_۱+t_۲<۰\Rightarrow ۲m<۰\Rightarrow m<۰$$

$$t_۱t_۲>۰\Rightarrow m^۲-۴>۰\Rightarrow m<-۲ \text{ یا } m>۲$$

بنابراین کافی است $m<-۲$ تا معادلهٔ اولیه جواب حقیقی نداشته باشد.

۱۹۳۹- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $x^۲+x=t$. در این صورت

$$t^۲-۱۸t+۷۲=۰\Rightarrow(t-۶)(t-۱۲)=۰$$

$$t=۶\Rightarrow x^۲+x=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰$$

$$(x-۲)(x+۳)=۰\Rightarrow x_۱=۲,\quad x_۲=-۳$$

$$t=۱۲\Rightarrow x^۲+x=۱۲\Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰$$

$$(x-۳)(x+۴)=۰\Rightarrow x_۳=۳,\quad x_۴=-۴$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=-۲$$

۱۹۴۰- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $x^۲-۷x+۱۱=t$. در نتیجه $t^۲=۳t+۴$. بنابراین $t=-۱,۴$، پس به معادله‌های زیر می‌رسیم

$$x^۲-۷x+۱۱=-۱\Rightarrow x^۲-۷x+۱۲=۰\Rightarrow x=۳,۴$$

$$x^۲-۷x+۱۱=۴\Rightarrow x^۲-۷x+۷=۰\Rightarrow x=\frac{۷\pm\sqrt{۲۱}}{۲}$$

پس معادلهٔ مورد نظر چهار جواب دارد.

۱۹۴۱- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x^۲+۱=۲(x+۱)\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰$$

جواب‌های معادلهٔ بالا $x=۱+\sqrt{۲}$ و $x=۱-\sqrt{۲}$ هستند. پس جواب بزرگ‌تر معادله $۱+\sqrt{۲}$ است.

۱۹۴۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل $\frac{x}{x^۴-x^۲-۲x+۱}=\frac{۱}{x^۳-۱}$ می‌نویسیم. بنابراین

$$x^۴-x=x^۴-x^۲-۲x+۱\Rightarrow x^۲+x-۱=۰\Rightarrow\frac{c}{a}=-۱$$

۱۹۴۳- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را در $(x+۱)(x-۱)$ ضرب و آن را ساده می‌کنیم:

$$x+۱+۲(x-۱)=۲(x-۱)(x+۱)\Rightarrow ۳x-۱=۲x^۲-۲\Rightarrow ۲x^۲-۳x-۱=۰$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد که ۱ و ۱- از آن‌ها نیستند و مجموع آن‌ها برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۹۴۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید $x_۱$ جواب دیگر معادله باشد. ابتدا معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{۵x-۲-۴a}{x^۲-(a+۲)x+۲a}=۱\Rightarrow x^۲-(a+۷)x+۶a+۲=۰ \quad (۱)$$

چون $x=۵$ جواب معادله است، پس

$$۲۵-۵(a+۷)+۶a+۲=۰\Rightarrow a=۸$$

چون مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر $a+۷$ است، پس

$$a+۷=۵+x_۱\Rightarrow ۱۵=۵+x_۱\Rightarrow x_۱=۱۰$$

یعنی جواب دیگر معادله ۱۰ است که مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نمی‌کند و قابل قبول است.

۱۹۴۵- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{۲x-۲a+x+۳}{(x+۳)(x-a)}=۴\Rightarrow\frac{۳x-۲a+۳}{(x+۳)(x-a)}=۴$$

$$۳x-۲a+۳=۴x^۲+(۱۲-۴a)x-۱۲a\Rightarrow ۴x^۲+(۹-۴a)x-۱۰a-۳=۰$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-۱۰a-۳}{۴}$ است. پس

$$\frac{-۱۰a-۳}{۴}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow -۱۰a=۱۰\Rightarrow a=-۱$$

۱۹۴۶- گزینهٔ ۲ دو طرف معادله را در $x^۲-۱$ ضرب می‌کنیم:

$$x-۱-۲=a(x^۲-۱)\Rightarrow ax^۲-x+۳-a=۰ \quad (۱)$$

اگر در معادلهٔ (۱) شرط $\Delta<۰$ برقرار باشد، معادله جواب ندارد. بنابراین

$$\Delta=۱-۴a(۳-a)<۰\Rightarrow ۴a^۲-۱۲a+۱<۰\Rightarrow\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۲}<a<\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۲}$$

پس به ازای اعداد طبیعی $a=۱$ و $a=۲$ معادله جواب ندارد.

توجه کنید که در حالت‌های زیر هم معادلهٔ اصلی جواب ندارد ولی این حالت‌ها در این مسئله اتفاق نمی‌افتند.

۱) $x=۱$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱) باشد.

۲) $x=-۱$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۲) باشد.

۳) $x=۱$ و $x=-۱$ هر دو جواب‌های معادلهٔ (۱) باشند.

۱۹۴۷- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $t=\frac{۲x+۱}{x}$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$t+\frac{-۶}{t}=۵\Rightarrow t^۲-۵t-۶=۰\Rightarrow t=-۱,t=۶$$

بنابراین

$$t=-۱\Rightarrow\frac{۲x+۱}{x}=-۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$$

$$t=۶\Rightarrow\frac{۲x+۱}{x}=۶\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

از آنجایی که هیچ کدام از این دو مقدار باعث صفر شدن مخرج‌ها در معادلهٔ اصلی نمی‌شوند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $-\frac{۱}{۱۲}$.

۱۹۴۸- گزینهٔ ۱ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $x+\frac{۱}{x}=۴$. بنابراین

$$x^۲+۱=۴x\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۳}$$

بنابراین دو عدد $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ شرط مورد نظر را دارند که $۲-\sqrt{۳}$ کوچک‌ترین عددی است که این شرط را دارد.

۱۹۴۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید زمان رفت برابر t و سرعت رفت برابر v باشد. در این صورت زمان برگشت برابر $t+\frac{۴}{۹}$ و سرعت برگشت برابر $v-۵$ است. چون فاصلهٔ دو شهر برابر ۲۰۰ کیلومتر است، پس تساوی‌های $۲۰۰=vt$ و $۲۰۰=(v-۵)(t+\frac{۴}{۹})$ برقرارند. بنابراین

$$v=\frac{۲۰۰}{t}\Rightarrow ۲۰۰=(\frac{۲۰۰}{t}-۵)(t+\frac{۴}{۹})\Rightarrow ۲۰۰=۲۰۰+\frac{۸۰۰}{۹t}-۵t-\frac{۲۰}{۹}$$

$$۸۰۰-۴۵t^{۲}-۲۰t=۰\Rightarrow ۹t^{۲}+۴t-۱۶۰=۰$$

$$(۹t+۴۰)(t-۴)=۰\Rightarrow t=۴ \text{ ساعت}$$

بنابراین زمان رفت ۴ ساعت است.

۱۹۵۰- گزینهٔ ۱ نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی برابر $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ است. اگر طول این مستطیل برابر x و عرض آن برابر y باشد، آن‌گاه

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\Rightarrow x=(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})y$$

از طرف دیگر نسبت محیط به مساحت مستطیل برابر $۳-\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\frac{۲(x+y)}{xy}=۳-\sqrt{۵}\Rightarrow ۲((\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})y+y)=(۳-\sqrt{۵})xy$$

$$۲(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}+۱)=(۳-\sqrt{۵})x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۵}+۳}{۳-\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}+۳}{۳-\sqrt{۵}}\times\frac{۳+\sqrt{۵}}{۳+\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{(۳+\sqrt{۵})^{۲}}{۹-۵}=\frac{۷+۳\sqrt{۵}}{۲}$$

۱۹۵۱- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$(x-۱)(\frac{۱}{x-۳}+\frac{۱}{x-۵})=۰\Rightarrow (x-۱)(\frac{x-۵+x-۳}{(x-۳)(x-۵)})=۰$$

$$(x-۱)(\frac{۲x-۸}{(x-۳)(x-۵)})=۰\Rightarrow \frac{۲(x-۱)(x-۴)}{(x-۳)(x-۵)}=۰$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ۱ و ۴ هستند و مجموع آن‌ها ۵ است.

۱۹۵۲- گزینهٔ ۱ معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{x-۱۲}{x^{۲}+۳x}=\frac{۲}{x}+\frac{۵}{x+۳}=\frac{۲x+۶+۵x}{x^{۲}+۳x}=\frac{۷x+۶}{x^{۲}+۳x}$$

در نتیجه، با فرض $x\neq ۰,-۳$ ،

$$x-۱۲=۷x+۶\Rightarrow ۶x=-۱۸\Rightarrow x=-۳$$

که قابل قبول نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۱۹۵۳- گزینهٔ ۳ معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم

$$\frac{۳x-۲-۲a}{x^{۲}-(a+۲)x+۲a}=۱\Rightarrow x^{۲}-(a+۵)x+۴a+۲=۰ \quad (۱)$$

چون $x=۶$ جواب معادله است، پس

$$۳۶-۶(a+۵)+۴a+۲=۰\Rightarrow -۲a+۸=۰\Rightarrow a=۴$$

چون مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر $a+۵=۹$ است، پس جواب دیگر معادلهٔ مورد نظر برابر ۳ است.

۱۹۵۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** دو طرف معادلهٔ داده شده را در $(x-۱)(x^{۲}-x+۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x-۱)(x^{۲}+x+۱)=\frac{a}{a+۱}(x+۱)(x^{۲}-x+۱)$$

$$x^{۳}-۱=\frac{a}{a+۱}(x^{۳}+۱)\Rightarrow (a+۱)x^{۳}-a-۱=ax^{۳}+a$$

$$x^{۳}=۲a+۱\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲a+۱}$$

اگر $\sqrt[۳]{۲a+۱}$ ریشهٔ مخرج کسر در معادلهٔ اصلی باشد، قابل قبول نیست. در غیر این صورت قابل قبول است و معادله یک جواب دارد. ریشهٔ مخرج کسر $x=۱$ است، پس

$$\sqrt[۳]{۲a+۱}=۱\Rightarrow ۲a+۱=۱\Rightarrow a=۰$$

توجه کنید که اگر $a=۰$ ، آن‌گاه معادله به‌صورت $x^{۲}+x+۱=۰$ درمی‌آید که جواب ندارد. همچنین اگر $a=-۱$ ، آن‌گاه سمت راست معادله تعریف نمی‌شود. بنابراین برای $a\in\mathbb{R}-\{۰,-۱\}$ معادله همواره یک جواب دارد.

راه‌حل دوم چون $a+۱$ در مخرج کسر است، پس $a\neq -۱$. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. برای یافتن گزینهٔ صحیح کافی است $a=۰$ را امتحان کنیم.

به ازای $a=۰$ معادله می‌شود $\frac{x^{۲}+x+۱}{x^{۲}-x+۱}=۰$ که جواب ندارد. پس $a\neq ۰$.

۱۹۵۵- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۵}{(x-۱)(x+۴)}-\frac{۳}{(x+۱)(x+۴)}=k$$

$$\frac{۵(x+۱)-۳(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)(x+۴)}=k\Rightarrow \frac{۲(x+۴)}{(x-۱)(x+۱)(x+۴)}=k$$

$$k(x^{۲}-۱)=۲\Rightarrow kx^{۲}-k-۲=۰$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-k-۲}{k}$ است. پس

$$\frac{-k-۲}{k}=-۴\Rightarrow ۴k=k+۲\Rightarrow k=\frac{۲}{۳}$$

۱۹۵۶- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=(x+\frac{۲}{x})^{۲}$ ، معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^{۲}-۹t-۱۰=۰\Rightarrow t=-۱, t=۱۰$$

چون $t>۰$ ، پس $t=-۱$ غیرقابل قبول است. اگر $t=۱۰$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x+\frac{۲}{x}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow x^{۲}-\sqrt{۱۰}x+۲=۰, & \Delta=۲ \\ x+\frac{۲}{x}=-\sqrt{۱۰}\Rightarrow x^{۲}+\sqrt{۱۰}x+۲=۰, & \Delta=۲ \end{cases}$$

هر کدام از معادله‌های بالا دو جواب غیرصفر دارند و جواب‌های معادلهٔ اول قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ دوم هستند. پس معادلهٔ اصلی چهار جواب دارد.

۱۹۵۷- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{۲۱}{x^{۲}+۴x+۱۰}-(x^{۲}+۴x+۱۰)+۱۰=۶$$

اگر فرض کنیم $x^{۲}+۴x+۱۰=t$ ، این معادله می‌شود

$$\frac{۲۱}{t}-t+۴=۰\xrightarrow{\text{ضرب در } t}۲۱-t^{۲}+۴t=۰$$

$$t^{۲}-۴t-۲۱=۰\Rightarrow (t-۷)(t+۳)=۰\Rightarrow t=-۳,\ t=۷$$

بنابراین

$t=-۳\Rightarrow x^{۲}+۴x+۱۰=-۳\Rightarrow x^{۲}+۴x+۱۳=۰$ $(\Delta<۰)$ جواب ندارد.

$$t=۷\Rightarrow x^{۲}+۴x+۱۰=۷\Rightarrow x^{۲}+۴x+۳=۰$$

$$(x+۱)(x+۳)=۰\Rightarrow x=-۱,\ x=-۳$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -۴ است.

۱۹۵۸- گزینهٔ ۲ اگر طول ضلع‌های زاویهٔ قائمهٔ مثلث را a و b و طول وتر آن را c فرض کنیم، آن‌گاه

$$\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow b=\frac{۴}{۳}a$$

بنابراین طول وتر برابر است با

$$c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{a^۲+\frac{۱۶}{۹}a^۲}=\sqrt{\frac{۲۵}{۹}a^۲}=\frac{۵}{۳}a$$

بنابراین

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۴۷}{۳۰}\Rightarrow\frac{۱}{a}+\frac{۱}{\frac{۴}{۳}a}+\frac{۱}{\frac{۵}{۳}a}=\frac{۴۷}{۳۰}\Rightarrow\frac{۱}{a}+\frac{۳}{۴a}+\frac{۳}{۵a}=\frac{۴۷}{۳۰}$$

دو طرف معادله را در $۶۰a$ ضرب می‌کنیم

$$۶۰+۴۵+۳۶=۹۴a\Rightarrow a=\frac{۱۴۱}{۹۴}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{b=\frac{۴}{۳}a}b=۲$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با $S=\frac{۱}{۲}ab=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times۲=\frac{۳}{۲}$.

۱۹۵۹- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم تعداد افراد کلاس، n نفر باشند، در نتیجه هزینهٔ سرانهٔ اولیه برابر $\frac{۷۰۰}{n}$ (برحسب هزارتومان) است. با افزودن پنج نفر از دانش‌آموزان کلاس دیگر هزینهٔ سرانه برابر با $\frac{۷۰۰}{n}-۷$ می‌شود. در نتیجه $(\frac{۷۰۰}{n}-۷)(n+۵)=۷۰۰$. بنابراین

$$(\frac{۷۰۰-۷n}{n})(n+۵)=۷۰۰\Rightarrow(۷۰۰-۷n)(n+۵)=۷۰۰n$$

$$n^۲+۵n-۵۰۰=۰\Rightarrow(n+۲۵)(n-۲۰)=۰\Rightarrow n=-۲۵,n=۲۰$$

فقط جواب $n=۲۰$ قابل قبول است.

۱۹۶۰- گزینهٔ ۱ ۲۰ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۸۰ کیلوگرم آن آب است. اگر نیمی از آب را تبخیر کنیم، ۴۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، جرم شکر $۲۰+x$ و جرم محلول $۶۰+x$ می‌شود. پس

$$\frac{۲۰+x}{۶۰+x}=\frac{۴۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۲۰+x}{۶۰+x}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow۱۰۰+۵x=۱۲۰+۲x\Rightarrow۳x=۲۰\Rightarrow x=\frac{۲۰}{۳}$$

۱۹۶۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$y=x(x^۲-۳x+۲)=x(x-۱)(x-۲)$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت y به صورت زیر است.

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y		−	۰	+	۰	−	۰	+	

۱۹۶۲- گزینهٔ ۱ چون عبارت یک ریشه دارد و در دو طرف ریشه علامت آن متفاوت است، پس باید عبارت از درجهٔ اول باشد. یعنی ضریب $x^۲$ باید صفر باشد:

$$m^۲-۴=۰\Rightarrow m=\pm۲$$

اگر $m=۲$، عبارت به‌صورت $y=۲nx+۲$ است. چون $x=۴$ ریشهٔ عبارت است، پس

$$۰=۲n\times۴+۲\Rightarrow n=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۲$$

در این صورت جدول تعیین علامت عبارت به‌صورت زیر است و این حالت قابل قبول نیست.

x	$-\infty$		۴		$+\infty$
y		+	۰	−	

اگر $m=-۲$، عبارت به‌صورت $y=-۲nx-۲$ است. چون $x=۴$ ریشهٔ عبارت است، پس $-۲n\times۴-۲=۰$. در نتیجه $n=-\frac{۱}{۴}$، بنابراین $mn=\frac{۱}{۲}$.

۱۹۶۳- گزینهٔ ۱ با توجه به جدول، $x=۱$ و $x=۲$ ریشه‌های عبارت هستند:

$$x=۱\Rightarrow m+۲-(m+۲)^۲+n=۰\quad(*)$$

$$x=۲\Rightarrow۴(m+۲)-۲(m+۲)^۲+n=۰$$

دو طرف تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$(m+۲)^۲-۳(m+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}m+۲=۰\Rightarrow m=-۲\\ m+۲=۳\Rightarrow m=۱\end{cases}$$

به ازای $m=-۲$ نتیجه می‌شود $y=n$ که در این صورت علامت y ثابت است و به ازای $m=۱$ از معادلهٔ $(*)$ مقدار n به‌دست می‌آید

$$۳-۹+n=۰\Rightarrow n=۶$$

۱۹۶۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا نامعادله‌ها را به‌صورت‌های زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x-x^۳>۰\Rightarrow x(۱-x)(۱+x)>۰\,,\quad x-x^۲<۰\Rightarrow x(۱-x)<۰\Rightarrow\begin{cases}x>۱\\ x<۰\end{cases}$$

در نتیجه مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، با فرض $x>۱$ یا $x<۰$ با مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۱+x<۰$ که بازهٔ $(-\infty,-۱)$ است، برابر است. اشتراک مجموعه‌های $(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)$ و $(-\infty,-۱)$ برابر $(-\infty,-۱)$ است که مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ مورد نظر مسئله است.

راه‌حل دوم عدد $-\frac{۱}{۲}$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی عدد -۲ در آن صدق می‌کند پس گزینهٔ (۱) جواب است.

۱۹۶۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که می‌خواهیم نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x(x^۲-۴x-۵)^۲(x^۲-۱)<۰$$

$$x^۲-۴x-۵=(x-۵)(x+۱),\quad x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$$

در نتیجه طرف چپ نامعادلهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y=x(x+۱)^۳(x-۵)^۲(x-۱)$$

با تشکیل جدول تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم:

x	$-\infty$		−۱		۰		۱		۵		$+\infty$
y		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله برابر است با $(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)$. پس $a=-۱$، $b=۰$ و در نتیجه $a+b=-۱$.

۱۹۶۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱)$. دلتای عبارت $x^۲-x+۱$ منفی است $(\Delta=-۳)$. در نتیجه همواره $x^۲-x+۱>۰$. بنابراین مسئله به یافتن مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $y=\frac{x+۱}{(x-۲)(x-۴)}\le۰$ تبدیل می‌شود. جدول تعیین علامت y به شکل زیر است:

x	$-\infty$		−۱		۲		۴		$+\infty$
y		−	۰	+	ت ن	−	ت ن	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-\infty,-۱]\cup(۲,۴)$ است. پس $a=-۱$ و $b=۴$ و در نتیجه $a+b=۳$.

۱۹۶۷- گزینهٔ ۲ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^{۴}-x^{۲}-۲<۰\Rightarrow(x^{۲}+۱)(x^{۲}-۲)<۰$$

چون مقدار عبارت $x^{۲}+۱$ همواره مثبت است، پس

$$x^{۲}-۲<۰\Rightarrow-\sqrt{۲}<x<\sqrt{۲}$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به صورت $(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ است. در نتیجه

$$a=-\sqrt{۲}\ ,\ b=\sqrt{۲}\Rightarrow ab=-۲$$

۱۹۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که اگر فرض کنیم $P(x)=x^{۲}+(a-۱)x+۲a-۶$ جدول تعیین علامت باید به‌صورت زیر باشد

x	$-\infty$		$x_{۱}$	-۳	$x_{۲}$		$+\infty$
P(x)		+	۰	−	۰	+	

پس باید $P(x)$ به ازای $x=-۳$ منفی باشد. بنابراین

$$P(-۳)=(-۳)^{۲}-۳(a-۱)+۲a-۶<۰\Rightarrow a>۶$$

راه‌حل دوم ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^{۲}+(a-۱)x+۲(a-۳)=(x+a-۳)(x+۲)=۰$$

$$\begin{cases}x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\\ x+a-۳=۰\Rightarrow x=۳-a\end{cases}$$

$$x_{۱}<-۳<x_{۲}\Rightarrow x_{۱}=۳-a,\ x_{۲}=-۲$$

$$x_{۱}=۳-a<-۳\Rightarrow a>۶$$

۱۹۶۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که اگر $m=۰$، آن‌گاه عبارت برابر $-۲x$ خواهد بود که همواره مثبت نیست. اگر $m\neq۰$، آن‌گاه باید ضریب $x^{۲}$ مثبت و Δ منفی باشد. پس

$$m>۰\ ,\ ۴-۴m^{۲}<۰\Rightarrow m^{۲}>۱\Rightarrow m>۱$$

۱۹۷۰- گزینهٔ ۳ می‌خواهیم به ازای هر مقدار x نابرابری $mx^{۲}-۲mx+۲>-۶$ برقرار باشد، یعنی $mx^{۲}-۲mx+۸>۰$. بنابراین اگر $m\neq۰$، باید $m>۰$ و $\Delta<۰$. پس

$$\Delta=(-۲m)^{۲}-۳۲m<۰\Rightarrow m(m-۸)<۰$$

با توجه به جدول زیر، باید $۰<m<۸$.

m	$-\infty$		۰		۸		$+\infty$
m(m−۸)		+	۰	−	۰	+	

از طرف دیگر، اگر $m=۰$، آن‌گاه عبارت به‌صورت $y=۲$ است که از -۶ بزرگ‌تر است. بنابراین $۰\leq m<۸$. پس m می‌تواند هشت مقدار صحیح داشته باشد.

۱۹۷۱- گزینهٔ ۱ عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$y=x^{۴}-۳x^{۲}-۴=(x^{۲}+۱)(x^{۲}-۴)$$

چون $x^{۲}+۱$ همواره مثبت است، پس کافی است $x^{۲}-۴$ را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	

۱۹۷۲- گزینهٔ ۱ ریشهٔ عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$m^{۲}x+|m|=۰\Rightarrow x=\frac{-|m|}{m^{۲}}=\frac{-|m|}{|m|^{۲}}=\frac{-۱}{|m|}$$

ضریب x عددی مثبت است، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$\frac{-۱}{\lvert m\rvert}$		$+\infty$
y		−	۰	+	

۱۹۷۳- گزینهٔ ۲ بایـد نامعادله‌های $x^{۳}-۳x^{۲}\leq۰$ و $x^{۳}-۳x^{۲}\geq-۴$ را حل کنیم و بین مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$x^{۳}-۳x^{۲}\leq۰\Rightarrow x^{۲}(x-۳)\leq۰\Rightarrow x\leq۳$$

$$x^{۳}-۳x^{۲}+۴\geq۰\Rightarrow(x+۱)(x^{۲}-۴x+۴)\geq۰$$

$$(x+۱)(x-۲)^{۲}\geq۰\Rightarrow x\geq-۱$$

بنابرایـن $-۱\leq x\leq۳$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اسـت. پس $a=-۱$ و $b=۳$ و در نتیجه $a+b=۲$. توجه کنید که

$$x^{۳}-۳x^{۲}+۴=x^{۳}+۱-۳x^{۲}+۳=(x^{۳}+۱)-۳(x^{۲}-۱)$$

$$=(x+۱)(x^{۲}-x+۱)-۳(x-۱)(x+۱)=(x+۱)(x^{۲}-۴x+۴)$$

۱۹۷۴- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(x^{۲}-۲x-۴)^{۲}-۴(x^{۲}-۲)^{۲}\geq۰$$

$$(x^{۲}-۲x-۴+۲x^{۲}-۴)(x^{۲}-۲x-۴-۲x^{۲}+۴)\geq۰$$

$$(۳x^{۲}-۲x-۸)(-x^{۲}-۲x)\geq۰\Rightarrow-x(۳x+۴)(x-۲)(x+۲)\geq۰$$

$$y=x(۳x+۴)(x-۲)(x+۲)\leq۰$$

x	$-\infty$		-۲		$-\frac{۴}{۳}$		۰		۲		$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	

بـا توجه به جدول تعییـن علامت بالا، مجموعهٔ جواب‌هـای نامعادله به‌صورت $[-۲,-\frac{۴}{۳}]\cup[۰,۲]$ است که اعداد صحیح ۲، ۱، ۰ و -۲ را شامل می‌شود.

۱۹۷۵- گزینهٔ ۳ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{x^{۲}-۵x+۶}{x^{۲}-۴}=\frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x-۳}{x+۲},\quad x\neq۲$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۲		۲		۳		$+\infty$
y		+	ت ن	−	ت ن	−	۰	+	

بنابراین y به‌ازای هر x که در مجموعهٔ $(-۲,۳)-\{۲\}$ باشـد، منفی است. پس $a=-۲$، $b=۳$ و $c=۲$. در نتیجه $\frac{a+b}{c}=\frac{۱}{۲}$.

۱۹۷۶- گزینهٔ ۳ مجموعـهٔ جواب‌هـای نامعادلهٔ $ax-b>۰$ به یکی از دو صورت $(\frac{b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{b}{a})$ است. با توجه به فرض مسئله،

$$a>۰,\ \frac{b}{a}=۲\Rightarrow۲a=b$$

بنابرایـن $\frac{ax+b}{x-۲}=a(\frac{x+۲}{x-۲})$. چـون $a>۰$، کافی اسـت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x+۲}{x-۲}<۰$ را بیابیم که بازهٔ $(-۲,۲)$ است.

۱۹۷۷- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۹}{x+۳}+۵-x<۰\Rightarrow\frac{۹+(۵-x)(x+۳)}{x+۳}<۰$$

$$\frac{-x^{۲}+۲x+۲۴}{x+۳}<۰\Rightarrow\frac{(x-۶)(x+۴)}{x+۳}>۰$$

بـا توجه به جدول تعییـن علامت زیر، مجموعهٔ جواب‌هـای نامعادله به‌صورت $(-۴,-۳)\cup(۶,+\infty)$ است.

x	$-\infty$		-۴		-۳		۶		$+\infty$
y		−	۰	+	ت ن	−	۰	+	

پس $a=-۴$ و $b=۶$ و در نتیجه $a+b=۲$.

۱۹۷۸- گزینهٔ ۴ اولاً باید ضریب $x^۲$ منفی باشد. پس $m<۰$، ثانیاً باید $\Delta<۰$. پس

$$۱-۴m^۲<۰\Rightarrow m^۲>\frac{۱}{۴}\Rightarrow |m|>\frac{۱}{۲}\Rightarrow m>\frac{۱}{۲} \text{ یا } m<-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نتیجه می‌شود $m<-\frac{۱}{۲}$.

۱۹۷۹- گزینهٔ ۲ می‌خواهیم به‌ازای هر مقدار x نابرابری $mx^۲-۲mx+۲>-۲$ برقرار باشد، یعنی $mx^۲-۲mx+۴>۰$. بنابراین اگر $m\neq۰$، باید $m>۰$ و $\Delta<۰$. پس

$$\Delta=(-۲m)^۲-۱۶m<۰\Rightarrow m(m-۴)<۰$$

با توجه به جدول زیر، باید $۰<m<۴$.

m	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
m(m−۴)		+	۰	−	۰	+	

از طرف دیگر، اگر $m=۰$ آن‌گاه عبارت به‌صورت $y=۲$ است که از -۲ بزرگ‌تر است. بنابراین $۰\leq m<۴$.

۱۹۸۰- گزینهٔ ۳ نابرابری را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^۲+mx+m}{x^۲-x+۱}-۳\leq۰\Rightarrow\frac{-۲x^۲+(m+۳)x+m-۳}{x^۲-x+۱}\leq۰$$

چون به ازای هر x نابرابری $x^۲-x+۱>۰$ برقرار است، پس کافی است نامعادلهٔ $-۲x^۲+(m+۳)x+m-۳\leq۰$ برای هر x برقرار باشد. بنابراین

$$\Delta=(m+۳)^۲+۸(m-۳)\leq۰\Rightarrow m^۲+۱۴m-۱۵\leq۰$$

$$(m-۱)(m+۱۵)\leq۰\Rightarrow-۱۵\leq m\leq۱$$

پس حداقل مقدار m برابر -۱۵ است.

۱۹۸۱- گزینهٔ ۱ دو طرف معادله را به توان چهار می‌رسانیم:

$$۲x+۱=(۲x-۱)^۲\Rightarrow ۲x+۱=۴x^۲+۱-۴x$$

$$۴x^۲-۶x=۰\Rightarrow x=۰, x=\frac{۳}{۲}$$

واضح است که $x=۰$ قابل قبول نیست، زیرا در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند ولی $x=\frac{۳}{۲}$ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹۸۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که باید $\frac{۱}{۲}x+۱\geq۰$ و در نتیجه $x\geq-۲$. همچنین باید $۴-x^۲\geq۰$ و در نتیجه $-۲\leq x\leq۲$. اکنون دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴-x^۲=(\frac{۱}{۲}x+۱)^۲\Rightarrow۴-x^۲=\frac{۱}{۴}x^۲+x+۱$$

$$۵x^۲+۴x-۱۲=۰\Rightarrow(x+۲)(۵x-۶)=۰\Rightarrow x=-۲\ ,\ x=\frac{۶}{۵}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. پس مجموع جواب‌های معادله برابر $-\frac{۴}{۵}$ است.

۱۹۸۳- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف معادلهٔ مورد نظر را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$۴-۳x-x^۲=x^۲+۸x+۱۶\Rightarrow۲x^۲+۱۱x+۱۲=۰\Rightarrow x=-۴,\ x=-\frac{۳}{۲}$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۶ است.

۱۹۸۴- گزینهٔ ۲ دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^۴+۲x-۵=(۱+x)^۲\Rightarrow x^۴-x^۲-۶=۰\Rightarrow(x^۲-۳)(x^۲+۲)=۰$$

چون $x^۲+۲\neq۰$، پس $x^۲-۳=۰$ بنابراین $x=\pm\sqrt{۳}$.

$x=\sqrt{۳}$ در معادله صدق می‌کند، اما $x=-\sqrt{۳}$ در معادله صدق نمی‌کند، زیرا به ازای $x=-\sqrt{۳}$ سمت راست معادله منفی است و سمت چپ آن مثبت است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹۸۵- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{۲x-۱}=۲-۲\sqrt{x}\quad(*)$$

سپس دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$۲x-۱=۴+۴x-۸\sqrt{x}\Rightarrow۲x+۵=۸\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴x^۲+۲۰x+۲۵=۶۴x\Rightarrow۴x^۲-۴۴x+۲۵=۰$$

$$x=\frac{۱۱-۴\sqrt{۶}}{۲}\ ,\ x=\frac{۱۱+۴\sqrt{۶}}{۲}$$

در معادلهٔ $(*)$ طرف راست باید نامنفی باشد، پس

$$۲-۲\sqrt{x}\geq۰\Rightarrow\sqrt{x}\leq۱\Rightarrow۰\leq x\leq۱$$

بنابراین جواب $\frac{۱۱+۴\sqrt{۶}}{۲}$ قابل قبول نیست و $\frac{۱۱-۴\sqrt{۶}}{۲}$ جواب معادله است.

۱۹۸۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x=۸$ در معادله صدق می‌کند:

$$\sqrt{۸-۴a}+\sqrt{۸+a}=\sqrt{۲۴+a}\quad(۱)$$

دو طرف معادلهٔ بالا را به توان دو می‌رسانیم:

$$۸-۴a+۸+a+۲\sqrt{(۸-۴a)(۸+a)}=۲۴+a$$

$$۲\sqrt{۶۴-۲۴a-۴a^۲}=۴a+۸\Rightarrow\sqrt{۶۴-۲۴a-۴a^۲}=۲a+۴$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۶۴-۲۴a-۴a^۲=۴a^۲+۱۶+۱۶a$$

$$۸a^۲+۴۰a-۴۸=۰\Rightarrow a^۲+۵a-۶=۰\Rightarrow a=۱\ ,\ a=-۶$$

جواب $a=-۶$ قابل قبول نیست چون در معادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند. پس a فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

۱۹۸۷- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت $(\sqrt[۳]{x})^۴-۵(\sqrt[۳]{x})^۲+۴=۰$ می‌نویسیم و فرض می‌کنیم $a=(\sqrt[۳]{x})^۲$. در این صورت

$$a^۲-۵a+۴=۰\Rightarrow(a-۴)(a-۱)=۰$$

$$\begin{cases}a=۱\Rightarrow(\sqrt[۳]{x})^۲=۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱\\ a=۴\Rightarrow(\sqrt[۳]{x})^۲=۴\Rightarrow x^۲=۶۴\Rightarrow x=\pm۸\end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۶۴ است.

۱۹۸۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\frac{x}{\sqrt{x}+۱}$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$t+\frac{۱}{t}=۲\Rightarrow t^۲+۱=۲t\Rightarrow t^۲-۲t+۱=۰$$

تنها جواب معادلهٔ بالا $t=۱$ است. بنابراین

$$\frac{x}{\sqrt{x}+۱}=۱\Rightarrow x=\sqrt{x}+۱\Rightarrow x-۱=\sqrt{x}\quad(۱)$$

$$x^۲-۲x+۱=x\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}, x=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\text{ (غ.ق.ق.)}$$

با توجه به معادلهٔ (۱) باید $x>۱$ و در نتیجه $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله نیست.

پس فقط $x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله است.

۱۹۸۹- گزینهٔ ۳ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $\sqrt{x}=\frac{۴}{x}$. بنابراین

$$x=\frac{۱۶}{x^۲}\Rightarrow x^۳=۱۶\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۱۶}$$

۱۹۹۰- گزینهٔ ۴ زمانی را که محسن روی خشکی مسیر AD را طی می‌کرده با $t_۱$ و زمان طی کردن مسیر DB روی آب را با $t_۲$ نشان می‌دهیم. در نتیجه اگر $CD=x$، آن‌گاه

$$t_۱=\frac{AD}{v_۱}=\frac{\sqrt{x^۲+۱۶}}{۵}\ ,\quad t_۲=\frac{DB}{v_۲}=\frac{۸-x}{۳}$$

در نتیجه $\frac{۸}{۳}=\frac{\sqrt{x^۲+۱۶}}{۵}+\frac{۸-x}{۳}=t_۱+t_۲$، بنابراین

$$\frac{\sqrt{x^۲+۱۶}}{۵}=\frac{x}{۳}\Rightarrow ۳\sqrt{x^۲+۱۶}=۵x\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}$$

$$۹(x^۲+۱۶)=۲۵x^۲\Rightarrow ۱۶x^۲=۹\times۱۶\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=۳$$

پس $CD=۳km$.

۱۹۹۱- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^۲+۷=(x+۲)^۲\Rightarrow x^۲+۷=x^۲+۴x+۴\Rightarrow ۴x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

با توجه به اینکه $x=\frac{۳}{۴}$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند، پس جواب معادله در بازهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ قرار دارد.

۱۹۹۲- گزینهٔ ۱ برای حل معادلهٔ $۲x+۱=\sqrt{۱۱x-۲}$، دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(۲x+۱)^۲=(\sqrt{۱۱x-۲})^۲\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱=۱۱x-۲$$

$$۴x^۲-۷x+۳=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}\ ,\ x=۱$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند. پس قدرمطلق تفاضل دو جواب برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

۱۹۹۳- گزینهٔ ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$۱+۳x-x^۲=۱-۶x-x^۲+x^۳\Rightarrow x^۳=۹x\Rightarrow x(x^۲-۹)=۰$$

$$x=۰\,,\ x=۳,\ x=-۳$$

جواب $x=-۳$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند. بنابراین معادله دو جواب دارد.

۱۹۹۴- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$x^۳+۲=x^۳+۳x^۲+۳x+۱\Rightarrow ۳x^۲+۳x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۱}}{۶}$$

پس جواب کوچک‌تر معادله $\frac{-۳-\sqrt{۲۱}}{۶}$ است.

۱۹۹۵- گزینهٔ ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x-۲}=\sqrt{x+۱}-۱$ می‌نویسیم و دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x-۲=x+۱+۱-۲\sqrt{x+۱}\Rightarrow\sqrt{x+۱}=۲\Rightarrow x+۱=۴\Rightarrow x=۳$$

$x=۳$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند. بنابراین معادله یک جواب دارد.

۱۹۹۶- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\sqrt{۳x-۲}=۲-۲\sqrt{x}\qquad(*)$$

و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم

$$۳x-۲=۴+۴x-۸\sqrt{x}\Rightarrow x+۶=۸\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x^۲+۳۶+۱۲x=۶۴x\Rightarrow x^۲-۵۲x+۳۶=۰$$

$$x=۲۶-۸\sqrt{۱۰}\ ,\ x=۲۶+۸\sqrt{۱۰}$$

در معادلهٔ $(*)$ طرف چپ معادله نامنفی است، پس طرف راست آن نیز نامنفی است، بنابراین

$$۳x-۲\geq۰\ ,\ ۲-۲\sqrt{x}\geq۰\Rightarrow\frac{۲}{۳}\leq x\leq۱$$

بنابراین جواب $۲۶+۸\sqrt{۱۰}$ قابل قبول نیست و $x=۲۶-۸\sqrt{۱۰}$ جواب معادله است.

۱۹۹۷- گزینهٔ ۲ یک جواب معادله $x=۲$ است، پس $x=۲$ باید در معادله صدق کند

$$\sqrt{۲-۱}+\sqrt{a-۲}=۳\Rightarrow\sqrt{a-۲}=۲\Rightarrow a-۲=۴\Rightarrow a=۶$$

بنابراین معادله به‌صورت $\sqrt{x-۱}+\sqrt{۶-x}=۳$ است و در نتیجه

$$\sqrt{x-۱}-۳=-\sqrt{۶-x}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}x-۱+۹-۶\sqrt{x-۱}=۶-x$$

$$x+۱=۳\sqrt{x-۱}\Rightarrow x^۲+۲x+۱=۹x-۹\Rightarrow x^۲-۷x+۱۰=۰$$

$$(x-۲)(x-۵)=۰\Rightarrow x=۲,x=۵$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۱۹۹۸- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت $x^۲+۱+۶=۵\sqrt{x^۲+۱}$ می‌نویسیم. اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x^۲+۱}$، معادله به‌صورت $t^۲+۶=۵t$ درمی‌آید که اگر آن را به صورت $t^۲-۵t+۶=(t-۲)(t-۳)=۰$ بنویسیم، جواب‌های آن $t=۲$ و $t=۳$ هستند. بنابراین

$$\sqrt{x^۲+۱}=۲\Rightarrow x^۲+۱=۴\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{x^۲+۱}=۳\Rightarrow x^۲+۱=۹\Rightarrow x^۲=۸\Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۴ است.

۱۹۹۹- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $t=x+\sqrt{x}$، معادله به‌صورت $t^۲+t=۲$ درمی‌آید که اگر آن را به صورت $t^۲+t-۲=(t-۱)(t+۲)=۰$ بنویسیم، $t=۱$ و $t=-۲$ جواب‌های آن هستند. بنابراین

$$x+\sqrt{x}=-۲\ (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x+\sqrt{x}=۱\Rightarrow\sqrt{x}=۱-x\qquad(۱)$$

$$x=x^۲+۱-۲x\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰$$

$$x=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲},\quad x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

توجه کنید که معادلهٔ $x+\sqrt{x}=-۲$ جواب ندارد، زیرا عبارت $x+\sqrt{x}$ همواره نامنفی است. همچنین $x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله نیست زیرا در معادلهٔ (۱) باید $۰\leq x\leq۱$، ولی $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ بزرگ‌تر از ۱ است.

۲۰۰۰- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^۳+k=x^۳-۳x^۲+۳x-۱\Rightarrow ۳x^۲-۳x+k+۱=۰$$

برای اینکه معادلهٔ بالا دو جواب داشته باشد، باید

$$\Delta>۰\Rightarrow ۹-۱۲(k+۱)>۰\Rightarrow k<-\frac{۱}{۴}$$

۲۰۰۱- گزینهٔ ۳ اگر $m=۰$، معادله بـه صورت $-۲x=۰$ در می‌آید که یک جواب دارد. اگر $m\neq ۰$، باید مقدار دلتای معادله برابر صفر باشد، یعنی

$$\Delta=۴-۱۶m^۲=۰\Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

بنابراین به‌ازای سه مقدار m، معادله فقط یک جواب دارد.

۲۰۰۲- گزینهٔ ۳ فرض کنید α عدد بزرگ‌تر و β عدد کوچک‌تر باشد. در این صـورت $\alpha+\beta=۴$ و $\alpha\beta=-۲$. بنابراین α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۴x-۲=۰$ هستند. در نتیجه $\alpha=۲+\sqrt{۶}$ و $\beta=۲-\sqrt{۶}$.

بنابراین

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{۲+\sqrt{۶}}{۲-\sqrt{۶}}=\frac{(۲+\sqrt{۶})^۲}{(۲-\sqrt{۶})(۲+\sqrt{۶})}=\frac{۱۰+۴\sqrt{۶}}{۴-۶}=-۵-۲\sqrt{۶}$$

۲۰۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $x_۱+x_۲=-۸$ و $x_۱x_۲=-۱۳$. پس

$$\frac{۱}{x_۱+۲}+\frac{۱}{x_۲+۲}=\frac{(x_۱+x_۲)+۴}{x_۱x_۲+۲(x_۱+x_۲)+۴}=\frac{-۸+۴}{-۱۳-۱۶+۴}=\frac{۴}{۲۵}$$

۲۰۰۴- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha+\beta=۸$ و $\alpha=۲\beta+۴$. از حـل دسـتگاه معادله‌هـای به‌دسـت آمـده نتیجـه می‌شـود $\alpha=\frac{۲۰}{۳}$ و $\beta=\frac{۴}{۳}$. از طرف دیگر $\alpha\beta=m$، پس $m=\frac{۸۰}{۹}$.

۲۰۰۵- گزینهٔ ۱ اگـر فـرض کنیـم $x^۲-۴=t$، آن‌گاه معادلـهٔ مـورد نظر می‌شود $\frac{۵}{t+۱}+\frac{۴}{t}=۲$. اگر دو طرف این معادله را در $t(t+۱)$ ضرب کنیم، آن‌گاه

$$۴(t+۱)+۵t=۲t(t+۱)\Rightarrow ۴t+۴+۵t=۲t^۲+۲t$$

$$۲t^۲-۷t-۴=۰\Rightarrow t=-\frac{۱}{۲},\ t=۴$$

اگر $t=-\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه

$$x^۲-۴=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x^۲=\frac{۷}{۲}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۷}{۲}}$$

اگر $t=۴$، آن‌گاه

$$x^۲-۴=۴\Rightarrow x^۲=۸\Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۸ است.

۲۰۰۶- گزینهٔ ۲ ۲۵ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۷۵ کیلوگرم آن آب است. اگـر یک‌سـوم از آب را تبخیـر کنیم، ۵۰ کیلوگرم آب باقی می‌مانـد. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، وزن شکر $x+۲۵$ و وزن محلول $x+۷۵$ می‌شود. پس

$$\frac{۲۵+x}{۷۵+x}=\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۵۰+۲x=۷۵+x\Rightarrow x=۲۵$$

یعنی باید ۲۵ کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم.

۲۰۰۷- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $۲\sqrt{x-۱}=۲+\sqrt{x-۲}$ می‌نویسیم و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴x-۴=۴+x-۲+۴\sqrt{x-۲}\Rightarrow ۳x-۶=۴\sqrt{x-۲}$$

دوباره دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۹x^۲+۳۶-۳۶x=۱۶x-۳۲\Rightarrow ۹x^۲-۵۲x+۶۸=۰$$

$$(x-۲)(۹x-۳۴)=۰\Rightarrow x=۲,\ x=\frac{۳۴}{۹}$$

هر دو جواب به‌دست آمده در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۲۰۰۸- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$۲x-۱+x^۲+۲x\sqrt{۲x-۱}=۳x-۱\Rightarrow ۲x\sqrt{۲x-۱}=x-x^۲$$

چون $x=۰$ جواب معادلهٔ اصلی نیست، پس

$$۲\sqrt{۲x-۱}=۱-x \qquad (۱)$$

دوباره طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴(۲x-۱)=۱+x^۲-۲x\Rightarrow x^۲-۱۰x+۵=۰\Rightarrow x=۵+۲\sqrt{۵}\,,\ x=۵-۲\sqrt{۵}$$

با توجه به تسـاوی (۱) باید $\frac{۱}{۲}\leq x\leq ۱$ تا هم عبارت زیر رادیکال منفی نشـود و هـم حاصل عبـارت رادیکالی منفی نشـود. بنابرایـن $x=۵+۲\sqrt{۵}$ قابل قبول نیست و $x=۵-۲\sqrt{۵}$ تنها جواب معادله است.

۲۰۰۹- گزینهٔ ۲ با توجه به اینکه در $x=۱$ و $x=۳$، $P(x)=۰$، پس

$$P(۱)=۰\Rightarrow m+(m^۲-۱۲)-m-۲n=۰\Rightarrow m^۲-۲n-۱۲=۰$$

$$P(۳)=۰\Rightarrow ۹m+۳(m^۲-۱۲)-m-۲n=۰\Rightarrow ۳m^۲+۸m-۲n-۳۶=۰$$

اگر طرفین معادلهٔ (۱) را از معادلهٔ (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$۲m^۲+۸m-۲۴=۰\Rightarrow m^۲+۴m-۱۲=۰$$

$$(m+۶)(m-۲)=۰\Rightarrow m=۲\,,\ \ m=-۶$$

اگر $m=۲$، آن‌گاه ضریب $x^۲$ در $P(x)$ مثبت است و جدول تعیین علامت آن نمی‌تواند به‌صورت داده شده باشد. اگر $m=-۶$، آن‌گاه

$$m^۲-۲n-۱۲=۰\Rightarrow ۳۶-۲n-۱۲=۰\Rightarrow n=۱۲$$

۲۰۱۰- گزینهٔ ۴ نامعادلهٔ داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^۲-mx-m}{x^۲-x+۱}-۳\leq ۰\Rightarrow \frac{x^۲-mx-m-۳x^۲+۳x-۳}{x^۲-x+۱}\leq ۰$$

$$\frac{۲x^۲+(m-۳)x+m+۳}{x^۲-x+۱}\geq ۰$$

بـرای عبارت $x^۲-x+۱$ مقدار Δ منفی اسـت و مقدار عبـارت همواره مثبت اسـت. پس برای اینکه مقدار کسـر بالا همواره نامنفی باشد، کافی است صورت آن همواره نامنفی باشد. یعنی برای عبارت $۲x^۲+(m-۳)x+m+۳$ ضریب $x^۲$ مثبت باشد (که هست) و Δ نامثبت باشد. پس

$$\Delta=(m-۳)^۲-۸(m+۳)\leq ۰\Rightarrow m^۲-۶m+۹-۸m-۲۴\leq ۰$$

$$m^۲-۱۴m-۱۵\leq ۰\Rightarrow (m-۱۵)(m+۱)\leq ۰\Rightarrow -۱\leq m\leq ۱۵$$

بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۱۵ است.

۲۰۱۱- گزینهٔ ۲ دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}x_۱+x_۲=\frac{۱۷}{۳}\\ x_۱=۳x_۲+۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_۲=\frac{۲}{۳}\\ x_۱=۵\end{cases}\xrightarrow{x_۱x_۲=\frac{m}{۳}}\frac{۱۰}{۳}=\frac{m}{۳}\Rightarrow m=۱۰$$

ریاضی - ۸۷

۲۰۱۲- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=۸\,,\quad \alpha=\frac{\beta}{۲}+۵$$

از حل دسـتگاه معادله‌های به‌دسـت آمده نتیجه می‌شـود $\alpha=۶$ و $\beta=۲$. از طرف دیگر، $\alpha\beta=m\Rightarrow m=۱۲$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۲۰۱۳- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند. در این صورت $x_۱+x_۲=\frac{m+۱}{۲}$ و $x_۱x_۲=\frac{۱}{۱۶}$. از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}=۲\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}x_۱+x_۲+۲\sqrt{x_۱x_۲}=۴$$

$$\frac{m+۱}{۲}+۲\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}=۴\Rightarrow\frac{m+۱}{۲}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow m=۶$$

ریاضی - ۹۶

۲۰۱۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}$ و $\alpha\beta=-۲$. بنابراین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$S=\frac{۱}{\alpha}+۱+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۲=\frac{۵}{۴}$$

$$P=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=\frac{۱}{-۲}+\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۱=-\frac{۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

ریاضی - ۹۲

۲۰۱۵- گزینهٔ ۴ برای اینکه معادله دو جواب مثبت داشته باشد، باید

$$\Delta>۰\,,\quad -\frac{b}{a}>۰\,,\quad \frac{c}{a}>۰$$

$$\Delta=۴(a-۲)^۲-۴(۱۴-a)=۴a^۲-۱۲a-۴۰=۴(a-۵)(a+۲)$$

از شرط $\Delta>۰$ نتیجه می‌شود $a<-۲$ یا $a>۵$. از طرف دیگر،

$$-\frac{b}{a}=۲(a-۲)>۰\Rightarrow a>۲\,,\quad \frac{c}{a}=۱۴-a>۰\Rightarrow a<۱۴$$

اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده جواب مسئله است که به‌صورت $۵<a<۱۴$ است.

ریاضی - ۹۶

۲۰۱۶- گزینهٔ ۳ حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلـه برابر با $\alpha+\beta=-\frac{-۱۲}{۴}=۳$ و $\alpha\beta=\frac{۱}{۴}$ است. بنابراین

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}}}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=\frac{\sqrt{۳+۱}}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۲۰۱۷- گزینهٔ ۱ بـرای آنکـه، معادله دو جـواب مختلف‌العلامت داشـته باشد، باید $\frac{c}{a}<۰$، پس

$$\frac{c}{a}=\frac{۱-m}{m+۲}<۰\Rightarrow m<-۲ \text{ یا } m>۱$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۲۰۱۸- گزینهٔ ۳ در مخلـوط اول که ۱۱ کیلوگرم اسـت، $\frac{۴۰}{۱۰۰}\times ۱۱=۴/۴$ کیلوگـرم رنگ و در مخلوط دوم که ۴ کیلوگرم اسـت، $\frac{۷۰}{۱۰۰}\times ۴=۲/۸$ کیلوگرم رنگ موجود است.

فرض می‌کنیم که با تبخیر، x کیلوگرم از مواد غیر از رنگ تبخیر شود. در این صورت

$$\frac{۴/۴+۲/۸}{۱۱+۴-x}=\frac{۵۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۷/۲}{۱۵-x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۷/۲\times ۲=۱۵-x\Rightarrow x=۰/۶$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۰۱۹- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $x^۲+۴x+۵=A$، آن‌گاه

$$A-۲=\sqrt{A}\xrightarrow{A\geq ۲}A^۲-۴A+۴=A\Rightarrow A^۲-۵A+۴=۰$$

$$\begin{cases}A=۱\quad \text{(غ.ق.ق.)}\\ A=۴\Rightarrow x^۲+۴x+۵=۴\Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰\xrightarrow{\frac{c}{a}=۱}x_۱x_۲=۱\end{cases}$$

ریاضی - ۹۴

۲۰۲۰- گزینهٔ ۴ از $f(x)>\frac{۷}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۶>\frac{۷}{۲}\ \Rightarrow\ x^۲-۴x-۵<۰\ \Rightarrow\ -۱<x<۵$$

بنابرایـن بزرگ‌تریـن بازهٔ $(a\,,b)$، همان بازهٔ $(-۱,۵)$ اسـت. پس بیشـترین مقدار $b-a$ برابر است با $۵-(-۱)=۶$.

تجربی - ۸۹

۲۰۲۱- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=x^۲+x$، آن‌گاه به‌دست می‌آید:

$$t^۲-۱۸t+۷۲=۰\Rightarrow(t-۶)(t-۱۲)=۰$$

$$t=۶\Rightarrow x^۲+x=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰\Rightarrow x_۱+x_۲=-۱$$

$$t=۱۲\Rightarrow x^۲+x=۱۲\Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow x_۳+x_۴=-۱$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=-۲$$

تجربی - ۹۰

۲۰۲۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حـل اول** ابتدا مجمـوع و حاصل‌ضـرب جواب‌های معادلهٔ اول را حساب می‌کنیم:

$$۵x^۲+۳x-۲=۰\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{-۳}{۵}\ ,\ \alpha\beta=-\frac{۲}{۵}$$

اکنون مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{\frac{۹}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲۹}{۴}$$

$$P=\frac{۱}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۲۹}{۴}x+\frac{۲۵}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۲۹x+۲۵=۰\Rightarrow k=۲۹$$

راه‌حل دوم یکی از جواب‌های معادلهٔ اول برابر -۱ است:

$$۵x^۲+۳x-۲=۰\Rightarrow\alpha=-۱$$

بنابراین یکی از جواب‌های معادلهٔ دوم ۱ است:

$$\alpha=-۱\Rightarrow\frac{۱}{\alpha^۲}=۱\Rightarrow ۴\times ۱^۲-k\times ۱+۲۵=۰\Rightarrow k=۲۹$$

ریاضی - ۹۰

۲۰۲۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۲=۰$ و α و β جواب‌های معادلهٔ $۸x^۲-mx-۸=۰$ باشند. در این صورت

$$x_۱+x_۲=\frac{۱}{۲}\ ,\qquad x_۱x_۲=-۱$$

$$\alpha+\beta=\frac{m}{۸},\qquad \alpha\beta=-۱$$

$$\alpha=x_۱^۳\ ,\qquad \beta=x_۲^۳$$

دو طرف تساوی $x_۱+x_۲=\frac{۱}{۲}$ را به توان سه می‌رسانیم:

$$x_۱^۳+x_۲^۳+۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)=\frac{۱}{۸}$$

$$\alpha+\beta-۳(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{m}{۸}=\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۲}\Rightarrow m=۱۳$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۰۲۴- گزینهٔ ۲ $x=۲$ در معادله صدق می‌کند، پس

$$۲(۴a-۲-۵)=۲\Rightarrow a=۲$$

بنابراین معادله به صورت $۲x^۳-x^۲-۵x-۲=۰$ است. با تقسیم عبارت سمت چپ معادله بر $x-۲$ به‌دست می‌آید:

$$۲x^۳-x^۲-۵x-۲=(x-۲)(۲x^۲+۳x+۱)=۰$$

بنابراین دو جواب دیگر از معادلهٔ $۲x^۲+۳x+۱=۰$ به‌دست می‌آیند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{۳}{۲}$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۲۰۲۵- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x}$، آن‌گاه $t^۲-۲t+m-۱=۰$. برای آنکه دو جواب برای x به‌دست آید، باید این معادله دو جواب نامنفی داشته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta>۰\Rightarrow ۴-۴(m-۱)>۰\Rightarrow m<۲\\ \frac{c}{a}\geq۰\Rightarrow\frac{m-۱}{۱}\geq۰\Rightarrow m-۱\geq۰\Rightarrow m\geq۱\\ -\frac{b}{a}>۰\Rightarrow-\frac{-۲}{۱}>۰\Rightarrow ۲>۰\Rightarrow m\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap}۱\leq m<۲$$

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۲۰۲۶- گزینهٔ ۲ برای اینکه همهٔ مقادیر عبارت مورد نظر مثبت باشد، باید

$$۱-a>۰\Rightarrow a<۱$$

$$\Delta=۲۴+۴a(۱-a)<۰\Rightarrow-a^۲+a+۶<۰\Rightarrow a<-۲ \text{ یا } a>۳$$

از اشتراک این ناحیه‌ها به‌دست می‌آید $a<-۲$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۰۲۷- گزینهٔ ۴ برای اینکه معادلهٔ $\sqrt{۴x-۳}=۲-۳x$ جواب داشته باشد، باید

$$۴x-۳\geq۰\Rightarrow x\geq\frac{۳}{۴},\quad ۲-۳x\geq۰\Rightarrow x\leq\frac{۲}{۳}$$

با اشتراک دو محدودهٔ به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم که معادله جوابی نمی‌تواند داشته باشد.

خارج از کشور تجربی - ۸۷

۲۰۲۸- گزینهٔ ۴ ابتدا مقدار a را طوری می‌یابیم که $x=۴$ جواب معادله باشد:

$$۴+a=\sqrt{۲۰-۱۶}\Rightarrow ۴+a=۲\ \Rightarrow\ a=-۲$$

به ازای $a=-۲$، معادلهٔ مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$x-۲=\sqrt{۵x-x^۲}\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۵x-x^۲$$

$$۲x^۲-۹x+۴=۰\Rightarrow x=۴,\frac{۱}{۲}$$

چون $x=\frac{۱}{۲}$ در معادلهٔ $x-۲=\sqrt{۵x-x^۲}$ صدق نمی‌کند، این معادله جواب دیگری ندارد.

تجربی - ۸۷

۲۰۲۹- گزینهٔ ۲ باید $f(x)<۲$. بنابراین

$$\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}<۲\Rightarrow ۳x^۲-۲x<۲x^۲+۸\Rightarrow x^۲-۲x-۸<۰\Rightarrow-۲<x<۴$$

پس $a=-۲$ و $b=۴$ و در نتیجه $b-a=۶$.

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۲۰۳۰- گزینهٔ ۲ به‌ازای مقادیری از x، نمودار تابع زیر محور x است که داشته باشیم $f(x)<۰$، پس

$$f(x)=x^۳-۴x^۲-x+۴=x^۲(x-۴)-x+۴=(x-۴)(x^۲-۱)$$

$$=(x-۴)(x-۱)(x+۱)\xrightarrow{f(x)<۰}(x-۱)(x+۱)(x-۴)<۰$$

x		−۱		۱		۴		+∞
f(x)	▨	∘	+	∘	−	∘	+	

بزرگ‌ترین بازه به‌صورت (a,b) که در آن $f(x)$ منفی است، بازهٔ $(۱,۴)$ است، پس $b-a=۴-۱=۳$.

ریاضی - ۸۸

فصل دوازدهم

۲۰۳۱- گزینهٔ ۲ اگر $a<-۲$ ، آن‌گاه $۱+a<-۱<۰$ ، پس $|۱+a|=-۱-a$. در نتیجه $|۱-|۱+a||=|۱+۱+a|=|۲+a|$. از طرف دیگر، چون $a<-۲$ ، پس $a+۲<۰$ ، در نتیجه $|۲+a|=-۲-a$.

۲۰۳۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون $-۱<x<۲$ ، پس

$$\frac{|x-۲|}{x-۲}=\frac{۲-x}{x-۲}=-۱ , \qquad \frac{x+۱}{|x+۱|}=\frac{x+۱}{x+۱}=۱$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-۱-۱=-۲$.

راه‌حل دوم کافی است حاصل عبارت را به ازای $x=۰$ حساب کنیم:

$$A=\frac{|x-۲|}{x-۲}-\frac{x+۱}{|x+۱|}\xrightarrow{x=۰}A=-۱-۱=-۲$$

۲۰۳۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$-۳<x<-۲\Rightarrow -۱۸<۶x<-۱۲\Rightarrow ۰<۱۴<۶x+۳۲<۲۰$$

در نتیجه $|۶x+۳۲|=۶x+۳۲$. از طرف دیگر،

$$-۳<x<-۲\Rightarrow ۳>-x>۲\Rightarrow ۱۱>۸-x>۱۰>۰$$

در نتیجه $|۸-x|=۸-x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۶x+۳۲-۴(۸-x)}{۳x}=\frac{۶x+۴x}{۳x}=\frac{۱۰}{۳}$$

۲۰۳۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۱<x<۲\Rightarrow ۳<۳x<۶\Rightarrow ۰<۳x-۳<۳\Rightarrow |۳x-۳|=۳x-۳$$

$$\sqrt{۴x^۲-۱۶x+۱۶}=\sqrt{۴(x-۲)^۲}=۲|\underbrace{x-۲}_{\text{منفی}}|=-۲x+۴$$

بنابراین $A=۳x-۳-(-۲x+۴)=۵x-۷$.

۲۰۳۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون x منفی است، عبارت $x+\frac{۴}{x}$ منفی است، پس $|x+\frac{۴}{x}|=-x-\frac{۴}{x}$. از طرف دیگر،

$$|x-\frac{۴}{x}|=|\frac{x^۲-۴}{x}|=|\frac{(x-۲)(x+۲)}{x}|$$

چون $-۲<x<۰$ ، پس $x-۲<۰$ و $x+۲>۰$ و چون x منفی است، پس $x-\frac{۴}{x}$ مثبت است، پس $|x-\frac{۴}{x}|=x-\frac{۴}{x}$ ، بنابراین

$$f(x)=-x-\frac{۴}{x}+x-\frac{۴}{x}=\frac{-۸}{x}$$

راه‌حل دوم حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-۱$ حساب می‌کنیم:

$$f(x)=|x+\frac{۴}{x}|+|x-\frac{۴}{x}|\xrightarrow{x=-۱}f(-۱)=|-۵|+|۳|=۸$$

فقط مقدار گزینهٔ (۴) به ازای $x=-۱$ برابر ۸ می‌شود.

۲۰۳۶- گزینهٔ ۳ چون $a-۶<۰$ ، پس $|a-۶|=-a+۶$. بنابراین

$$A=\Big|۶-a-|۳+|a-۶||\Big|=|۶-a-|۳-a+۶||=|۶-a-|۹-a||$$

$$\xrightarrow{۹-a>۰}A=|۶-a-(۹-a)|=|-۳|=۳$$

۲۰۳۷- گزینهٔ ۲ چون $x<۰<y$ ، پس $۲x-y<۰$ و $۲y-x>۰$ ، پس عبارت مورد نظر برابر است با $-(۲x-y)-(۲y-x)-x+۲y=-۲x+y$.

۲۰۳۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $a-۱<۰$ ، $b+۲>۰$ و $a+b<۱-۱=۰$ ، بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $-۱-۱-۱=-۳$.

۲۰۳۹- گزینهٔ ۱ چون $a<۰$ ، پس $|a|=-a$ ، در نتیجه

$$|a|b\le a\xrightarrow{a\neq ۰}b\le\frac{a}{|a|}\xrightarrow{a<۰}b\le -۱$$

بنابراین هر یک از عددهای $۲b-۶$ و $b-۲$ هم منفی هستند، پس

$$|۲b-۶|-۲|b-۲|=-(۲b-۶)-۲(-(b-۲))=۲$$

۲۰۴۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}۱ & a>۰\\ -۱ & a<۰\end{cases}$.

اکنون به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		$-\sqrt{۲}$		-۱		۱		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
$x^۲-۱$		+		+	۰	−	۰	+		+	
$x^۲-۲$		+	۰	−		−		−	۰	+	
y		۲	ت ن	۰	ت ن	−۲	ت ن	۰	ت ن	۲	

بنابراین y سه مقدار مختلف (۰ و ±۲) دارد.

۲۰۴۱- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $x^۲-۵x=\pm۶$ می‌نویسیم. بنابراین

$$x^۲-۵x=۶\Rightarrow x^۲-۵x-۶=(x+۱)(x-۶)=۰\Rightarrow x=-۱ , x=۶$$

$$x^۲-۵x=-۶\Rightarrow x^۲-۵x+۶=(x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۲ , x=۳$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -۳۶ است.

۲۰۴۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $|۳x-۱۸|=|۳(x-۶)|=۳|x-۶|$ و $|۲۴-۴x|=|۴x-۲۴|=|۴(x-۶)|=۴|x-۶|$. بنابراین

$$۷|x-۶|=۲۸\Rightarrow |x-۶|=۴\Rightarrow x=۲ , x=۱۰$$

پس مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۱۲ است.

۲۰۴۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $|a|=|b|$ ، آن‌گاه $a=b$ یا $a=-b$. بنابراین از معادلهٔ داده شده نتیجه می‌شود $x^۲-۲x=x^۲+۲x-۴$ یا $x^۲-۲x=-x^۲-۲x+۴$. بنابراین

$$x^۲-۲x=x^۲+۲x-۴\Rightarrow ۴x=۴\Rightarrow x=۱$$

$$x^۲-۲x=-x^۲-۲x+۴\Rightarrow ۲x^۲=۴\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -۲ است.

۲۰۴۴- گزینهٔ ۳ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر $x\ge ۰$ ، آن‌گاه $|x|=x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow x=۱ , x=۳$$

حالت دوم اگر $x<۰$ ، آن‌گاه $|x|=-x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^۲-۴x-۳=۰\Rightarrow x=۲-\sqrt{۷} , x=۲+\sqrt{۷}$$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادلهٔ موردنظر سه جواب دارد.

۲۰۴۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^۲-۲x+۱-|x-۱|-۲=۰\Rightarrow(x-۱)^۲-|x-۱|-۲=۰$$

$$|x-۱|^۲-|x-۱|-۲=۰\xrightarrow{|x-۱|=t}t^۲-t-۲=۰$$

$$(t+۱)(t-۲)=۰\Rightarrow t=-۱\Rightarrow|x-۱|=-۱\ (\text{غ.ق.ق.})$$

$$t=۲\Rightarrow|x-۱|=۲\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۲\Rightarrow x=۳\\x-۱=-۲\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر ۲ است.

راه‌حل دوم دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول اگر $x\geq۱$ ، آن‌گاه $|x-۱|=x-۱$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^۲-۲x-x+۱-۱=۰\Rightarrow x^۲-۳x=۰\Rightarrow x=۰\ (\text{غ.ق.ق.})\ ,\ \ x=۳$$

حالت دوم اگر $x<۱$ ، آن‌گاه $|x-۱|=۱-x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^۲-۲x+x-۱-۱=۰\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=-۱\ ,\ x=۲\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $۳-۱=۲$.

۲۰۴۶- گزینهٔ ۴ نامعادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$۳x-۲\geq۷\ \text{یا}\ ۳x-۲\leq-۷\Rightarrow x\geq۳\ \text{یا}\ x\leq-\frac{۵}{۳}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,-\frac{۵}{۳}]\cup[۳,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(-\frac{۵}{۳},۳)$ است. پس $a=-\frac{۵}{۳}$ و $b=۳$ و در نتیجه $ab=-۵$.

۲۰۴۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نابرابری $|x|\leq|y|$ با نابرابری $(x-y)(x+y)\leq۰$ معادل است، زیرا

$$|x|\leq|y|\Rightarrow x^۲\leq y^۲\Rightarrow x^۲-y^۲\leq۰\Rightarrow(x-y)(x+y)\leq۰$$

در نتیجه نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(a+۵-a+۵)(a+۵+a-۵)\leq۰$$

نابرابری بالا به‌صورت $۱۰(۲a)\leq۰$ یا $۲۰a\leq۰$ درمی‌آید که مجموعهٔ جواب‌های آن $(-\infty,۰]$ است.

راه‌حل دوم دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$a^۲+۱۰a+۲۵\leq a^۲-۱۰a+۲۵\Rightarrow۲۰a\leq۰$$

پس مجموعهٔ جواب‌های آن $(-\infty,۰]$ است.

۲۰۴۸- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت $\frac{|x-۶|}{|x-۲|}>۳$ می‌نویسیم. چون $x\neq۲$ ، دو طرف این نامعادله را در عبارت مثبت $|x-۲|$ ضرب می‌کنیم:

$$|x-۶|>۳|x-۲|$$

چون دو طرف نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم:

$$x^۲-۱۲x+۳۶>۹(x^۲-۴x+۴)\Rightarrow۸(x^۲-۳x)<۰\Rightarrow۰<x<۳$$

عددهای صحیح ۱ و ۲ در بازهٔ $(۰,۳)$ هستند. اما $x=۲$ قابل قبول نیست، پس تنها جواب صحیح نامعادلهٔ مورد نظر ۱ است.

۲۰۴۹- گزینهٔ ۳ اگر $x<۰$ ، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن صدق می‌کنند. همچنین $x=۰$ جواب نامعادله نیست. اگر $x>۰$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases}x^۲-x>۲x\Rightarrow x^۲-۳x>۰\Rightarrow x(x-۳)>۰\Rightarrow x-۳>۰\Rightarrow x>۳\\\text{یا}\\x^۲-x<-۲x\Rightarrow x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\xrightarrow{x>۰}x+۱<۰\\\qquad x<-۱\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,۰)\cup(۳,+\infty)$ است که شامل عددهای صحیح ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ نیست.

۲۰۵۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** می‌دانیم $x^۲=|x|^۲$ بنابراین نامعادله به شکل $|x|^۲-۵|x|+۴\leq۰$ نوشته می‌شود. اگر فرض کنیم $t=|x|$ ، نامعادله به‌صورت $t^۲-۵t+۴\leq۰$ درمی‌آید.

با توجه به جدول زیر، محدودهٔ $۱\leq t\leq۴$ جواب نامعادله است. یعنی

$$۱\leq|x|\leq۴$$

t	$-\infty$		۱		۴		$+\infty$
$t^۲-۵t+۴$		+	۰	−	۰	+	

راه‌حل دوم عدد صفر در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ (۱) جواب نیست. عدد ۵ هم در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۴) هم جواب نیستند. پس گزینهٔ (۳) جواب است.

۲۰۵۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر $a\geq۰$ ، آن‌گاه جواب‌های معادلهٔ $|x|=a$ برابرند با $x=\pm a$. بنابراین

$$\big||x-۴|-۱\big|=۳\Rightarrow\begin{cases}|x-۴|-۱=۳\Rightarrow|x-۴|=۴\\|x-۴|-۱=-۳\Rightarrow|x-۴|=-۲\end{cases}$$

معادلهٔ $|x-۴|=-۲$ جواب ندارد. پس

$$|x-۴|=۴\Rightarrow\begin{cases}x-۴=۴\\x-۴=-۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۸\\x=۰\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۲۰۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^۲-۴x+۳=(x-۱)(x-۳)$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$|x-۱||x-۳|-۵|x-۱|=۰\Rightarrow|x-۱|(|x-۳|-۵)=۰$$

$$\begin{cases}|x-۱|=۰\Rightarrow x=۱\\|x-۳|=۵\Rightarrow x-۳=\pm۵\Rightarrow x=-۲,\ x=۸\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با ۷.

۲۰۵۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که چون سمت چپ معادله نامنفی است، پس سمت راست آن هم نامنفی است، بنابراین $x\geq۰$. طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$|x^۲-۴|=۳x\Rightarrow(x^۲-۴)^۲=(۳x)^۲\Rightarrow x^۴-۸x^۲+۱۶=۹x^۲$$

$$x^۴-۱۷x^۲+۱۶=۰\Rightarrow(x^۲-۱)(x^۲-۱۶)=۰$$

بنابراین

$$x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

$$x^۲-۱۶=۰\Rightarrow x=\pm۴$$

چون $x\geq۰$ ، پس فقط جواب‌های $x=۱$ و $x=۴$ قابل قبول هستند که مجموعه آن‌ها برابر است با ۵.

راه‌حل دوم اگر $x<۰$ ، آن‌گاه معادله جواب ندارد، زیرا سمت راست تساوی منفی و سمت چپ آن نامنفی است. اگر $x\geq۰$ ، آن‌گاه معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^۲-۴=۳x\\x^۲-۴=-۳x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow x=-۱,\ x=۴\\x^۲+۳x-۴=۰\Rightarrow x=۱,\ x=-۴\end{cases}$$

جواب‌های $x=-۱$ و $x=-۴$ قابل قبول نیستند، زیرا با شرط $x\geq ۰$ معادله را حل کرده‌ایم. پس جواب‌های معادله $x=۱$ و $x=۴$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۵ است.

۲۰۵۴- گزینهٔ ۴ اگر $x\leq -۳$ ، آن‌گاه $|x+۳|=-(x+۳)$ و معادله می‌شود

$$x^۲+۲(x+۳)-۱۸=۰\Rightarrow x^۲+۲x-۱۲=۰$$

$$x=-۱-\sqrt{۱۳},\ \ x=-۱+\sqrt{۱۳}\ \ (\text{غ.ق.ق.})$$

اگر $x>-۳$ ، آن‌گاه $|x+۳|=x+۳$ و معادله می‌شود

$$x^۲-۲(x+۳)-۱۸=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۲۴=۰$$

$$(x-۶)(x+۴)=۰\Rightarrow x=-۴\ \ (\text{غ.ق.ق.}),\ \ \ x=۶$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $۵-\sqrt{۱۳}$.

۲۰۵۵- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض سؤال، هر یک از معادله‌های $x^۲-۶x-a=۰$ و $x^۲-۶x+a=۰$ باید دو جواب داشته باشد. در نتیجه $۳۶+۴a>۰$ و $۳۶-۴a>۰$. می‌دانیم $a>۰$ (زیرا اگر $a<۰$ ، معادلهٔ $|x^۲-۶x|=a$ جواب ندارد)، در نتیجه $۳۶+۴a>۰$. بنابراین کافی است

$$۳۶-۴a>۰\Rightarrow a<۹$$

بنابراین $۰<a<۹$.

۲۰۵۶- گزینهٔ ۴ ابتدا باید مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $|x-۳|\geq ۲$ و $|۲x+۱|\leq ۵$ را بیابیم. توجه کنید که

$$|x-۳|\geq ۲\Rightarrow\begin{cases}x-۳\geq ۲\Rightarrow x\geq ۵\\ x-۳\leq -۲\Rightarrow x\leq ۱\end{cases}$$

$$|۲x+۱|\leq ۵\Rightarrow -۵\leq ۲x+۱\leq ۵\Rightarrow -۶\leq ۲x\leq ۴\Rightarrow -۳\leq x\leq ۲$$

پس مجموعهٔ جواب‌های اولی برابر با $A=(-\infty\ ,۱]\cup[۵\ ,+\infty)$ و مجموعهٔ جواب‌های دومی $B=[-۳,۲]$ است. بنابراین $A\cap B=[-۳,۱]$.

۲۰۵۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** برای حل این نامعادله دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$(x+۱)^۲\geq(۲x-۱)^۲\Rightarrow x^۲+۲x+۱\geq ۴x^۲-۴x+۱$$

در نتیجه به نامعادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$۳x^۲-۶x\leq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۲$$

بنابراین $a=۰$ و $b=۲$. در نتیجه $b-a=۲$.

راه‌حل دوم اگر دو طرف نابرابری $|A|\geq|B|$ را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود:

$$A^۲\geq B^۲\Rightarrow A^۲-B^۲\geq ۰\Rightarrow(A-B)(A+B)\geq ۰$$

و برعکس. در نتیجه نامعادلهٔ مورد نظر معادل است با

$$(x+۱-۲x+۱)(x+۱+۲x-۱)\geq ۰\Rightarrow(-x+۲)(۳x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۲$$

بنابراین $a=۰$ و $b=۲$. در نتیجه $b-a=۲$.

۲۰۵۸- گزینهٔ ۴ ابتدا نامعادله را به‌صورت $|\frac{x-۳}{۲-x}|\leq ۱$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\frac{|x-۳|}{|۲-x|}\leq ۱\Rightarrow|x-۳|\leq|۲-x|,\ \ \ \ x\neq ۲$$

$$|x-۳|^۲\leq|۲-x|^۲\Rightarrow x^۲-۶x+۹\leq ۴-۴x+x^۲\Rightarrow x\geq\frac{۵}{۲}$$

بنابراین $[\frac{۵}{۲},+\infty)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است و در نتیجه $a=۵$ ، $b=۲$. پس $a+b=۷$.

۲۰۵۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که اگر $x\geq ۰$ ، آن‌گاه $|x|=x$. بنابراین

$$x<|x|\Rightarrow x<۰$$

در نتیجه

$$|x|<x^۲\xrightarrow{x<۰}-x<x^۲\Rightarrow x(x+۱)>۰\xrightarrow{x<۰}x+۱<۰$$

به این ترتیب، $|x+۱|=-x-۱$ ، $|x|=-x$ و $|۱-x|=۱-x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-۳x$.

راه‌حل دوم $x=-۲$ در نابرابری‌های $x<|x|<x^۲$ صدق می‌کند. بنابراین کافی است حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-۲$ به‌دست آوریم:

$$A=|x+۱|+|۱-x|+|x|\xrightarrow{x=-۲}A=۱+۳+۲=۶$$

فقط مقدار گزینهٔ (۱) به ازای $x=-۲$ برابر ۶ است.

۲۰۶۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر $x\geq ۰$ ، آن‌گاه $x+۱>۰$ و نامعادله به شکل $(x+۱)x<x(x+۱)$ درمی‌آید که جواب ندارد. اگر $-۱<x<۰$ ، آن‌گاه $x+۱>۰$ و نامعادله به شکل $-(x+۱)x<x(x+۱)$ درمی‌آید، یعنی $۲x(x+۱)>۰$ که درست نیست. اگر $x\leq -۱$ ، آن‌گاه $x+۱\leq ۰$ و نامعادله به شکل $-(x+۱)x<-x(x+۱)$ درمی‌آید که جواب ندارد. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله تهی است.

راه‌حل دوم معلوم است که $x=۰$ و $x=-۱$ جواب‌های نامعادله نیستند، پس می‌توانیم نامعادله را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{x+۱}{|x+۱|}<\frac{x}{|x|}\qquad (۱)$$

می‌دانیم برای هر $a\neq ۰$ ، $\frac{a}{|a|}=\begin{cases}۱ & a>۰\\ -۱ & a<۰\end{cases}$. بنابراین تنها حالتی که نامعادلهٔ (۱) می‌تواند جواب داشته باشد به‌صورت زیر است:

$$\frac{x+۱}{|x+۱|}=-۱\ \ ,\ \ \frac{x}{|x|}=۱$$

از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $x+۱<۰$ ، یعنی $x<-۱$ و از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $x>۰$. دو محدودهٔ به‌دست آمده اشتراک ندارند، پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر تهی است.

۲۰۶۱- گزینهٔ ۴ چون از $|A|=-A$ ، نتیجه می‌شود $A\leq ۰$ ، پس از $|x^۲-x-۶|=-(x^۲-x-۶)$ نتیجه می‌شود $x^۲-x-۶\leq ۰$. بنابراین $(x-۳)(x+۲)\leq ۰$ و با توجه به جدول تعیین علامت زیر بازهٔ $[-۲\ ,۳]$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است، که شامل شش عدد صحیح (۰، ±۱، ±۲ و ۳) است.

x	$-\infty$		-۲		۳		$+\infty$
$x^۲-x-۶$		+	۰	−	۰	+	

۲۰۶۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$||x^۲-۵|-۲|=۱\Rightarrow|x^۲-۵|-۲=\pm ۱$$

حالت اول

$$|x^۲-۵|-۲=-۱\Rightarrow|x^۲-۵|=۱\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۵=-۱\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲\\ x^۲-۵=۱\Rightarrow x^۲=۶\Rightarrow x=\pm\sqrt{۶}\end{cases}$$

حالت دوم

$$|x^۲-۵|-۲=۱\Rightarrow|x^۲-۵|=۳\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۵=-۳\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\\ x^۲-۵=۳\Rightarrow x^۲=۸\Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}\end{cases}$$

بنابراین معادله هشت جواب دارد.

۲۰۶۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x(x^۲-۳)|=|x|\Rightarrow|x||x^۲-۳|=|x|$$

واضح است که $x=۰$ یک جواب معادله است. با شرط $x\neq۰$ دو طرف معادله را بر $|x|$ تقسیم می‌کنیم:

$$|x^۲-۳|=۱\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۳=-۱\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\\x^۲-۳=۱\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲\end{cases}$$

بنابراین معادله پنج جواب دارد.

۲۰۶۴- گزینهٔ ۴ با توجه به ریشهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق، سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم

$$x\leq-۲\Rightarrow-۲(x-۱)-(x+۲)=۵\Rightarrow-۳x=۵\Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}\ (\text{غ.ق.ق.})$$
$$-۲<x\leq۱\Rightarrow-۲(x-۱)+x+۲=۵\Rightarrow-x+۴=۵\Rightarrow x=-۱$$
$$x>۱\Rightarrow۲(x-۱)+x+۲=۵\Rightarrow۳x=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر $\{-۱,\frac{۵}{۳}\}$ است، پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۲۰۶۵- گزینهٔ ۴ چون صفر جواب معادلهٔ مورد نظر نیست، پس $a\neq۰$. همچنین، سمت چپ معادله نامنفی است، پس $a>۰$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{x^۲}{x+۱}=-a\Rightarrow x^۲+ax+a=۰\quad \text{یا}\quad \frac{x^۲}{x+۱}=a\Rightarrow x^۲-ax-a=۰$$

توجه کنید که معادلهٔ $x^۲-ax-a=۰$ همیشه دو جواب غیرصفر دارد $(\Delta=a^۲+۴a>۰)$. بنابراین برای اینکه معادلهٔ اصلی دو جواب غیرصفر داشته باشد، باید معادلهٔ $x^۲+ax+a=۰$ جواب نداشته باشد:

$$\Delta=a^۲-۴a<۰\Rightarrow۰<a<۴$$

بنابراین اگر $۰<a<۴$، معادلهٔ مورد نظر دو جواب غیرصفر دارد. توجه کنید که $x=-۱$ (ریشهٔ مخرج کسر)، جواب معادلهٔ $x^۲-ax-a=۰$ نیست.

۲۰۶۶- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|-۴<-۱\ \text{یا}\ |x|-۴>۱$$

پس $|x|<۳$ یا $|x|>۵$. از نامعادلهٔ $|x|<۳$ نتیجه می‌شود $-۳<x<۳$.

از نامعادلهٔ $|x|>۵$ نتیجه می‌شود $x>۵$ یا $x<-۵$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت زیر است:

$$(-\infty,-۵)\cup(-۳,۳)\cup(۵,+\infty)$$

که شامل اعداد صحیح ±۵، ±۴ و ±۳ نیست. تعداد این اعداد ۶ تاست.

۲۰۶۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|(x-۵)(x-۲)|<|(x-۲)(x-۳)|\Rightarrow|x-۲||x-۵|<|x-۲||x-۳|$$

معلوم است که $x\neq۲$. بنابراین $|x-۵|<|x-۳|$. چون دو طرف این نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توان آن‌ها را به توان دو رساند:

$$x^۲-۱۰x+۲۵<x^۲-۶x+۹\Rightarrow۴x>۱۶\Rightarrow x>۴$$

راه‌حل دوم

$$|x^۲-۷x+۱۰|<|x^۲-۵x+۶|$$
$$x^۲-۷x+۱۰<x^۲-۵x+۶\Rightarrow۲x>۴\Rightarrow x>۲$$
$$x^۲-۷x+۱۰>-x^۲+۵x-۶\Rightarrow۲x^۲-۱۲x+۱۶>۰\Rightarrow x^۲-۶x+۸>۰$$
$$(x-۲)(x-۴)>۰\Rightarrow x>۴\ \text{یا}\ x<۲$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر با اشتراک این جواب‌ها است، که برابر $x>۴$ است.

۲۰۶۸- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت $x^۲-۲x+۱<۲+|x-۱|$ می‌نویسیم. بنابراین

$$(x-۱)^۲<۲+|x-۱|\Rightarrow|x-۱|^۲<۲+|x-۱|$$

اگر فرض کنیم $t=|x-۱|$، آن‌گاه

$$t^۲-t-۲<۰\Rightarrow(t+۱)(t-۲)<۰$$

چون $t\geq۰$، بنابراین $t+۱\geq۱$ و در نتیجه باید نامعادلهٔ $t-۲<۰$ را حل کنیم که $t<۲$ جواب است. پس $|x-۱|<۲$ و در نتیجه

$$-۲<x-۱<۲\Rightarrow-۱<x<۳$$

پس اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ در مجموعهٔ جواب‌های نامعادله مورد نظر قرار دارند.

۲۰۶۹- گزینهٔ ۲ ابتدا نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$-a^۲-۲<|x|-۳a<a^۲+۲\Rightarrow-a^۲+۳a-۲<|x|<a^۲+۳a+۲$$

واضح است که اگر $a^۲+۳a+۲\leq۰$، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. پس

$$a^۲+۳a+۲=(a+۱)(a+۲)\leq۰$$

a	$-\infty$		-۲		-۱		$+\infty$
$a^۲+۳a+۲$		+	۰	−	۰	+	

با توجه به جدول فوق باید $-۲\leq a\leq-۱$.

۲۰۷۰- گزینهٔ ۲ اگر $x<۱$، آن‌گاه سمت چپ نامعادله منفی و سمت راست آن نامنفی است. پس $x<۱$ جواب نامعادله است. اگر $x>۱$، آن‌گاه $|x+۱|=x+۱$ و در نتیجه

$$\frac{۳}{x-۱}\leq x+۱\Rightarrow۳\leq x^۲-۱\Rightarrow x^۲\geq۴\xrightarrow{x>۱}x\geq۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $\mathbb{R}-[۱,۲)$ است و در نتیجه

$$a=۱,b=۲\Rightarrow a+b=۳$$

۲۰۷۱- گزینهٔ ۴ با جای‌گذاری $x=\sqrt{۲}-۱$ در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید

$$f(\sqrt{۲}-۱)=۵|۳\sqrt{۲}-۳-۱|+۳|۵\sqrt{۲}-۵-۴|$$
$$=۵(۳\sqrt{۲}-۴)-۳(۵\sqrt{۲}-۹)=۷$$

با جای‌گذاری $x=\sqrt{۳}-۱$ در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید

$$f(\sqrt{۳}-۱)=۵|۳\sqrt{۳}-۳-۱|+۳|۵\sqrt{۳}-۵-۴|$$
$$=۵(۳\sqrt{۳}-۴)-۳(۵\sqrt{۳}-۹)=۷$$

پس

$$f(\sqrt{۲}-۱)+f(\sqrt{۳}-۱)=۱۴$$

۲۰۷۲- گزینهٔ ۳ برای $x>۱$ ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x-۱>۰,\ x+۱>۰\Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{x+۱}-\frac{۱-x}{x-۱}=۲$$

به طریق مشابه برای $-۱<x<۱$ به‌دست می‌آید

$$x-۱<۰,\ x+۱>۰\Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{x+۱}-\frac{۱-x}{-(x-۱)}=۰$$

همچنین برای $x<-۱$،

$$x-۱<۰,\ x+۱<۰\Rightarrow f(x)=\frac{-(x+۱)}{x+۱}-\frac{۱-x}{-(x-۱)}=-۲$$

بنابراین $R_f=\{۰,-۲,۲\}$ و برد تابع ۳ عضو دارد.

۲۰۷۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر $x\geq۰$، آن‌گاه

$$|x|=x\Rightarrow\big|x-|x|\big|=|x-x|=۰$$

بنابراین $f(x)=|۲x-۰|=|۲x|=۲x$. اگر $x<۰$، آن‌گاه

$$|x|=-x\Rightarrow\big|x-|x|\big|=|x+x|=|۲x|=-۲x$$

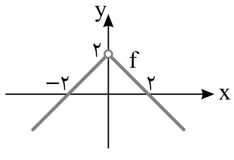
بنابراین $f(x)=|۲x-(-۲x)|=|۴x|=-۴x$. در نتیجه

$$f(x)=\begin{cases}۲x & x\geq۰\\ -۴x & x<۰\end{cases}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۱)=۲$. فقط در تابع گزینهٔ (۳) این شرایط برقرار است.

۲۰۷۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

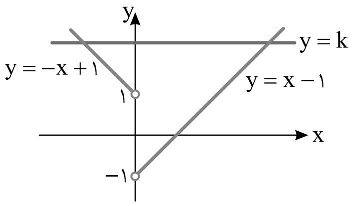
$$f(x)=\frac{۲|x|-x^۲}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{۲x-x^۲}{x} & x>۰\\[2mm] \dfrac{-۲x-x^۲}{-x} & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲-x & x>۰\\ ۲+x & x<۰\end{cases}$$



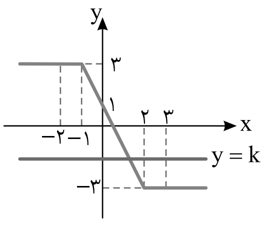
۲۰۷۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x(۱-\frac{۱}{x}) & x<۰\\ x(۱-\frac{۱}{x}) & x>۰\end{cases}=\begin{cases}-x+۱ & x<۰\\ x-۱ & x>۰\end{cases}$$

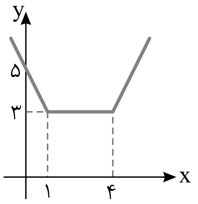
بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که اگر $k>۱$، آن‌گاه خط $y=k$ و نمودار تابع f در دو نقطه متقاطع‌اند.



۲۰۷۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f را به کمک نقاط $(۲,-۳)$، $(-۱,۳)$، $(۳,-۳)$ و $(-۲,۳)$ رسم می‌کنیم. واضح است که اگر خط $y=k$ این نمودار را در یک نقطه با طول مثبت قطع کند، باید $-۳<k<۱$.



۲۰۷۷- گزینهٔ ۲ برای اینکه حداکثر مقدار عبارت $\frac{۱۵}{|x-۱|+|x-۴|}$ را به‌دست بیاوریم، کافی است حداقل مقدار تابع $f(x)=|x-۱|+|x-۴|$ را به‌دست آوریم. نمودار تابع f در شکل رسم شده است. با توجه به شکل، کمترین مقدار تابع f برابر ۳ است، بنابراین بیشترین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{۱۵}{۳}=۵$.



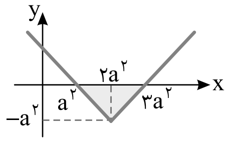
۲۰۷۸- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را $۲a^۲$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-۲a^۲|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را $a^۲$ واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۲a^۲|-a^۲$ به‌دست می‌آید.

با توجه به نمودار این تابع، مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با

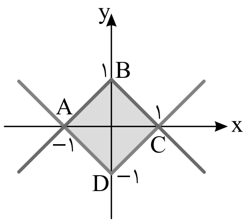
$$S=\frac{۱}{۲}a^۲(۲a^۲)=a^۴$$

بنابراین

$$a^۴=۴\Rightarrow a=\pm\sqrt{۲}$$

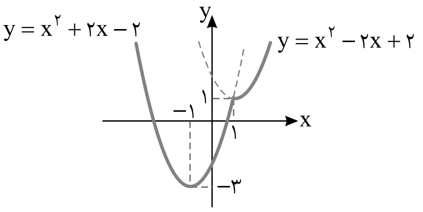


۲۰۷۹- گزینهٔ ۳ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. مساحت چهارضلعی ABCD مطلوب است. در واقع مساحت مورد نظر از چهار مثلث قائم‌الزاویه به قاعدهٔ یک واحد و ارتفاع یک واحد تشکیل شده است. پس مساحت ABCD برابر است با $۴\times(\frac{۱\times۱}{۲})=۲$.



۲۰۸۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x+۲ & x\geq۱\\ x^۲+۲x-۲ & x<۱\end{cases}$.

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و برد آن بازهٔ $[-۳,+\infty)$ است.



۲۰۸۱- گزینهٔ ۱ ابتدا مقادیر $f(۲-|a|)$ و $f(۲+|a|)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(۲-|a|)=\big|۲-|a|-۲\big|+۱=\big|-|a|\big|+۱=|a|+۱$$

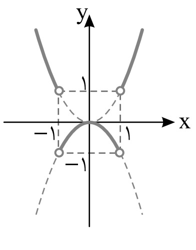
$$f(۲+|a|)=\big|۲+|a|-۲\big|+۱=\big||a|\big|+۱=|a|+۱$$

بنابراین $f(۲-|a|)-۲f(۲+|a|)+۱=|a|+۱-۲|a|-۲+۱=-|a|$.

۲۰۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & |x|>۱\\ -x^۲ & |x|<۱\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است و برد تابع f برابر با $(-۱,۰)\cup(۱,+\infty)$ است. پس $a=۱$ و $b=۰$ و در نتیجه $a-b=۱$.



۲۰۸۳- گزینهٔ ۲ اگر $۰\le x\le ۲$، آن‌گاه $x+۲>۰$ و $x-۲\le ۰$، پس

$$x^{۲}-۴=(x-۲)(x+۲)\le ۰$$

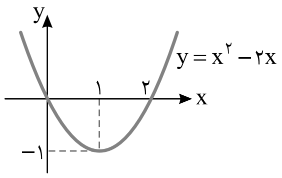
$$x^{۲}-۲x=x(x-۲)\le ۰$$

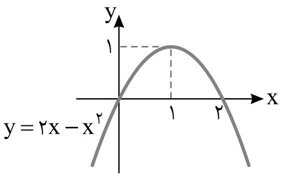
بنابراین $f(x)=-x^{۲}+۴+(x^{۲}-۲x)=-۲x+۴$. پس

$$۰\le x\le ۲\Rightarrow -۴\le -۲x\le ۰\Rightarrow ۰\le -۲x+۴\le ۴$$

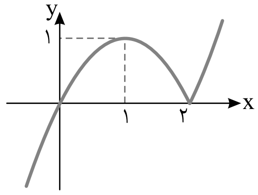
پس حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است.

۲۰۸۴- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=\begin{cases}۲x-x^{۲} & x\le ۲\\ x^{۲}-۲x & x>۲\end{cases}$ است. نمودار توابع $y=۲x-x^{۲}$ و $y=x^{۲}-۲x$ به‌صورت زیر است.





بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



۲۰۸۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

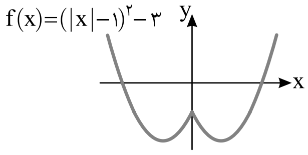
$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۲x-۲ & x\le ۰\\ x^{۲}-۲x-۲ & x>۰\end{cases}$$

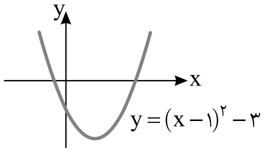
هر یک از قطعه‌ها بخشی از یک سهمی است (اولی به رأس $(-۱,-۳)$ و دومی به رأس $(۱,-۳)$). پس نمودار تابع به‌صورت گزینهٔ (۳) است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=|x|^{۲}-۲|x|-۲=(|x|-۱)^{۲}-۳$$

بنابراین کافی است ابتدا نمودار تابع $y=(x-۱)^{۲}-۳$ را رسم کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست این محور قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم.



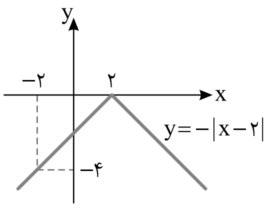


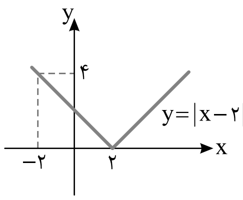
راه‌حل سوم چون $f(-x)=f(x)$، بنابراین نمودار تابع f نسبت به محور y متقارن است (توجه کنید که نمودار $y=f(-x)$ از قرینه کردن نمودار تابع f نسبت به محور y به‌دست می‌آید). بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر، $f(۰)=-۲$، پس گزینهٔ (۱) هم رد می‌شود.

۲۰۸۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

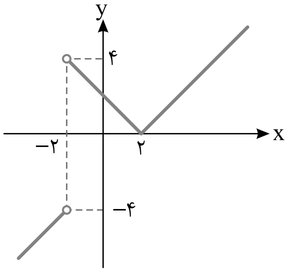
$$f(x)=\frac{|x-۲||x+۲|}{x+۲}=\begin{cases}|x-۲| & x>-۲\\ -|x-۲| & x<-۲\end{cases}$$

ابتدا نمودار توابع $y=|x-۲|$ و $y=-|x-۲|$ را رسم می‌کنیم.





پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



۲۰۸۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که با توجه به ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق چهار حالت زیر برای ضابطهٔ تابع وجود دارد:

$$x\le -۱\Rightarrow f(x)=-x+x-۲+۲(x+۱)=۲x$$

$$-۱<x\le ۰\Rightarrow f(x)=-x+x-۲-۲(x+۱)=-۲x-۴$$

$$۰<x\le ۲\Rightarrow f(x)=x+x-۲-۲(x+۱)=-۴$$

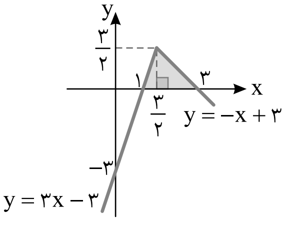
$$x>۲\Rightarrow f(x)=x-(x-۲)-۲(x+۱)=-۲x$$

بنابراین روی بازهٔ $[۰,۲]$ نمودار تابع یک پاره‌خط افقی است که طول آن برابر است با ۲.

۲۰۸۸- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases}x\ge \frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=x-(۲x-۳)=-x+۳\\ x\le \frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=x+۲x-۳=۳x-۳\end{cases}$$

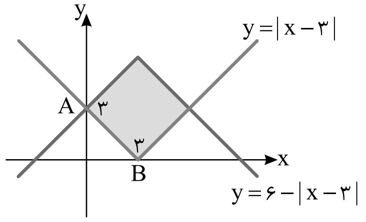
مطابق شکل روبه‌رو، مساحت مثلثی به ارتفاع $\frac{۳}{۲}$ و قاعدهٔ ۲ مد نظر است که برابر است با $\frac{۳}{۲}$.



۲۰۸۹- گزینهٔ ۳ در شکل زیر نمودارها را رسم کرده‌ایم. با توجه به اینکه شکل حاصل مربع است، کافی است طول ضلع مربع را به‌دست آوریم:

$$A(۰,۳)\ ,\ B(۳,۰)\Rightarrow AB=\sqrt{(۳-۰)^{۲}+(۰-۳)^{۲}}=۳\sqrt{۲}$$

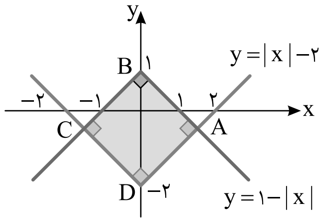
بنابراین مساحت مربع برابر است با $(۳\sqrt{۲})^{۲}=۱۸$.



۲۰۹۰- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. مساحت ABCD مطلوب مسئله است. ابتدا طول نقطه‌های A و C را مشخص می‌کنیم:

$$|x|-۲=۱-|x|\Rightarrow|x|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $AC=۳$ و $BD=۳$. پس چهارضلعی ABCD یک مربع است که مساحت آن برابر است با $S=\frac{۱}{۲}\times۳^۲=\frac{۹}{۲}$.



۲۰۹۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^۳=-۲۰\Rightarrow x=-\sqrt[۳]{۲۰}$$

همچنین $۵<۲\sqrt[۳]{۲۰}<۶$، بنابراین

$$-۶<-۲\sqrt[۳]{۲۰}<-۵\Rightarrow-۶<۲x<-۵\Rightarrow[۲x]=-۶$$

توجه کنید که $۲\sqrt[۳]{۲۰}=\sqrt[۳]{۱۶۰}$ و چون $\sqrt[۳]{۱۲۵}<\sqrt[۳]{۱۶۰}<\sqrt[۶]{۲۱۶}$، پس

$$۵<۲\sqrt[۳]{۲۰}<۶$$

۲۰۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$۱\le x<۴\Rightarrow۱\le\sqrt{x}<۲\Rightarrow[\sqrt{x}]=۱$$

$$۴\le x<۹\Rightarrow۲\le\sqrt{x}<۳\Rightarrow[\sqrt{x}]=۲$$

$$۹\le x<۱۶\Rightarrow۳\le\sqrt{x}<۴\Rightarrow[\sqrt{x}]=۳$$

$$۱۶\le x<۲۵\Rightarrow۴\le\sqrt{x}<۵\Rightarrow[\sqrt{x}]=۴$$

$$x=۲۵\Rightarrow\sqrt{۲۵}=۵$$

بنابراین

$$A=۱+۱+۱+\underbrace{۲+۲+\cdots+۲}_{\text{۵تا}}+\underbrace{۳+۳+\cdots+۳}_{\text{۷تا}}+\underbrace{۴+۴+\cdots+۴}_{\text{۹تا}}+۵$$

$$=۳+۱۰+۲۱+۳۶+۵=۷۵$$

۲۰۹۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$[x]=۲\Rightarrow۲\le x<۳\Rightarrow۶\le۳x<۹\Rightarrow۱\le۳x-۵<۴$$

بنابراین $[۳x-۵]$ می‌تواند مقادیر ۱، ۲ و ۳ را داشته باشد.

۲۰۹۴- گزینهٔ ۱ اگر $[\frac{۵-x}{۲}]=-۳$، آن‌گاه $-۳\le\frac{۵-x}{۲}<-۲$. بنابراین

$$-۶\le۵-x<-۴\Rightarrow-۱۱\le-x<-۹$$

در نتیجه $۹<x\le۱۱$.

۲۰۹۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$[۳x-۲]=۱\Rightarrow۱\le۳x-۲<۲\Rightarrow۳\le۳x<۴\Rightarrow۱\le x<\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

$$۲\le۲x<\frac{۸}{۳}\Rightarrow-۱\le۲x-۳<-\frac{۱}{۳}\Rightarrow[۲x-۳]=-۱$$

۲۰۹۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$۴n^۲-۴n+۱<۴n^۲-۲n+۱<(۲n)^۲\Rightarrow(۲n-۱)^۲<۴n^۲-۲n+۱<(۲n)^۲$$

$$۲n-۱<\sqrt{۴n^۲-۲n+۱}<۲n$$

بنابراین $[\sqrt{۴n^۲-۲n+۱}]=۲n-۱$.

راه‌حل دوم فرض کنید $n=۲$. در این صورت $[\sqrt{۴n^۲-۲n+۱}]=[\sqrt{۱۳}]=۳$. فقط مقدار گزینهٔ (۲) به‌ازای $n=۲$ برابر ۳ می‌شود.

۲۰۹۷- گزینهٔ ۲ اگر $[\frac{۵-x}{۲}]=-۴$، آن‌گاه $-۴\le\frac{۵-x}{۲}<-۳$، بنابراین

$$-۸\le۵-x<-۶\Rightarrow-۱۳\le-x<-۱۱$$

در نتیجه $۱۱<x\le۱۳$. بنابراین $a=۱۱$، $b=۱۳$ و $b-a=۲$.

۲۰۹۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $[x+۲]=[x]+۲$ و $[x-۱]=[x]-۱$. بنابراین

$$۲[x+۲]-[x-۱]=۷\Rightarrow۲[x]+۴-[x]+۱=۷\Rightarrow[x]=۲\Rightarrow۲\le x<۳$$

۲۰۹۹- گزینهٔ ۱ اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین

$$[x+[x-۳]]=۳\Rightarrow[x]+[x-۳]=۳\Rightarrow[x]+[x]-۳=۳\Rightarrow[x]=۳$$

در نتیجه $۳\le x<۴$. بنابراین $a=۳$، $b=۴$ و $a+b=۷$.

۲۱۰۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $۳\le[x]\le۴$ معادل است با $[x]=۳$ یا $[x]=۴$. پس

$$[x]=۳\Rightarrow۳\le x<۴,\quad [x]=۴\Rightarrow۴\le x<۵$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[۳,۵)$ است.

در نتیجه $a=۳$، $b=۵$ و $a+b=۸$.

۲۱۰۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$[\sqrt[۳]{۲}]=[\sqrt[۳]{۳}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۷}]=۱,\quad [\sqrt[۳]{۸}]=[\sqrt[۳]{۹}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۲۶}]=۲$$

$$[\sqrt[۳]{۲۷}]=[\sqrt[۳]{۲۸}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۶۳}]=۳$$

بنابراین

$$A=\overbrace{۱+۱+\cdots+۱}^{\text{۶تا}}+\overbrace{۲+۲+\cdots+۲}^{\text{۱۹تا}}+\overbrace{۳+۳+\cdots+۳}^{\text{۳۷تا}}=۶+۳۸+۱۱۱=۱۵۵$$

۲۱۰۲- گزینهٔ ۳

$$A=[-\sqrt{۱۰}]+[-\sqrt{۹}]+[-\sqrt{۸}]+\cdots+[\sqrt{۱۰}]$$

$$=([-\sqrt{۱۰}]+[\sqrt{۱۰}])+([-\sqrt{۹}]+[\sqrt{۹}])+\cdots+([-\sqrt{۱}]+[\sqrt{۱}])$$

اگر $x\in\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x]+[-x]=۰$ و اگر $x\notin\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x]+[-x]=-۱$. از $\sqrt{۰}$ تا $\sqrt{۱۰}$ اعداد $\sqrt{۰}$، $\sqrt{۱}$، $\sqrt{۴}$ و $\sqrt{۹}$ صحیح هستند و اعداد $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$، $\sqrt{۷}$، $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۱۰}$ غیرصحیح هستند. بنابراین

$$A=\underbrace{۰+۰+۰+۰}_{\text{۴تا}}+\underbrace{(-۱)+(-۱)+\cdots+(-۱)}_{\text{۷تا}}=-۷$$

۲۱۰۳- گزینهٔ ۴ از $\frac{۱}{۳}<x<\frac{۲}{۳}$ نتیجه می‌شود

$$۱<۳x<۲\Rightarrow[۳x]=۱,\quad \frac{۳}{۲}<\frac{۱}{x}<۳\Rightarrow۳<\frac{۲}{x}<۶\Rightarrow۱<\frac{۲}{۳x}<۲\Rightarrow[\frac{۲}{۳x}]=۱$$

بنابراین $[۳x]-[\frac{۲}{۳x}]=۱-۱=۰$.

۲۱۰۴- گزینهٔ ۲ از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$۲\le x<۳\xrightarrow{\times۲}۴\le۲x<۶,\quad ۲\le y<۳\xrightarrow{\times۳}۶\le۳y<۹$$

در نتیجه با جمع کردن این دو نابرابری معلوم می‌شود که

$$۱۰\le۲x+۳y<۱۵\xrightarrow{\div۵}۲\le\frac{۲x+۳y}{۵}<۳$$

پس $[\frac{۲x+۳y}{۵}]=۲$.

۲۱۰۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x^{۲}-۴x=(x-۲)^{۲}-۴$، پس

$$[x]=۲\Rightarrow ۲\leq x<۳\Rightarrow ۰\leq x-۲<۱\Rightarrow ۰\leq (x-۲)^{۲}<۱$$

$$-۴\leq (x-۲)^{۲}-۴<-۳\Rightarrow [(x-۲)^{۲}-۴]=-۴$$

بنابراین $[x^{۲}-۴x]$ فقط می‌تواند مقدار -۴ را داشته باشد.

۲۱۰۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$[x^{۲}+x]=-۱\Rightarrow -۱\leq x^{۲}+x<۰$$

$$-۱\leq (x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}<۰\Rightarrow -\frac{۳}{۴}\leq (x+\frac{۱}{۲})^{۲}<\frac{۱}{۴}$$

$$(x+\frac{۱}{۲})^{۲}<\frac{۱}{۴}\Rightarrow |x+\frac{۱}{۲}|<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<x+\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۱<x<۰$$

بنابراین $۰<x^{۱۰}<۱$ و در نتیجه $[x^{۱۰}]=۰$.

۲۱۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$n^{۳}<n^{۳}+۳n^{۲}+۱<n^{۳}+۳n^{۲}+۳n+۱$$

$$n^{۳}<n^{۳}+۳n^{۲}+۱<(n+۱)^{۳}\Rightarrow n<\sqrt[۳]{n^{۳}+۳n^{۲}+۱}<n+۱$$

بنابراین $n=[\sqrt[۳]{n^{۳}+۳n^{۲}+۱}]$.

۲۱۰۸- گزینهٔ ۳ اگر $-۲<x<-۱$، آن‌گاه $[x]=-۲$ و $|x|=-x$، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$-۳x-۴=۱\Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}$$

اگر $-۱\leq x<۰$، آن‌گاه $[x]=-۱$ و $|x|=-x$، پس معادله به شکل زیر است

$$-۳x-۲=۱\Rightarrow x=-۱$$

اگر $۰\leq x<۱$، آن‌گاه $[x]=۰$ و $|x|=x$، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$۳x+۰=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $(-۲,۱)$ برابر است با

$$-\frac{۵}{۳}-۱+\frac{۱}{۳}=-\frac{۷}{۳}$$

۲۱۰۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $[x-۱]=[x]-۱$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[x]^{۲}+۵[x]+۶=۰\Rightarrow ([x]+۲)([x]+۳)=۰$$

اکنون توجه کنید که

$$[x]+۲=۰\Rightarrow [x]=-۲\Rightarrow -۲\leq x<-۱$$

$$[x]+۳=۰\Rightarrow [x]=-۳\Rightarrow -۳\leq x<-۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[-۳,-۲)\cup[-۲,-۱)=[-۳,-۱)$$

در نتیجه $a=-۳$، $b=-۱$ و $b-a=۲$.

۲۱۱۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$[\frac{۲[x]+۱}{۵}]=۳\Rightarrow ۳\leq \frac{۲[x]+۱}{۵}<۴\Rightarrow ۷\leq [x]<\frac{۱۹}{۲}$$

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x]=۷\Rightarrow ۷\leq x<۸,\quad [x]=۸\Rightarrow ۸\leq x<۹,\quad [x]=۹\Rightarrow ۹\leq x<۱۰$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[۷,۸)\cup[۸,۹)\cup[۹,۱۰)=[۷,۱۰)$$

در نتیجه $a=۷$، $b=۱۰$ و $b-a=۳$.

۲۱۱۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین

$$f(x+۳)=[\frac{x+۳}{۲}]-[\frac{x+۴}{۲}]=[\frac{x+۱}{۲}+۱]-[\frac{x}{۲}+۲]$$

$$=[\frac{x+۱}{۲}]+۱-[\frac{x}{۲}]-۲=-f(x)-۱$$

در نتیجه $f(x+۳)+f(x)=-۱$.

۲۱۱۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** اگر $x\in[۱,۲)$، آن‌گاه $-۲\leq x-۳<-۱$.

بنابراین $|x-۳|=-x+۳$. همچنین

$$-۱\leq x-۲<۰\Rightarrow [x-۲]=-۱$$

در نتیجه $f(x)=-۱+(-x+۳)=-x+۲$.

راه‌حل دوم $f(۱)=-۱+|-۲|=۱$ فقط در گزینهٔ (۲) برقرار است.

۲۱۱۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $۹-x^{۲}\geq ۰$ و در نتیجه $-۳\leq x\leq ۳$. از طرف دیگر،

$$[\frac{x}{۲}]-۱=۰\Rightarrow [\frac{x}{۲}]=۱\Rightarrow ۱\leq \frac{x}{۲}<۲\Rightarrow ۲\leq x<۴$$

بنابراین عددهای بازهٔ $[۲,۴)$ در دامنهٔ تابع نیستند و دامنهٔ تابع به‌صورت $[-۳,۲)$ است. پس $a=-۳$، $b=۲$ و $a+b=-۱$.

۲۱۱۴- گزینهٔ ۲ باید نامعادله‌های $[x]+۲\geq ۰$ و $۳-[x]\geq ۰$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را به‌دست آوریم:

$$[x]+۲\geq ۰\Rightarrow [x]\geq -۲\Rightarrow x\geq -۲,\quad ۳-[x]\geq ۰\Rightarrow [x]\leq ۳\Rightarrow x<۴$$

بنابراین $D_f=[-۲,۴)$. پس $a=-۲$، $b=۴$ و $a+b=۲$.

۲۱۱۵- گزینهٔ ۱ اگر $-۱\leq x<۰$،

$$[x]=-۱,|x|=-x\Rightarrow f(x)=-۱+x$$

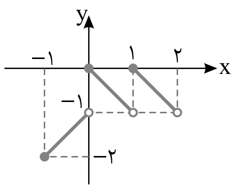
اگر $۰\leq x<۱$،

$$[x]=۰,|x|=x\Rightarrow f(x)=-x$$

اگر $۱\leq x<۲$،

$$[x]=۱,|x|=x\Rightarrow f(x)=۱-x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و برد تابع به‌صورت $[-۲,۰]-\{-۱\}$ است.

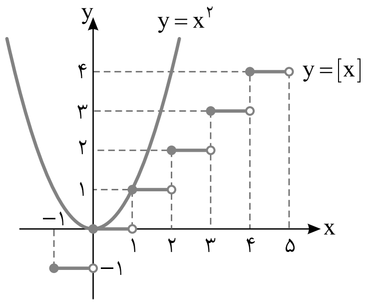


۲۱۱۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\{x|[|x+۱|-۲]>۰\}$. از طرف دیگر، چون $[|x+۱|-۲]$ عددی صحیح است، پس اگر مثبت باشد، بزرگ‌تر یا مساوی ۱ است: $[|x+۱|-۲]\geq ۱$. در نتیجه

$$|x+۱|-۲\geq ۱\Rightarrow |x+۱|\geq ۳\Rightarrow \begin{cases} x+۱\geq ۳\Rightarrow x\geq ۲ \\ x+۱\leq -۳\Rightarrow x\leq -۴ \end{cases}$$

بنابراین $D_f=(-\infty,-۴]\cup[۲,+\infty)$.

۲۱۱۷- گزینهٔ ۲ نمودار این تابع‌ها را در شـکل زیر رسـم کرده‌ایم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

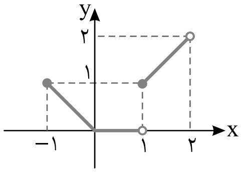


۲۱۱۸- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$−۱\le x<۰\Rightarrow[x]=−۱\Rightarrow f(x)=−x\,,\quad ۰\le x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

$$۱\le x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow f(x)=x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



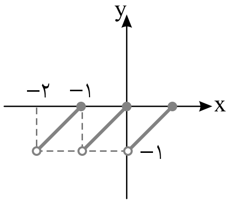
۲۱۱۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$−۲<x\le−۱\Rightarrow۱\le−x<۲\Rightarrow[−x]=۱\Rightarrow f(x)=x+۱$$

$$−۱<x\le۰\Rightarrow۰\le−x<۱\Rightarrow[−x]=۰\Rightarrow f(x)=x$$

$$۰<x\le۱\Rightarrow−۱\le−x<۰\Rightarrow[−x]=−۱\Rightarrow f(x)=x−۱$$

پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



راه‌حل دوم می‌دانیم برای هر عدد حقیقی a ، $[a]\le a$. بنابراین

$$[−x]\le−x\Rightarrow x+[−x]\le۰$$

چون $f(x)=x+[−x]$ ، پس مقادیر تابع f همواره نامثبت هستند، بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر $f(۰)=۰$ ، پس گزینهٔ (۱) نیز رد می‌شود.

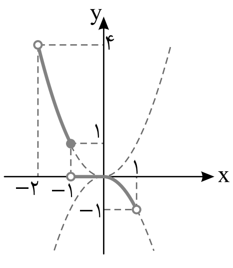
۲۱۲۰- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$−۲<x\le−۱\Rightarrow۱\le−x<۲\Rightarrow[−x]=۱\Rightarrow f(x)=x^۲$$

$$−۱<x\le۰\Rightarrow۰\le−x<۱\Rightarrow[−x]=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

$$۰<x<۱\Rightarrow−۱<−x<۰\Rightarrow[−x]=−۱\Rightarrow f(x)=−x^۲$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۱۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(f(x))=f(x)−[۳f(x)]$$

اکنون حاصل $[۳f(x)]$ را پیدا می‌کنیم. اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$[x+k]=[x]+k$$

در نتیجه

$$[۳f(x)]=[۳x−۳[۳x]]=[۳x]−۳[۳x]=−۲[۳x]$$

(زیرا $۳[۳x]\in\mathbb{Z}$) بنابراین

$$f(f(x))=f(x)−(−۲[۳x])=x−[۳x]+۲[۳x]=x+[۳x]$$

در نتیجه $f(f(x))−x=[۳x]$.

۲۱۲۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$[۴−x]+[x−۳]=۰\Rightarrow۴+[−x]+[x]−۳=۰$$

$$[x]+[−x]=−۱\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

پس عددهای غیرصحیح مخرج کسـر را صفر می‌کنند و در دامنهٔ تابع نیستند. بنابراین دامنهٔ تابع $\mathbb{Z}$ است.

راه‌حـل دوم توجه کنید کـه $f(۰)=f(۱)=۱$. بنابراین عددهـای صفر و ۱ در دامنهٔ تابع هستند و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) رد می‌شوند.

۲۱۲۳- گزینهٔ ۱ اگر x عددی صحیح باشد که در دامنهٔ f نیست، آن‌گاه

$$[|x+۱|−۲]−۵=۰ \qquad (۱)$$

و چون x صحیح است، پس $|x+۱|−۲$ نیز صحیح است، در نتیجه

$$[|x+۱|−۲]=|x+۱|−۲$$

بنابراین معادلهٔ (۱) می‌شود

$$|x+۱|−۲−۵=۰\Rightarrow|x+۱|=۷\Rightarrow x+۱=\pm۷\Rightarrow x=\pm۷−۱$$

بنابراین مجموع عددهای صحیح مورد نظر برابر $−۲$ است.

۲۱۲۴- گزینهٔ ۳ برای تعیین دامنهٔ تابع f باید نامعادلهٔ $\frac{۴−[x]}{[x]−۱}\ge۰$ را حل کنیـم. اگر فـرض کنیـم $t=[x]$ ، نامعادله به‌صـورت $\frac{۴−t}{t−۱}\ge۰$ درمی‌آید که جواب آن به‌صورت $۱<t\le۴$ است.

بنابراین

$$۱<[x]\le۴\Rightarrow۲\le x<۵$$

بنابراین $D_f=[۲,۵)$ و در نتیجه $a=۲$ ، $b=۵$ و $a+b=۷$.

۲۱۲۵- گزینهٔ ۲ بایـد نامعادلـهٔ $۴[x]−[x]^۲\ge۰$ را حـل کنیـم. فـرض می‌کنیم $[x]=t$ و در نتیجه

$$۴t−t^۲\ge۰\Rightarrow t(۴−t)\ge۰\Rightarrow۰\le t\le۴$$

بنابرایـن $۰\le[x]\le۴$. در نتیجـه $۰\le x<۵$. پـس $D_f=[۰,۵)$ و دامنهٔ تابع شامل ۵ عدد صحیح است.

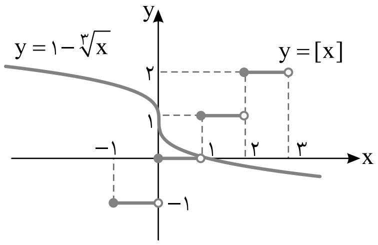
۲۱۲۶- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجه کنیـد که نابرابـری $۰\le x−[x]<۱$ برای هر مقدار x برقرار است.

پس

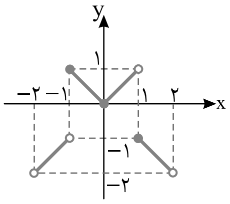
$$−۱<[x]−x\le۰\Rightarrow−۲<۲[x]−۲x\le۰\Rightarrow−۲<f(x)\le۰$$

بنابراین $R_f=(−۲,۰]$.

۲۱۲۷- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع $y=۱-\sqrt[۳]{x}$ و $y=[x]$ را رسم می‌کنیم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



۲۱۲۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن‌گاه $(-۱)^{[x]}=۱$ و در نتیجه $f(x)=x$. همچنین اگر $[x]$ عددی فرد باشد، آن‌گاه $(-۱)^{[x]}=-۱$ و در نتیجه $f(x)=-x$. بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است.



۲۱۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

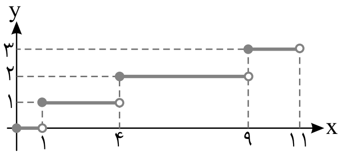
$$۰\leq x<۱\Rightarrow ۰\leq\sqrt{x}<۱\Rightarrow[\sqrt{x}]=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

$$۱\leq x<۴\Rightarrow ۱\leq\sqrt{x}<۲\Rightarrow[\sqrt{x}]=۱\Rightarrow f(x)=۱$$

$$۴\leq x<۹\Rightarrow ۲\leq\sqrt{x}<۳\Rightarrow[\sqrt{x}]=۲\Rightarrow f(x)=۲$$

$$۹\leq x<۱۱\Rightarrow ۳\leq\sqrt{x}<\sqrt{۱۱}\Rightarrow[\sqrt{x}]=۳\Rightarrow f(x)=۳$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است.



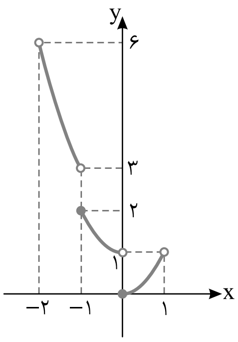
۲۱۳۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$-۲<x<-۱\Rightarrow[x]=-۲\Rightarrow f(x)=x^۲+۲$$

$$-۱\leq x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow f(x)=x^۲+۱$$

$$۰\leq x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=x^۲$$

پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



۲۱۳۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $۲x^۲+۵x-۳=(۲x-۱)(x+۳)$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$|(۲x-۱)(x+۳)|=۲|x+۳|\Rightarrow|۲x-۱||x+۳|=۲|x+۳|$$

$$|x+۳|(|۲x-۱|-۲)=۰$$

به این ترتیب

$$|x+۳|=۰\Rightarrow x=-۳$$

$$|۲x-۱|-۲=۰\Rightarrow ۲x-۱=\pm ۲=-\frac{۱}{۲},\ x=\frac{۳}{۲}$$

در نتیجه، مجموع جواب‌ها برابر با -۲ است.

۲۱۳۲- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x^۲-۳=\pm(x-۱)$$

بنابراین

$$x^۲-۳=x-۱\Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \quad (۱)$$

$$x^۲-۳=-(x-۱)\Rightarrow x^۲+x-۴=۰ \quad (۲)$$

هر دو معادله دو جواب دارند و دو معادله جواب یکسان ندارند. مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر ۱ و مجموع جواب‌های معادلهٔ (۲) برابر -۱ است. بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ اصلی برابر صفر است.

۲۱۳۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$|۴x-\sqrt{x^۲-۸x+۱۶}|=|۴x-\sqrt{(x-۴)^۲}|=\big|۴x-|x-۴|\big|$$

از طرف دیگر،

$$|۲x-۵|<۳\Rightarrow -۳<۲x-۵<۳\Rightarrow ۲<۲x<۸\Rightarrow ۱<x<۴ \quad (۱)$$

بنابراین $x-۴<۰$، در نتیجه $|x-۴|=-(x-۴)$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $|۴x+x-۴|=|۵x-۴|$. از طرف دیگر، بنابر نابرابری‌های (۱)،

$$x>۱\Rightarrow ۵x>۵\Rightarrow ۵x-۴>۱$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $۵x-۴$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $x=۲$ در نامعادلهٔ $|۲x-۵|<۳$ صدق می‌کند.

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر را به ازای $x=۲$ به دست می‌آوریم:

$$A=|۴x-\sqrt{x^۲-۸x+۱۶}|\xrightarrow{x=۲}A=|۸-\sqrt{۴-۱۶+۱۶}|=۶$$

فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $x=۲$ برابر ۶ است.

۲۱۳۴- گزینهٔ ۴ نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$|x^۲-۳x|<۲x\Rightarrow|x(x-۳)|<۲x\Rightarrow|x||x-۳|<۲x$$

معلوم است که $x=۰$ جواب این نامعادله نیست و x نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین $x>۰$ و

$$x|x-۳|<۲x\Rightarrow x(|x-۳|-۲)<۰\Rightarrow|x-۳|-۲<۰\Rightarrow|x-۳|<۲$$

$$-۲<x-۳<۲\Rightarrow ۱<x<۵$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(۱,۵)$ است، یعنی $a=۱$، $b=۵$ و $b-a=۴$.

۲۱۳۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از $-۳\le x\le ۶$ ، نتیجه می‌شود

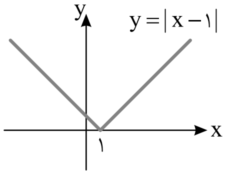
$$-۴\le x-۱\le ۵$$

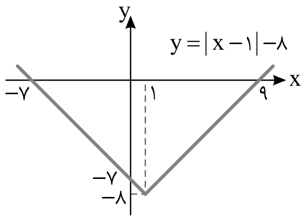
پس $۰\le|x-۱|\le ۵$. بنابراین

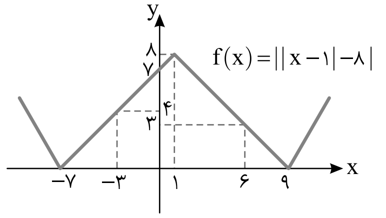
$$-۸\le|x-۱|-۸\le -۳\Rightarrow ۳\le\big||x-۱|-۸\big|\le ۸\Rightarrow ۳\le f(x)\le ۸$$

پس حداقل مقدار تابع برابر ۳ و حداکثر مقدار آن ۸ است و مجموع آن‌ها ۱۱ است.

راه‌حل دوم نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل تابع، واضح است که وقتی $-۳\le x\le ۶$ ، $۳\le f(x)\le ۸$.





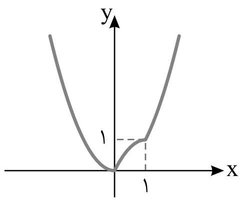


۲۱۳۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^۲-x+x & x\le ۰\\ -(x^۲-x)+x & ۰<x\le ۱\\ x^۲-x+x & x>۱\end{cases}=\begin{cases}x^۲ & x\le ۰\\ -x^۲+۲x & ۰<x\le ۱\\ x^۲ & x>۱\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^۲ & x\le ۰\\ -(x-۱)^۲+۱ & ۰<x\le ۱\\ x^۲ & x>۱\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است.



۲۱۳۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(۱۲۰)=[\frac{۱۲۰}{۱۱}]-[-\frac{۱۲۰}{۱۷}]$.

از طرف دیگر،

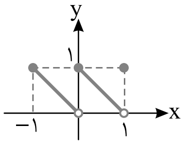
$$۱۰<\frac{۱۲۰}{۱۱}<۱۱\Rightarrow[\frac{۱۲۰}{۱۱}]=۱۰\ ,\qquad -۸<-\frac{۱۲۰}{۱۷}<-۷\Rightarrow[-\frac{۱۲۰}{۱۷}]=-۸$$

بنابراین $f(۱۲۰)=۱۰-(-۸)=۱۸$.

۲۱۳۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-۱-(x-۱) & -۱\le x<۰\\ ۰-(x-۱) & ۰\le x<۱\\ ۱+۰ & x=۱\end{cases}=\begin{cases}-x & -۱\le x<۰\\ -x+۱ & ۰\le x<۱\\ ۱ & x=۱\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است:

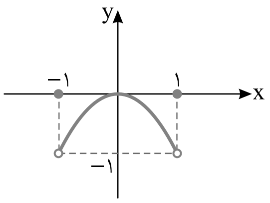


۲۱۳۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین

$$[x]\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)=x^۲([x]+[-x])$$

از طرف دیگر، $[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$. پس می‌توان نوشت

$f(x)=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -x^۲ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ و نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



راه‌حل دوم می‌دانیم $[x]\le x$ ، بنابراین تابع $f(x)=x^۲[[x]-x]$ همواره نامثبت است. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر $f(۰)=۰$ ، پس گزینهٔ (۲) هم رد می‌شود.

۲۱۴۰- گزینهٔ ۱ به جای x در ضابطهٔ f قرار می‌دهیم $x-۱$:

$$f(x-۱)=۴(x-۱)-[x-۱]-[۳(x-۱)]=۴x-۴-[x]+۱-[۳x]+۳$$
$$=۴x-[x]-[۳x]=f(x)$$

۲۱۴۱- گزینهٔ ۴ معادلهٔ $(x-۴)|x|<۲x-۵$ را برای $x\ge ۰$ و $x<۰$ جداگانه حل می‌کنیم:

$$x\ge ۰\Rightarrow(x-۴)x<۲x-۵\Rightarrow x^۲-۶x+۵<۰\Rightarrow ۱<x<۵$$

$$x<۰\Rightarrow(x-۴)(-x)<۲x-۵\Rightarrow x^۲-۲x-۵>۰$$

$$x<۱-\sqrt{۶}\,,\,x>۱+\sqrt{۶}\xrightarrow{x<۰}x<۱-\sqrt{۶}$$

پس مجموعهٔ جواب‌های معادله به‌صورت $(-\infty,۱-\sqrt{۶})\cup(۱,۵)$ است.

ریاضی - ۹۲

۲۱۴۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** واضح است که اگر $x<۰$ ، نامعادله جواب ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^۲-۲x|<۰$ که غیرممکن است. بنابراین باید با شرط $x\ge ۰$ نامعادله را حل کنیم. اکنون توجه کنید که نامعادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$|x^۲-۲x|<x\Rightarrow|x(x-۲)|<x\Rightarrow|x||x-۲|<x$$

$$x|x-۲|<x\Rightarrow|x-۲|<۱$$

$$-۱<x-۲<۱\Rightarrow ۱<x<۳$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(۱,۳)$ است.

راه‌حل دوم به کمک دو مقدار $x=۱$ و $x=۲$ گزینهٔ صحیح مشخص می‌شود. $x=۱$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی $x=۲$ در آن صدق می‌کند. تنها گزینه‌ای که عدد ۲ در آن قرار دارد ولی عدد ۱ در آن قرار ندارد، گزینهٔ (۴) است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۱۴۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر $|x+۱|-۱<۰$، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^۲-۲|<۰$ که غیرممکن است. بنابراین باید $|x+۱|-۱\geq ۰$ و در نتیجه

$$|x+۱|\geq ۱\Rightarrow\begin{cases}x+۱\geq ۱\Rightarrow x\geq ۰\\ x+۱\leq -۱\Rightarrow x\leq -۲\end{cases}$$

اگر $x\leq -۲$. آن‌گاه $x+۱<۰$ و $x^۲-۲>۰$، پس نامعادله به صورت زیر خواهد بود:

$$x^۲-۲<-x-۱-۱\Rightarrow x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین نامعادله در بازهٔ $(-\infty,-۲]$ جواب ندارد. پس باید با فرض $x\geq ۰$ آن را حل کنیم. در این حالت $x+۱>۰$ و نامعادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$|x^۲-۲|<x+۱-۱\Rightarrow |x^۲-۲|<x\Rightarrow -x<x^۲-۲<x$$

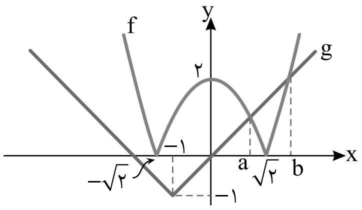
پس باید دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases}x^۲-x-۲<۰ & (۱)\\ x^۲+x-۲>۰ & (۲)\end{cases}$ را حل کنیم. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۱) با شرط $x\geq ۰$ به صورت $۰\leq x<۲$ و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۲) با شرط $x\geq ۰$ به صورت $x>۱$ است. اشتراک این مجموعهٔ جواب‌ها بازهٔ $(۱,۲)$ است که وسط بازه نقطه‌ای به طول $۱/۵$ است.

راه‌حل دوم ابتدا نمودار توابع $f(x)=|x^۲-۲|$ و $g(x)=|x+۱|-۱$ را رسم می‌کنیم. توجه کنید جاهایی که $f(x)<g(x)$، بازهٔ (a,b) است. از روی نمودارها معلوم می‌شود که در این بازه $x>۰$. بنابراین در این بازه، ضابطهٔ g به‌صورت $g(x)=x+۱-۱=x$ ساده می‌شود. اکنون توجه کنید که نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$|x^۲-۲|<x\Rightarrow x^۴-۴x^۲+۴<x^۲\Rightarrow x^۴-۵x^۲+۴<۰$$

$$(x^۲-۴)(x^۲-۱)<۰\xrightarrow{x>۰}۱<x<۲$$

بنابراین $a=۱$ و $b=۲$، پس بازهٔ مورد نظر به‌صورت $(۱,۲)$ است و وسط بازه نقطه‌ای به طول $۱/۵$ است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۵

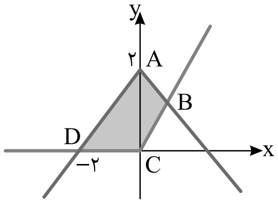
۲۱۴۴- گزینهٔ ۳ با تعیین ضابطه، دو تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:

$$y=۲-|x|=\begin{cases}۲-x & x\geq ۰\\ ۲+x & x<۰\end{cases},\quad y=x+|x|=\begin{cases}۲x & x\geq ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$$

ابتدا مختصات نقطهٔ B را محاسبه می‌کنیم:

$$۲-x_B=۲x_B\Rightarrow ۳x_B=۲\Rightarrow x_B=\frac{۲}{۳}$$

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{\frac{۲}{۳}\times ۲}{۲}+\frac{۲\times ۲}{۲}=\frac{۲}{۳}+۲=\frac{۸}{۳}$$



تجربی - ۹۵

۲۱۴۵- گزینهٔ ۴ عبارت $x^۲+۱$ همواره مثبت است، پس

$$|x^۲+۱|=x^۲+۱$$

بنابراین

$$۲x+۱-|x-۲|>x^۲+۱\Rightarrow -x^۲+۲x>|x-۲|\Rightarrow -x(x-۲)>|x-۲|$$

$$x\geq ۲:-x(x-۲)>(x-۲)\Rightarrow (x-۲)(-x-۱)>۰$$

$$-x>۱\Rightarrow x<-۱\ (\text{غ. ق.ق})$$

$$x<۲:-x(x-۲)>-(x-۲)\Rightarrow (x-۲)(-x+۱)>۰$$

$$-x<-۱\Rightarrow x>۱$$

بنابراین $۱<x<۲$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۲۱۴۶- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع g را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)=۲x-۳-[۲x-۳]-۲x+۲[x]$$
$$=۲x-۳-[۲x]+۳-۲x+۲[x]\Rightarrow g(x)=۲[x]-[۲x]$$

با توجه به اینکه حاصل $g(x)=۲[x]-[۲x]$ همواره عددی صحیح است، گزینهٔ (۳) یعنی $\{-۱,۰\}$ یا گزینهٔ (۴) یعنی $\{۰,۱\}$ پاسخ صحیح هستند که با قرار دادن چند مقدار خواهیم داشت:

$$x=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow y=۰,\quad x=\frac{۹}{۱۰}\Rightarrow y=-۱$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۱۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا از $[x^۲+x]=-۱$، مقادیر x را می‌یابیم:

$$-۱\leq x^۲+x<۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲+x<۰\Rightarrow -۱<x<۰\\ x^۲+x+۱\geq ۰\Rightarrow \text{همواره درست است.}\Rightarrow x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}-۱<x<۰$$

پس $۰<x^{۲۰}<۱$ و حاصل $[x^{۲۰}]$ برابر صفر است.

تجربی - ۸۸

۲۱۴۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از آنجا که به‌ازای هر عدد طبیعی $n>2$ حاصل، عددی منحصربه‌فرد است به‌ازای $n=3$ این عدد را به‌دست می‌آوریم:

$$n=3:[\sqrt{36-9+1}]-2[\sqrt{9-6}]=[\sqrt{28}]-2[\sqrt{3}]=5-2=3$$

راه‌حل دوم به‌ازای $n>2$ ،

$$\begin{cases} 4n^2-4n+1<4n^2-3n+1<4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2<4n^2-3n+1<(2n)^2 \\ 2n-1<\sqrt{4n^2-3n+1}<2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2-3n+1}]=2n-1 \\ n^2-4n+4<n^2-2n<n^2-2n+1 \Rightarrow (n-2)^2<n^2-2n<(n-1)^2 \\ n-2<\sqrt{n^2-2n}<n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2-2n}]=n-2 \end{cases}$$

پس $[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]=2n-1-2(n-2)=4-1=3$.

تجربی - ۹۱

۲۱۴۹- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ $f(x-f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=[x] \Rightarrow f(x-f(x))=f(x-[x])$$

از طرف دیگر $x-[x]$ همواره در فاصلهٔ $[0,1)$ است، بنابراین $f(x-[x])$ یعنی جزء صحیح آن برابر صفر است، یعنی $f(x-[x])=0$.

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۲۱۵۰- گزینهٔ ۱ از نامعادلهٔ $x^2+x<0$ نتیجه می‌گیریم $-1<x<0$ ،
پس به‌ازای $-1<x<0$:

$$-1<x<0 \Rightarrow [x]=-1, \qquad 0<x^2<1 \Rightarrow [x^2]=0$$

$$-1<x^3<0 \Rightarrow [x^3]=-1, \quad 0<x^4<1 \Rightarrow [x^4]=0$$

بنابراین $[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]=-1+0-1+0=-2$.

خارج از کشور تجربی - ۸۸

فصل سیزدهم

۲۱۵۱- گزینهٔ ۳ نقاط A و B را معین می‌کنیم

$$y=۰\Rightarrow ۲^{x-۱}-۲=۰\Rightarrow ۲^{x-۱}=۲^{۱}\Rightarrow x-۱=۱\Rightarrow x=۲\Rightarrow A=(۲,۰)$$

$$x=۰\Rightarrow y=۲^{-۱}-۲=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow B=(۰,-\frac{۳}{۲})$$

بنابراین $AB=\sqrt{(۲-۰)^{۲}+(۰-(-\frac{۳}{۲}))^{۲}}=\frac{۵}{۲}$.

۲۱۵۲- گزینهٔ ۱ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(-\frac{۳}{۲})=۰\Rightarrow ۹^{-\frac{۳}{۲}+a}-۲b=۰\Rightarrow ۲b=۹^{-\frac{۳}{۲}+a}$$

$$f(۰)=۲۶\Rightarrow ۹^{a}-۲b=۲۶\Rightarrow ۲b=۹^{a}-۲۶$$

بنابراین

$$۹^{-\frac{۳}{۲}+a}=۹^{a}-۲۶\Rightarrow ۹^{a}-۹^{-\frac{۳}{۲}+a}=۲۶\Rightarrow ۹^{a}(۱-۹^{-\frac{۳}{۲}})=۲۶$$

$$۹^{a}(۱-\frac{۱}{۲۷})=۲۶\Rightarrow ۹^{a}=۲۷\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

در نتیجه $۲b=۹^{a}-۲۶=۱$ ، یعنی $b=\frac{۱}{۲}$. به این ترتیب، $a+b=۲$.

۲۱۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

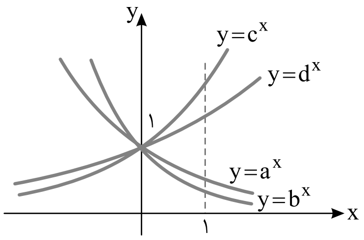
$$f(-۱)=۹\Rightarrow a^{-۱}+۱=۹\Rightarrow a^{-۱}=۸\Rightarrow a=\frac{۱}{۸}$$

بنابراین $f(x)=(\frac{۱}{۸})^{x}+۱$. از طرف دیگر

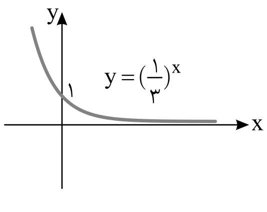
$$f(۰)=b\Rightarrow (\frac{۱}{۸})^{۰}+۱=b\Rightarrow b=۱+۱=۲$$

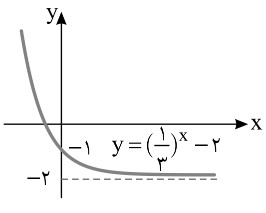
در نتیجه $ab=\frac{۱}{۴}$.

۲۱۵۴- گزینهٔ ۴ چون عرض نقطهٔ برخورد تابع‌ها با خط $x=۱$ به‌صورت a ، b ، c و d است، با توجه به نمودار چهار تابع و مقایسهٔ عرض نقطهٔ برخورد تابع‌ها با خط $x=۱$ معلوم می‌شود $c>d>a>b$.

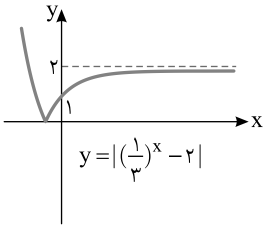


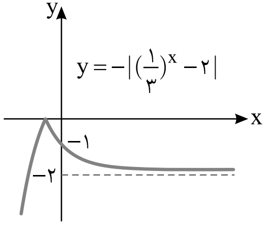
۲۱۵۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(x)=۱-|(\frac{۱}{۳})^{x}-۲|$. ابتدا نمودار $y=(\frac{۱}{۳})^{x}$ را رسم می‌کنیم و سپس آن را دو واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



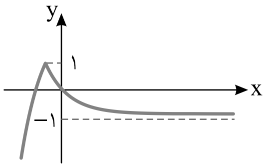


اکنون نمودار تابع $y=|(\frac{۱}{۳})^{x}-۲|$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:





در نهایت، نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



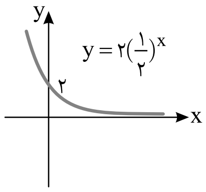
$$f(x)=۱-|(\frac{۱}{۳})^{x}-۲|$$

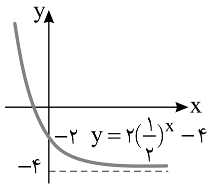
۲۱۵۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

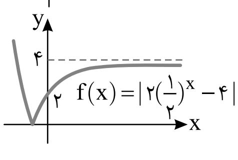
$$f(x)=\frac{|۲^{x+۱}-۱|}{۲^{x-۱}}=\frac{|۲^{x+۱}-۱|}{|۲^{x-۱}|}=|\frac{۲^{x+۱}-۱}{۲^{x-۱}}|=|\frac{۲^{x+۱}}{۲^{x-۱}}-\frac{۱}{۲^{x-۱}}|$$

$$=|۴-\frac{۲}{۲^{x}}|=|۴-۲(\frac{۱}{۲})^{x}|=|۲(\frac{۱}{۲})^{x}-۴|$$

بنابراین نمودار تابع f به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:







۲۱۵۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

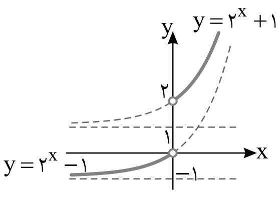
$$(fog)(x)=f(g(x))=۳^{g(x)-۲}=۳^{x+۲-۲}=۳^{x}$$

$$f(x)=۳^{x-۲}=\frac{۱}{۹}\times ۳^{x}\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۹}\times(fog)(x)\Rightarrow(fog)(x)=۹f(x)$$

۲۱۵۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}۲^{x}+۱ & x>۰\\ ۲^{x}-۱ & x<۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



پس برد تابع به‌صورت $(-۱,۰)\cup(۲,+\infty)$ است.

۲۱۵۹- گزینهٔ ۴ در تابع $f(x)=۲^{x^۲}+۱$ برای $x=۱$ و $x=-۱$ مقدار تابع برابر ۳ است. پس تابع یک‌به‌یک نیست.

۲۱۶۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که باید $k>۰$ و

$$f(x)=۲\times۲^x\times(\frac{۱}{k})^x=۲\times(\frac{۲}{k})^x$$

بنابراین، چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$\frac{۲}{k}>۱\xrightarrow{k>۰}k<۲$$

بنابراین $۰<k<۲$.

۲۱۶۱- گزینهٔ ۳ با توجه به فرض مسئله،

$$f(۰)=-\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^b-۶=-\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^b=\frac{۳}{۴}$$

$$a(\frac{۱}{۲})^{b-۲}=۳\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^{b-۳}=۶\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^{b-۳}-۶=۰\Rightarrow f(-۳)=۰$$

بنابراین نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول -۳ قطع می‌کند.

۲۱۶۲- گزینهٔ ۲ چون نمودار تابع‌های f و g در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع‌اند، پس

$$f(-۱)=g(-۱)\Rightarrow ۲^{-a+b}=(\frac{۱}{۴})^{-۱-b}=۲^{-۲(-۱-b)}=۲^{۲(۱+b)}$$

بنابراین

$$-a+b=۲(۱+b)\Rightarrow a+b=-۲ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$f(۱)g(۱)=۴\Rightarrow ۲^{a+b}\times(\frac{۱}{۴})^{۱-b}=۴\Rightarrow ۲^{a+b}\times۲^{-۲(۱-b)}=۲^۲$$

$$۲^{a+۳b-۲}=۲^۲\Rightarrow a+۳b=۴ \qquad (۲)$$

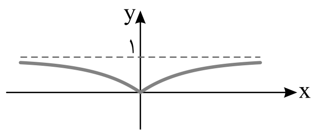
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-۵$ و $b=۳$، بنابراین $f(x)=۲^{-۵x+۳}$. اکنون فرض کنید $f^{-۱}(\frac{۱}{۱۲۸})=m$. در این صورت

$$f(m)=\frac{۱}{۱۲۸}\Rightarrow ۲^{-۵m+۳}=\frac{۱}{۱۲۸}=۲^{-۷}\Rightarrow -۵m+۳=-۷\Rightarrow m=۲$$

۲۱۶۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}۱-۲^x & x\leq۰\\ ۱-۲^{-x} & x>۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



راه‌حل دوم توجه کنید که

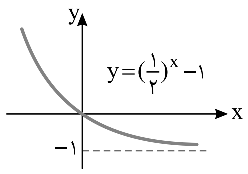
$$f(۱)=f(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

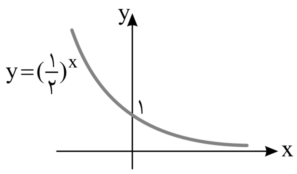
فقط گزینهٔ (۴) این شرط را دارد.

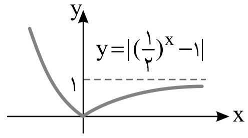
۲۱۶۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y=\frac{|۱-۲^x|}{۲^x}=\frac{|۱-۲^x|}{|۲^x|}=|\frac{۱-۲^x}{۲^x}|=|\frac{۱}{۲^x}-\frac{۲^x}{۲^x}|=|(\frac{۱}{۲})^x-۱|$$

بنابراین نمودار تابع به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:







۲۱۶۵- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $s=۲^{m-۲}+۱$. چون $f^{-۱}(s)=۲۶$، پس $f(۲۶)=s$. در نتیجه $f(۲۶)=۵(۲۶)-۱=۱۲۹$. اکنون می‌توان نوشت

$$s=۲^{m-۲}+۱=۱۲۹\Rightarrow ۲^{m-۲}=۱۲۸=۲^۷$$

بنابراین $m-۲=۷$، پس $m=۹$.

۲۱۶۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $g(x+۲)=۲^{x+۲-۱}=۲^{x+۱}$، بنابراین $f(۲^{x+۱})=۲^x+۱$.

$$f(۲^{x+۱})=۲^x+۱\Rightarrow f^{-۱}(۲^x+۱)=۲^{x+۱}$$

$$۲^x+۱=۹\Rightarrow ۲^x=۸=۲^۳\Rightarrow x=۳$$

بنابراین $f^{-۱}(۹)=۲^{۳+۱}=۱۶$.

۲۱۶۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$f(\frac{x}{۳})=۸^{\frac{x}{۳}}=۲^x,\quad g(x-۲)=۲^{۲(x-۲)+۵}=۲^{۲x+۱}$$

بنابراین

$$f(\frac{x}{۳})g(x-۲)=۲^x\times۲^{۲x+۱}=۲^{۳x+۱}=۲^{۳x}\times۲=۲\times۸^x=۲f(x)$$

۲۱۶۸- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=\frac{۲^x+۱}{۲^x+۲}=\frac{۲^x+۲}{۲^x+۲}+\frac{-۱}{۲^x+۲}=۱-\frac{۱}{۲^x+۲}$$

اکنون توجه کنید که برای هر x حقیقی، $۲^x>۰$. بنابراین

$$۲^x+۲>۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{۲^x+۲}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<-\frac{۱}{۲^x+۲}<۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}<۱-\frac{۱}{۲^x+۲}<۱$$

در نتیجه $\frac{۱}{۲}<f(x)<۱$.

۲۱۶۹- گزینهٔ ۴ می‌دانیم تابع‌های نمایی به شکل $f(x)=ka^x$ $(a>۰, a\neq۱)$، یک‌به‌یک هستند. در نتیجه تابع‌های $y=۳^{۱+۲x}$ و $y=۴^{۵-x}$ یک‌به‌یک هستند. تابع $f(x)=۲^{۳-|x|}$، یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر x حقیقی، $f(x)=f(-x)=۲^{۳-|x|}$. اکنون ثابت می‌کنیم تابع $y=۹^x+۲\times۳^{x+۱}$ یک‌به‌یک است. دقت کنید که $۹^x+۲\times۳^{x+۱}=(۳^x+۳)^۲-۹$. فرض می‌کنیم $f(x_۱)=f(x_۲)$. در نتیجه $(۳^{x_۱}+۳)^۲-۹=(۳^{x_۲}+۳)^۲-۹$. بنابراین $(۳^{x_۱}+۳)^۲=(۳^{x_۲}+۳)^۲$، چون $۳^{x_۱}+۳, ۳^{x_۲}+۳>۰$، پس

$$۳^{x_۱}+۳=۳^{x_۲}+۳\Rightarrow ۳^{x_۱}=۳^{x_۲}\Rightarrow x_۱=x_۲$$

۲۱۷۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

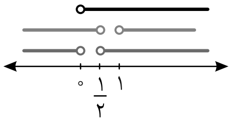
$$f(x)=k\times k^x\times(\frac{۱}{۲k-۱})^x=k(\frac{k}{۲k-۱})^x$$

تابع f اکیداً نزولی است، پس باید

$$۰<\frac{k}{۲k-۱}<۱$$

$$\frac{k}{۲k-۱}>۰\Rightarrow k>\frac{۱}{۲} \text{ یا } k<۰$$

$$\frac{k}{۲k-۱}<۱\Rightarrow\frac{k}{۲k-۱}-۱<۰\Rightarrow\frac{-k+۱}{۲k-۱}<۰\Rightarrow k>۱ \text{ یا } k<\frac{۱}{۲}$$



پس $k>۱$.

۲۱۷۱- گزینهٔ ۱ با فاکتورگیری از ۳^x معادله را حل می‌کنیم

$$۳^x(۳+۱)=۱۰۸\Rightarrow ۳^x\times۴=۱۰۸\Rightarrow ۳^x=۲۷=۳^۳\Rightarrow x=۳$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۲۱۷۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$۵^{x-۳}=(\frac{۱}{۵})^{x^۲}\Rightarrow ۵^{x-۳}=۵^{-x^۲}$$

$$x-۳=-x^۲\Rightarrow x^۲+x-۳=۰$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر -۱ است.

۲۱۷۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f^{-۱}(۵)=a\Rightarrow f(a)=۵$$

$$۲+۳^{a-۲}=۵\Rightarrow ۳^{a-۲}=۳\Rightarrow a-۲=۱\Rightarrow a=۳$$

۲۱۷۴- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $۲^x=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$t-\frac{۲}{t}+۱۵=۰\Rightarrow t^۲+۱۵t-۲=۰$$

این معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. از طرف دیگر، معلوم است که معادلهٔ $۲^x=a$ فقط وقتی جواب دارد که a مثبت باشد و البته اگر a مثبت باشد، این معادله فقط یک جواب دارد (که $\log_۲ a$ است). بنابراین معادلهٔ اصلی فقط یک جواب دارد.

۲۱۷۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل $۳\times۳^{۲x}-۹\times۳^x+۵=۰$ نوشت. اگر فرض کنیم $۳^x=t$، این معادله می‌شود $۳t^۲-۹t+۵=۰$. هر دو جواب این معادله مثبت‌اند و مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{۹}{۳}=۳$. به این ترتیب $۳^\alpha+۳^\beta=t_۱+t_۲=۳$.

۲۱۷۶- گزینهٔ ۲ از معادلهٔ $x+y=۵$ به‌دست می‌آید $y=۵-x$. با جای‌گذاری $۵-x$ به جای y در معادلهٔ $۲^x-۲^y=۴$، به‌دست می‌آید

$$۲^x-۲^{۵-x}=۴\Rightarrow ۲^x-\frac{۲^۵}{۲^x}=۴\Rightarrow(۲^x)^۲-۴(۲^x)-۳۲=۰$$

$$(۲^x-۸)(۲^x+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}۲^x+۴=۰\Rightarrow ۲^x=-۴ \quad (\text{غ.ق.ق.})\\ ۲^x-۸=۰\Rightarrow ۲^x=۸\Rightarrow x=۳\end{cases}$$

$$y=۵-x\xrightarrow{x=۳}y=۲$$

بنابراین $x-y=۱$.

۲۱۷۷- گزینهٔ ۲ عددهایی که مخرج کسر را صفر کنند، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس

$$|۲^x-۴|-۳=۰\Rightarrow ۲^x-۴=\pm۳\Rightarrow ۲^x=۷, ۲^x=۱$$

هر یک از معادله‌های بالا فقط یک جواب دارند و این دو جواب متمایز هستند پس دامنهٔ تابع شامل دو عدد نیست.

۲۱۷۸- گزینهٔ ۴ چون $(\frac{۳}{۲})^{-۱}=\frac{۲}{۳}$، پس نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$(\frac{۳}{۲})^{۱-۳x}<(\frac{۳}{۲})^{-(۳+x)}$$

اکنون توجه کنید که چون $\frac{۳}{۲}>۱$، پس $۱-۳x<-(۳+x)$، بنابراین $x>۲$.

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(۲,+\infty)$ است.

۲۱۷۹- گزینهٔ ۳ باید نامعادله‌های $۲^x-۸\geq۰$ و $۸۱-۳^x>۰$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را به‌دست آوریم

$$۲^x-۸\geq۰\Rightarrow ۲^x\geq۲^۳\Rightarrow x\geq۳,\quad ۸۱-۳^x>۰\Rightarrow ۳^x<۳^۴\Rightarrow x<۴$$

بنابراین $D_f=[۳,۴)$. در نتیجه $a=۳$، $b=۴$ و $a+b=۷$.

۲۱۸۰- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع f برابر است با

$$D_f=\{x|-۳^{۲x+۱}+۴\times۳^x-۱>۰\}$$

فرض می‌کنیم $۳^x=t$، در نتیجه باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$-۳t^۲+۴t-۱>۰\Rightarrow-(t-۱)(۳t-۱)>۰$$

جواب نامعادلهٔ بالا به‌صورت $\frac{۱}{۳}<t<۱$ است. در نتیجه $\frac{۱}{۳}<۳^x<۱$. بنابراین

$$-۱<x<۰$$

۲۱۸۱- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$۲^x(۱+۲+۲^۲)=۵^x(۲+۵)\Rightarrow ۲^x\times۷=۵^x\times۷$$

$$۲^x=۵^x\Rightarrow(\frac{۲}{۵})^x=۱\Rightarrow x=۰$$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۸۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل $۲^{|x|}=(۲^{-۱})^{x-x^۲}=۲^{x^۲-x}$ می‌نویسیم. بنابراین

$$|x|=x^۲-x \qquad (۱)$$

اگر $x\geq۰$، این معادله می‌شود:

$$x=x^۲-x\Rightarrow ۲x=x^۲\Rightarrow x=۲, x=۰$$

اگر $x<۰$، معادلهٔ (۱) می‌شود:

$$-x=x^۲-x\Rightarrow x^۲=۰$$

که چون $x<۰$، جواب ندارد. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد: $x=۰$ و $x=۲$.

۲۱۸۳- گزینهٔ ۳ ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $۳^x-۱=۸$، یعنی $۳^x=۹$، پس $x=۲$. به این ترتیب، اگر در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم، ۲ به‌دست می‌آید $f(۸)=۲^۳+۱=۹$. از طرف دیگر،

$$f^{-۱}(۲)=a\Rightarrow f(a)=۲$$

$$x^۳+۱=۲\Rightarrow x^۳=۱\Rightarrow x=۱$$

پس

$$f(۳^۱-۱)=۱^۳+۱\Rightarrow f(۲)=۲$$

در نتیجه $f^{-۱}(۲)=۲$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $۹+۲=۱۱$.

۲۱۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sqrt{۵}-۲=\frac{۱}{\sqrt{۵}+۲}$. بنابراین اگر فرض کنیم $t=(\sqrt{۵}+۲)^{x}$. معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$t+\frac{۱}{t}=۱۸\Rightarrow t^{۲}-۱۸t+۱=۰\Rightarrow t=۹+۴\sqrt{۵}=(\sqrt{۵}+۲)^{x}\Rightarrow x=۲$$

$$t=۹-۴\sqrt{۵}=(\sqrt{۵}+۲)^{x}\Rightarrow x=-۲$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -۴ است.

۲۱۸۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲^{۲x}+۲^{x}\times ۳^{x}=۲\times ۳^{۲x}$$

اگر فرض کنیم $a=۲^{x}$ و $b=۳^{x}$، این معادله می‌شود:

$$a^{۲}+ab=۲b^{۲}\Rightarrow a^{۲}-b^{۲}=b^{۲}-ab\Rightarrow (a-b)(a+b)=b(b-a)$$

$$(a-b)(a+b+b)=۰\Rightarrow (a-b)(a+۲b)=۰$$

بنابراین

$$a-b=۰\Rightarrow ۲^{x}=۳^{x}\Rightarrow (\frac{۲}{۳})^{x}=۱\Rightarrow x=۰$$

$a+۲b=۰\Rightarrow ۲^{x}+۲\times ۳^{x}=۰$ جواب ندارد.

در نتیجه، معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد: $x=۰$.

۲۱۸۶- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $a=۲^{x}$ و $b=۳^{y}$، در نتیجه

$$\begin{cases}\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=-۷\\ ab=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow b=\frac{۱}{۱۸a}\end{cases}\Rightarrow \frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=-۷\Rightarrow \frac{۱}{a}-۱۸a=-۷$$

$$۱۸a^{۲}-۷a-۱=۰\Rightarrow (۹a+۱)(۲a-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}a=-\frac{۱}{۹}=۲^{x}\ \text{جواب ندارد.}\\ a=\frac{۱}{۲}=۲^{x}\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

۲۱۸۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۳}+\sqrt{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{-۱}$$

بنابراین نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۱-۲x}>(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{-x-۳}$$

چون $۰<\sqrt{۳}-\sqrt{۲}<۱$، پس

$$۱-۲x<-x-۳\Rightarrow x>۴$$

۲۱۸۸- گزینهٔ ۴ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$۸(۲^{x})^{۲}-۶(۲^{x})+۱\geq ۰$$

اگر فرض کنیم $t=۲^{x}$، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$۸t^{۲}-۶t+۱\geq ۰\Rightarrow (۲t-۱)(۴t-۱)\geq ۰\Rightarrow t\geq \frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ t\leq \frac{۱}{۴}$$

$$t\geq \frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲^{x}\geq \frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲^{x}\geq ۲^{-۱}\Rightarrow x\geq -۱$$

$$t\leq \frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲^{x}\leq \frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲^{x}\leq ۲^{-۲}\Rightarrow x\leq -۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\infty,-۲]\cup[-۱,+\infty)$ است که همان $\mathbb{R}-(-۲,-۱)$ است. پس $a=-۲$، $b=-۱$ و در نتیجه $a+b=-۳$.

۲۱۸۹- گزینهٔ ۳ باید نامعادلهٔ $۲^{x+۱}-۴^{x}\geq ۰$ را حل کنیم تا دامنهٔ تابع به‌دست آید

$$۲^{x+۱}-۴^{x}\geq ۰\Rightarrow ۲\times ۲^{x}-(۲^{x})^{۲}\geq ۰\Rightarrow ۲^{x}(۲-۲^{x})\geq ۰$$

با توجه به اینکه $۲^{x}>۰$ نتیجه می‌شود

$$۲-۲^{x}\geq ۰\Rightarrow ۲^{x}\leq ۲\Rightarrow x\leq ۱$$

بنابراین $a=۱$.

۲۱۹۰- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f مجموعهٔ xهایی است که

$$\frac{(\frac{۱}{۲})^{x}-۴}{۲۷-۳^{x}}\geq ۰$$

$$(\frac{۱}{۲})^{x}-۴=۰\Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{x}=۴=۲^{۲}\Rightarrow x=-۲$$

$$۲۷-۳^{x}=۰\Rightarrow ۳^{x}=۲۷=۳^{۳}\Rightarrow x=۳$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$		-۲		۳		$+\infty$
$(\frac{۱}{۲})^{x}-۴$		+	۰	−		−	
$۲۷-۳^{x}$		+		+	۰	−	
$\frac{(\frac{۱}{۲})^{x}-۴}{۲۷-۳^{x}}$		+	۰	−	ت ن	+	

بنابراین

$$D_{f}=(-\infty,-۲]\cup(۳,+\infty)=\mathbb{R}-(-۲,۳]$$

در نتیجه $a=-۲$، $b=۳$ و $a+b=۱$.

۲۱۹۱- گزینهٔ ۱ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log ۹۰=\log(۹\times ۱۰)=\log ۹+\log ۱۰=\log ۳^{۲}+۱=۲\log ۳+۱=۲a+۱$$

۲۱۹۲- گزینهٔ ۱ با استفاده از ویژگی $\log_{b} a=\frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت

$$\log ۶-\log ۲\times \log_{۲} ۳=\log ۶-\log ۲\times \frac{\log ۳}{\log ۲}$$

$$=\log ۶-\log ۳=\log \frac{۶}{۳}=\log ۲$$

۲۱۹۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=۱$. بنابراین $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$. در نتیجه

$$\log_{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=\log_{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}(\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}})=-۱$$

۲۱۹۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲۷\sqrt[۳]{۸۱}}}=۳^{\frac{۱}{۴}}\times ۲۷^{\frac{۱}{۴\times ۲}}\times ۸۱^{\frac{۱}{۴\times ۲\times ۳}}$$

$$=۳^{\frac{۱}{۴}}\times ۳^{\frac{۳}{۴\times ۲}}\times ۳^{\frac{۴}{۴\times ۲\times ۳}}=۳^{\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۶}}=۳^{\frac{۶+۹+۴}{۲۴}}=۳^{\frac{۱۹}{۲۴}}$$

بنابراین

$$\log_{۳}\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲۷\sqrt[۳]{۸۱}}}=\log_{۳} ۳^{\frac{۱۹}{۲۴}}=\frac{۱۹}{۲۴}\log_{۳} ۳=\frac{۱۹}{۲۴}$$

۲۱۹۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_{۴} ۵=\frac{\log ۵}{\log ۴}=\frac{\log ۵}{۲\log ۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\log ۵}{\log ۲}=\frac{۱}{۲}\log_{۲} ۵$$

در نتیجه باید حاصل عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}\log_{۲} ۵}=(۲^{-۱})^{\frac{۱}{۲}\log_{۲} ۵}=۲^{-\frac{۱}{۲}\log_{۲} ۵}=(\underbrace{۲^{\log_{۲} ۵}}_{۵})^{-\frac{۱}{۲}}=۵^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

۲۱۹۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $۲۱۶=۶^{۳}=۲^{۳}\times۳^{۳}$ ، در نتیجه

$$\log ۲۱۶=\log(۲^{۳}\times۳^{۳})=\log ۲^{۳}+\log ۳^{۳}$$

$$=۳\log ۲+۳\log ۳=۳x+۳y$$

۲۱۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log ۵+\log ۲۰=\log(۵\times۲۰)=\log ۱۰۰=۲$$

بنابراین $\log ۲۰=۲-\log ۵=۲-a$.

۲۱۹۸- گزینهٔ ۲ از دو طرف تساوی $۲^{x}=۳^{y}$ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log ۲^{x}=\log ۳^{y}\Rightarrow x\log ۲=y\log ۳$$

بنابراین

$$\frac{\log ۳}{\log ۲}=\frac{x}{y}\Rightarrow\log_{۲} ۳=\frac{x}{y}$$

در نتیجه $\log_{۸} ۹=\log_{۲^{۳}} ۳^{۲}=\frac{۲}{۳}\log_{۲} ۳=\frac{۲x}{۳y}$.

۲۱۹۹- گزینهٔ ۱ از تساوی $۳^{\log_{۲} ۵}=b$ نتیجه می‌شود

$$\log_{۳} b=\log_{۲} ۵$$

از تساوی $۲^{\log_{۵} ۳}=a$ نتیجه می‌شود

$$۳^{\log_{۵} ۲}=a\Rightarrow\log_{۳} a=\log_{۵} ۲$$

بنابراین $\log_{۳} a\times\log_{۳} b=\log_{۵} ۲\times\log_{۲} ۵=۱$.

۲۲۰۰- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $۲\times۲^{x}=۵^{x}$ بازنویسی می‌کنیم. در نتیجه $(\frac{۵}{۲})^{x}=۲$. بنابراین با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت

$$x=\log_{\frac{۵}{۲}} ۲=\frac{۱}{\log_{۲}\frac{۵}{۲}}=\frac{۱}{\log_{۲} ۵-\log_{۲} ۲}=\frac{۱}{\log_{۲} ۵-۱}$$

۲۲۰۱- گزینهٔ ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$A=\log(۲۰\times۳۰\times۵۰)=\log(۳\times۱۰^{۴})=\log ۳+\log ۱۰^{۴}=a+۴$$

۲۲۰۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{۱}{\log_{۶} ۱۸}=\log_{۱۸} ۶,\quad\frac{۱}{\log_{۳} ۱۸}=\log_{۱۸} ۳$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\log_{۱۸}۶+\log_{۱۸}۳=\log_{۱۸}(۳\times۶)=۱$$

۲۲۰۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $(\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱})^{۲}=(۱+\sqrt{۲})^{۲}=۳+۲\sqrt{۲}$.

بنابراین

$$\log_{(\sqrt{۲}-۱)}(۳+۲\sqrt{۲})=\log_{(\sqrt{۲}-۱)}(\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱})^{۲}$$

$$=۲\log_{(\sqrt{۲}-۱)}(\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱})=-۲$$

۲۲۰۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_{۲}\sqrt[۴]{۴\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲}}}=\log_{۲}(۴^{\frac{۱}{۴}}\times۴^{\frac{۱}{۱۲}}\times۲^{\frac{۱}{۲۴}})$$

$$=\log_{۲} ۲^{\frac{۲}{۴}+\frac{۲}{۱۲}+\frac{۱}{۲۴}}=\log_{۲} ۲^{\frac{۱۷}{۲۴}}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

$$\log_{۲}\sqrt{۲\sqrt[۳]{۴\sqrt[۴]{۴}}}=\log_{۲}(۲^{\frac{۱}{۲}}\times۴^{\frac{۱}{۶}}\times۴^{\frac{۱}{۲۴}})$$

$$=\log_{۲} ۲^{\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۶}+\frac{۲}{۲۴}}=\log_{۲} ۲^{\frac{۲۲}{۲۴}}=\frac{۲۲}{۲۴}$$

بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{۱۷}{۲۴}}{\frac{۲۲}{۲۴}}=\frac{۱۷}{۲۲}$.

۲۲۰۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\log_{۸} ۳=\log_{۲^{۳}} ۳=\frac{۱}{۳}\log_{۲} ۳$$

در نتیجه عبارت مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۲^{۳+\log_{۸} ۳}=۲^{۳+\frac{۱}{۳}\log_{۲} ۳}=۲^{۳}\times۲^{\frac{۱}{۳}\log_{۲} ۳}=۸\times(\underbrace{۲^{\log_{۲} ۳}}_{۳})^{\frac{۱}{۳}}=۸(۳)^{\frac{۱}{۳}}=۸\sqrt[۳]{۳}$$

راه‌حل دوم

$$۲^{۳}\times۲^{\log_{۸} ۳}=۸\times۳^{\log_{۸} ۲}=۸\times۳^{\log_{۲^{۳}} ۲}=۸\times۳^{\frac{۱}{۳}}=۸\sqrt[۳]{۳}$$

۲۲۰۶- گزینهٔ ۴ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log\sqrt[۳]{۶/۴}=\log\sqrt[۳]{\frac{۶۴}{۱۰}}=\log\sqrt[۳]{\frac{۳۲}{۵}}=\frac{۱}{۳}\log\frac{۳۲}{۵}=\frac{۱}{۳}(\log ۳۲-\log ۵)$$

$$=\frac{۱}{۳}(\log ۲^{۵}-\log\frac{۱۰}{۲})=\frac{۱}{۳}(۵\log ۲-(\log ۱۰-\log ۲))$$

$$=\frac{۱}{۳}(۶\log ۲-\log ۱۰)=\frac{۱}{۳}(۶a-۱)=۲a-\frac{۱}{۳}$$

۲۲۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_{۵} ۲=a\Rightarrow\frac{\log ۲}{\log ۵}=a\Rightarrow\log ۲=a\log ۵$$

$$\log_{۳} ۵=b\Rightarrow\frac{\log ۵}{\log ۳}=b\Rightarrow\log ۳=\frac{\log ۵}{b}$$

بنابراین

$$\log_{۱۵} ۴=\frac{\log ۴}{\log ۱۵}=\frac{۲\log ۲}{\log ۳+\log ۵}=\frac{۲a\log ۵}{\frac{\log ۵}{b}+\log ۵}=\frac{۲a}{\frac{۱}{b}+۱}=\frac{۲ab}{b+۱}$$

۲۲۰۸- گزینهٔ ۲ چون $۳۸۵=۵\times۷\times۱۱$ ، پس طرفین سه تساوی داده شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$\log ۱۱+\log ۵+\log ۵+\log ۷+\log ۷+\log ۱۱=a+b+c$$

$$۲(\log ۱۱+\log ۵+\log ۷)=a+b+c$$

$$۲\log(۱۱\times۵\times۷)=a+b+c\Rightarrow\log ۳۸۵=\frac{a+b+c}{۲}$$

۲۲۰۹- گزینهٔ ۱ با توجه به خاصیت $\log_{b} a=\frac{۱}{\log_{a} b}$ می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{۱-\log_{۲} ۳}+\frac{۱}{۱-\log_{۳} ۲}=\frac{۱}{۱-\log_{۲} ۳}+\frac{۱}{۱-\frac{۱}{\log_{۲} ۳}}$$

$$=\frac{۱}{۱-\log_{۲} ۳}+\frac{\log_{۲} ۳}{\log_{۲} ۳-۱}=\frac{۱-\log_{۲} ۳}{۱-\log_{۲} ۳}=۱$$

۲۲۱۰- گزینهٔ ۱ معادلـه را به‌صورت $(۳^{x})^{۲}-۳^{x}-۲=۰$ می‌نویسـیم. در نتیجـه $(۳^{x}+۱)(۳^{x}-۲)=۰$، چون عبارت $۳^{x}+۱$ همواره مثبت اسـت، نتیجه می‌شود

$$۳^{x}-۲=۰\Rightarrow ۳^{x}=۲\Rightarrow x=\log_{۳} ۲$$

۲۲۱۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با توجه به اینکه

$$\log_{c} a+\log_{c} b=\log_{c}(ab)$$

داریم

$$A=\log_{۵}(\frac{۵}{۶}\times\frac{۶}{۷}\times\frac{۷}{۸}\times\cdots\times\frac{۱۲۴}{۱۲۵})=\log_{۵}\frac{۵}{۱۲۵}=\log_{۵}\frac{۱}{۲۵}=\log_{۵} ۵^{-۲}=-۲$$

راه‌حل دوم با توجه به تساوی $\log_{c}\frac{a}{b}=\log_{c} a-\log_{c} b$ می‌توان نوشت

$$A=\log_{۵} ۵-\log_{۵} ۶+\log_{۵} ۶-\log_{۵} ۷+\log_{۵} ۷-\log_{۵} ۸+\cdots+\log_{۵} ۱۲۴-\log_{۵} ۱۲۵=\log_{۵} ۵-\log_{۵} ۱۲۵=۱-۳=-۲$$

۲۲۱۲- گزینهٔ ۱ چون $\log_{b} a=\frac{۱}{\log_{a} b}$، پس

$$\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\log_{۲} ۳}}=\frac{۱}{۱+\log_{۳} ۲}=\frac{۱}{\log_{۳} ۳+\log_{۳} ۲}=\frac{۱}{\log_{۳}(۳\times۲)}=\frac{۱}{\log_{۳} ۶}=\log_{۶} ۳$$

۲۲۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲\log(۳+\sqrt{۵})=\log(۳+\sqrt{۵})^{۲}=\log(۹+۵+۶\sqrt{۵})=\log(۱۴+۶\sqrt{۵})$$

بنابراین

$$\log(۲۸+۱۲\sqrt{۵})-۲\log(۳+\sqrt{۵})=\log(۲۸+۱۲\sqrt{۵})-\log(۱۴+۶\sqrt{۵})=\log\frac{۲۸+۱۲\sqrt{۵}}{۱۴+۶\sqrt{۵}}=\log ۲=k$$

۲۲۱۴- گزینهٔ ۲ به کمک تساوی $\log_{b} a=\frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت

$$\log_{۲}۳\times\log_{۳}۵\times\log_{۵}۸=\frac{\log ۳}{\log ۲}\times\frac{\log ۵}{\log ۳}\times\frac{\log ۸}{\log ۵}=\frac{\log ۸}{\log ۲}=\frac{۳\log ۲}{\log ۲}=۳$$

۲۲۱۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a=۵^{\log ۲۰}=۵^{\log ۱۰+\log ۲}=۵^{۱+\log ۲}=۵\times۵^{\log ۲}=۵\times۲^{\log ۵}$$

$$b=۲^{\log ۵۰}=۲^{\log ۱۰+\log ۵}=۲^{۱+\log ۵}=۲\times۲^{\log ۵}$$

بنابراین $\frac{a}{b}=\frac{۵\times۲^{\log ۵}}{۲\times۲^{\log ۵}}=\frac{۵}{۲}$.

۲۲۱۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\log ۱۵=\frac{\log_{۳} ۱۵}{\log_{۳} ۱۰}$. از طرف دیگر

$$\log_{۳} ۱۵=\log_{۳}(۳\times۵)=\log_{۳} ۳+\log_{۳} ۵=۱+b$$

$$\log_{۳} ۱۰=\log_{۳}(۲\times۵)=\log_{۳} ۲+\log_{۳} ۵=\frac{۱}{\log_{۲} ۳}+\log_{۳} ۵=\frac{۱}{a}+b=\frac{۱+ab}{a}$$

بنابراین $\log ۱۵=\frac{۱+b}{\frac{۱+ab}{a}}=\frac{a(۱+b)}{۱+ab}$.

۲۲۱۷- گزینهٔ ۲ چون $\log_{a^{x}} b=\frac{۱}{x}\log_{a} b$، پس

$$\log_{۸} ۱۰=a\Rightarrow\log_{۲^{۳}}(۲\times۵)=a\Rightarrow\frac{۱}{۳}\log_{۲}(۲\times۵)=a$$

$$\frac{۱}{۳}(\log_{۲} ۲+\log_{۲} ۵)=a\Rightarrow ۱+\log_{۲} ۵=۳a\Rightarrow\log_{۲} ۵=۳a-۱$$

بنابراین

$$\log_{۴۰} ۵۰=\frac{\log_{۲} ۵۰}{\log_{۲} ۴۰}=\frac{\log_{۲}(۲\times۵^{۲})}{\log_{۲}(۲^{۳}\times۵)}=\frac{\log_{۲} ۲+\log_{۲} ۵^{۲}}{\log_{۲} ۲^{۳}+\log_{۲} ۵}$$

$$=\frac{۱+۲\log_{۲} ۵}{۳+\log_{۲} ۵}=\frac{۱+۲(۳a-۱)}{۳+۳a-۱}=\frac{۶a-۱}{۳a+۲}$$

۲۲۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\log_{a} x=\frac{\log x}{\log a},\quad \log_{ab} x=\frac{\log x}{\log(ab)}$$

بنابراین

$$\frac{\log_{a} x}{\log_{ab} x}=۳\Rightarrow\frac{\frac{\log x}{\log a}}{\frac{\log x}{\log(ab)}}=۳\Rightarrow\frac{\log(ab)}{\log a}=۳$$

$$\frac{\log a+\log b}{\log a}=۳\Rightarrow ۱+\frac{\log b}{\log a}=۳\Rightarrow\log_{a} b=۲$$

بنابراین $\log_{b} a=\frac{۱}{\log_{a} b}=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه $\log_{a} b+\log_{b} a=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$.

۲۲۱۹- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۲^{x})^{۲}-۸\times۲^{x}+۱۵=۰$$

بنابراین $(۲^{x}-۵)(۲^{x}-۳)=۰$، پس

$$\begin{cases} ۲^{x}-۳=۰\Rightarrow ۲^{x}=۳\Rightarrow x=\log_{۲} ۳\\ ۲^{x}-۵=۰\Rightarrow ۲^{x}=۵\Rightarrow x=\log_{۲} ۵\end{cases}$$

چون $f(x)=\log_{۲} x$ تابعی اکیداً صعودی اسـت، پس $\log_{۲} ۵>\log_{۲} ۳$، در نتیجه بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ مورد نظر $\log_{۲} ۵$ است.

۲۲۲۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حـل اول** از دو طـرف معادلـهٔ $۲^{x}=۳^{y}$ در پایهٔ ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_{۳} ۲^{x}=\log_{۳} ۳^{y}\Rightarrow x\log_{۳} ۲=y\log_{۳} ۳\Rightarrow y=x\log_{۳} ۲$$

در معادلهٔ $x+y=۱$ به جای y قرار می‌دهیم $x\log_{۳} ۲$، در نتیجه

$$x+x\log_{۳} ۲=۱\Rightarrow x(۱+\log_{۳} ۲)=۱$$

$$x(\log_{۳} ۳+\log_{۳} ۲)=۱\Rightarrow x\log_{۳} ۶=۱$$

$$x=\frac{۱}{\log_{۳} ۶}\Rightarrow x=\log_{۶} ۳$$

راه‌حل دوم

$$x+y=۱\Rightarrow y=۱-x$$

$$۲^{x}=۳^{۱-x}\Rightarrow ۲^{x}=\frac{۳}{۳^{x}}\Rightarrow ۶^{x}=۳\Rightarrow x=\log_{۶} ۳$$

۲۲۲۱- گزینهٔ ۴ اگر $f^{-1}(۸)=t$، آن‌گاه $f(t)=۸$، بنابراین

$$۳+۵\log(۲t-۳)=۸\Rightarrow\log(۲t-۳)=۱\Rightarrow ۲t-۳=۱۰\Rightarrow t=\frac{۱۳}{۲}$$

۲۲۲۲- گزینهٔ ۲ چون نمودار تابع f از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۳,۴)$ می‌گذرد، پس

$$f(۲)=۳\Rightarrow a+\log_{\frac{۱}{۲}}(۲b+۱)=۳ \qquad (۱)$$

$$f(۳)=۴\Rightarrow a+\log_{\frac{۱}{۲}}(۳b+۱)=۴ \qquad (۲)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(۲b+۱)-\log_{\frac{۱}{۲}}(۳b+۱)=-۱$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۲b+۱}{۳b+۱}=-۱\Rightarrow\frac{۲b+۱}{۳b+۱}=۲\Rightarrow b=-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید:

$$a=۳-\log_{\frac{۱}{۲}}(-\frac{۱}{۲}+۱)=۳-\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲}=۳-۱=۲$$

۲۲۲۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل دامنهٔ تابع به‌صورت $(-۳,+\infty)$ است. پس دامنهٔ تابع باید به شکل $(-\frac{b}{a},+\infty)$ باشد. بنابراین

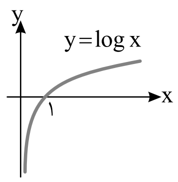
$$-\frac{b}{a}=-۳\Rightarrow b=۳a$$

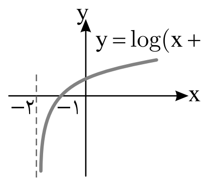
همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,-۲)$ می‌گذرد. بنابراین

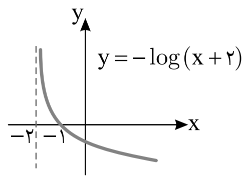
$$f(۰)=\log_{\frac{۱}{۳}}b=-۲\Rightarrow b=(\frac{۱}{۳})^{-۲}=۹$$

در نتیجه $a=۳$. بنابراین $ab=۲۷$.

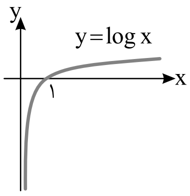
۲۲۲۴- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\log(x+۲)$ به‌دست آید. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\log(x+۲)$ به‌دست آید.

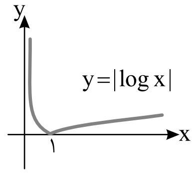


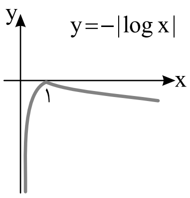




۲۲۲۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمت‌های پایین محور طول‌ها را حذف می‌کنیم. تا نمودار $y=|\log x|$ به‌دست آید. سپس نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-|\log x|$ رسم شود.



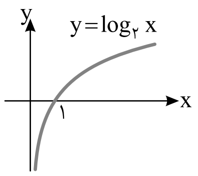


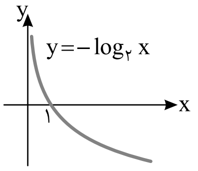


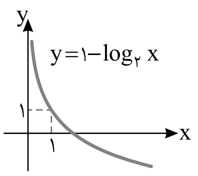
۲۲۲۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log_۲\frac{۲}{x}=\log_۲ ۲-\log_۲ x=۱-\log_۲ x$$

بنابراین نمودار تابع به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:







۲۲۲۷- گزینهٔ ۲ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$۱۰-x>۰\Rightarrow x<۱۰,\quad x-۲>۰\Rightarrow x>۲,\quad x-۲\neq۱\Rightarrow x\neq۳$$

پس دامنهٔ تابع $(۲,۱۰)-\{۳\}$ است که شامل شش عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ است.

۲۲۲۸- گزینهٔ ۳ باید همواره $x^۲-۲mx+۴>۰$، چون ضریب $x^۲$ مثبت است، باید $\Delta<۰$.

$$\Delta=b^۲-۴ac<۰\Rightarrow(-۲m)^۲-۴\times(۱)\times۴<۰$$

$$۴m^۲-۱۶<۰\Rightarrow۴(m^۲-۴)<۰\Rightarrow|m|<۲\Rightarrow-۲<m<۲$$

۲۲۲۹- گزینهٔ ۳ با تغییرات دو مرحلهٔ اول به تابع $f(x)=۲^{x-۱}+۱$ می‌رسیم. با قرینه کردن نمودار تابع نسبت به خط $y=x$، به تابع وارون f می‌رسیم. ضابطهٔ تابع وارون f به‌صورت زیر پیدا می‌شود:

$$y=۱+۲^{x-۱}\Rightarrow۲^{x-۱}=y-۱\Rightarrow x-۱=\log_۲(y-۱)\Rightarrow x=\log_۲(y-۱)+۱$$

در نتیجه $f^{-۱}(x)=\log_۲(x-۱)+۱$.

۲۲۳۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $y=-\log_۲(x-۱)+۲$. در نتیجه

$$۲-y=\log_۲(x-۱)\Rightarrow۲^{۲-y}=x-۱$$

بنابراین $x=۲^{۲-y}+۱$، پس $f^{-۱}(x)=۲^{۲-x}+۱$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۳)=-\log_۲ ۲+۲=۱$، بنابراین $f^{-۱}(۱)=۳$. فقط گزینهٔ (۳) در این شرط صدق می‌کند.

۲۲۳۱- گزینهٔ ۴ چون $f^{-۱}(۳)=۲۹$ ، پس $f(۲۹)=۳$ در نتیجه

$$\log_۳(۲\times۲۹-k)=۳\Rightarrow ۵۸-k=۳^۳=۲۷\Rightarrow k=۳۱$$

۲۲۳۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f نیمساز ناحیهٔ اول را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(۲,۲)$ می‌گذرد. همچنین نمودار تابع f نیمساز ناحیهٔ دوم را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(-۱,۱)$ می‌گذرد. به این ترتیب

$$f(۲)=۲\Rightarrow \log_۲(۲a+b)=۲\Rightarrow ۲a+b=۴ \qquad (۱)$$

$$f(-۱)=۱\Rightarrow \log_۲(-a+b)=۱\Rightarrow -a+b=۲ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{۲}{۳}$ و $b=\frac{۸}{۳}$.

۲۲۳۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=(-۲,+\infty)$ ، پس $x=-۲$ باید ریشهٔ عبارت $bx+c$ باشد. بنابراین

$$-۲b+c=۰ \quad (۱)$$

از طرف دیگر $f(۰)=-۱$ و $f(-۱)=۰$. پس

$$f(۰)=\log_a c=-۱\Rightarrow c=\frac{۱}{a} \quad (۲)$$

$$f(-۱)=\log_a(-b+c)=۰\Rightarrow -b+c=۱ \quad (۳)$$

از معادلات (۱) و (۳) نتیجه می شود $b=۱$ و $c=۲$. همچنین از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $a+b+c=\frac{۷}{۲}$.

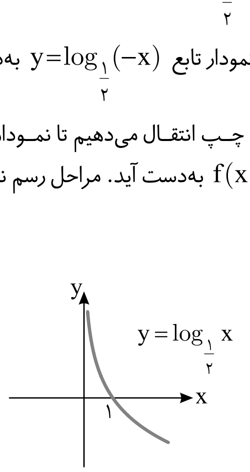
۲۲۳۴- گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها از معادلهٔ $f(x)=۰$ به‌دست می‌آید:

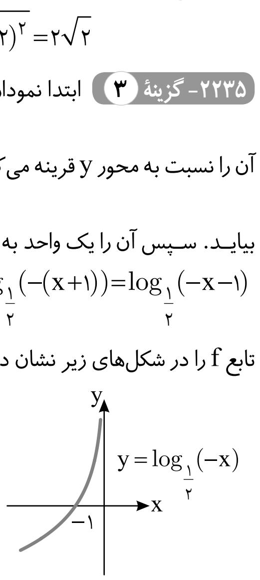
$$f(x)=\log_۲(۳x-۵)=۰\Rightarrow ۳x-۵=۱\Rightarrow x=۲$$

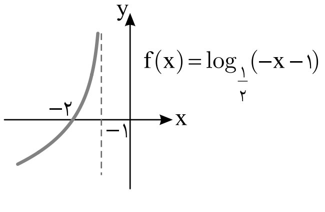
پس نقطهٔ برخورد نمودار f با محور طول‌ها $A(۲,۰)$ است. بنابراین نقطهٔ برخورد نمودار تابع وارون f با محور عرض‌ها $B(۰,۲)$ است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

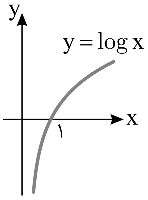
۲۲۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(-x)$ به‌دست بیاید. سپس آن را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(-(x+۱))=\log_{\frac{۱}{۲}}(-x-۱)$ به‌دست آید. مراحل رسم نمودار تابع f را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم:

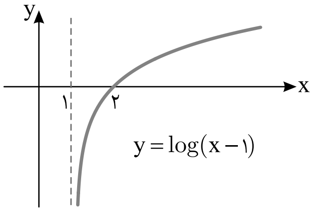


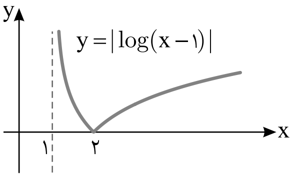


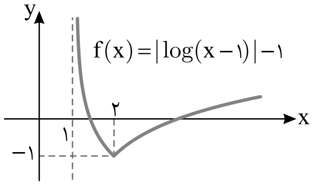


۲۲۳۶- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\log(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\log(x-۱)|$ به‌دست آید و آن قسمت‌ها را حذف می‌کنیم. در آخر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست آید.





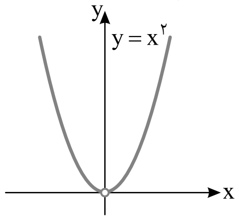




۲۲۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی مخالف صفر است و با توجه به اینکه $a^{\log_a g(x)}=g(x)$

$$f(x)=۲^{\log_۲ x^۲}=x^۲, \quad x\neq ۰$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۲۳۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه عبارت $\log_{(x-۱)}(۱۶-x^۲)$ معنادار باشد، باید

$$۱۶-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۱۶\Rightarrow -۴<x<۴\,,\; x-۱>۰\Rightarrow x>۱,\; x-۱\neq ۱\Rightarrow x\neq ۲$$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f=(۱,۴)-\{۲\}$ است، پس $a=۱$ ، $b=۴$ و $c=۲$ و در نتیجه $a+b+c=۷$.

۲۲۳۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$y=\frac{۴-۲^{x+۱}}{۲^x-۱}\Rightarrow y\times۲^x-y=۴-۲^{x+۱}$$

$$۲^x(y+۲)=۴+y\Rightarrow ۲^x=\frac{۴+y}{y+۲}\Rightarrow x=\log_۲(\frac{۴+y}{y+۲})$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\log_۲(\frac{۴+x}{x+۲})$.

۲۲۴۰- گزینهٔ ۲ برای محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون تابع داده شده، x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{\log x}{۱+\log x}\Rightarrow y+y\log x=\log x\Rightarrow (y-۱)\log x=-y$$

$$\log x=\frac{y}{۱-y}\Rightarrow x=۱۰^{\frac{y}{۱-y}}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=۱۰^{\frac{x}{۱-x}}$.

۲۲۴۱- گزینهٔ ۳ کافی است معادلهٔ $x^۲-۳x=x$ را حل کنیم:

$$x^۲-۴x=۰\Rightarrow x=۰, x=۴$$

واضح است که $x=۰$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۲۴۲- گزینهٔ ۱ معادله را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_۲(۱۲b-۲۱)-\log_۲(b^۲-۳)=\log_۲(\frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳})=۲$$

در نتیجه

$$\frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳}=۲^۲=۴\Rightarrow ۴b^۲-۱۲=۱۲b-۲۱$$

بنابراین

$$۴b^۲-۱۲b+۹=(۲b-۳)^۲=۰$$

بنابراین $b=\frac{۳}{۲}$. اما به ازای $b=\frac{۳}{۲}$ هیچ‌یک از عبارت‌های $\log_۲(۱۲b-۲۱)$ و $\log_۲(b^۲-۳)$ معنادار نیست، بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۲۴۳- گزینهٔ ۱ طبق تعریف لگاریتم

$$\log_۲(\log_۳(x-۱))=۵\Rightarrow \log_۳(x-۱)=۲^۵=۳۲$$

$$x-۱=۳^{۳۲}\Rightarrow x=۳^{۳۲}+۱$$

۲۲۴۴- گزینهٔ ۴ چون $\log_{a^k} b=\frac{۱}{k}\log_a b$، پس معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\log_{۲^۲} x+\log_{۲^۴} x^۲+\log_{۲^۶} x^۳=۹$$

$$\frac{۱}{۲}\log_۲ x+\frac{۲}{۴}\log_۲ x+\frac{۳}{۶}\log_۲ x=۹$$

$$\frac{۳}{۲}\log_۲ x=۹\Rightarrow \log_۲ x=۶\Rightarrow x=۲^۶=۶۴$$

۲۲۴۵- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $\log_۳ x=t$، در نتیجه $\log_x ۳=\frac{۱}{t}$.

بنابراین به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$t-\frac{۶}{t}+۱=۰\Rightarrow t^۲+t-۶=۰\Rightarrow (t-۲)(t+۳)=۰\Rightarrow t=-۳, t=۲$$

پس

$$\log_۳ x=-۳\Rightarrow x=۳^{-۳}$$

$$\log_۳ x=۲\Rightarrow x=۳^۲$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۲۲۴۶- گزینهٔ ۱ باید هر دو عبارت $\log(x+۲)$ و $\log(۳-x)$ بامعنا باشند و نیز $\log(۳-x)\neq۰$، پس

$$D_f=\{x|x+۲>۰, ۳-x>۰, \log(۳-x)\neq۰\}$$

اگر $\log(۳-x)=۰$، آن‌گاه $x=۲$. بنابراین دامنهٔ تابع f به‌صورت $(-۲,۳)-\{۲\}$ است.

۲۲۴۷- گزینهٔ ۳ دامنهٔ توابع f و g به شکل زیر هستند:

$$x^۲>۰\Rightarrow x\neq۰\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}, \quad x-۱\neq۰\Rightarrow x\neq۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

بنابراین دامنهٔ تابع gof طبق تعریف به شکل زیر است:

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}=\{x|x\neq۰, \log x^۲\neq۱\}$$

$$=\{x|x\neq۰, x\neq\pm\sqrt{۱۰}\}=\mathbb{R}-\{۰,\pm\sqrt{۱۰}\}$$

بنابراین ۳ عدد در دامنهٔ تابع gof قرار ندارند.

۲۲۴۸- گزینهٔ ۲ از نامعادلهٔ $\log(x+۱)>\log ۳$ نتیجه می‌شود $x+۱>۳$ و در نتیجه $x>۲$. واضح است که عبارت $\log(x+۱)$ به ازای $x>-۱$ بامعنا است. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(۲,+\infty)$ است.

۲۲۴۹- گزینهٔ ۴ برای اینکه $\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)$ بامعنا باشد، باید $x-۱>۰$، یعنی $x>۱$. از طرف دیگر،

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)>۱=\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲}\Rightarrow x-۱<\frac{۱}{۲}\Rightarrow x<\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $۱<x<\frac{۳}{۲}$.

۲۲۵۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $۱۶-x^۲>۰$ تا عبارت $\log(۱۶-x^۲)$ معنادار باشد. بنابراین

$$x^۲<۱۶\Rightarrow -۴<x<۴$$

از طرف دیگر،

$$\log(۱۶-x^۲)<\log ۱۵\Rightarrow ۱۶-x^۲<۱۵\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-۴,-۱)\cup(۱,۴)$ است که چهار عدد صحیح ±۳ و ±۲ در آن قرار دارند.

۲۲۵۱- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_۹(۲x+۱)-\log_۹(x-۱)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \log_۹(\frac{۲x+۱}{x-۱})=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲x+۱}{x-۱}=۹^{\frac{۱}{۲}}=۳\Rightarrow ۲x+۱=۳x-۳\Rightarrow x=۴$$

۲۲۵۲- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log(\frac{x}{x+۱})=\log(\log ۲)$$

در نتیجه

$$\frac{x}{x+۱}=\log ۲\Rightarrow x=x\log ۲+\log ۲$$

$$x(۱-\log ۲)=\log ۲\Rightarrow x(\log ۱۰-\log ۲)=\log ۲\Rightarrow x\log ۵=\log ۲$$

$$x=\frac{\log ۲}{\log ۵}\Rightarrow x=\log_۵ ۲$$

۲۲۵۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\log_۲(۱۴+\log_۴(x-۱))=۴\Rightarrow ۱۴+\log_۴(x-۱)=۲^۴=۱۶$$

$$\log_۴(x-۱)=۲\Rightarrow x-۱=۴^۲=۱۶\Rightarrow x=۱۷$$

۲۲۵۴- گزینهٔ ۲ چون $\log_{a^k} b=\frac{۱}{k}\log_a b$ ، پس معادلـهٔ مورد نظر می‌شود

$$\log_{۲^۲} x+\log_{۲^۴} x+\log_{۲^۶} x=\frac{۱۱}{۳}$$

$$\frac{۱}{۲}\log_۲ x+\frac{۱}{۴}\log_۲ x+\frac{۱}{۶}\log_۲ x=\frac{۱۱}{۳}$$

$$\frac{۱۱}{۱۲}\log_۲ x=\frac{۱۱}{۳}\Rightarrow\log_۲ x=۴\Rightarrow x=۲^۴=۱۶$$

۲۲۵۵- گزینهٔ ۲ فـرض می‌کنیـم $\log_۳ x=t$. در ایـن صـورت $\log_x ۳=\frac{۱}{t}$. در نتیجه $\frac{۱}{\log_x ۳}=\log_۳ x=t$. بنابراین، معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید

$$t-\frac{۱۲}{t}=۱\Rightarrow t^۲-۱۲=t\Rightarrow t^۲-t-۱۲=۰$$

$$(t-۴)(t+۳)=۰\Rightarrow t=۴\ ,\ t=-۳$$

در نتیجه

$$\log_۳ x=۴\Rightarrow x=۳^۴=۸۱,\quad \log_۳ x=-۳\Rightarrow x=۳^{-۳}=\frac{۱}{۲۷}$$

۲۲۵۶- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $\log_۲ x=t$ ، آن‌گاه

$$\log_۸ x=\log_{۲^۳} x=\frac{۱}{۳}\log_۲ x=\frac{۱}{۳}t$$

$$\log_{\frac{۱}{۸}} x=\log_{۸^{-۱}} x=-\log_۸ x=-\frac{۱}{۳}t$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$t(\frac{۱}{۳}t)-t+\frac{۱}{۳}t-۱=۰\Rightarrow\frac{۱}{۳}t^۲-\frac{۲}{۳}t-۱=۰$$

$$t^۲-۲t-۳=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۱)=۰\Rightarrow t=-۱, t=۳$$

بنابراین

$$t=-۱\Rightarrow\log_۲ x=-۱\Rightarrow x=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$t=۳\Rightarrow\log_۲ x=۳\Rightarrow x=۲^۳=۸$$

در نتیجه، حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۴ است.

۲۲۵۷- گزینهٔ ۱ دستگاه به شکل $\begin{cases}\log x+\log y=۳\\ ۲\log x-۳\log y=۱\end{cases}$ است. طرفین معادلهٔ اول را در ۳ ضرب می کنیم، سپس طرفین دو معادله را جمع می کنیم:

$$\begin{cases}۳\log x+۳\log y=۹\\ ۲\log x-۳\log y=۱\end{cases}\Rightarrow ۵\log x=۱۰\Rightarrow\log x=۲\Rightarrow x=۱۰۰$$

بنابراین

$$\log x+\log y=۳\Rightarrow ۲+\log y=۳\Rightarrow\log y=۱\Rightarrow y=۱۰$$

در نتیجه $x-۲y=۱۰۰-۲۰=۸۰$.

۲۲۵۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{\frac{۱}{۳}}(۲x-۱)=\log_{۳^{-۱}}(۲x-۱)=-\log_۳(۲x-۱)$$

بنابراین نامعادله‌های مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$-۳\le-\log_۳(۲x-۱)\le-۲\Rightarrow ۲\le\log_۳(۲x-۱)\le ۳$$

اکنون توجه کنید که

$$\log_۳ ۹=۲\le\log_۳(۲x-۱)\le ۳=\log_۳ ۲۷$$

$$۹\le ۲x-۱\le ۲۷\xrightarrow{+۱}۱۰\le ۲x\le ۲۸\xrightarrow{\div ۲}۵\le x\le ۱۴$$

بنابرایـن $۵\le x\le ۱۴$ (توجـه کنیـد کـه در ایـن محـدوده $۲x-۱>۰$). تعداد عددهای صحیح در این محدوده ده تا $(۵, ۶, ۷, ..., ۱۴)$ است.

۲۲۵۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\log_۲(۱+۳x)<\log_۲(x+۷)\Rightarrow ۱+۳x<x+۷\Rightarrow x<۳$$

از طـرف دیگر، بایـد $۱+۳x>۰$ و $x+۷>۰$. در نتیجـه $x>-\frac{۱}{۳}$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $(-\frac{۱}{۳}, ۳)$ است.

۲۲۶۰- گزینهٔ ۲ برای اینکه $\log_۳(x+۲)$ بامعنا باشد، باید $x+۲>۰$ ، یعنی $x>-۲$. از طرف دیگر، باید

$$۱-\log_۳(x+۲)\ge ۰\Rightarrow\log_۳(x+۲)\le ۱=\log_۳ ۳\Rightarrow x+۲\le ۳\Rightarrow x\le ۱$$

پس دامنهٔ f بازهٔ $(-۲,۱]$ است.

۲۲۶۱- گزینهٔ ۴ توجـه کنید کـه $\log_۵ ۲۵=۲$. در نتیجـه معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\log_۴(۲۸x-۶)-\log_۴(x-۱)=۲\Rightarrow\log_۴(\frac{۲۸x-۶}{x-۱})=۲$$

در نتیجه

$$\frac{۲۸x-۶}{x-۱}=۴^۲=۱۶\Rightarrow ۲۸x-۶=۱۶x-۱۶\Rightarrow ۱۲x=-۱۰\Rightarrow x=\frac{-۱۰}{۱۲}=\frac{-۵}{۶}$$

اما به ازای $x=\frac{-۵}{۶}$ هیچ یک از دو عبارت $\log_۴(۲۸x-۶)$ و $\log_۴(x-۱)$ معنادار نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۲۶۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲\log_x(۲x-۱)=۱\Rightarrow\log_x(۲x-۱)^۲=۱$$

بنابراین

$$(۲x-۱)^۲=x\Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱=x$$

$$۴x^۲-۵x+۱=۰\Rightarrow(۴x-۱)(x-۱)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}, x=۱$$

اکنون توجه کنید که اگر $x=۱$ ، پایهٔ لگاریتم داده شـده در صورت مسئله برابر ۱ می‌شـود که ممکن نیسـت و اگر $x=\frac{۱}{۴}$ ، آن‌گاه $۲x-۱=-\frac{۱}{۲}$ ، که باز هم ممکن نیست، زیرا لگاریتم عددهای منفی تعریف نمی‌شود. بنابراین هیچ‌یک از مقدارهای به‌دست آمده برای x قابل قبول نیستند و معادلهٔ مورد نظر جواب ندارد.

۲۲۶۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_۴(x^۲-۶x+۹)=\log_{۲^۲}(x-۳)^۲=\frac{۲}{۲}\log_۲|x-۳|=\log_۲|x-۳|$$

در نتیجه مسئله به حل معادلهٔ زیر منجر می‌شود

$$\log_۲(x+۳)+\log_۲|x-۳|=\log_۲(x+۳)|x-۳|=۴$$

بنابراین $(x+۳)|x-۳|=۲^۴=۱۶$. اکنون می‌توان گفت

$$x>۳\Rightarrow(x+۳)(x-۳)=۱۶\Rightarrow x^۲-۹=۱۶$$

$$x^۲=۲۵\Rightarrow x=۵\ , x=-۵\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$x<۳\Rightarrow(x+۳)(۳-x)=۱۶\Rightarrow ۹-x^۲=۱۶\Rightarrow x^۲=-۷\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر فقط یک جواب دارد.

۲۲۶۴- گزینهٔ ۲ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_{۵} x+\log_{۵^{\frac{۱}{۲}}} x-۲\log_{۵^{۲}} x=\log_{۲} ۵^{۲}$$

$$\log_{۵} x+۲\log_{۵} x-۲\times\frac{۱}{۲}\log_{۵} x=۲\log_{۲} ۵$$

$$\log_{۵} x=\log_{۲} ۵\Rightarrow x=۵^{\log_{۲} ۵}$$

۲۲۶۵- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $\log_{۲} x=t$، آن‌گاه $\log_{۲} x^{۲}=۲t$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{۱}{۱+t}-\frac{۱}{۱+۲t}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{۱+۲t-(۱+t)}{(۱+t)(۱+۲t)}=\frac{۱}{۶}$$

$$۶t=۱+۳t+۲t^{۲}\Rightarrow ۲t^{۲}-۳t+۱=۰\Rightarrow t=۱, t=\frac{۱}{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$t=۱\Rightarrow\log_{۲} x=۱\Rightarrow x=۲$$

$$t=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\log_{۲} x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

بنابراین مجموع مربع‌های جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $۲^{۲}+\sqrt{۲}^{\,۲}=۶$ است.

۲۲۶۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم:

$$\log x^{(۸-\log x)}=\log(\frac{۱}{x^{۲}})\Rightarrow(۸-\log x)\log x=-۲\log x$$

$$\begin{cases}\log x=۰\Rightarrow x=۱۰^{۰}=۱\\ ۸-\log x=-۲\Rightarrow \log x=۱۰\Rightarrow x=۱۰^{۱۰}\end{cases}$$

راه‌حل دوم معادله را به‌صورت $x^{۲}\times x^{۸-\log x}=۱$ یا $x^{۱۰-\log x}=۱$ می‌نویسیم. با توجه به اینکه x عددی مثبت است، دو حالت وجود دارد: پایه در عبارت سمت چپ ۱ باشد، یعنی $x=۱$ یا توان در عبارت سمت چپ صفر باشد، یعنی $\log x=۱۰$، پس $x=۱۰^{۱۰}$.

۲۲۶۷- گزینهٔ ۲ از معادلهٔ $\log_{۲} x+\log_{۲} y=۴$ به‌دست می‌آید

$$\log_{۲}(xy)=۴\Rightarrow xy=۲^{۴}=۱۶$$

از معادلهٔ $x+y=۱۰$ به‌دست می‌آید

$$y=۱۰-x$$

با جای‌گذاری $۱۰-x$ به جای y در معادلهٔ $xy=۱۶$ نتیجه می‌شود

$$x(۱۰-x)=۱۶\Rightarrow x^{۲}-۱۰x+۱۶=۰\Rightarrow(x-۲)(x-۸)=۰$$

$$x=۲\Rightarrow y=۸,\quad x=۸\Rightarrow y=۲$$

در هر صورت $x^{۲}+y^{۲}=۶۸$.

۲۲۶۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(۲x-۱)>\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۱)\Rightarrow ۲x-۱<x+۱\Rightarrow x<۲$$

از طرف دیگر، عبارت $\log_{\frac{۱}{۲}}(۲x-۱)$ به‌ازای $x>\frac{۱}{۲}$ و عبارت $\log(x+۱)$ به‌ازای $x>-۱$ معنادار است. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(\frac{۱}{۲},۲)$ است.

۲۲۶۹- گزینهٔ ۴ نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{۱-\log x+۱+\log x}{(۱-\log x)(۱+\log x)}>۲\Rightarrow\frac{۲}{۱-(\log x)^{۲}}>۲\Rightarrow\frac{۱}{۱-(\log x)^{۲}}>۱$$

$$\frac{۱}{۱-(\log x)^{۲}}-۱>۰\Rightarrow\frac{۱-۱+(\log x)^{۲}}{۱-(\log x)^{۲}}>۰\Rightarrow\frac{(\log x)^{۲}}{۱-(\log x)^{۲}}>۰$$

بنابراین باید $(\log x)^{۲}\neq۰$ و $۱-(\log x)^{۲}>۰$:

$$(\log x)^{۲}\neq۰\Rightarrow x\neq۱,\quad(\log x)^{۲}<۱\Rightarrow|\log x|<۱$$

$$-۱<\log x<۱\Rightarrow\frac{۱}{۱۰}<x<۱۰$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(\frac{۱}{۱۰},۱۰)-\{۱\}$ است.

۲۲۷۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$D_f=\{x|x\neq-۳,\frac{۳x-۱}{x+۳}>۰,\log(\frac{۳x-۱}{x+۳})\geq۰\}$$

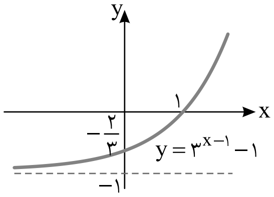
اکنون توجه کنید که

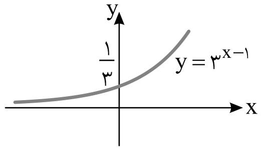
$$\frac{۳x-۱}{x+۳}>۰\Rightarrow x\in(-\infty,-۳)\cup(\frac{۱}{۳},+\infty)$$

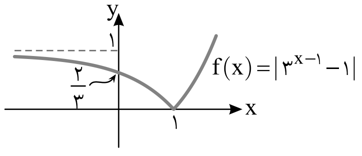
$$\log(\frac{۳x-۱}{x+۳})\geq۰\Rightarrow\frac{۳x-۱}{x+۳}\geq۱\Rightarrow\frac{۲(x-۲)}{x+۳}\geq۰\Rightarrow x\in(-\infty,-۳)\cup[۲,+\infty)$$

بنابراین $D_f=(-\infty,-۳)\cup[۲,+\infty)$. در نتیجه عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع f نیستند، ‎-۳، ‎-۲، ‎-۱، صفر و ۱ هستند.

۲۲۷۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=۳^{x}$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۳^{x-۱}$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۳^{x-۱}-۱$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که پایین محور x است، نسبت به محور x رسم و قسمتی را که زیر محور x است، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.







۲۲۷۲- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $t=۲^{x}$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$۴^{x}-۳\times۲^{x+۲}+۲۷=(۲^{x})^{۲}-۱۲\times۲^{x}+۲۷$$

$$=t^{۲}-۱۲t+۲۷=(t-۳)(t-۹)=۰$$

بنابراین

$$t=۳\Rightarrow۲^{x_{۱}}=۳\quad(۱),\quad t=۹\Rightarrow۲^{x_{۲}}=۹\quad(۲)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم، به دست می‌آید $۲^{x_{۱}+x_{۲}}=۲۷$. بنابراین $۲^{۴}<۲^{x_{۱}+x_{۲}}<۲^{۵}$. در نتیجه $۴<x_{۱}+x_{۲}<۵$.

۲۲۷۳- گزینهٔ ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(۱)=۱\Rightarrow a+b=۱,\quad f(۲)=۷\Rightarrow a^{۲}+b=۷$$

اگر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به‌دست می‌آید:

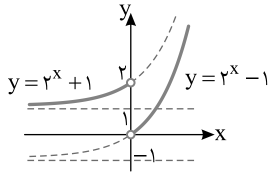
$$a^{۲}-a-۶=۰\Rightarrow a=۳,\quad a=-۲$$

چون a باید مثبت باشد، پس $a=۳$. در نتیجه $b=۱-a=-۲$. به این ترتیب $f(x)=۳^{x}-۲$. اکنون توجه کنید که اگر $f^{-۱}(-\frac{۵}{۳})=m$، آن‌گاه

$$f(m)=-\frac{۵}{۳}\Rightarrow ۳^{m}-۲=-\frac{۵}{۳}\Rightarrow ۳^{m}=-\frac{۵}{۳}+۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow m=-۱$$

۲۲۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}۲^{x}+۱ & x<۰\\ ۲^{x}-۱ & x>۰\end{cases}$.

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



پس برد تابع به‌صورت $(۰,+\infty)$ است.

۲۲۷۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع از نقطهٔ $(۵,۰)$ می‌گذرد، پس

$$f(۵)=۰\Rightarrow \log_a(۵b-۳)=۰\Rightarrow ۵b-۳=۱\Rightarrow b=\frac{۴}{۵}$$

به این ترتیب $f(x)=\log_a(\frac{۴}{۵}x-۳)$. نمودار تابع از نقطهٔ $(۱۵,۲)$ می‌گذرد، پس

$$f(۱۵)=۲\Rightarrow \log_a(\frac{۴}{۵}\times ۱۵-۳)=۲\Rightarrow \log_a ۹=۲\Rightarrow a^{۲}=۹\Rightarrow a=۳$$

بنابراین $ab=\frac{۱۲}{۵}$.

۲۲۷۶- گزینهٔ ۱ با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log\sqrt[۴]{۷۲}=\log ۷۲^{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۴}\log ۷۲=\frac{۱}{۴}\log(۲^{۳}\times ۳^{۲})$$

$$=\frac{۱}{۴}(\log ۲^{۳}+\log ۳^{۲})=\frac{۱}{۴}(۳\log ۲+۲\log ۳)=\frac{۱}{۴}(۳b+۲a)$$

۲۲۷۷- گزینهٔ ۱ چون $\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}$، پس

$$\frac{۱}{\log_{۲} ۳۰}+\frac{۱}{\log_{۳} ۳۰}+\frac{۱}{\log_{۵} ۳۰}=\log_{۳۰} ۲+\log_{۳۰} ۳+\log_{۳۰} ۵$$

$$=\log_{۳۰}(۲\times ۳\times ۵)=\log_{۳۰} ۳۰=۱$$

۲۲۷۸- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $\log\frac{x-۱}{x}=\log(\log ۲)$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\frac{x-۱}{x}=\log ۲\Rightarrow x-۱=x\log ۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۱-\log ۲}=\frac{۱}{\log ۱۰-\log ۲}$$

$$=\frac{۱}{\log\frac{۱۰}{۲}}=\frac{۱}{\log ۵}=\frac{\log ۱۰}{\log ۵}=\frac{\log ۲+\log ۵}{\log ۵}=\frac{\log ۲}{\log ۵}+۱=\log_{۵} ۲+۱$$

۲۲۷۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از دو طرف معادلهٔ مورد نظر در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$(x+۱)\log ۲=(x-۱)\log ۵\Rightarrow x(\log ۵-\log ۲)=\log ۲+\log ۵$$

$$x\log\frac{۵}{۲}=\log ۱۰=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{\log\frac{۵}{۲}}=\frac{۱}{\log\frac{۱۰}{۴}}=\frac{۱}{\log ۱۰-\log ۴}=\frac{۱}{۱-۲\log ۲}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$۲^{x+۱}=۵^{x-۱}\Rightarrow ۲^{x}\times ۲=۵^{x}\times ۵^{-۱}\Rightarrow(\frac{۵}{۲})^{x}=۱۰$$

از دو طرف این معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$x\log\frac{۵}{۲}=\log ۱۰=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{\log\frac{۵}{۲}}=\frac{۱}{\log\frac{۱۰}{۴}}$$

$$=\frac{۱}{\log ۱۰-\log ۴}=\frac{۱}{۱-۲\log ۲}$$

۲۲۸۰- گزینهٔ ۱ باید هر دو عبارت $\log(x+۳)$ و $\log(۲-x)$ بامعنی باشند و نیز $\log(۲-x)\neq ۰$:

$$D_f=\{x\,|\,x+۳>۰,۲-x>۰,\log(۲-x)\neq ۰\}$$

از $x+۳>۰$ نتیجه می‌شود $x>-۳$ و از $۲-x>۰$ نتیجه می‌شود $x<۲$. از طرف دیگر اگر $\log(۲-x)=۰$، آن‌گاه $۲-x=۱$، در نتیجه $x=۱$. بنابراین دامنهٔ تابع f به‌صورت $(-۳,۲)-\{۱\}$ است.

۲۲۸۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\frac{۱}{۳^{x}}=(\frac{۱}{۳})^{x}=(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^{۲x}=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}$.

اکنون نقطهٔ تقاطع نمودارها را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$۳^{x}+\frac{۸}{۳}=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}\Rightarrow ۳^{x}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱}{۳^{x}}\xrightarrow{t=۳^{x}}t+\frac{۸}{۳}=\frac{۱}{t}$$

$$\xrightarrow{\times ۳t}۳t^{۲}+۸t=۳\Rightarrow ۳t^{۲}+۸t-۳=۰$$

$$(۳t-۱)(t+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳^{x}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=۳\\ t=-۳\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

$A(-۱,۳)$ نقطهٔ مورد نظر است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(-۱,۳)$ و $B(-۱,۱)$ را به‌دست آوریم که برابر است با $AB=\sqrt{(-۱+۱)^{۲}+(۳-۱)^{۲}}=۲$.

ریاضی - ۹۶

۲۲۸۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\frac{۱}{۴^{x}}=\frac{۱}{۲^{۲x}}=(\frac{۱}{۲})^{۲x}$. اکنون نقطهٔ A را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$۴^{x}=(\frac{۱}{۲})^{۲x}+\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۴^{x}=\frac{۱}{۴^{x}}+\frac{۳}{۲}\xrightarrow{t=۴^{x}}t=\frac{۱}{t}+\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲t}۲t^{۲}=۲+۳t\Rightarrow ۲t^{۲}-۳t-۲=۰$$

$$(۲t+۱)(t-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-\frac{۱}{۲}\ (\text{غ.ق.ق.})\\ t=۲\Rightarrow ۴^{x}=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۲\end{cases}$$

$A(\frac{۱}{۲},۲)$ نقطهٔ مورد نظر است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(\frac{۱}{۲},۲)$ و $B(-\frac{۱}{۲},۱)$ را به‌دست آوریم که برابر است با $AB=\sqrt{(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲})^{۲}+(۲-۱)^{۲}}=\sqrt{۲}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۲۸۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از نقاط $(۲,۶)$ و $(۱۲,۱۰)$ می‌گذرد، پس $f(۲)=۶$ و $f(۱۲)=۱۰$. بنابراین

$$f(۲)=a+\log_۲(۲b-۴)=۶\Rightarrow\log_۲(۲b-۴)=۶-a$$

$$f(۱۲)=a+\log_۲(۱۲b-۴)=۱۰\Rightarrow\log_۲(۱۲b-۴)=۱۰-a$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_۲(۱۲b-۴)-\log_۲(۲b-۴)=۴\Rightarrow\log_۲(\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴})=۴$$

$$\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}=۱۶\Rightarrow۱۲b-۴=۳۲b-۶۴\Rightarrow۲۰b=۶۰\Rightarrow b=۳$$

بنابراین $\log_۲(۲b-۴)=\log_۲(۶-۴)=۱=۶-a\Rightarrow a=۵$

ریاضی - ۹۶

۲۲۸۴- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع به‌صورت $\{x|ax+b>۰\}$ است. جواب نامعادلهٔ اخیر به‌صورت $(-\frac{b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,-\frac{b}{a})$ است. چون تابع فقط در بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ تعریف شده است، پس $-\frac{b}{a}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲b\quad(۱)$

از طرف دیگر، $f(۴)=۲\Rightarrow\log_۳(۴a+b)=۲\Rightarrow۴a+b=۹\quad(۲)$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=۲$ و $b=۱$. به این ترتیب

$$f(x)=\log_۳(۲x+۱)$$

و در نتیجه $f(-\frac{۴}{۹})=\log_۳(-\frac{۸}{۹}+۱)=\log_۳\frac{۱}{۹}=-۲$.

ریاضی - ۹۴

۲۲۸۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[۳]{۰/۲۵}=\sqrt[۳]{(\frac{۵}{۱۰})^۲}=\sqrt[۳]{(\frac{۱}{۲})^۲}=۲^{-\frac{۲}{۳}}$$

از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$A=\log_۸(۲\sqrt[۳]{۰/۲۵})=\log_{۲^۳}(۲\times۲^{-\frac{۲}{۳}})=\log_{۲^۳}۲^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\log_۲۲=\frac{۱}{۹}$$

بنابراین $\log_۴(\frac{۱}{A}-۱)=\log_۴(۹-۱)=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲۲=\frac{۳}{۲}$

ریاضی - ۹۰

۲۲۸۶- گزینهٔ ۲ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+\sqrt{۵})^۲$$

$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})=\log((۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵}))$$

$$=\log(۳۶-۲۰)=\log۱۶=۴\log۲=۴k$$

تجربی - ۹۰

۲۲۸۷- گزینهٔ ۴ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>۲$. معادله را ساده می‌کنیم:

$$۲\log(x-۲)=\log(x+۱۰)\Rightarrow\log(x-۲)^۲=\log(x+۱۰)$$

$$(x-۲)^۲=x+۱۰\Rightarrow x^۲-۵x-۶=۰\Rightarrow x=-۱\text{(غ.ق.ق)}\ ,\ x=۶$$

بنابراین $\log_۴(x+۲)=\log_۴۸=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲۲=\frac{۳}{۲}$.

ریاضی - ۸۵

۲۲۸۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>\frac{۵}{۳}$. از معادلهٔ داده شده مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_۵(۲x-۱)+\log_۵(۳x-۵)=۱\Rightarrow\log_۵((۲x-۱)(۳x-۵))=۱$$

$$(۲x-۱)(۳x-۵)=۵\Rightarrow۶x^۲-۱۳x=۰\Rightarrow x=۰\ \text{(غ.ق.ق)}\ ,\ x=\frac{۱۳}{۶}$$

بنابراین $\log_۲(۶x+۳)=\log_۲(۱۳+۳)=\log_۲۲^۴=۴$.

ریاضی - ۸۶

۲۲۸۹- گزینهٔ ۳ مقدار x را از معادلهٔ داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\log_۳(x^۲-۱)=۱+\log_۳(x+۳)\Rightarrow\log_۳(x^۲-۱)-\log_۳(x+۳)=۱$$

$$\log_۳(\frac{x^۲-۱}{x+۳})=۱\Rightarrow\frac{x^۲-۱}{x+۳}=۳\Rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۵\\x=-۲\end{cases}$$

اگر $x=-۲$، آن‌گاه $x-۳<۰$ و $\log_۴(x-۳)$ تعریف نمی‌شود و اگر $x=۵$، آن‌گاه $\log_۴(x-۳)=\log_۴۲=\frac{۱}{۲}$.

ریاضی - ۸۸

۲۲۹۰- گزینهٔ ۳ از معادلهٔ $\log y=۲\log۳+\log x$ به‌دست می‌آید

$$\log y-\log x=\log۹\Rightarrow\log\frac{y}{x}=\log۹\Rightarrow\frac{y}{x}=۹\Rightarrow y=۹x$$

در معادلهٔ $۲^{x-۷}\times۴^{x+y}=۱$ به جای y قرار می‌دهیم ۹x، در نتیجه

$$۲^{x-۷}\times۴^{x+۹x}=۱\Rightarrow۲^{x-۷}\times۲^{۲۰x}=۱\Rightarrow۲^{۲۱x-۷}=۱$$

$$۲۱x-۷=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=۳$$

تجربی - ۹۶

۲۲۹۱- گزینهٔ ۲ دو نمودار در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع هستند، پس

$$f(-۱)=g(-۱)\Rightarrow۳^{b-a}=۹=۳^۲\Rightarrow b-a=۲\quad(۱)$$

از طرف دیگر $f(۲)=\frac{۱}{۳}$، پس

$$۳^{۲a+b}=\frac{۱}{۳}=۳^{-۱}\Rightarrow۲a+b=-۱\quad(۲)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-۱$ و $b=۱$. پس $f(x)=۳^{-x+۱}$. اکنون فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۲۷)=m$.

در این صورت

$$f(m)=۲۷\Rightarrow۳^{-m+۱}=۲۷\Rightarrow-m+۱=۳\Rightarrow m=-۲$$

ریاضی - ۹۵

۲۲۹۲- گزینهٔ ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(۰)=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ab^{\circ}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

$$f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲}b^{-۲}=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲b^۲}=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow b^۲=۱۶$$

چون مقدار مثبت b مورد نظر است، پس $b=۴$ و $f(x)=\frac{۳}{۲}\times۴^x$.

بنابراین

$$f(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}\times۴^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times(۲^۲)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times۸=۱۲$$

تجربی - ۹۱

۲۲۹۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از دو نقطهٔ $(۵,۱۱)$ و $(۲۱,۱۵)$ می‌گذرد، پس $f(۵)=۱۱$ و $f(۲۱)=۱۵$. بنابراین

$$f(۵)=a+\log_{۲}(۱۵+b)^{۲}=۱۱\Rightarrow a+۲\log_{۲}(۱۵+b)=۱۱$$

$$\log_{۲}(۱۵+b)=\frac{۱۱-a}{۲}$$

$$f(۲۱)=a+\log_{۲}(۶۳+b)^{۲}=۱۵\Rightarrow a+۲\log_{۲}(۶۳+b)=۱۵$$

$$\log_{۲}(۶۳+b)=\frac{۱۵-a}{۲}$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_{۲}(۶۳+b)-\log_{۲}(۱۵+b)=۲\Rightarrow\log_{۲}(\frac{۶۳+b}{۱۵+b})=۲$$

$$\frac{۶۳+b}{۱۵+b}=۴\Rightarrow ۶۳+b=۶۰+۴b\Rightarrow ۳b=۳\Rightarrow b=۱$$

بنابراین

$$a+\log_{۲}(۱۵+۱)^{۲}=۱۱\Rightarrow a=۳$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۲۹۴- گزینهٔ ۱ نمودار تابع محور x را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(-۱,۰)$ عبور می‌کند. همچنین نمودار تابع نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(۱,-۱)$ عبور می‌کند. در نتیجه

$$f(-۱)=۰\Rightarrow\log_{\frac{۱}{۲}}(-a+b)=۰\Rightarrow -a+b=۱ \qquad (۱)$$

$$f(۱)=-۱\Rightarrow\log_{\frac{۱}{۲}}(a+b)=-۱\Rightarrow a+b=۲ \qquad (۲)$$

بنابراین از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۳}{۲}$.

خارج از کشور ریاضی- ۹۴

۲۲۹۵- گزینهٔ ۴ از معادلهٔ داده شده مقدار x را می‌یابیم:

$$\log(x-۲)=۲\log ۲-\log(x-۴)\Rightarrow\log(x-۲)+\log(x-۴)=\log ۴$$

$$\log((x-۲)(x-۴))=\log ۴\Rightarrow(x-۲)(x-۴)=۴$$

$$x^{۲}-۶x+۴=۰\Rightarrow x=۳-\sqrt{۵}\ \text{(غ.ق.ق.)}\ ,\ x=۳+\sqrt{۵}$$

بنابراین $\log_{۵}(x-۳)=\log_{۵}(۳+\sqrt{۵}-۳)=\log_{۵}\sqrt{۵}=\frac{۱}{۲}$.

ریاضی - ۸۷

۲۲۹۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $A^{۲}=(۳^{a})^{۲}=۳^{۲a}$، بنابراین

$$\log_{۳}(۹A^{۲})=\log_{۳}(۳^{۲}\times۳^{۲a})=\log_{۳}۳^{(۲+۲a)}$$

$$=(۲+۲a)\log_{۳}۳=۲+۲a$$

راه‌حل دوم از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\log_{۳}A=a$. پس

$$\log_{۳}(۹A^{۲})=\log_{۳}(۳^{۲}A^{۲})=\log_{۳}(۳A)^{۲}=۲\log_{۳}(۳A)$$

$$=۲(\log_{۳}۳+\log_{۳}A)=۲(۱+a)=۲+۲a$$

ریاضی - ۹۱

۲۲۹۷- گزینهٔ ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_{x}(۳x+۸)=۲-\log_{x}(x-۶)\Rightarrow\log_{x}(۳x+۸)+\log_{x}(x-۶)=۲$$

$$\log_{x}((۳x+۸)(x-۶))=۲\Rightarrow(۳x+۸)(x-۶)=x^{۲}$$

$$۳x^{۲}-۱۰x-۴۸=x^{۲}\Rightarrow x^{۲}-۵x-۲۴=۰$$

$$(x-۸)(x+۳)=۰\Rightarrow x=-۳,x=۸$$

به‌ازای $x=-۳$ عبارت‌های $\log_{x}(x-۶)$ و $\log_{x}(۳x+۸)$ بی‌معنی هستند، بنابراین $x=۸$ و مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴ برابر است با

$$\log_{۴}x=\log_{۴}۸=\log_{۲^{۲}}۲^{۳}=\frac{۳}{۲}\log_{۲}۲=\frac{۳}{۲}$$

خارج از کشور تجربی- ۹۳

۲۲۹۸- گزینهٔ ۴ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_{۳}(۲x^{۲}+۱)-\log_{۳}(x+۲)=۱\Rightarrow\log_{۳}\frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}=۱\Rightarrow\frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}=۳$$

$$۲x^{۲}+۱=۳x+۶\Rightarrow ۲x^{۲}-۳x-۵=۰\Rightarrow x=-۱,\quad x=\frac{۵}{۲}$$

اکنون به محاسبهٔ مقدار $\log_{۸}(۲x-۱)$ می‌پردازیم. با توجه به محدودهٔ تعریف این لگاریتم $(x>\frac{۱}{۲})$، تنها $x=\frac{۵}{۲}$ قابل قبول است، پس

$$\log_{۸}(۲x-۱)=\log_{۸}(۲\times\frac{۵}{۲}-۱)=\log_{۸}۴=\log_{۲^{۳}}۲^{۲}=\frac{۲}{۳}\log_{۲}۲=\frac{۲}{۳}$$

تجربی - ۹۵

۲۲۹۹- گزینهٔ ۲ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log(x^{۲}-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵)$$

$$\log(\frac{x^{۲}-x-۶}{x-۳})=\log(۲x-۵)\Rightarrow\frac{(x-۳)(x+۲)}{x-۳}=۲x-۵$$

$$\xrightarrow{x\neq۳}x+۲=۲x-۵\Rightarrow x=۷$$

بنابراین $\log_{۴}\sqrt[۳]{x+۱}=\log_{۴}\sqrt[۳]{۸}=\log_{۲^{۲}}۲=\frac{۱}{۲}\log_{۲}۲=\frac{۱}{۲}$.

خارج از کشور تجربی- ۹۵

۲۳۰۰- گزینهٔ ۱ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>۰$ و $y>۰$. توجه کنید که

$$\log_{۳}x+\log_{۳}y=۲\Rightarrow\log_{۳}xy=۲\Rightarrow xy=۹$$

$$x^{۲}+y^{۲}=۴۶\Rightarrow(x+y)^{۲}-۲xy=۴۶\Rightarrow(x+y)^{۲}-۱۸=۴۶$$

$$(x+y)^{۲}=۶۴\xrightarrow{x>۰,y>۰}x+y=۸$$

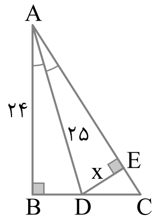
بنابراین

$$\log_{۴}(x+y)=\log_{۴}۸=\log_{۲^{۲}}۲^{۳}=\frac{۳}{۲}\log_{۲}۲=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

تجربی - ۸۹

۲۳۰۱- گزینهٔ ۴

۲۳۰۲- گزینهٔ ۴

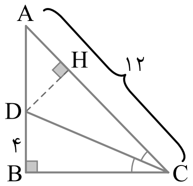


۲۳۰۳- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABD،

$$AD^۲=BA^۲+BD^۲\Rightarrow ۲۵^۲=۲۴^۲+BD^۲$$

$$BD^۲=۲۵^۲-۲۴^۲=(۲۵-۲۴)(۲۵+۲۴)=۴۹$$

بنابرایـن $BD=۷$. از طـرف دیگـر، چـون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس $DE=DB=۷$.



۲۳۰۴- گزینهٔ ۳ چون D روی نیمساز زاویهٔ C قـرار دارد، پس فاصلهٔ آن از دو ضلـع این زاویه برابر اسـت. بنابرایـن بـا توجـه بـه شـکل مقابـل $DH=DB=۴$. در نتیجه

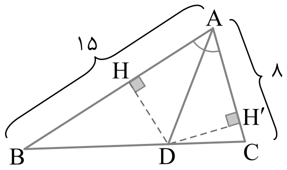
$$\text{مساحت (ADC)}=\frac{۱}{۲}DH\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۲=۲۴$$

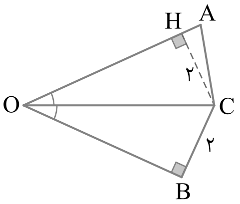
۲۳۰۵- گزینهٔ ۴ چون نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ A است، پس فاصلهٔ آن از AB و AC برابر است، یعنی با توجه به شکل زیر $DH=DH'$. بنابراین

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}=\frac{۱}{۲}DH\times AB+\frac{۱}{۲}DH'\times AC$$

$$۴۶=\frac{۱}{۲}DH'\times ۱۵+\frac{۱}{۲}DH'\times ۸\Rightarrow DH'=۴$$

در نتیجه $S_{ADC}=\frac{۱}{۲}DH'\times AC=۱۶$.

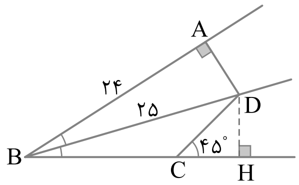


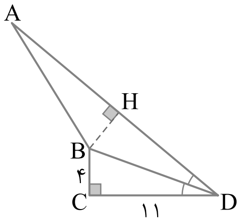


۲۳۰۶- گزینهٔ ۳ چـون C روی نیمساز زاویهٔ O قرار دارد، پس فاصله‌اش تا ضلع‌هـای این زاویه برابر اسـت، بنابراین با توجـه به شـکل روبه‌رو $CH=CB=۲$. اکنون توجه کنید که

$$\text{مساحت(AOC)}-\text{مساحت(BOC)}=\frac{۱}{۲}CH\times OA-\frac{۱}{۲}CB\times OB$$
$$=\frac{۱}{۲}\times ۲\times OA-\frac{۱}{۲}\times ۲\times OB=OA-OB=۴$$

۲۳۰۷- گزینهٔ ۲ از نقطـهٔ D بر امتداد BC عمـود می‌کنیم تا آن را در H قطع کند. چون D روی نیمسـاز زاویهٔ B است، پس $AD=DH$. توجه کنید کـه $AD=\sqrt{BD^۲-AB^۲}=\sqrt{۲۵^۲-۲۴^۲}=۷$. در نتیجـه $DH=۷$. بنابرایـن در مثلـث CHD، $DH=CH=۷$ (زیرا $\hat{C}=۴۵^\circ$ و مثلث CHD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌السـاقین اسـت). دو مثلث ABD و HBD به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت هستند. بنابراین $BH=AB=۲۴$. در نتیجه $BC=BH-HC=۲۴-۷=۱۷$.





۲۳۰۸- گزینهٔ ۴ ارتفـاع BH را در مثلث ABD رسـم می‌کنیم. چون مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BCD و BHD همنهشت‌اند، پس $HD=CD=۱۱$ و $BH=BC=۴$. بنابرایـن $AH=۲۳-۱۱=۱۲$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHB ،

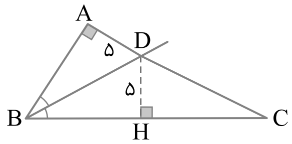
$$AB^۲=AH^۲+BH^۲=۱۴۴+۱۶=۱۶۰\Rightarrow AB=۴\sqrt{۱۰}$$

۲۳۰۹- گزینهٔ ۴ به شکل زیر توجه کنید. چون نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ B اسـت، پـس $DA=DH=۵$. از طرف دیگـر، چـون مثلث‌هـای قائم‌الزاویهٔ ABD و HBD همنهشت‌اند، پس $AB=HB$. بنابراین

$$BC-AB=۱۰\Rightarrow BC-HB=۱۰\Rightarrow HC=۱۰$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ DHC ،

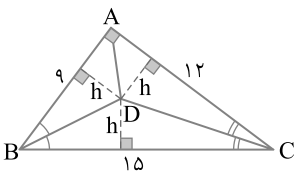
$$DC^۲=DH^۲+HC^۲=۲۵+۱۰۰=۱۲۵\Rightarrow DC=۵\sqrt{۵}$$



۲۳۱۰- گزینهٔ ۲ چون D روی نیمساز زاویهٔ B قرار دارد، پس فاصله‌اش از ضلع‌های AB و BC برابر است. همین‌طور، چون D روی نیمساز زاویهٔ C قرار دارد، پس فاصله‌اش از ضلع‌های AC و BC برابر است. فرض کنید این فاصله برابر h باشـد. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، $BC^۲=AB^۲+AC^۲=۹^۲+۱۲^۲=۲۲۵$. پـس $BC=۱۵$. مسـاحت مثلث ABC از یک طرف برابر اسـت با $\frac{۱}{۲}\times ۹\times ۱۲=۵۴$ و از طرف دیگر برابر است با مجموع مساحت‌های سه مثلث ADB ، BDC و ADC :

$$\frac{۱}{۲}h\times ۹+\frac{۱}{۲}h\times ۱۵+\frac{۱}{۲}h\times ۱۲=۵۴\Rightarrow \frac{۱}{۲}h(۹+۱۵+۱۲)=۵۴\Rightarrow h=۳$$

بنابراین $\text{مساحت (BDC)}=\frac{۱}{۲}h\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۱۵=۲۲/۵$.



۲۳۱۱- گزینهٔ ۱ تساوی $\frac{m}{n}=\frac{۳}{۲}$ را طرفین - وسطین می‌کنیم

$$۲m=۳n\Rightarrow m=\frac{۳n}{۲}$$

بنابراین $\frac{۲m+n}{m-n}=\frac{۲(\frac{۳n}{۲})+n}{\frac{۳n}{۲}-n}=\frac{۴n}{\frac{۱}{۲}n}=۸$.

۲۳۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که بنابر فرض تست و ویژگی (چ) تناسب

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{c}=\frac{a+d}{b+c}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{a+d}{b+c}\Rightarrow\frac{b+c}{a+d}=۲$$

۲۳۱۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\frac{x}{۳}=\frac{y}{۴}\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x\ ,\qquad \frac{x}{۳}=\frac{z}{۵}\Rightarrow z=\frac{۵}{۳}x$$

بنابراین

$$۲x-۳y+z=-۲\Rightarrow ۲x-۳(\frac{۴}{۳}x)+\frac{۵}{۳}x=-۲\Rightarrow -\frac{۱}{۳}x=-۲\Rightarrow x=۶$$

۲۳۱۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}$ پس $y=\frac{۳}{۲}x$. از طرف دیگر،

$$\frac{x}{۲}=\frac{۲x-ky}{۷}\Rightarrow ۷x=۴x-۲ky\Rightarrow ۳x=-۲ky$$

$$۳x=-۲k(\frac{۳}{۲}x)\Rightarrow k=-۱$$

۲۳۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{a}{-۵}=c\Rightarrow a=-۵c\ ,\qquad \frac{۴}{b}=c\Rightarrow b=\frac{۴}{c}$$

بنابراین

$$a+b+c=۰\Rightarrow -۵c+\frac{۴}{c}+c=۰\Rightarrow -۴c+\frac{۴}{c}=۰\Rightarrow -۴c^۲+۴=۰\Rightarrow c^۲=۱$$

۲۳۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{y}{۲}\\ \frac{y}{z}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=\frac{z}{۴}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(\frac{z}{۴})=\frac{z}{۸}$$

بنابراین

$$x+y+z=۳۳\Rightarrow\frac{z}{۸}+\frac{z}{۴}+z=۳۳\Rightarrow\frac{z+۲z+۸z}{۸}=۳۳$$

$$\frac{۱۱z}{۸}=۳۳\Rightarrow z=۲۴$$

۲۳۱۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** با توجه به فرض مسئله

$$a=۵k\ ,\quad b=۷k\ ,\quad c=۴k$$

بنابراین $k=\frac{۳a+۲b+mc}{۵۳}=\frac{۱۵k+۱۴k+۴mk}{۵۳}=\frac{۲۹k+۴mk}{۵۳}$. در نتیجه

$$۲۹k+۴mk=۵۳k\Rightarrow ۴mk=۲۴k\Rightarrow m=۶$$

راه‌حل دوم عددهای ۳، ۲ و m را به‌ترتیب در صورت و مخرج نسبت‌های داده شده ضرب می‌کنیم: $\frac{۳a}{۳\times۵}=\frac{۲b}{۲\times۷}=\frac{mc}{m\times۴}=k$. اکنون با توجه به ویژگی (چ) تناسب،

$$\frac{۳a+۲b+mc}{۱۵+۱۴+۴m}=k\xrightarrow{\text{طبق فرض}}۲۹+۴m=۵۳\Rightarrow m=۶$$

۲۳۱۸- گزینهٔ ۴ اگر تناسب $\frac{۴x-y}{۲x+y}=\frac{۱}{۵}$ را طرفین - وسطین کنیم، به‌دست می‌آید

$$۵(۴x-y)=۲x+y\Rightarrow ۲۰x-۵y=۲x+y\Rightarrow ۱۸x=۶y\Rightarrow ۳x=y$$

بنابراین $\frac{۶x+y}{x+y}=\frac{۶x+۳x}{x+۳x}=\frac{۹x}{۴x}=\frac{۹}{۴}$.

۲۳۱۹- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$. در نتیجه $a=kb$ و $c=kd$. بنابراین $\frac{a+۷c}{b+۷d}=\frac{kb+۷kd}{b+۷d}=\frac{k(b+۷d)}{b+۷d}=k=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=k+k=۲k=۳$$

۲۳۲۰- گزینهٔ ۱ تناسب داده شده را تفضیل در صورت می‌کنیم:

$$\frac{۳a+۱۰-(۱۰+۲a)}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷-(۷+۲b)}{۷+۲b}\Rightarrow\frac{a}{۱۰+۲a}=\frac{b}{۷+۲b}$$

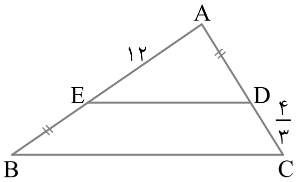
اگر این تناسب را طرفین - وسطین کنیم، به‌دست می‌آید

$$a(۷+۲b)=b(۱۰+۲a)\Rightarrow ۷a+۲ab=۱۰b+۲ab\Rightarrow ۷a=۱۰b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۷}$$

۲۳۲۱- گزینهٔ ۲ مطابق شکل زیر، چون $ED\|BC$، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}\xrightarrow{AD=EB}\frac{۱۲}{EB}=\frac{EB}{\frac{۴}{۳}}\Rightarrow EB=۴$$

در نتیجه $AB=AE+EB=۱۲+۴=۱۶$.



۲۳۲۲- گزینهٔ ۱ چون $EF\|AB$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث MAB،

$$\frac{MF}{FA}=\frac{ME}{EB}\qquad(۱)$$

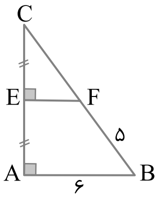
همین‌طور، $DF\|AC$ و بنابر قضیهٔ تالس در مثلث MAC،

$$\frac{MD}{DC}=\frac{MF}{FA}\qquad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{ME}{EB}=\frac{MD}{DC}\Rightarrow\frac{x}{۱}=\frac{۲}{x}\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

۲۳۲۳- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل، چون $EF\|AB$ و نقطهٔ E وسط ضلع AC است، پس بنابر قضیهٔ تالس در مثلث CAB، نقطهٔ F نیز وسط ضلع BC است. بنابراین $CF=۵$. همچنین در مثلث CAB، EF میان‌خط است، پس $EF=\frac{AB}{۲}=۳$. به این ترتیب، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ EFC نتیجه می‌شود



$$FC^۲=EF^۲+EC^۲\Rightarrow ۲۵=۹+EC^۲\Rightarrow EC=۴$$

بنابراین، مساحت مثلث CEF برابر است با $\frac{۱}{۲}\times۴\times۳=۶$.

۲۳۲۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون BEFD متوازی‌الاضلاع است، EF=BD=۶ و EF||BC، پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{۴}{۴+EB}=\frac{۶}{۸}$$

$$۳۲=۲۴+۶EB\Rightarrow EB=\frac{۴}{۳}$$

راه‌حل دوم چون FD||AB، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث CAB،

$$\frac{CF}{FA}=\frac{CD}{DB}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{FA}{CF}=۳\quad(۱)$$

از طرف دیگر، چون EF||BC، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\xrightarrow{(۱)}\frac{۴}{EB}=۳\Rightarrow EB=\frac{۴}{۳}$$

۲۳۲۵- گزینهٔ ۳ چون EF||BC، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{AF}{FC}=\frac{۶}{۲}=۳\quad(۱)$$

از طرف دیگر، چون FK||AD، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CAD،

$$\frac{CF}{CA}=\frac{FK}{AD}\quad(۲)$$

اکنون توجه کنید که اگر تناسب (۱) را ترکیب در صورت کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{AF+FC}{FC}=\frac{۳+۱}{۱}\Rightarrow\frac{AC}{FC}=۴\Rightarrow\frac{FC}{AC}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین از تناسب (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{AD}\Rightarrow AD=۱۲$$

۲۳۲۶- گزینهٔ ۴ چون ED||AC، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BAC،

$$\frac{BE}{EA}=\frac{BD}{DC}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}\quad(۱)$$

از طرف دیگر، چون EF||BD، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABD،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BD}\quad(۲)$$

اکنون توجه کنید که اگر تناسب (۱) را ترکیب در صورت کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{BE+EA}{EA}=\frac{۴+۳}{۳}\Rightarrow\frac{AB}{EA}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{۳}{۷}$$

بنابراین از تناسب (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{۳}{۷}=\frac{EF}{۸}\Rightarrow EF=\frac{۲۴}{۷}$$

۲۳۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که NM||HC. در نتیجه طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BHC، $\frac{BM}{BC}=\frac{NM}{HC}=\frac{۱۶}{۲۴}=\frac{۲}{۳}$. بنابراین $\frac{BM}{BC}=\frac{BM}{BM+MC}=\frac{۲۰}{۲۰+x}=\frac{۲}{۳}$. در نتیجه x=۱۰.

۲۳۲۸- گزینهٔ ۱ فرض کنید ۶EF=۴FC=۳AE=۱۲k. در نتیجه

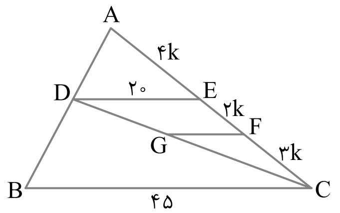
$$EF=۲k\ ,\quad FC=۳k\ ,\quad AE=۴k$$

طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{DE}{۴۵}=\frac{۴k}{۹k}\Rightarrow DE=۲۰$$

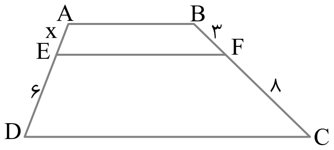
اکنون طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CED،

$$\frac{GF}{DE}=\frac{CF}{CE}=\frac{۳k}{۵k}\Rightarrow\frac{GF}{۲۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow GF=۱۲$$



۲۳۲۹- گزینهٔ ۲ بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقه،

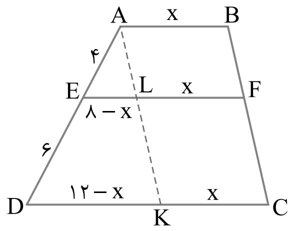
$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow x=\frac{۹}{۴}$$



۲۳۳۰- گزینهٔ ۴ از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و CD را به‌ترتیب در نقطه‌های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت چهارضلعی‌های ABFL و LFCK متوازی‌الاضلاع هستند، پس KC=LF=AB=x. اکنون توجه کنید که چون EL||DK، در مثلث ADK، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{EL}{DK}=\frac{AE}{AD}\Rightarrow\frac{۸-x}{۱۲-x}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

$$۴۰-۵x=۲۴-۲x\Rightarrow ۳x=۱۶\Rightarrow x=\frac{۱۶}{۳}$$



۲۳۳۱- گزینهٔ ۲ بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{۵}{۸}=\frac{۱۰}{BC}\Rightarrow BC=۱۶$$

۲۳۳۲- گزینهٔ ۲ چون EF||CD، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ADC،

$$\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{EC}\quad(۱)$$

چون DE||BC، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{AF}{FD}=\frac{AD}{DB}\quad(۳)$$

اگر فرض کنیم DF=x، تساوی (۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت

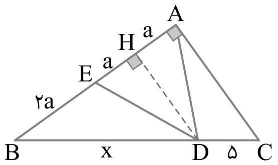
$$\frac{۲}{x}=\frac{۲+x}{۱۲}\Rightarrow x^{۲}+۲x-۲۴=۰$$

$$(x-۴)(x+۶)=۰\Rightarrow x=۴$$

بنابراین AB=۲+۴+۱۲=۱۸.

۲۳۳۳- گزینهٔ ۲ مثلث ADE متساوی‌الساقین است، پس میانهٔ وارد بر قاعدهٔ AE در آن ارتفاع نیز هست (به شکل زیر توجه کنید). از طرف دیگر، اگر AH=a، آن‌گاه EH=a و BE=EA=۲a. همچنین، چون HD||AC، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{BH}{HA}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{۳a}{a}=\frac{x}{۵}\Rightarrow x=۱۵$$



۲۳۳۴- گزینهٔ ۴ چون BFED لوزی است، پس

$$DE=EF=BF=DB=x$$

چون DE||BC، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۹}{۹+x}=\frac{x}{x+۴}\Rightarrow ۹x+۳۶=x^{۲}+۹x\Rightarrow ۳۶=x^{۲}\Rightarrow x=۶$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$.

۲۳۳۵- گزینهٔ ۳ بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث DAB،

$$\frac{DK}{DB}=\frac{EK}{AB}=\frac{۳}{۴}\quad(۱)$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BDC،

$$\frac{BK}{BD}=\frac{KF}{DC}\quad(۲)$$

از تناسب (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{DK}{DB}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{DB-DK}{DB}=\frac{۴-۳}{۴}\Rightarrow\frac{BK}{DB}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین از تناسب (۲) نتیجه می‌شود $\frac{۲}{DC}=\frac{۱}{۴}$، پس DC=۸.

تذکر برای به‌دست آوردن نسبت $\frac{BK}{DB}$ می‌توانیم از تناسب (۱) به‌صورت زیر استفاده کنیم:

$$\frac{DK}{DB}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{DK}{DB}+\frac{BK}{DB}=\frac{۳}{۴}+\frac{BK}{DB}\Rightarrow ۱=\frac{۳}{۴}+\frac{BK}{DB}\Rightarrow\frac{BK}{DB}=\frac{۱}{۴}$$

۲۳۳۶- گزینهٔ ۴ فرض کنید EF=x. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CAB،

$$\frac{EF}{AB}=\frac{CF}{CB}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{CF}{CB}\quad(۱)$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BCD،

$$\frac{EF}{DC}=\frac{BF}{BC}\Rightarrow\frac{x}{۳}=\frac{BF}{BC}\quad(۲)$$

با جمع کردن تناسب‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{x}{۶}+\frac{x}{۳}=\frac{CF+BF}{BC}\Rightarrow\frac{x+۲x}{۶}=۱\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲$$

۲۳۳۷- گزینهٔ ۲ چون ED||AC، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{ED}{AC}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{ED}{۲۰}=\frac{۳}{۱۵}\Rightarrow ED=۴$$

برای به‌دست آوردن طول ضلع بزرگ متوازی‌الاضلاع AEDF می‌توانیم یکی از دو روش زیر را به‌کار ببریم:

روش اول چون FD||AB، پس باز هم بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{FD}{AB}=\frac{CD}{CB}\xrightarrow{AE=FD}\frac{FD}{FD+۴}=\frac{۱۲}{۱۵}$$

$$۱۵FD=۱۲FD+۴۸\Rightarrow ۳FD=۴۸\Rightarrow FD=۱۶$$

روش دوم چون ED||AC، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BAC،

$$\frac{BE}{EA}=\frac{BD}{DC}$$

$$\frac{۴}{EA}=\frac{۳}{۱۲}\Rightarrow EA=۱۶$$

بنابراین محیط متوازی‌الاضلاع AEDF برابر است با

$$۲(ED+FD)=۲\times۲۰=۴۰$$

۲۳۳۸- گزینهٔ ۴ از نقطهٔ D خطی موازی FE رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در K قطع کند (شکل زیر را ببینید). طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BKD،

$$EF||KD\Rightarrow\frac{BF}{BD}=\frac{EF}{KD}$$

در نتیجه

$$\frac{BF}{BF+FD}=\frac{۶}{KD}\quad(۱)$$

توجه کنید که با توجه به فرض سؤال،

$$\frac{BF}{FD}=۳\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BF}{BF+FD}=\frac{۳}{۳+۱}=\frac{۳}{۴}\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود KD=۸. اکنون طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

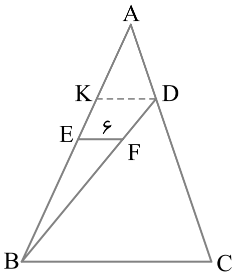
$$KD||BC\Rightarrow\frac{KD}{BC}=\frac{AD}{AC}\quad(۳)$$

همچنین طبق فرض سؤال،

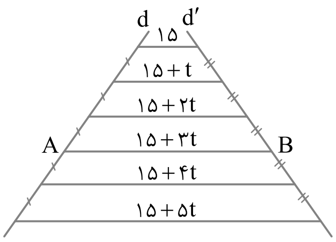
$$\frac{DC}{AD}=۵\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{AD+DC}{AD}=\frac{۱+۵}{۱}=۶$$

$$\frac{AC}{AD}=۶\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین از تساوی (۳) نتیجه می‌شود $\frac{۸}{BC}=\frac{۱}{۶}$. پس BC=۴۸.



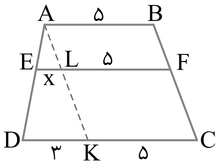
۲۳۳۹- گزینهٔ ۱ چون پاره‌خط‌های افقی موازی‌اند، بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقه، پاره‌خط‌هایی که روی خط d′ تشکیل شده‌اند نیز برابر هستند، در نتیجه از روی شکل زیر معلوم می‌شود که ۱۵+۵t=۷۵، پس t=۱۲. بنابراین AB=۱۵+۳۶=۵۱.



۲۳۴۰- گزینهٔ ۱ از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و CD را به‌ترتیب در L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت چون ABFL و LFCK متوازی‌الاضلاع هستند، پس $KC=LF=AB=۵$ ، اکنون توجه کنید که چون $EL||DK$ ، در مثلث ADK ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{AD}=\frac{EL}{DK} \quad (۱)$$

از طرف دیگر طبق فرض سؤال، $\frac{AE}{DE}=\frac{۱}{۲}$ و اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم به‌دست می‌آید



$$\frac{AE}{DE+AE}=\frac{۱}{۲+۱}\Rightarrow\frac{AE}{AD}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین از تناسب (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۳}=\frac{x}{۳}\Rightarrow x=۱$$

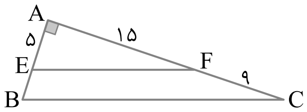
بنابراین $EF=۱+۵=۶$.

۲۳۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{۵}{EB}=\frac{۱۵}{۹}\Rightarrow EB=\frac{۵\times۹}{۱۵}=۳$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ،

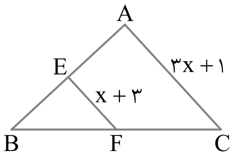
$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=۸^۲+۲۴^۲=۸^۲(۱+۳^۲)=۸^۲\times۱۰\Rightarrow BC=۸\sqrt{۱۰}$$



۲۳۴۲- گزینهٔ ۳ پاره‌خط EF میان‌خط اسـت، پس طول آن برابر با نصف طول AC است. بنابراین

$$x+۳=\frac{۱}{۲}(۳x+۱)\Rightarrow x=۵$$

بنابراین $EF=۵+۳=۸$.



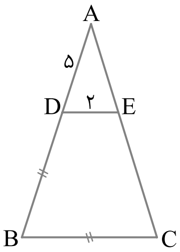
۲۳۴۳- گزینهٔ ۳ چون $DE||BC$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

از طرف دیگر، $BC=DB$ ، در نتیجه

$$\frac{۵}{۵+DB}=\frac{۲}{DB}\Rightarrow ۵DB=۲DB+۱۰$$

بنابراین $DB=\frac{۱۰}{۳}$. اکنون بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{۵}{\frac{۱۰}{۳}}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{۳}{۲}$$



۲۳۴۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حـل اول** فرض کنید $AE=s$ و $AF=t$ ، (شـکل زیر را ببینید). چون $EF||BC$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{s}{s+x}=\frac{t}{t+y}=\frac{۲}{۵}$$

بنابراین

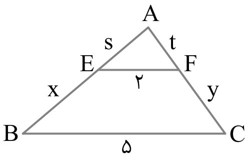
$$\frac{s}{s+x}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۵s=۲s+۲x\Rightarrow ۳s=۲x$$

$$\frac{t}{t+y}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۵t=۲t+۲y\Rightarrow ۳t=۲y$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم:

$$۳(s+t)=۲(x+y)\xrightarrow{x+y=۹}s+t=۶$$

بنابراین محیط مثلث AEF برابر است با $s+t+۲=۸$.



راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن $s+t$ ، تناسب $\frac{s}{s+x}=\frac{t}{t+y}=\frac{۲}{۵}$ را تفضیل در مخرج می‌کنیم

$$\frac{s}{s+x-s}=\frac{t}{t+y-t}=\frac{۲}{۵-۲}\Rightarrow\frac{s}{x}=\frac{t}{y}=\frac{۲}{۳}$$

اکنون از خاصیت‌های تناسب (خاصیت چ) استفاده می‌کنیم

$$\frac{s}{x}=\frac{t}{y}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{s+t}{x+y}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{x+y=۹}\frac{s+t}{۹}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow s+t=۶$$

بنابراین محیط مثلث AEF برابر است با $s+t+۲=۸$.

راه‌حل سوم چون $EF||BC$ ، پس مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند. در نتیجـه نسـبت محیط‌هـای آن‌ها برابر نسـبت تشـابه آن‌هاسـت. در نتیجه، با نمادگذاری شکل راه‌حل اول،

$$\frac{s+t+۲}{s+x+۵+t+y}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{s+t+۲}{s+t+۹+۵}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow s+t=۶$$

بنابراین محیط مثلث AEF برابر است با $s+t+۲=۸$.

۲۳۴۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** چـون $EF||BD$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABD ،

$$\frac{AF}{AD}=\frac{EF}{BD}=\frac{۳}{۴} \quad (۱)$$

از طرف دیگر، چون $FK||AC$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث DAC،

$$\frac{FK}{AC}=\frac{DF}{DA}\Rightarrow\frac{x}{۱۲}=\frac{DF}{DA}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{۱۲-x}{۱۲}=\frac{DA-DF}{DA}=\frac{AF}{DA}$$

$$\xrightarrow{(۱)}\frac{۱۲-x}{۱۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴(۱۲-x)=۳\times۱۲\Rightarrow x=۳$$

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن x، از تناسب (۱) به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AF}{AD}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{AF}{AD}+\frac{FD}{AD}=\frac{۳}{۴}+\frac{FD}{AD}\Rightarrow ۱=\frac{۳}{۴}+\frac{FD}{AD}\Rightarrow\frac{FD}{AD}=\frac{۱}{۴} \quad (۱)$$

از طرف دیگر چون $FK||AC$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث DAC،

$$\frac{FK}{AC}=\frac{DF}{DA}\xrightarrow{(۱)}\frac{x}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=۳$$

۲۳۴۶- گزینهٔ ۲ از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث‌های ABC و BAD استفاده می‌کنیم:

$$FH \| BC \Rightarrow \frac{FH}{BC}=\frac{AF}{AB}$$

$$FE \| AD \Rightarrow \frac{FE}{AD}=\frac{BF}{AB}$$

با جمع کردن دو تساوی بالا معلوم می‌شود که

$$\frac{FH}{BC}+\frac{FE}{AD}=\frac{AF+BF}{AB}=۱$$

$$\frac{۶}{BC}+\frac{۲}{۵}=۱$$

$$\frac{۶}{BC}=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow BC=۱۰$$

۲۳۴۷- گزینهٔ ۳ چون در لوزی همهٔ ضلع‌ها برابرند، پس

$$AD=AB=BC=CD=۶$$

از طرف دیگر، چون $FC \| AD$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث EAD،

$$\frac{FC}{AD}=\frac{EC}{ED}\Rightarrow \frac{FC}{۶}=\frac{۶}{۱۲}$$

پس $FC=۳$. بنابراین $BF=۶-۳=۳$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AFB ،

$$AB^{۲}=AF^{۲}+FB^{۲}$$

$$۳۶=AF^{۲}+۹$$

$$AF=۳\sqrt{۳}$$

به این ترتیب، مساحت مثلث ABF برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AF\times BF=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$

تذکر برای به‌دست آوردن FC، چون FC با AD موازی است و C وسط DE است، بنابر قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم F نیز وسط AE است، در نتیجه FC در مثلث EAD میان‌خط است پس می‌توان FC را به صورت زیر به‌دست آورد:

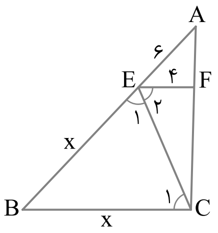
$$FC=\frac{AD}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۲۳۴۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون $EF \| BC$ ، از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{E}_{۲}=\hat{C}_{۱}$ (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر، $\hat{E}_{۲}=\hat{E}_{۱}$ ، پس $\hat{E}_{۱}=\hat{C}_{۱}$. بنابراین مثلث EBC متساوی‌الساقین است و در نتیجه $EB=BC=x$. اکنون توجه کنید که چون $EF \| BC$ ، از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow \frac{۶}{۶+x}=\frac{۴}{x}$$

$$۶x=۲۴+۴x\Rightarrow x=۱۲$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC، $\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$.



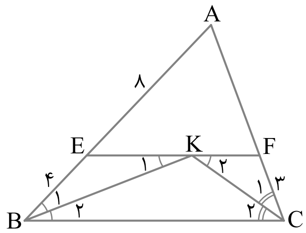
۲۳۴۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون $EF \| BC$ ، از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{K}_{۱}=\hat{B}_{۲}$ (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر، $\hat{B}_{۲}=\hat{B}_{۱}$ ، پس $\hat{K}_{۱}=\hat{B}_{۱}$ ، و در نتیجه مثلث BEK متساوی‌الساقین است، پس $EK=EB=۴$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که $KF=FC=۳$ ، به این ترتیب $EF=۴+۳=۷$. اکنون توجه کنید که چون $EF \| BC$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow \frac{۸}{۸+۴}=\frac{۷}{BC}\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۷}{BC}\Rightarrow ۲BC=۲۱\Rightarrow BC=\frac{۲۱}{۲}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow \frac{۸}{۴}=\frac{AF}{۳}\Rightarrow AF=۶$$

بنابراین محیط مثلث ABC برابر است با $۸+۴+\frac{۲۱}{۲}+۳+۶=۳۱/۵$.

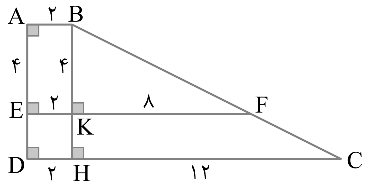


۲۳۵۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $AB \| EF \| DC$. از نقطهٔ B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و CD را به‌ترتیب در K و H قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BHC،

$$KF \| CH \Rightarrow \frac{BK}{BH}=\frac{KF}{HC}\Rightarrow \frac{۴}{KH+۴}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow KH=۲$$

بنابراین $BH=۴+۲=۶$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC ،

$$BC^{۲}=BH^{۲}+HC^{۲}=۶^{۲}+۱۲^{۲}=۶^{۲}\times ۵\Rightarrow BC=۶\sqrt{۵}$$



۲۳۵۱- گزینهٔ ۲ زاویه‌های ACB و ECD متقابل به رأس هستند، پس برابرند. بنابراین مثلث‌های ACB و ECD متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{BC}{DC}=\frac{AC}{EC}\Rightarrow \frac{x}{۴}=\frac{۹}{۳}\Rightarrow x=۱۲$$

۲۳۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در مثلث‌های ABD و CBA زاویهٔ B مشترک است و $B\hat{A}D=A\hat{C}B$. بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه $\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}$ ، بنابراین $\frac{\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{BC}$ در نتیجه $BC=۹\sqrt{۲}$. پس

$$DC=۹\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۸\sqrt{۲}$$

۲۳۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ (ز ز). در نتیجه $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$ ، یعنی $\frac{۳}{۵}=\frac{۴}{۳+BD}$. بنابراین $BD=\frac{۱۱}{۳}$.

۲۳۵۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون $EF||BC$، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{F}_۱=\hat{C}$ (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AHF و FKC که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند، متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

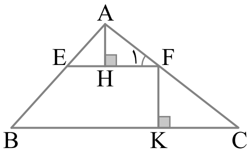
$$\frac{AF}{FC}=\frac{AH}{FK}=\frac{۲}{۳}$$

اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{AF}{AF+FC}=\frac{۲}{۲+۳}\Rightarrow\frac{AF}{AC}=\frac{۲}{۵}$$

بنابراین از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}\Rightarrow\frac{۶}{BC}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow BC=۱۵$$

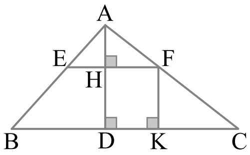


راه‌حل دوم از نقطهٔ H عمود HD را بر ضلع BC رسم می کنیم (شکل زیر را ببینید). واضح است که $FK=HD$. از طرف دیگر چون $EF||BC$، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه هستند و AH و AD به‌ترتیب ارتفاع‌های آن‌ها هستند. از طرف دیگر

$$\frac{AH}{HD}=\frac{AH}{FK}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{AH}{AH+HD}=\frac{۲}{۲+۳}\Rightarrow\frac{AH}{AD}=\frac{۲}{۵}$$

بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث AEF و ABC، $\frac{۲}{۵}$ است، پس نسبت تشابه این دو مثلث نیز $\frac{۲}{۵}$ است، در نتیجه

$$\frac{EF}{BC}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{۶}{BC}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow BC=۱۵$$



۲۳۵۵- گزینهٔ ۴ چون $AB||DE$، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{A}=\hat{E}$ و $\hat{B}=\hat{D}$. بنابراین مثلث‌های ABC و EDC به حالت (ز ز) متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{AB}{ED}=\frac{AC}{EC}\Rightarrow\frac{۹}{ED}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow ED=۱۵$$

همین‌طور $\frac{BC}{DC}=\frac{AC}{EC}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$. اگر این تناسب را ترکیب در صورت کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{BC+DC}{DC}=\frac{۳+۵}{۵}\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{۸}{۵}\Rightarrow\frac{۳۲}{DC}=\frac{۸}{۵}\Rightarrow DC=۲۰$$

بنابراین محیط مثلث CDE برابر است با $۲۰+۱۰+۱۵=۴۵$.

۲۳۵۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید $A\hat{E}B=C\hat{E}D$ (زاویه‌های متقابل به رأس). همچنین $\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین دو مثلث AEB و CED به حالت (ض‌زض) متشابه هستند. در نتیجه $\frac{AB}{CD}=\frac{۱۰}{x}=\frac{۱}{۲}$ پس $x=CD=۲۰$.

۲۳۵۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{۱}{۲}$. همچنین $\hat{A}=\hat{A}$، بنابراین $\triangle AED\sim\triangle ABC$ (ض‌زض). در نتیجه $\frac{BC}{DE}=\frac{۱}{۲}$.

۲۳۵۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{۱}{۲}$ و $\hat{A}=\hat{A}$. در نتیجه، دو مثلث ADE و ACB به حالت (ض‌زض) متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{DE}{BC}=\frac{۶}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۱۲$$

۲۳۵۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BEF،

$$BF^۲=BE^۲+EF^۲=۱۶+۹=۲۵\Rightarrow BF=۵$$

از طرف دیگر مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و FBE که یک زاویهٔ حادهٔ مشترک دارند، متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{\text{محیط}(ABC)}{\text{محیط}(FBE)}=\frac{AB}{FB}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

$$\frac{\text{محیط}(ABC)}{۱۲}=۲\Rightarrow\text{محیط}(ABC)=۲۴$$

۲۳۶۰- گزینهٔ ۴ چون $EF||BC$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{\text{مساحت}\ (AEF)}{\text{مساحت}\ (ABC)}=(\frac{AE}{AB})^۲=(\frac{۲}{۵})^۲=\frac{۴}{۲۵}$$

اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{\text{مساحت}\ (AEF)}{\text{مساحت}\ (ABC)-\text{مساحت}\ (AEF)}=\frac{\text{مساحت}\ (AEF)}{\text{مساحت}\ (BEFC)}=\frac{۴}{۲۵-۴}=\frac{۴}{۲۱}$$

۲۳۶۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** با توجه به شکل معلوم می‌شود

$$\triangle ADB\sim\triangle ABC\ (\text{زز})$$

بنابراین

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{AC}\Rightarrow AC=۹$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow ۹^۲=۶^۲+BC^۲\Rightarrow BC=۳\sqrt{۵}$$

بنابراین $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times BC=۹\sqrt{۵}$.

راه‌حل دوم بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB،

$$AB^۲=AD^۲+DB^۲\Rightarrow ۶^۲=۴^۲+DB^۲\Rightarrow DB=۲\sqrt{۵}$$

در نتیجه $S_{ADB}=\frac{۱}{۲}AD\times DB=۴\sqrt{۵}$. اکنون توجه کنید که مثلث‌های ADB و ABC متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADB}}=(\frac{AB}{AD})^۲\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{۴\sqrt{۵}}=(\frac{۶}{۴})^۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow S_{ABC}=۹\sqrt{۵}$$

۲۳۶۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید $DC=x$. مثلث‌های ABD و CBA به حالت (ز ز) متشابه‌اند ($\hat{A}_۱=\hat{C}$ و زاویهٔ B مشترک). بنابراین

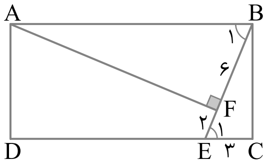
$$\frac{BD}{BA}=\frac{AB}{CB}\Rightarrow\frac{۴}{۸}=\frac{۸}{۴+x}\Rightarrow ۱۶=۴+x\Rightarrow x=۱۲$$

۲۳۶۳- گزینهٔ ۲ مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و EFC که یک زاویهٔ حادهٔ مشترک دارند، متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{AC}{EC}=\frac{AB}{EF}\Rightarrow\frac{AC}{۶}=\frac{۱۰}{۴}\Rightarrow AC=۱۵$$

۲۳۶۴- گزینهٔ ۲ چون AB||CD، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{B}_۱=\hat{E}_۱$ (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AFB و BCE که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند، متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{AB}{BE}=\frac{BF}{EC}\Rightarrow\frac{AB}{۸}=\frac{۶}{۳}\Rightarrow AB=۱۶$$



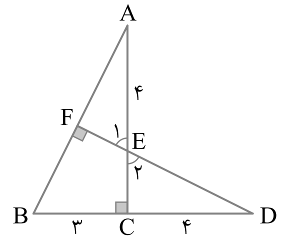
۲۳۶۵- گزینهٔ ۲ در مثلث AEF، $\hat{A}+\hat{E}_۱=۹۰^\circ$ و در مثلث DCE، $\hat{D}+\hat{E}_۲=۹۰^\circ$ از طرف دیگر $\hat{E}_۱=\hat{E}_۲$، پس $\hat{A}=\hat{D}$. در نتیجه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و DEC متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{BC}{EC}=\frac{AC}{CD}\Rightarrow\frac{۳}{EC}=\frac{۴+EC}{۴}$$

$$۱۲=۴EC+EC^۲$$

$$EC^۲+۴EC-۱۲=۰$$

$$(EC-۲)(EC+۶)=۰\Rightarrow EC=۲$$



۲۳۶۶- گزینهٔ ۴ چون DE||AB، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های DEF و BAF متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{DE}{BA}=\frac{DF}{BF}\Rightarrow\frac{x}{BA}=\frac{۲}{۹}\quad(۱)$$

از طرف دیگر، چون DC||AB، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های DCK و BAK متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{DC}{BA}=\frac{DK}{BK}\Rightarrow\frac{x+y}{BA}=\frac{۶}{۵}\quad(۲)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{x}{x+y}=\frac{\frac{۲}{۹}}{\frac{۶}{۵}}=\frac{۵}{۲۷}$$

۲۳۶۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $A\hat{E}B=C\hat{E}D$ (زاویه‌های متقابل به رأس). همچنین $\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}=\frac{۱}{۳}$. بنابراین دو مثلث AEB و CED به حالت (ض‌زض) متشابه هستند. در نتیجه

$$\frac{AB}{CD}=\frac{۱۰}{x}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=۳۰$$

۲۳۶۸- گزینهٔ ۱ چون AB||CD، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $B\hat{A}C=A\hat{C}D$. همچنین $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{DC}=\frac{۳}{۴}$. بنابراین

(ض‌زض) $\triangle ABC\sim\triangle CAD$

در نتیجه

$$\frac{BC}{AD}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow BC=\frac{۳}{۴}AD=\frac{۳}{۴}(۲۴)=۱۸$$

۲۳۶۹- گزینهٔ ۴ مثلث‌های ABC و DAC به حالت (ز ز) متشابه‌اند، زیرا $\hat{B}=\hat{A}_۱$ و زاویهٔ C در آن‌ها مشترک است. بنابراین

$$\frac{\text{محیط }(ABC)}{\text{محیط }(DAC)}=\frac{AC}{DC}\Rightarrow\frac{\text{محیط}(ABC)}{۱۵}=\frac{۶}{۵}\Rightarrow\text{محیط}(ABC)=۱۸$$

۲۳۷۰- گزینهٔ ۴ مثلث‌های ABC و DBE قائم‌الزاویه‌اند و زاویهٔ B در آن‌ها مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{\text{مساحت }(ABC)}{\text{مساحت }(DBE)}=(\frac{AB}{DB})^۲\quad(۱)$$

از طرف دیگر،

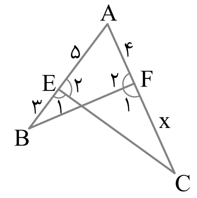
$$\text{مساحت }(ABC)=\text{مساحت }(DBE)+\text{مساحت }(ACDE)$$
$$=۲\,\text{مساحت }(DBE)$$

در نتیجه، تناسب (۱) می‌شود

$$۲=(\frac{۸}{x})^۲\Rightarrow ۲=\frac{۶۴}{x^۲}\Rightarrow x^۲=۳۲\Rightarrow x=۴\sqrt{۲}$$

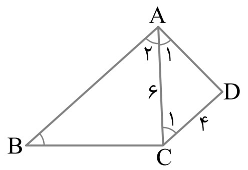
۲۳۷۱- گزینهٔ ۴ فرض کنید CF=x. چون $\hat{E}_۱=\hat{F}_۱$، پس زاویه‌های $E_۲$ و $F_۲$ نیز که مکمل این دو زاویهٔ برابر هستند، برابرند (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های ABF و ACE به حالت (ز ز) متشابه اند ($\hat{F}_۲=\hat{E}_۲$ و زاویهٔ A مشترک). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AE}\Rightarrow\frac{۸}{۴+x}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۴۰=۱۶+۴x\Rightarrow x=۶$$



۲۳۷۲- گزینهٔ ۲ چون AB||CD، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{A}_۲=\hat{C}_۱$ (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های ABC و CAD به حالت (ز ز) متشابه‌اند ($\hat{B}=\hat{A}_۱$ و $\hat{A}_۲=\hat{C}_۱$). در نتیجه

$$\frac{AB}{CA}=\frac{AC}{CD}\Rightarrow\frac{AB}{۶}=\frac{۶}{۴}\Rightarrow AB=۹$$



۲۳۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ CDE،

$$DE^{۲}=CE^{۲}+CD^{۲}\Rightarrow ۵^{۲}=CE^{۲}+۳^{۲}\Rightarrow CE=۴$$

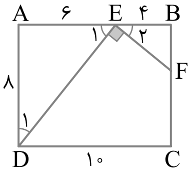
مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABE و DCE که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند (زاویهٔ E)، متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{AB}{DC}=\frac{BE}{CE}\Rightarrow\frac{۶}{۳}=\frac{BE}{۴}\Rightarrow BE=۸$$

بنابراین BC=۸+۴=۱۲ . اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AC^{۲}=AB^{۲}+BC^{۲}=۶^{۲}+۱۲^{۲}=۶^{۲}(۱+۲^{۲})=۶^{۲}\times۵\Rightarrow AC=۶\sqrt{۵}$$

۲۳۷۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که BE=۱۰-۶=۴ . از طرف دیگر، $\hat{E}_{۱}+\hat{D}_{۱}=۹۰^\circ$ و $\hat{E}_{۱}+\hat{E}_{۲}=۹۰^\circ$ ، پس $\hat{D}_{۱}=\hat{E}_{۲}$ (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADE و BEF که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند، متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه



$$\frac{AE}{BF}=\frac{AD}{BE}\Rightarrow\frac{۶}{BF}=\frac{۸}{۴}\Rightarrow BF=۳$$

در نتیجه FC=۸-۳=۵ .

۲۳۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{AB}{AC}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{BC}{CD}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$ و $A\hat{B}C=A\hat{C}D$. بنابراین مثلث‌های ABC و ACD متشابه‌اند (ض‌زض). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{x}\Rightarrow x=۱۲$$

۲۳۷۶- گزینهٔ ۳ در دو مثلث ABC و EDC، $\frac{AC}{EC}=\frac{۱۲}{۳}=۴$ و $\frac{BC}{DC}=\frac{۱۶}{۴}=۴$. چون زاویهٔ C هم در این دو مثلث مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ض‌زض)، بنابراین

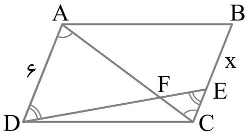
$$\frac{AC}{EC}=\frac{AB}{DE}\Rightarrow\frac{۱۲}{۳}=\frac{AB}{۶}\Rightarrow AB=۲۴$$

۲۳۷۷- گزینهٔ ۳ چون AD||BC ، پس مثلث‌های ADF و CEF متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

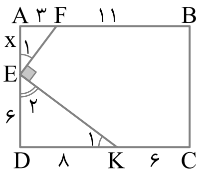
$$\frac{AF}{CF}=\frac{AD}{CE}\xrightarrow{\frac{AF}{CF}=۳}۳=\frac{۶}{CE}\Rightarrow CE=۲$$

از طرف دیگر، چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس

$$AD=BC\Rightarrow ۶=x+۲\Rightarrow x=۴$$



۲۳۷۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون DC=AB=۱۴ ، پس AF=۳ . از طرف دیگر، چون $\hat{E}_{۱}+\hat{E}_{۲}=۹۰^\circ$ و $\hat{K}_{۱}+\hat{E}_{۲}=۹۰^\circ$ ، پس $\hat{E}_{۱}=\hat{K}_{۱}$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AEF و DKE متشابه‌اند (ز ز). بنابراین



$$\frac{AE}{DK}=\frac{AF}{DE}\Rightarrow\frac{x}{۸}=\frac{۳}{۶}\Rightarrow x=۴$$

۲۳۷۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که بنابر قضیهٔ اساسی تشابه،

$$\triangle AEF\sim\triangle AMN\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=(\frac{AE}{AM})^{۲}=(\frac{۵}{۶})^{۲}=\frac{۲۵}{۳۶}$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AEF}+۳۳}=\frac{۲۵}{۳۶}\Rightarrow S_{AEF}=۷۵$$

همچنین بنابر قضیهٔ اساسی تشابه،

$$\triangle AEF\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=(\frac{AE}{AB})^{۲}$$

$$\frac{۷۵}{S_{ABC}}=(\frac{۵}{۸})^{۲}\Rightarrow S_{ABC}=۱۹۲$$

۲۳۸۰- گزینهٔ ۲ بنابر قضیهٔ اساسی تشابه چون مثلث‌های AEF و AMN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=(\frac{AF}{AN})^{۲}=(\frac{۳}{۸})^{۲}=\frac{۹}{۶۴}$$

اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}-S_{AEF}}=\frac{۹}{۶۴-۹}\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{EFNM}}=\frac{۹}{۵۵}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=(\frac{AF}{AC})^{۲}=(\frac{۳}{۱۰})^{۲}=\frac{۹}{۱۰۰}\qquad(۲)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S_{EFNM}}{S_{ABC}}=\frac{۵۵}{۱۰۰}=۰/۵۵$$

۲۳۸۱- گزینهٔ ۱ چون AB||CD ، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{A}=\hat{D}$ و $\hat{B}=\hat{C}$. بنابراین مثلث‌های ABE و DCE متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

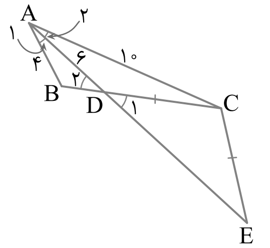
$$\frac{AB}{DC}=\frac{BE}{CE}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{BE}{CE}$$

اگر این تناسب را ترکیب در صورت کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{۵+۲}{۲}=\frac{BE+CE}{CE}\Rightarrow\frac{۷}{۲}=\frac{BC}{CE}\Rightarrow\frac{۷}{۲}=\frac{۲۸}{CE}\Rightarrow CE=۸$$

۲۳۸۲- گزینهٔ ۳ چون CD=CE ، پس مثلث CDE متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{D}_{۱}=\hat{E}$ (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر $\hat{D}_{۱}=\hat{D}_{۲}$ (متقابل به رأس)، پس $\hat{D}_{۲}=\hat{E}$. بنابراین مثلث‌های ABD و ACE به حالت (ز ز) متشابه‌اند ($\hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۲}$ و $\hat{D}_{۲}=\hat{E}$). در نتیجه

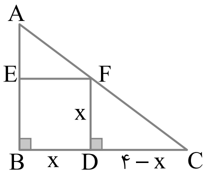
$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow\frac{۴}{۱۰}=\frac{۶}{۶+DE}\Rightarrow DE=۹$$



۲۳۸۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول ضلع مربع BEFD برابر x باشد. مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و FDC که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند (زاویهٔ C)، متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

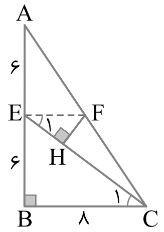
$$\frac{AB}{FD}=\frac{BC}{DC}\Rightarrow\frac{۳}{x}=\frac{۴}{۴-x}\Rightarrow۳(۴-x)=۴x\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۷}$$

بنابراین محیط مربع BEFD برابر است با $۴x=\frac{۴۸}{۷}$.



۲۳۸۴- گزینهٔ ۳ چون نقطه‌های E و F به‌ترتیب وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC هستند، در نتیجه EF در مثلث ABC میان‌خط است، پس $EF=\frac{BC}{۲}=۴$. همچنین می‌توان نتیجه گرفت EF با BC موازی است. بنابراین طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{E}_۱=\hat{C}_۱$. اکنون توجه کنید که مثلث‌های قائم الزاویهٔ EFH و CEB متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{EF}{CE}=\frac{FH}{EB}\xrightarrow{CE=۱۰(\text{فیثاغورس})}\frac{۴}{۱۰}=\frac{FH}{۶}\Rightarrow FH=۲/۴$$



۲۳۸۵- گزینهٔ ۱ بنابر قضیهٔ تالس در مثلث DEC،

$$FG||EC\Rightarrow\frac{DF}{FE}=\frac{DG}{GC}\Rightarrow\frac{۴}{۶}=\frac{DG}{۹}\Rightarrow DG=۶$$

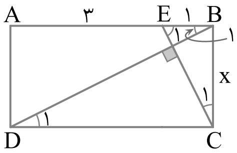
بنابر قضیهٔ اساسی تشابه $\triangle AEB\sim\triangle DEC$، پس

$$\frac{AB}{CD}=\frac{EB}{EC}\Rightarrow\frac{۶}{۱۵}=\frac{۳}{EC}\Rightarrow EC=۷/۵$$

در نتیجه با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث DEC،

$$\frac{GF}{EC}=\frac{DG}{DC}\Rightarrow\frac{GF}{۷/۵}=\frac{۶}{۱۵}\Rightarrow GF=۳$$

۲۳۸۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون AD||BC، بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\hat{B}_۱=\hat{D}_۱$ (شکل روبه‌رو را ببینید). از طرف دیگر،



$$\begin{cases}\hat{B}_۱+\hat{E}_۱=۹۰^\circ\\ \hat{C}_۱+\hat{E}_۱=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{B}_۱=\hat{C}_۱$$

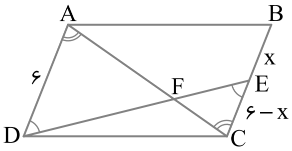
در نتیجه $\hat{C}_۱=\hat{D}_۱$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BEC و CBD که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند، متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{EB}{BC}=\frac{BC}{CD}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=۲$$

۲۳۸۷- گزینهٔ ۲ چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس $AD=x+۶-x=۶$. از طرف دیگر چون AD||BC، پس مثلث‌های ADF و CEF متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{AF}{CF}=\frac{AD}{CE}\xrightarrow{\frac{AF}{CF}=۲}۲=\frac{۶}{CE}\Rightarrow CE=۳$$

در نتیجه $۶-x=۳$، پس $x=۳$.



۲۳۸۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{EC}{AB}=\frac{ED}{AC}=\frac{DC}{CB}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین مثلث‌های EDC و ACB متشابه‌اند (ض‌ض‌ض). در نتیجه

$$A\hat{B}C=D\hat{C}E=۳۵^\circ$$

به این ترتیب، $B\hat{A}C=۱۸۰^\circ-(۶۵^\circ+۳۵^\circ)=۸۰^\circ$.

۲۳۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که بنابر قضیهٔ اساسی تشابه،

$$\triangle AMF\sim\triangle ANC\Rightarrow\frac{S_{AMF}}{S_{ANC}}=(\frac{AM}{AN})^۲$$

$$\triangle AEM\sim\triangle ABN\Rightarrow\frac{S_{AEM}}{S_{ABN}}=(\frac{AM}{AN})^۲$$

بنابراین

$$\frac{S_{AMF}}{S_{ANC}}=\frac{S_{AEM}}{S_{ABN}}\Rightarrow\frac{۱۸}{۱۸+۳۲}=\frac{S_{AEM}}{S_{AEM}+۴۸}\Rightarrow S_{AEM}=۲۷$$

۲۳۹۰- گزینهٔ ۴ مثلث‌های ABC و DBE قائم‌الزاویه‌اند و زاویهٔ B در آن‌ها مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{\text{مساحت}\,(ABC)}{\text{مساحت}\,(DBE)}=(\frac{AB}{DB})^۲\qquad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$\text{مساحت}\,(ABC)=\text{مساحت}\,(DBE)+\text{مساحت}\,(ACDE)$$

$$=\text{مساحت}\,(DBE)+\frac{۳}{۲}\text{مساحت}\,(DBE)=\frac{۵}{۲}\text{مساحت}\,(DBE)$$

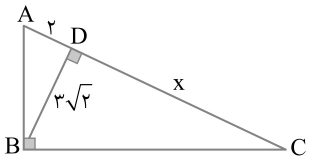
در نتیجه، تناسب (۱) می‌شود $(\frac{AB}{۱۰})^۲=\frac{۵}{۲}$، پس $AB=۵\sqrt{۱۰}$.

۲۳۹۱- گزینهٔ ۲ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^۲=CH\times CB=۶\times۹\Rightarrow AC=۳\sqrt{۶}$$

۲۳۹۲- گزینهٔ ۴ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$BD^۲=AD\times DC\Rightarrow(۳\sqrt{۲})^۲=۲x\Rightarrow x=۹$$



۲۳۹۳- گزینهٔ ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow۱۲=x(۲x+۲)\Rightarrow x^۲+x-۶=۰$$

$$(x+۳)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲$$

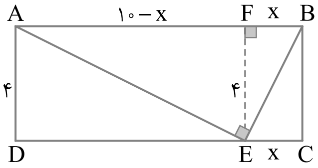
پس $BC=۲x+۲=۶$.

۲۳۹۴- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $CE=x$. از E پاره‌خط EF را عمود بر AB رسم می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). در این صورت $FB=x$ ، $FA=۱۰-x$ و $EF=۴$. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEB ، بنابر رابطه‌های طولی،

$$EF^{۲}=FB\times FA\Rightarrow ۴^{۲}=x(۱۰-x)\Rightarrow x^{۲}-۱۰x+۱۶=۰$$

$$(x-۲)(x-۸)=۰\Rightarrow x=۲,\ x=۸$$

چون $CE<DE$ ، پس $CE=x=۲$.



۲۳۹۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر مثلث را به دو مثلث کوچک متشابه تقسیم می‌کند. بنابراین مثلث‌های AHB و CHA متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\frac{۲BH}{AC}=\frac{BH}{۲\sqrt{۳}}\Rightarrow AC=۴\sqrt{۳}$$

به این ترتیب، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHC،

$$AC^{۲}=AH^{۲}+HC^{۲}\Rightarrow ۴^{۲}\times۳=۲^{۲}\times۳+HC^{۲}$$

$$HC^{۲}=۴^{۲}\times۳-۲^{۲}\times۳=۳۶\Rightarrow HC=۶$$

راه‌حل دوم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^{۲}=BH\times BC\Rightarrow ۴BH^{۲}=BH\times BC\Rightarrow ۴BH=BC$$

$$۴BH-BH=BC-BH\Rightarrow ۳BH=CH$$

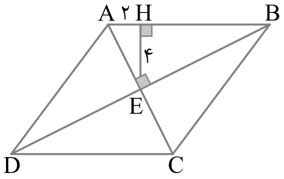
از طرف دیگر بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AH^{۲}=BH\times HC\Rightarrow ۱۲=\frac{CH}{۳}\times CH\Rightarrow CH^{۲}=۳۶\Rightarrow CH=۶$$

۲۳۹۶- گزینهٔ ۲ در لوزی قطرها بر هم عمودند، بنابراین مثلث AEB قائم‌الزاویه است. در این مثلث قائم‌الزاویه از رابطه‌های طولی نتیجه می‌شود

$$EH^{۲}=AH\times HB\Rightarrow ۱۶=۲\times HB\Rightarrow HB=۸$$

بنابراین $AB=۲+۸=۱۰$.



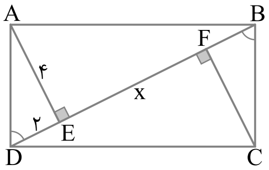
۲۳۹۷- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ،

$$AH^{۲}=HB\times HC\Rightarrow ۱۶=HB\times۸\Rightarrow HB=۲$$

همین‌طور در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC ،

$$DH'^{۲}=H'B\times H'C=۴\times۶\Rightarrow DH'=۲\sqrt{۶}$$

۲۳۹۸- گزینهٔ ۳ چون AD||BC ، پس $C\hat{B}F=A\hat{D}E$ ، بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AED و CFB همنهشت‌اند (به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده). بنابراین $BF=DE=۲$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD ، بنابر رابطه‌های طولی،



$$AE^{۲}=DE\times EB\Rightarrow ۱۶=۲\times(x+۲)\Rightarrow x=۶$$

۲۳۹۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC،

$$HC^{۲}=CK\times CA\Rightarrow y^{۲}=۷\times۱۰=۷۰\Rightarrow y=\sqrt{۷۰}$$

همین‌طور در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ،

$$AC^{۲}=CH\times CB\Rightarrow ۱۰۰=\sqrt{۷۰}\times(x+\sqrt{۷۰})$$

$$۱۰۰=\sqrt{۷۰}x+۷۰\Rightarrow\sqrt{۷۰}x=۳۰\Rightarrow x=\frac{۳۰}{\sqrt{۷۰}}$$

بنابراین $xy=۳۰$.

راه‌حل دوم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AH^{۲}=BH\times HC\Rightarrow AH^{۲}=xy\quad(۱)$$

برای به‌دست آوردن AH، از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ HAC استفاده می‌کنیم

$$AH^{۲}=AK\times AC\Rightarrow AH^{۲}=۳\times۱۰=۳۰$$

در نتیجه با استفاده از تساوی (۱)، $xy=۳۰$.

۲۴۰۰- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ FDC ، بنابر رابطه‌های طولی،

$$FC^{۲}=EC\times DC\xrightarrow{DC=۲EC}FC^{۲}=۲EC^{۲}$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، $AD^{۲}=BD\times DC$ یعنی $۱۶=۲\times DC$ ، بنابراین $DC=۸$. در نتیجه $EC=\frac{DC}{۲}=۴$. بنابراین

$$FC^{۲}=۲EC^{۲}=۲\times۴^{۲}\Rightarrow FC=۴\sqrt{۲}$$

۲۴۰۱- گزینهٔ ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$CD^{۲}=BD\times AD\Rightarrow x^{۲}=۱۶\times۹=۱۴۴\Rightarrow x=۱۲$$

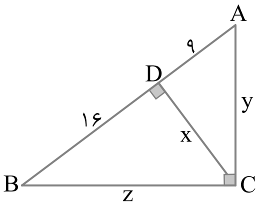
همچنین

$$y^{۲}=AD\times AB=۹\times۲۵\Rightarrow y=۱۵$$

و

$$z^{۲}=BD\times AB=۱۶\times۲۵\Rightarrow z=۲۰$$

در نتیجه $x+y+z=۴۷$.



۲۴۰۲- گزینهٔ ۲ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$BH^{۲}=AH\times CH\Rightarrow(x+۴)^{۲}=۹(x+۲)$$

$$x^{۲}+۸x+۱۶=۹x+۱۸\Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰\Rightarrow x=۲,x=-۱$$

به این ترتیب اگر $x=۲$ ، آن‌گاه

$$\text{مساحت }(ABC)=\frac{۱}{۲}BH\times AC=\frac{۱}{۲}(۶)(۱۳)=۳۹$$

و اگر $x=-۱$ ، آن‌گاه $\text{مساحت }(ABC)=\frac{۱}{۲}BH\times AC=\frac{۱}{۲}(۳)(۱۰)=۱۵$.

بنابراین مساحت مثلث ABC می‌تواند برابر ۱۵ یا ۳۹ باشد.

۲۴۰۳- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD ،

$$CH^{۲}=HB\times HD=\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=۴$$

بنابراین $CH=۲$. در نتیجه

$$\text{مساحت }(BCD)=\frac{۱}{۲}CH\times BD=\frac{۱}{۲}(۲)(\sqrt{۲}+\sqrt{۸})=\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$$

به این ترتیب $\text{مساحت }(ABCD)=۲\times\text{مساحت }(BCD)=۶\sqrt{۲}$.

۲۴۰۴- گزینهٔ ۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE، بنابر رابطه‌های طولی،

$$DH^۲=HB\times HE=۹\times۴=۳۶$$

پس $DH=۶$. بنابراین $AH=۱۲+۶=۱۸$. از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC، بنابر رابطه‌های طولی،

$$AH^۲=HB\times HC\Rightarrow ۱۸^۲=۹(۴+x)\Rightarrow x=۳۲$$

۲۴۰۵- گزینهٔ ۲ بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲=۲۷+۹=۳۶$$

بنابراین $AC=۶$. از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$BH\times AC=AB\times BC\Rightarrow x\times۶=۳\sqrt{۳}\times۳\Rightarrow x=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

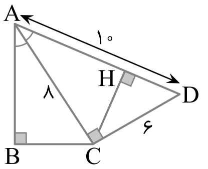
۲۴۰۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD،

$$AD^۲=AC^۲+CD^۲\Rightarrow ۱۰۰=۶۴+CD^۲\Rightarrow CD=۶$$

ارتفاع CH را در مثلث CAD رسم می‌کنیم. توجه کنید که چون نقطهٔ C روی نیمساز زاویهٔ A است، پس $CB=CH$. از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD،

$$AC\times CD=CH\times AD\Rightarrow ۸\times۶=CH\times۱۰\Rightarrow CH=۴/۸$$

بنابراین $CB=CH=۴/۸$.



راه‌حل دوم چون $C\hat{A}B=D\hat{A}C$، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DAC و CAB متشابه هستند (ز ز). بنابراین

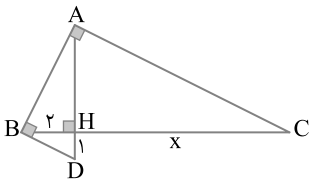
$$\frac{CD}{BC}=\frac{AD}{AC}\xrightarrow{CD=۶}\frac{۶}{BC}=\frac{۱۰}{۸}\Rightarrow BC=۴/۸$$

۲۴۰۷- گزینهٔ ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD،

$$BH^۲=AH\times HD\Rightarrow ۴=AH\times۱\Rightarrow AH=۴$$

همین‌طور، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

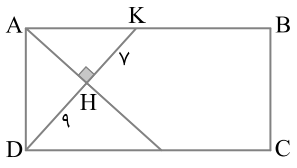
$$AH^۲=BH\times HC\Rightarrow ۱۶=۲\times x\Rightarrow x=۸$$



۲۴۰۸- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ DAK،

$$AD^۲=DH\times DK=۹\times۱۶=۱۴۴$$

بنابراین $AD=۱۲$.



۲۴۰۹- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $BH=a$ و $HE=b$، در این صورت

$$a+b=BE=۲EC\Rightarrow EC=\frac{a+b}{۲}$$

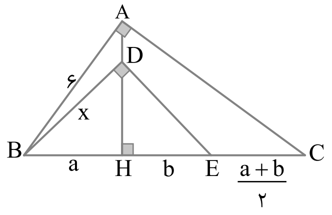
بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow ۳۶=a(a+b+\frac{a+b}{۲})=\frac{۳}{۲}a(a+b)$$

$$a(a+b)=۲۴$$

همین‌طور، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE،

$$BD^۲=BH\times BE\Rightarrow x^۲=a(a+b)=۲۴\Rightarrow x=۲\sqrt{۶}$$



۲۴۱۰- گزینهٔ ۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AC^۲=AD^۲+DC^۲=۴+۱۶=۲۰\Rightarrow AC=۲\sqrt{۵}$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، بنابر رابطه‌های طولی

$$DE\times AC=AD\times DC\Rightarrow DE\times۲\sqrt{۵}=۲\times۴\Rightarrow DE=\frac{۴}{\sqrt{۵}}=\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$$

۲۴۱۱- گزینهٔ ۱ چون پاره‌خط EF وسط ضلع‌های BA و BC را به هم وصل کرده است، میان‌خط مثلث BAC است، پس طول آن برابر با نصف طول ضلع سوم است. بنابراین

$$x+۴=\frac{۱}{۲}(۴x+۶)\Rightarrow x+۴=۲x+۳\Rightarrow x=۱$$

بنابراین $EF=۱+۴=۵$.

۲۴۱۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید $EF=x$. چون $DE||AF$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BAF،

$$\frac{BD}{DA}=\frac{BE}{EF}\qquad(۱)$$

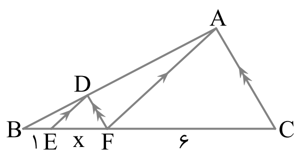
از طرف دیگر، چون $FD||AC$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BAC،

$$\frac{BD}{DA}=\frac{BF}{FC}\qquad(۲)$$

از مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{BE}{EF}=\frac{BF}{FC}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۱+x}{۶}$$

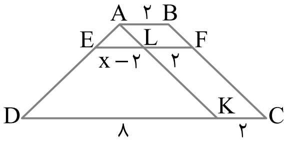
بنابراین $x(۱+x)=۶$، یعنی $x^۲+x-۶=۰$. این معادله دو جواب دارد: $x=۲$ و $x=-۳$، که چون $x>۰$، پس $x=۲$.



۲۴۱۳- گزینهٔ ۲ از نقطهٔ A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و DC را به ترتیب در نقطه‌های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). چون ABFL و LFCK متوازی‌الاضلاع‌اند، پس $KC=LF=AB=۲$. اکنون توجه کنید که چون $EL||DK$ ، پس در مثلث ADK، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{EL}{DK}=\frac{AE}{AD}\Rightarrow\frac{x-۲}{۸}=\frac{AE}{AE+ED}=\frac{AE}{AE+۳AE}=\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{x-۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=۴$$

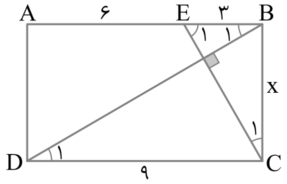


۲۴۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون $AB||CD$ ، بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\hat{B}_۱=\hat{D}_۱$ (شکل را ببینید). از طرف دیگر،

$$\begin{cases}\hat{B}_۱+\hat{E}_۱=۹۰^\circ\\ \hat{C}_۱+\hat{E}_۱=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{B}_۱=\hat{C}_۱$$

در نتیجه $\hat{C}_۱=\hat{D}_۱$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BEC و CBD که یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند، متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{EB}{BC}=\frac{BC}{CD}\Rightarrow\frac{۳}{x}=\frac{x}{۹}\Rightarrow x^۲=۲۷\Rightarrow x=۳\sqrt{۳}$$

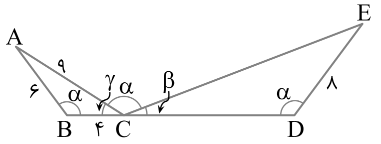


۲۴۱۵- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $A\hat{C}E=\alpha$ ، $E\hat{C}D=\beta$ و $A\hat{C}B=\gamma$. چون $B\hat{C}E$ زاویهٔ خارجی مثلث ECD است، پس $\hat{E}=\gamma$. به طور مشابه $\hat{A}=\beta$. بنابراین مثلث‌های ABC و CDE متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{EC}{AC}=\frac{CD}{AB}=\frac{ED}{BC}\Rightarrow\frac{EC}{۹}=\frac{CD}{۶}=\frac{۸}{۴}=۲$$

بنابراین

$$EC=۱۸\,,CD=۱۲\Rightarrow EC\times CD=۲۱۶$$



۲۴۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که با نمادگذاری شکل زیر

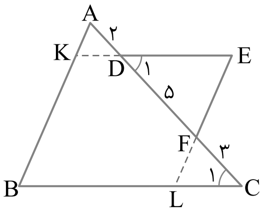
$$DE||BC\Rightarrow\hat{D}_۱=\hat{C}_۱$$

و چون BKEL متوازی‌الاضلاع است، پس $\hat{E}=\hat{B}$. بنابراین مثلث‌های ABC و FED متشابه‌اند (ز ز) و نیز نسبت محیط‌های این مثلث‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست:

$$\frac{\text{محیط}\,(ABC)}{\text{محیط}\,(FED)}=\frac{CA}{DF}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

از طرف دیگر $\text{محیط}\,(FED)=DF+DE+EF=۵+۹=۱۴$. در نتیجه

$$\text{محیط}\,(ABC)=۲\times۱۴=۲۸$$



۲۴۱۷- گزینهٔ ۴ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه

$$AH^۲=BH\times CH=۲\times۶=۱۲$$

بنابراین $AH=۲\sqrt{۳}$. از طرف دیگر، باز هم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه $AB\times AC=AH\times BC=۲\sqrt{۳}\times۸=۱۶\sqrt{۳}$.

۲۴۱۸- گزینهٔ ۱ چون مثلث‌های HKB و HCD متشابه‌اند (ز ز)، پس

$$\frac{HB}{HD}=\frac{HK}{HC}\Rightarrow\frac{HB}{۲۷}=\frac{۸}{HC}\Rightarrow HB\times HC=۸\times۲۷\qquad(۱)$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCK ،

$$BH^۲=HC\times HK\Rightarrow BH^۲=۸\times HC$$

اگر دو طرف این تساوی را در HB ضرب و از تساوی (۱) استفاده کنیم، به‌دست می‌آید

$$BH^۳=۸\times۸\times۲۷\Rightarrow BH=۲\times۲\times۳=۱۲$$

۲۴۱۹- گزینهٔ ۱ در لوزی قطرها بر هم عمودند، بنابراین مثلث AFB قائم‌الزاویه است و در این مثلث بنابر رابطه‌های طولی

$$BF^۲=EB\times AB=۳AE(AE+۳AE)=۱۲AE^۲$$

بنابراین $BF=۲\sqrt{۳}AE$. همین‌طور

$$AF^۲=AE\times AB=AE(AE+۳AE)=۴AE^۲$$

بنابراین $AF=۲AE$. چون در لوزی قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند، پس

$$\frac{BD}{AC}=\frac{۲BF}{۲AF}=\frac{BF}{AF}=\frac{۲\sqrt{۳}AE}{۲AE}=\sqrt{۳}$$

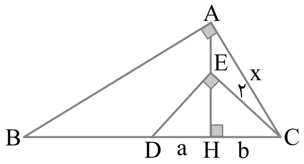
۲۴۲۰- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $DH=a$ و $CH=b$. در این صورت $BD=DC=a+b$ (شکل را ببینید). بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC ،

$$EC^۲=CH\times CD\Rightarrow۴=b(a+b)$$

همین‌طور، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ،

$$AC^۲=CH\times CB\Rightarrow x^۲=b(۲a+۲b)=۲b(a+b)=۲\times۴=۸$$

بنابراین $x=۲\sqrt{۲}$.



۲۴۲۱- گزینهٔ ۴ مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر مجموع مساحت دو مثلث ABD و ADC است. پس

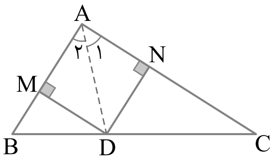
$$S_{ABC}=S_{ADC}+S_{ABD}\Rightarrow\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{DN\times AC}{۲}+\frac{DM\times AB}{۲}$$

هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه، به یک فاصله است، پس $DM=DN=x$. در نتیجه

$$۳\times۷=x\times۷+x\times۳\Rightarrow۱۰x=۲۱\Rightarrow x=۲/۱$$

توجه کنید که $\hat{A}_1=۴۵^\circ$، پس مثلث ADN قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. یعنی $AN=DN=x$، پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ADN،

$$AD^۲=AN^۲+DN^۲=۲x^۲\Rightarrow AD=x\sqrt{۲}=۲/۱\sqrt{۲}$$



تجربی - ۹۵

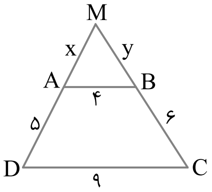
۲۴۲۲- گزینهٔ ۴ محل تلاقی امتداد ساق‌های ذوزنقهٔ ABCD را M می‌نامیم، با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث MDC،

$$AB\|CD\Rightarrow\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{CD}=\frac{۴}{۹}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{۵+x}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow ۹x=۴x+۲۰\Rightarrow x=۴\\ \frac{y}{۶+y}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow ۹y=۲۴+۴y\Rightarrow y=۴/۸\end{cases}$$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با

$$P=x+y+۴=۴+۴/۸+۴=۱۲/۸$$



تجربی - ۹۴

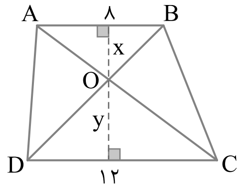
۲۴۲۳- گزینهٔ ۳ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند، پس

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳x=۲y\\ x+y=۱۰\Rightarrow ۳x+۳y=۳۰\end{cases}\Rightarrow ۵y=۳۰\Rightarrow y=۶, x=۴$$

بنابراین مساحت مثلث OCD برابر است با $S_{OCD}=\frac{y\times ۱۲}{۲}=۳۶$.

توجه کنید که ارتفاع مثلث ADC نیز برابر ۱۰ است، در نتیجه $S_{ADC}=\frac{۱۰\times ۱۲}{۲}=۶۰$. بنابراین

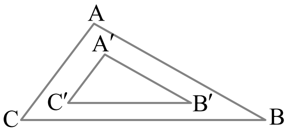
$$S_{ADO}=S_{ADC}-S_{OCD}=۶۰-۳۶=۲۴$$



تجربی - ۹۵

۲۴۲۴- گزینهٔ ۳ این دو مثلث که اضلاعی موازی دارند، متشابه هستند. نسبت تشابه آن‌ها، برابر نسبت دو ضلع بزرگ‌تر یعنی $\frac{۹}{۶}$ یا $\frac{۳}{۲}$ است. اگر مساحت مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌ترتیب S و S' بنامیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S}{S'}=\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲\Rightarrow\frac{S}{S'}=\frac{۹}{۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{S-S'}{S'}=\frac{۹-۴}{۴}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$



خارج از کشور تجربی - ۹۵

۲۴۲۵- گزینهٔ ۱ بنابر قضیهٔ تالس در مثلث OBD،

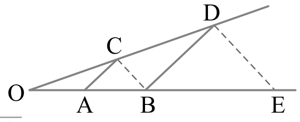
$$AC\|BD\Rightarrow\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}\qquad(۱)$$

بنابر قضیهٔ تالس در مثلث OED،

$$BC\|ED\Rightarrow\frac{OB}{BE}=\frac{OC}{CD}\qquad(۲)$$

از مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OB}{BE}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۸}{BE}\Rightarrow BE=\frac{۴۰}{۳}=۱۳\frac{۱}{۳}$$



خارج از کشور تجربی - ۹۴

۲۴۲۶- گزینهٔ ۲ بنابر قضیهٔ تالس در مثلث MAC،

$$EB\|AC\Rightarrow\frac{ME}{EA}=\frac{MB}{BC}\qquad(۱)$$

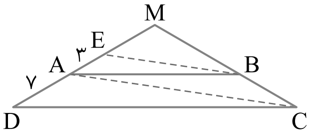
بنابر قضیهٔ تالس در مثلث MDC،

$$AB\|DC\Rightarrow\frac{MA}{AD}=\frac{MB}{BC}\qquad(۲)$$

از مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{ME}{EA}=\frac{MA}{AD}\Rightarrow\frac{ME}{۳}=\frac{ME+۳}{۷}\Rightarrow ۷ME=۳ME+۹\Rightarrow ME=۲/۲۵$$

پس $MD=۲/۲۵+۳+۷=۱۲/۲۵$.



خارج از کشور ریاضی - ۹۳

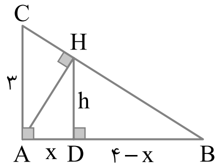
۲۴۲۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از نماد گذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

$$h^۲=x(۴-x)\Rightarrow h=\sqrt{x(۴-x)}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث BDH و BAC متشابه هستند. از تشابه این دو مثلث قائم‌الزاویه نتیجه می‌شود

$$\frac{h}{۳}=\frac{۴-x}{۴-x+x}\Rightarrow\frac{\sqrt{x(۴-x)}}{۳}=\frac{۴-x}{۴}\Rightarrow\frac{x(۴-x)}{۹}=\frac{(۴-x)^۲}{۱۶}$$

$$\frac{x}{۹}=\frac{۴-x}{۱۶}\Rightarrow ۱۶x=۳۶-۹x\Rightarrow x=\frac{۳۶}{۲۵}=۱/۴۴$$



راه‌حل دوم چون $AB=x+۴-x=۴$، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

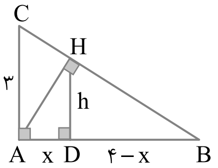
$$BC^۲=AC^۲+AB^۲=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow BC=۵$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AH\times BC=AB\times AC\Rightarrow AH\times ۵=۴\times ۳\Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}$$

اکنون از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB نتیجه می‌شود

$$AH^۲=AD\times AB\Rightarrow\frac{۱۴۴}{۲۵}=x\times ۴\Rightarrow x=\frac{۱۴۴}{۱۰۰}=۱/۴۴$$



ریاضی - ۸۹

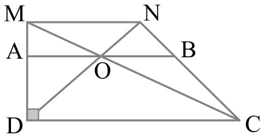
۲۴۲۸- گزینهٔ ۲ شکل سؤال به صورت زیر است. توجه کنید که

$$\triangle MDC:\ OA\|DC\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیهٔ}}\frac{MA}{MD}=\frac{OA}{DC}$$

$$\triangle NDC:\ OB\|DC\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیهٔ}}\frac{NB}{NC}=\frac{OB}{DC}$$

از طـرف دیگر، بنابر قضیـهٔ تالس در ذوزنقهٔ MNCD ، $\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}$. پس

$\frac{OA}{DC}=\frac{OB}{DC}$ ، در نتیجه $OA=OB$ و $\frac{OA}{OB}=۱$.



تجربی - ۹۷

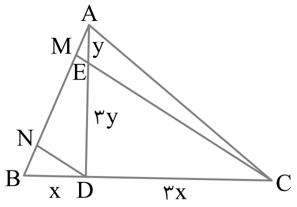
۲۴۲۹- گزینهٔ ۳ از فرض‌های مسـئله شـکل زیر به‌دست می‌آید. از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

$$\triangle BMC:\ DN\|CM\Rightarrow\frac{BN}{MN}=\frac{BD}{DC}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BN=\frac{۱}{۳}MN$$

$$\triangle AND:\ ME\|DN\Rightarrow\frac{AM}{MN}=\frac{AE}{ED}=\frac{y}{۳y}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow AM=\frac{۱}{۳}MN$$

بنابراین $AM=BN=\frac{۱}{۳}MN$. پس

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AM}{AM+MN+BN}=\frac{AM}{AM+۳AM+AM}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow AB=۵AM$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۷

۲۴۳۰- گزینهٔ ۱ بنابر فرض سؤال اگر $AB=۲x$ ، آن‌گاه $CD=۵x$ و اگر $AF=y$ ، آن‌گاه $DF=۳y$. قطر AC را رسم می‌کنیم. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

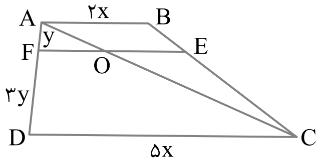
$$\triangle ADC:OF\|DC\Rightarrow\frac{AF}{AD}=\frac{OF}{CD}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{CD=۵x}OF=\frac{۵}{۴}x$$

$$\triangle CAB:OE\|AB\Rightarrow\frac{CE}{CB}=\frac{OE}{AB}$$

$$\xrightarrow{\frac{CE}{CB}=\frac{DF}{DA}=\frac{۳}{۴}\text{(قضیهٔ تالس در ذوزنقه)}}\frac{۳}{۴}=\frac{OE}{AB}$$

$$\xrightarrow{AB=۲x}OE=\frac{۳}{۲}x$$

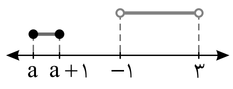
بنابراین $EF=OF+OE=\frac{۵}{۴}x+\frac{۳}{۲}x=\frac{۱۱}{۴}x$. پس $\frac{EF}{CD}=\frac{\frac{۱۱}{۴}x}{۵x}=\frac{۱۱}{۲۰}$.



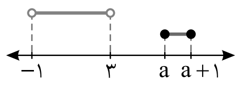
خارج از کشور تجربی - ۹۷

فصل پانزدهم

۲۴۳۱- گزینهٔ ۲ اگر اشتراک دو بازهٔ $(-۱,۳)$ و $[a,a+۱]$ تهی باشد، یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:



$$a+۱\leq-۱\Rightarrow a\leq-۲$$

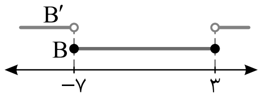


$$a\geq۳$$

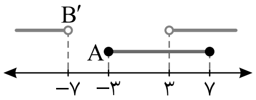
بنابراین اگر اشتراک دو بازه، تهی نباشد باید $-۲<a<۳$. پس به ازای مقادیر صحیح ۱−، ۰، ۱ و ۲ برای a اشتراک دو بازه تهی نیست.

۲۴۳۲- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که

$$B'=(-\infty,-۷)\cup(۳,+\infty)$$



بنابراین، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A\cap B'=(۳,۷]$.



۲۴۳۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم دنبالهٔ حاصل $۲۰,a_۱,\dots,a_n,۸۰$ باشد. در این صورت قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$d=\frac{۸۰-۲۰}{n+۲-۱}=\frac{۶۰}{n+۱}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{a_۱}{a_n}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۲۰+d}{۸۰-d}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow۶۰+۳d=۸۰-d\Rightarrow d=۵$$

پس $\frac{۶۰}{n+۱}=۵$، یعنی $n=۱۱$.

۲۴۳۴- گزینهٔ ۴ جملهٔ دهم دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$ است و جملهٔ n ام دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر $۸+۴(n-۱)$ است. بنابراین

$$۸+۴n-۴=۱۰۲۴\Rightarrow۴n=۱۰۲۰\Rightarrow n=۲۵۵$$

پس جملهٔ دویست و پنجاه و پنجم دنبالهٔ حسابی $۸,۱۲,۱۶,\dots$ با جملهٔ دهم دنبالهٔ هندسی $۲,۴,۸,\dots$ برابر است.

۲۴۳۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید a و b دو عدد مورد نظر باشند طوری‌که $۰<a<b$. بنابراین

$$\frac{a+b}{۲}=\frac{۵}{۳}\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{(a+b)^۲}{۴}=\frac{۲۵}{۹}ab\Rightarrow۹a^۲+۹b^۲+۱۸ab=۱۰۰ab$$

$$۹a^۲+۹b^۲-۸۲ab=۰\Rightarrow(a-۹b)(۹a-b)=۰$$

$$\begin{cases}a=۹b\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۱}{۹} & (\text{غ.ق.ق.})\\ b=۹a\Rightarrow\frac{b}{a}=۹\end{cases}$$

۲۴۳۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt[۳]{a}}=۲\Rightarrow a^{\frac{۱}{۲}}\times a^{\frac{۱}{۶}}=۲\Rightarrow a^{\frac{۴}{۶}}=۲\Rightarrow a^{\frac{۲}{۳}}=۲$$

$$\Rightarrow a^۲=۲^۳=۸\Rightarrow a=\sqrt{۸}$$

بنابراین

$$\sqrt[۳]{a\sqrt{a}}=a^{\frac{۱}{۳}}\times a^{\frac{۱}{۶}}=a^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۸}^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{\sqrt{۸}}=\sqrt[۴]{۸}$$

۲۴۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a-\frac{۱}{a}=۲\Rightarrow a^۲+\frac{۱}{a^۲}-۲=۴\Rightarrow a^۲+\frac{۱}{a^۲}=۶$$

بنابراین

$$a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲=۸\Rightarrow(a+\frac{۱}{a})^۲=۸\Rightarrow|a+\frac{۱}{a}|=\sqrt{۸}$$

با توجه به اینکه a عددی منفی است، پس $a+\frac{۱}{a}=-\sqrt{۸}$. در نتیجه

$$(a-\frac{۱}{a})(a+\frac{۱}{a})=۲(-\sqrt{۸})\Rightarrow a^۲-\frac{۱}{a^۲}=-۴\sqrt{۲}$$

۲۴۳۸- گزینهٔ ۳ عبارت مورد نظر را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$x^۲+xy-۲y^۲=x^۲-y^۲+xy-y^۲=(x-y)(x+y)+y(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y+y)=(x-y)(x+۲y)$$

بنابراین عامل $x+۲y$ در تجزیهٔ عبارت وجود دارد.

۲۴۳۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۲}+۱+\sqrt[۳]{۴})}+\frac{۵}{\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۱۶}+۱-\sqrt[۳]{۴})}$$
$$=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}+۱}+\frac{۵}{\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۴}+۱})$$

اکنون مخرج هر یک از کسرها را به کمک اتحاد چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{\sqrt[۳]{۲}^۳-۱}+\frac{۵(\sqrt[۳]{۴}+۱)}{\sqrt[۳]{۴}^۳+۱})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{۲-۱}+\frac{۵(\sqrt[۳]{۴}+۱)}{۴+۱})$$
$$=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}(\sqrt[۳]{۲}-۱+\sqrt[۳]{۴}+۱)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}(\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴})=۱+\sqrt[۳]{۲}$$

۲۴۴۰- گزینهٔ ۳ اولاً نمودار از نقطهٔ $(۰,m)$ می‌گذرد و با توجه به شکل m عددی مثبت است. با این شرایط حاصل‌ضرب صفرهای تابع منفی است که در نمودار همین وضعیت وجود دارد. ثانیاً طول رأس سهمی عددی منفی است. بنابراین

$$-\frac{۲m-۱}{۲(-۱)}<۰\Rightarrow m<\frac{۱}{۲}$$

بنابراین اگر $۰<m<\frac{۱}{۲}$، نمودار تابع f به‌صورت رسم شده است.

۲۴۴۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=۶$ و $\alpha\beta=۲$. اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$S=x_۱+x_۲=(\alpha+\frac{۱}{\beta})+(\beta+\frac{۱}{\alpha})=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۶+\frac{۶}{۲}=۹$$

$$P=x_۱x_۲=(\alpha+\frac{۱}{\beta})(\beta+\frac{۱}{\alpha})=\alpha\beta+۲+\frac{۱}{\alpha\beta}=۲+۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

پس معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۹x+\frac{۹}{۲}=۰\Rightarrow ۲x^۲-۱۸x+۹=۰$$

۲۴۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow \sin x=\frac{۳\cos x}{۱}\Rightarrow \sin^۲ x=۹\cos^۲ x$$

می‌دانیم $\sin^۲\alpha=\cos^۲\alpha=۱$، پس

$$۱-\cos^۲ x=۹\cos^۲ x\Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

از طرف دیگر،

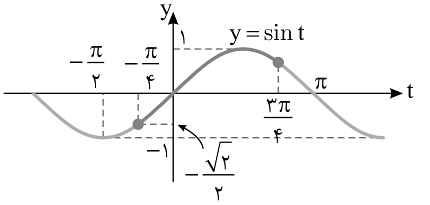
$$\cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \cos x=AB\Rightarrow AB=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

۲۴۴۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $۰\le x\le\pi$. آن‌گاه

$$-\frac{\pi}{۴}\le x-\frac{\pi}{۴}\le\frac{۳\pi}{۴}$$

و با توجه به نمودار زیر نتیجه می‌شود

$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le\sin(x-\frac{\pi}{۴})\le۱$$



بنابراین

$$-۱\le-\sin(x-\frac{\pi}{۴})\le\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow ۰\le۱-\sin(x-\frac{\pi}{۴})\le۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$۰\le f(x)\le۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس $R_f=[۰,\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}]$.

۲۴۴۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\cos x\ ,\quad \cos(\frac{۵\pi}{۲}-x)=\sin x$$

بنابراین

$$-۲\cos x=۳\sin x\Rightarrow \tan x=-\frac{۲}{۳}$$

از طرف دیگر،

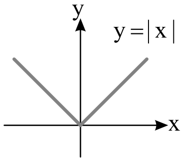
$$۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}\Rightarrow ۱+\frac{۴}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲ x}\Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۹}{۱۳}$$

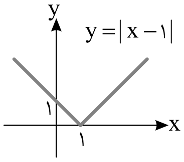
چون انتهای کمان نظیر زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\cos x=-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$.

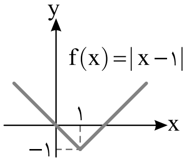
بنابراین

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x=-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

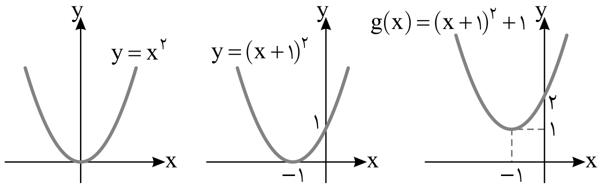
۲۴۴۵- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-۱|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)=|x-۱|-۱$ به‌دست می‌آید.



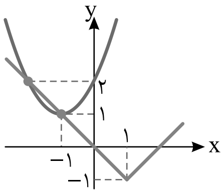




اگر نمودار تابع $y=x^۲$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=(x+۱)^۲$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به بالا منتقل کنیم نمودار تابع $y=(x+۱)^۲+۱$ به‌دست می‌آید.



اگر نمودار توابع f و g را در یک دستگاه رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم که در دو نقطه متقاطع‌اند.



۲۴۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^۲=|x|^۲$. اکنون نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|^۲\le۴|x|\Rightarrow|x|^۲-۴|x|\le۰\Rightarrow|x|(|x|-۴)\le۰$$

چون $|x|\ge۰$. پس

$$|x|-۴\le۰\Rightarrow|x|\le۴\Rightarrow-۴\le x\le۴$$

بنابراین نُه عدد صحیح ۴±، ۳±، ۲±، ۱± و ۰ در نامعادله صدق می‌کنند.

۲۴۴۷- گزینهٔ ۲ برای اینکه عبارت $\sqrt{۴x+۱}$ بامعنی باشد باید $x\ge-\frac{۱}{۴}$.

بنابراین $x+۱$ مثبت است و $|x+۱|=x+۱$. پس معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{۴x+۱}=۲x+x+۱\Rightarrow\sqrt{۴x+۱}=۳x+۱$$

اکنون طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را حل می‌کنیم:

$$۴x+۱=۹x^۲+۶x+۱\Rightarrow۹x^۲+۲x=۰$$

$$x(۹x+۲)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-\frac{۲}{۹}$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند و معادله دو جواب دارد.

۲۴۴۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(۰)=-۲$ و $f(\log_۸ ۳)=۰$. بنابراین

$$f(۰)=۱-b=-۲\Rightarrow b=۳\Rightarrow f(x)=a^{۳x}-۳$$

$$f(\log_۸ ۳)=a^{۳\log_۸ ۳}-۳=۰\Rightarrow a^{\log_۲ ۳}=۳$$

$$\log_۲ ۳=\log_a ۳\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $b=۳$ و $a=۲$، پس $ab=۶$.

۲۴۴۹- گزینهٔ ۲ ابتدا طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم

$$۲^a۲^{b+۱}=۳^a۳^b\Rightarrow ۲^{a+b+۱}=۳^{a+b}$$

بنابراین

$$۲\times ۲^{a+b}=۳^{a+b}\Rightarrow (\frac{۳}{۲})^{a+b}=۲\Rightarrow a+b=\log_{\frac{۳}{۲}} ۲$$

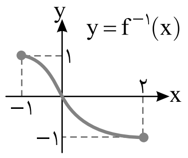
۲۴۵۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

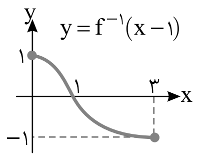
$$۶۴<۱۲۰<۱۲۸\Rightarrow ۲^۶<۱۲۰<۲^۷$$

بنابراین

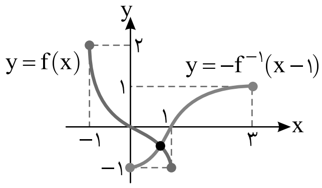
$$\log_۲ ۲^۶<\log_۲ ۱۲۰<\log_۲ ۲^۷\Rightarrow ۶<\log_۲ ۱۲۰<۷\Rightarrow [\log_۲ ۱۲۰]=۶$$

۲۴۵۱- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع f را نسبت بـه خط $y=x$ قرینه کنیم، نمـودار تابـع $f^{-۱}$ به‌دسـت می‌آید. اگر نمودار به‌دسـت آمده را یـک واحد به سـمت راسـت منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x-۱)$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f^{-۱}(x-۱)$ به‌دست می‌آید.





مطابق شکل زیر دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.



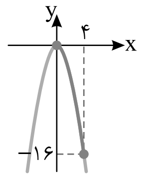
۲۴۵۲- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x\geq ۰ \\ ۴x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x(۴-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۴ \end{cases}\Rightarrow D_f=D_g=[۰,۴]$$

بنابراین $D_{f\times g}=D_f\cap D_g=[۰,۴]$. از طرف دیگر،

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=(\sqrt{۴x-x^۲}-۲\sqrt{x})(\sqrt{۴x-x^۲}+۲\sqrt{x})$$
$$=۴x-x^۲-۴x=-x^۲$$

بنابراین نمودار تابع $f\times g$ به‌صورت زیر است و برد آن بازهٔ $[-۱۶,۰]$ است.



۲۴۵۳- گزینهٔ ۱ حد چپ و حد راست تابع f را در نقطهٔ $x=-۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(-۲a-۱۲x)=-۲a+۲۴$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}(-۳a-۱۵x)=-۳a+۳۰$$

برای اینکه تابع f در $x=-۲$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست آن در این نقطه با هم برابر باشند. پس

$$-۲a+۲۴=-۳a+۳۰\Rightarrow a=۶$$

بنابراین

$$f(x)=۶[x]+۳x[۲x]\Rightarrow f(-۲)=۶(-۲)+۳(-۲)(-۴)=۱۲$$

۲۴۵۴- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجـه کنید که اگـر $x\to ۰$، آن‌گاه $x^۲\to ۰^+$ و $-x^۲\to ۰^-$. پس $\lim_{x\to ۰}\frac{f(-x^۲)}{۳-f(x^۲)}=\frac{\lim_{t\to ۰^-} f(t)}{۳-\lim_{t\to ۰^+} f(t)}=\frac{۲}{۳-(-۱)}=\frac{۱}{۲}$.

۲۴۵۵- گزینهٔ ۲ اگر $\lim_{x\to ۲} f(x)=L_۱$ و $\lim_{x\to ۲} g(x)=L_۲$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to ۲}(f\times g)(x)=\lim_{x\to ۲} f(x)\times\lim_{x\to ۲} g(x)=L_۱L_۲=۲$$

$$\lim_{x\to ۲}(f-g)(x)=\lim_{x\to ۲} f(x)-\lim_{x\to ۲} g(x)=L_۱-L_۲=\frac{۷}{۲}\Rightarrow L_۱=L_۲+\frac{۷}{۲}$$

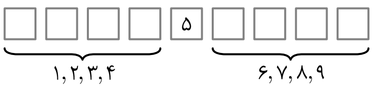
بنابراین

$$(L_۲+\frac{۷}{۲})L_۲=۲\Rightarrow L_۲^۲+\frac{۷}{۲}L_۲-۲=۰\Rightarrow ۲L_۲^۲+۷L_۲-۴=۰$$

$$(L_۲+۴)(۲L_۲-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases} L_۲=-۴\Rightarrow L_۱=-\frac{۱}{۲} \\ L_۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow L_۱=۴ \end{cases}$$

پس ۸ یا $\lim_{x\to ۲}(\frac{f}{g})(x)=\frac{\lim_{x\to ۲} f(x)}{\lim_{x\to ۲} g(x)}=\frac{L_۱}{L_۲}=\frac{۱}{۸}$.

۲۴۵۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شرط‌های مسئله، باید رقم وسط ۵ باشد، چهار رقم نخست ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشند و چهار رقم آخر ۶، ۷، ۸ یا ۹ باشند.



بنابراین پاسخ برابر است با $۴!\times ۴!=۲۴^۲=۲^۶\times ۳^۲$.

۲۴۵۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید پیشـامد مورد نظر A باشـد. در این صورت A' پیشـامد این است که دو نفر انتخاب شده کنار هم نشسته باشند. بنابراین $n(A')=۶$ و در نتیجه

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۶}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۵}{۷}$$

۲۴۵۸- گزینهٔ ۲ باید ۴ تا لامپ سـالم یا ۳ تا سـالم و یکی خراب انتخاب کنیم. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

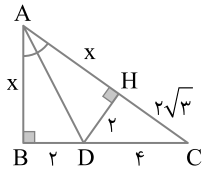
$$\frac{\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۴}}=\frac{۵+۱۰\times ۳}{۷۰}=\frac{۱}{۲}$$

۲۴۵۹- گزینهٔ ۳ اگر ارتفاع DH در مثلث ADC را رسم کنیم، چون D روی نیمساز زاویهٔ BAC است، نتیجه می‌گیریم $DH=DB=۲$ ، بنابراین، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث DHC نتیجه می‌شود

$$DC^{۲}=HC^{۲}+HD^{۲}\Rightarrow ۱۶=HC^{۲}+۴\Rightarrow HC=۲\sqrt{۳}$$

همچنین از همنهشتی مثلث‌های ABD و AHD نتیجه می‌شود $AH=AB=x$. اکنون از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC نتیجه می‌شود

$$(x+۲\sqrt{۳})^{۲}=x^{۲}+۳۶\Rightarrow x^{۲}+۴\sqrt{۳}x+۱۲=x^{۲}+۳۶\Rightarrow x=۲\sqrt{۳}$$



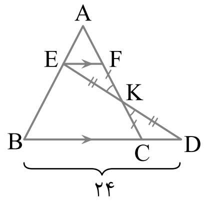
۲۴۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که مثلث‌های EFK و DCK همنهشت‌اند (ز ض ز). بنابراین $CD=EF$. از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC ،

$$EF\|BC\Rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow EF=\frac{۱}{۳}BC$$

در نتیجه $CD=\frac{۱}{۳}BC$ ، یعنی $BC=۳CD$. اکنون توجه کنید که

$$BD=۲۴\Rightarrow BC+CD=۲۴\Rightarrow ۳CD+CD=۲۴$$

$$۴CD=۲۴\Rightarrow CD=۶$$



۲۴۶۱- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم قدرنسبت دنبالهٔ حسابی d باشد. در این صورت

$$a_{۸}=a_{۱}+۷d\ ,\quad a_{۹}=a_{۱}+۸d\ ,\quad a_{۱۳}=a_{۱}+۱۲d$$

از طرف دیگر، چون $a_{۸}$ ، $a_{۹}$ و $a_{۱۳}$ دنباله‌ای هندسی است، پس

$$a_{۹}^{۲}=a_{۱۳}\times a_{۸}\Rightarrow (a_{۱}+۸d)^{۲}=(a_{۱}+۱۲d)(a_{۱}+۷d)$$

$$a_{۱}^{۲}+۱۶a_{۱}d+۶۴d^{۲}=a_{۱}^{۲}+۱۹a_{۱}d+۸۴d^{۲}$$

$$۳a_{۱}d=-۲۰d^{۲}\Rightarrow a_{۱}=-\frac{۲۰}{۳}d$$

بنابراین

$$\frac{a_{۹}}{a_{۸}}=\frac{a_{۱}+۸d}{a_{۱}+۷d}=\frac{-\frac{۲۰}{۳}d+۸d}{-\frac{۲۰}{۳}d+۷d}=\frac{\frac{۴d}{۳}}{\frac{d}{۳}}=۴$$

۲۴۶۲- گزینهٔ ۴ جمله‌های مورد نظر را $\frac{a}{r},a,ar$ می‌گیریم. در این صورت

$$(\frac{a}{r})(a)(ar)=۱\Rightarrow a^{۳}=۱\Rightarrow a=۱$$

بنابراین جمله‌ها می‌شوند $\frac{۱}{r},۱,r$. از طرف دیگر، طبق فرض،

$$\frac{۱}{r}+۱+r=\frac{۳۹}{۱۰}\Rightarrow ۱۰r^{۲}-۲۹r+۱۰=۰\Rightarrow (۵r-۲)(۲r-۵)=۰\Rightarrow r=\frac{۲}{۵},r=\frac{۵}{۲}$$

اگر $r=\frac{۲}{۵}$ ، جمله‌ها می‌شوند $\frac{۵}{۲},۱,\frac{۲}{۵}$ و اگر $r=\frac{۵}{۲}$ ، جمله‌ها می‌شوند $\frac{۲}{۵},۱,\frac{۵}{۲}$. بنابراین، در هر صورت، بزرگ‌ترین جمله در میان این سه جمله برابر $\frac{۵}{۲}$ است.

۲۴۶۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=((x-۲)(x^{۲}+۲x+۴))(x^{۳}+۸)+۶۴=(x^{۳}-۸)(x^{۳}+۸)+۶۴$$

$$=x^{۶}-۶۴+۶۴=x^{۶}$$

بنابراین مقدار A به ازای $x=\sqrt{۲}$ برابر است با $A=(\sqrt{۲})^{۶}=۲^{۳}=۸$.

۲۴۶۴- گزینهٔ ۳ تساوی‌های داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$a^{۳}+a^{۲}b+۲ab^{۲}=۲۰\qquad (۱)$$

$$b^{۳}+۲a^{۲}b+ab^{۲}=۷\qquad (۲)$$

اگر طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^{۳}+b^{۳}+۳a^{۲}b+۳a^{۲}b=۲۷\Rightarrow (a+b)^{۳}=۲۷\Rightarrow a+b=۳$$

اگر طرفین تساوی (۲) را از طرفین تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^{۳}-b^{۳}-a^{۲}b+ab^{۲}=۱۳\Rightarrow (a^{۳}-a^{۲}b)+(-b^{۳}+ab^{۲})=۱۳$$

$$a^{۲}(a-b)+b^{۲}(a-b)=۱۳\Rightarrow (a-b)(a^{۲}+b^{۲})=۱۳$$

چون $a+b=۳$ ، پس

$$(a+b)(a-b)(a^{۲}+b^{۲})=۱۳\times ۳=۳۹\Rightarrow a^{۴}-b^{۴}=۳۹$$

۲۴۶۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a^{۵}b^{۶}=\sqrt[۷]{۴-\sqrt{۱۵}}\times\sqrt[۷]{۴+\sqrt{۱۵}}=\sqrt[۷]{(۴-\sqrt{۱۵})(۴+\sqrt{۱۵})}=\sqrt[۷]{۱۶-۱۵}=۱$$

بنابراین

$$(ab)^{۵}b=۱\Rightarrow (ab)^{۵}=\frac{۱}{b}$$

پس

$$(ab)^{۲۱۰}=((ab)^{۵})^{۴۲}=(\frac{۱}{b})^{۴۲}=(\frac{۱}{b^{۶}})^{۷}$$

$$=(\frac{۱}{\sqrt[۷]{۴+\sqrt{۱۵}}})^{۷}=\frac{۱}{۴+\sqrt{۱۵}}=۴-\sqrt{۱۵}$$

۲۴۶۶- گزینهٔ ۳ چون معادله جواب دارد، پس

$$\Delta\geq ۰\Rightarrow ۴k^{۲}-۴(k^{۲}+۱۰k+۲۰)\geq ۰\Rightarrow ۴۰k+۸۰\leq ۰\Rightarrow k\leq -۲$$

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha+\beta=۲k$ ، $\alpha\beta=k^{۲}+۱۰k+۲۰$ و در نتیجه

$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=۴k^{۲}-۲k^{۲}-۲۰k-۴۰$$

$$=۲k^{۲}-۲۰k-۴۰=۲(k-۵)^{۲}-۹۰$$

بنابراین

$$k\leq -۲\Rightarrow k-۵\leq -۷\Rightarrow (k-۵)^{۲}\geq ۴۹$$

$$۲(k-۵)^{۲}\geq ۹۸\Rightarrow ۲(k-۵)^{۲}-۹۰\geq ۸$$

بنابراین کمترین مقدار مجموع مربعات جواب‌ها برابر ۸ است.

۲۴۶۷- گزینهٔ ۲ اولاً چون معادله دو جواب دارد، پس

$$\Delta>۰\Rightarrow ۱۶-۴k>۰\Rightarrow k<۴$$

ثانیاً اختلاف جواب‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است. پس

$$\frac{\sqrt{۱۶-۴k}}{۱}<۱\Rightarrow ۱۶-۴k<۱\Rightarrow ۴k>۱۵\Rightarrow k>\frac{۱۵}{۴}$$

بنابراین $\frac{۱۵}{۴}<k<۴$.

۲۴۶۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f محور طول‌ها را در $x=۴$ و $x=-۱$ قطع کرده است. پس $f(x)=a(x+۱)(x-۴)$. نمودار تابع f محور عرض‌ها را در $y=۲$ قطع کرده است. پس

$$f(۰)=۲\Rightarrow a(۰+۱)(۰-۴)=۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

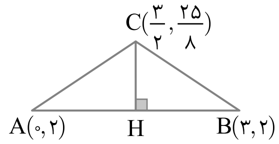
$$f(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۱)(x-۴)=-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۳}{۲}x+۲$$

بنابراین نقطهٔ $C(\frac{۳}{۲},\frac{۲۵}{۸})$ رأس سهمی است و

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۰+x_B}{۲}\Rightarrow x_B=۳$$

پس $CH=\frac{۲۵}{۸}-۲=\frac{۹}{۸}$ و $AB=۳$. در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{AB\times CH}{۲}=\frac{۳\times\frac{۹}{۸}}{۲}=\frac{۲۷}{۱۶}$$



۲۴۶۹- گزینهٔ ۴ باید با شرط $x>۰$ نامعادلهٔ $f(x)<۰$ را حل کنیم:

$$x+\frac{۱}{x+۲}-۵<۰\Rightarrow x(x+۲)+۱-۵(x+۲)<۰\Rightarrow x^۲-۳x-۹<۰$$

ریشه‌های چندجمله‌ای $x^۲-۳x-۹$ به‌صورت $\frac{۳+۳\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳-۳\sqrt{۵}}{۲}$ هستند. پس

$$\frac{۳-۳\sqrt{۵}}{۲}<x<\frac{۳+۳\sqrt{۵}}{۲}$$

از طرف دیگر $x>۰$، پس $۰<x<\frac{۳+۳\sqrt{۵}}{۲}$. بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{۳+۳\sqrt{۵}}{۲}$ است.

۲۴۷۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که باید $۲x-x^۲\geq۰$ تا عبارت $\sqrt{۲x-x^۲}$ در معادله بامعنی باشد. پس $۰\leq x\leq۲$.

اگر $x=۲$، آن‌گاه سمت چپ معادله برابر صفر و سمت راست آن برابر ۲ است. پس $x=۲$ جواب معادله نیست.

اگر $۰\leq x<۱$، آن‌گاه $[x]=۰$ و معادله به‌صورت $۲\sqrt{۲x-x^۲}=۰$ در می‌آید که $x=۰$ جواب آن است ولی مدنظر مسئله نیست.

اگر $۱\leq x<۲$، آن‌گاه $[x]=۱$ و معادله به‌صورت $۲\sqrt{۲x-x^۲}=۱$ درمی‌آید که به‌صورت زیر آن را حل می‌کنیم:

$$۴(۲x-x^۲)=۱\Rightarrow۴x^۲-۸x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲},x=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق})$$

توجه کنید که $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$ دربازهٔ $[۱,۲)$ قرار ندارد بنابراین قابل قبول نیست.

پس جواب مثبت معادله $x=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$ است.

۲۴۷۱- گزینهٔ ۲ نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\left|\frac{۱+|x|-|x|}{۱+|x|}\right|\geq\frac{۱}{۲}\Rightarrow\left|\frac{۱}{۱+|x|}\right|\geq\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱+|x|}\geq\frac{۱}{۲}\Rightarrow|x|\leq۱\Rightarrow-۱\leq x\leq۱$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $[-۱,۱]$ است. بنابراین $a=-۱$، $b=۱$ و $b-a=۲$.

۲۴۷۲- گزینهٔ ۳ اگر $x\neq۵$، نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{|۳|}{|۵-x|}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow|x-۵|>۶$$

بنابراین $(x\neq۵)$،

$$\begin{cases}x-۵>۶\\x-۵<-۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۱۱\\x<-۱\end{cases}$$

به این ترتیب، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$(-\infty,-۱)\cup(۱۱,+\infty)$$

در نتیجه $a=-۱$ و $b=۱۱$، پس $b-a=۱۲$.

۲۴۷۳- گزینهٔ ۲ اگر $۰^\circ<\alpha<۴۵^\circ$، آن‌گاه $۰<\sin\alpha<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و در نتیجه

$$۰<۲\sin\alpha<\sqrt{۲}\Rightarrow-\sqrt{۲}<۲\sin\alpha-\sqrt{۲}<۰$$

۲۴۷۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos(\frac{۳\pi}{۱۰})=\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۵})=\sin\frac{\pi}{۵}$$

$$\sin(\frac{۶\pi}{۵})=\sin(\pi+\frac{\pi}{۵})=-\sin\frac{\pi}{۵}$$

$$\sin(\frac{۹\pi}{۵})=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۵})=-\sin\frac{\pi}{۵}$$

بنابراین

$$\frac{۲\sin\frac{\pi}{۵}+\cos(\frac{۳\pi}{۱۰})}{۳\sin(\frac{۶\pi}{۵})-۲\sin(\frac{۹\pi}{۵})}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۵}+\sin\frac{\pi}{۵}}{-۳\sin\frac{\pi}{۵}+۲\sin\frac{\pi}{۵}}=\frac{۳\sin\frac{\pi}{۵}}{-\sin\frac{\pi}{۵}}=-۳$$

۲۴۷۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow(\sin^۲x+\cos^۲x)^۲-۲\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۲}{۳}$$

$$۱-۲\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین

$$\sin^۶x+\cos^۶x$$
$$=(\sin^۲x+\cos^۲x)^۳-۳\sin^۲x\cos^۲x(\sin^۲x+\cos^۲x)$$
$$=۱-۳\sin^۲x\cos^۲x=۱-۳(\frac{۱}{۶})=\frac{۱}{۲}$$

۲۴۷۶- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=۲^x$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$t^۲+(k-۳)t+k-۴=۰$$

بنابراین $t^۲+(k-۳)t+k-۴=(t+k-۴)(t+۱)$. پس جواب‌های این معادله $t=-۱$ و $t=۴-k$ هستند. بنابراین

$$۲^x=-۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$۲^x=۴-k\Rightarrow x=\log_۲(۴-k),k<۴$$

چون جواب معادله نباید مثبت باشد، پس

$$\log_۲(۴-k)\leq ۰\Rightarrow \log_۲(۴-k)\leq \log_۲ ۱\Rightarrow ۴-k\leq ۱\Rightarrow k\geq ۳$$

در نتیجه $۳\leq k<۴$.

۲۴۷۷- گزینهٔ ۲ از طرفین معادلـه در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم. معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_۳ x^{\log_۳ x}=\log_۳(۹x)\Rightarrow(\log_۳ x)(\log_۳ x)=\log_۳ ۹+\log_۳ x$$

$$(\log_۳ x)^۲-\log_۳ x-۲=۰\Rightarrow(\log_۳ x+۱)(\log_۳ x-۲)=۰$$

بنابراین

$$\log_۳ x=-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\ ,\qquad \log_۳ x=۲\Rightarrow x=۹$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۳ است.

۲۴۷۸- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_۲ x(\frac{۱}{۲}\log_۲ x)=\frac{۱}{۳}\log_۲ x\Rightarrow \log_۲ x(\frac{۱}{۲}\log_۲ x-\frac{۱}{۳})=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{cases}\log_۲ x=۰\Rightarrow x=۱\\ \log_۲ x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=۲^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۴}\end{cases}$$

پس جواب بزرگ‌تر معادله برابر $\sqrt[۳]{۴}$ است.

۲۴۷۹- گزینهٔ ۴ ابتـدا توجه کنید کـه $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$. بنابراین $x=۲$ بایـد تنهـا ریشـهٔ مخـرج $g(x)$ باشـد. یعنی مخـرج $g(x)$ بایـد به‌صورت $(x-۲)^۲$ باشد که در این صورت $b=-۴$. از طرف دیگر

$$g(x)=\frac{ax-b}{x^۲+bx+۴}=\frac{ax+۴}{(x-۲)^۲}$$

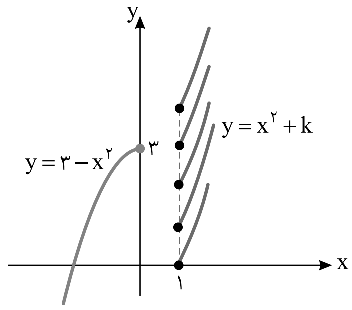
$$g(x)=f(x)\Rightarrow\frac{ax+۴}{(x-۲)^۲}=\frac{-۲}{x-۲}\Rightarrow ax+۴=-۲(x-۲)$$

$$ax+۴=-۲x+۴$$

پس $a=-۲$، $b=-۴$ و در نتیجه $ab=۸$.

۲۴۸۰- گزینهٔ ۱ نمـودار تابـع به ازای چند مقدار مختلف k در شـکل زیر رسـم شده اسـت. واضح است که اگر $f(۱)>۳$، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک خواهد بود. پس

$$۱+k>۳\Rightarrow k>۲$$



۲۴۸۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x\leq ۰ \text{ یا } x\geq ۴\Rightarrow f(x)=x^۲-۴x+۶x-x^۲=۲x$$

$$۰\leq x\leq ۴\Rightarrow f(x)=-x^۲+۴x+۶x-x^۲=-۲x^۲+۱۰x$$

بنابراین دامنهٔ تابع f باید $[۴,+\infty)$ و برد آن $[۸,+\infty)$ باشد. پس

$$f(x)=y=۲x\Rightarrow x=\frac{y}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲}\ ,\ D_{f^{-۱}}=[۸,+\infty)$$

۲۴۸۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که حد صورت کسر $\frac{x^۳-a^۳}{۲x-۸}$ در نقطهٔ $x=a$، صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز صفر باشد. در غیر این صورت حاصل حد کسر برابر صفر خواهد بود که چنین نیست. بنابراین

$$\lim_{x\to a}(۲x-۸)=۰\Rightarrow ۲a-۸=۰\Rightarrow a=۴$$

پس مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$b=\lim_{x\to ۴}\frac{x^۳-۶۴}{۲x-۸}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x^۲+۴x+۱۶)}{۲(x-۴)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲+۴x+۱۶}{۲}=\frac{۱۶+۱۶+۱۶}{۲}=۲۴$$

در نتیجه $a+b=۲۸$.

۲۴۸۳- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجه کنید کـه اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه $[x]=۱$ و در نتیجـه $\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{-b}{x}=-b$. از طـرف دیگـر حد صورت کسـر $\frac{x^۲-۱}{ax+b}$ در $x=۱$ برابـر صفر اسـت. پس باید حد مخـرج آن نیز در این نقطه صفر باشـد. در غیر این صورت حد چپ تابع f در $x=۱$ برابر صفر می‌شود که در نتیجه برای پیوسـتگی تابع در $x=۱$ باید حد راسـت آن یعنی $-b$ هم برابر صفر شود که مخالف فرض سؤال است. پس

$$\lim_{x\to ۱^-}(ax+b)=a+b=۰\Rightarrow a=-b$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۱}{-bx+b}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)(x+۱)}{-b(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x+۱}{-b}=-\frac{۲}{b}$$

برای اینکه تابع f در $x=۱$ حد داشته باشد باید

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)\Rightarrow -\frac{۲}{b}=-b\Rightarrow b^۲=۲\Rightarrow b=\pm\sqrt{۲}$$

برای اینکه تابع f در $x=۱$ پیوسته باشد، باید

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱}f(x)\Rightarrow c=-b=\pm\sqrt{۲}$$

۲۴۸۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f(۲)=bc$ و

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax+b)=۲a+b$$

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳۲(x-۲)}{(x-a)(x+a)}$$

چون a و b مثبت‌اند، پس حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=۲$ برابر صفر نیسـت و در نتیجـه حـد راسـت آن هـم برابـر صفـر نیسـت. پس حـد مخـرج عبارت $\frac{۳۲(x-۲)}{(x-a)(x+a)}$ در $x=۲$ بایـد صفر باشـد. در غیر این صورت حد راسـت تابع f در $x=۲$ برابر صفر می‌شود. پس

$$\lim_{x\to ۲^+}((x-a)(x+a))=۰\Rightarrow(۲-a)(۲+a)=۰\Rightarrow a=۲, a=-۲\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳۲(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳۲}{x+۲}=۸$$

چون f در $x=2$ پیوسته است، پس باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع f در این نقطه با هم برابر باشند:

$$2a+b=8 \xrightarrow{a=2} 4+b=8 \Rightarrow b=4\ ,\quad bc=8 \xrightarrow{b=4} c=2$$

۲۴۸۵- گزینهٔ ۲ حالت‌های زیر ممکن است:

حالت اول یک توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{3}{1}\binom{6}{2}=3\times15=45$$

حالت دوم دو توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{3}{2}\binom{6}{1}=3\times6=18$$

حالت سوم سه توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{3}{3}\binom{6}{0}=1$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $45+18+1=64$.

۲۴۸۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید پیشامد مورد نظر A باشد. در این صورت $A=X\cup Y$ ، که در آن X پیشامد این است که از جعبهٔ اول مهرهٔ قرمز و از جعبهٔ دوم مهرهٔ آبی بیرون بیاید و Y پیشامد این است که از جعبهٔ اول مهرهٔ آبی و از جعبهٔ دوم مهرهٔ قرمز بیرون بیاید. بنابراین

$$P(A)=P(X)+P(Y)=\frac{3}{8}\times\frac{4}{10}+\frac{5}{8}\times\frac{6}{10}=\frac{21}{40}$$

۲۴۸۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که شمارهٔ کارت ۲ باشد و B پیشامد این باشد که رنگ کارت آبی است. در این صورت

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}$$

۲۴۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{6}}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{3}$$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{6}}{P(A)}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

بنابراین $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

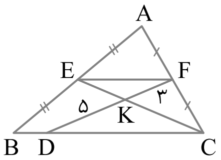
۲۴۸۹- گزینهٔ ۳ اگر پاره‌خط EF را رسم کنیم، از عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که $EF\parallel BC$ و بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $EF=\frac{1}{2}BC$. از طرف دیگر، چون $EF\parallel BC$ ، پس مثلث‌های EKF و CKD متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{EF}{DC}=\frac{FK}{DK}=\frac{3}{5}\Rightarrow EF=\frac{3}{5}DC$$

به این ترتیب

$$\frac{1}{2}BC=\frac{3}{5}DC\Rightarrow BC=\frac{6}{5}DC\xrightarrow{-DC}BC-DC=\frac{6}{5}DC-DC$$

$$BD=\frac{1}{5}DC\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{1}{5}$$

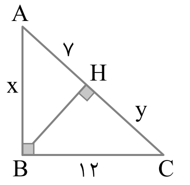


۲۴۹۰- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $HC=y$. در این صورت، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه، $x^2=7(7+y)$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ،

$$(7+y)^2=x^2+12^2=7(7+y)+12^2\Rightarrow 7^2+14y+y^2=7^2+7y+12^2$$

$$y^2+7y-144=0\Rightarrow(y+16)(y-9)=0\Rightarrow y=9\ ,\ y=-16\ \ (\text{غ.ق.ق})$$

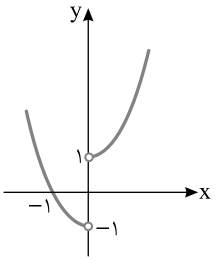
در نتیجه $x^2=7(7+y)=7\times16$ ، پس $x=4\sqrt{7}$.



۲۴۹۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}(x^3+1) & x>0\\ \frac{x}{-x}(x^3+1) & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^3+1 & x>0\\ -x^3-1 & x<0\end{cases}$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است. بنابراین اگر نمودار تابع f، خط $y=k$ را در دو نقطه قطع کند، حدود k، به‌صورت $k>1$ است.



۲۴۹۲- گزینهٔ ۲ با توجه به زوج مرتب‌های $(-1, x^2-x),(0, x^3)$ می‌توان نوشت:

$$0>-1\Rightarrow x^3\geq x^2-x$$

$$x^3-x^2+x\geq0\Rightarrow x(x^2-x+1)\geq0$$

چون در چندجمله‌ای درجهٔ دوم x^2-x+1 ، $a>0$ و $\Delta<0$ ، پس همواره $x^2-x+1>0$. بنابراین $x\geq0$. با توجه به زوج مرتب‌های $(x^2,8)$ و $(0,x^3)$ می‌توان نوشت:

$$x^2>0\Rightarrow 8\geq x^3\Rightarrow 2\geq x$$

با توجه به اینکه x باید عددی صحیح باشد، از اشتراک شرایط به‌دست آمده نتیجه می‌شود $x\in\{1,2\}$ ، پس دو مقدار صحیح برای x وجود دارد.

توجه کنید که $x=0$ قابل قبول نیست چرا که در این صورت $f=\{(-1,0),(0,0),(0,8)\}$ ، که تابع نیست.

۲۴۹۳- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است، پس

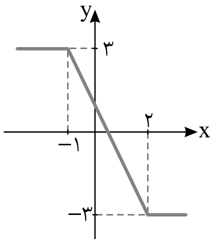
$$\begin{cases}x>3\Rightarrow f(x)<f(3)\Rightarrow f(x)<0\\ x<3\Rightarrow f(x)>f(3)\Rightarrow f(x)>0\end{cases}$$

اکنون باید دامنهٔ تابع g را مشخص کنیم. برای این کار نامعادلهٔ $(x^۲-۹)f(x)\geq ۰$ را حل می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۳		۳		$+\infty$
$x^۲-۹$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	۰	$-$	
$(x^۲-۹)f(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$-$	

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق $(-\infty,-۳]\cup\{۳\}$ است. بنابراین تنها یک عدد طبیعی (عدد ۳) جزء دامنهٔ تابع g است.

۲۴۹۴- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی نمودار مشخص است که تابع روی بازهٔ $[-۱,۲]$ و هر بازه‌ای به‌صورت $[c,d]$ که در آن $c\geq -۱$ و $d\leq ۲$ اکیداً نزولی است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به‌دست می‌آید که $a=-۱$ و $b=۲$، در این صورت $b-a=۲-(-۱)=۳$.



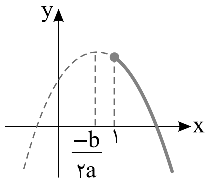
۲۴۹۵- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ با شرط $a<۰$ روی بازهٔ $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$ صعودی و روی بازهٔ $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ نزولی است. بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشد تا تابع f روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ نزولی باشد (به شکل زیر توجه کنید):

$$k-۱<۰\Rightarrow k<۱$$

$$\frac{-۱}{۲(k-۱)}\leq ۱\Rightarrow \frac{-۱}{۲(k-۱)}-۱\leq ۰\Rightarrow \frac{-۱-۲k+۲}{۲(k-۱)}\leq ۰$$

$$\frac{-۲k+۱}{۲(k-۱)}\leq ۰\Rightarrow k\leq\frac{۱}{۲} \text{ یا } k>۱$$

از اشتراک شرط‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $k\leq\frac{۱}{۲}$.



۲۴۹۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(x)=(gof)(x)\Rightarrow f(g(x))=g(f(x))$$

$$۲(a-x)-۳=a-(۲x-۳)\Rightarrow ۲a-۲x-۳=a-۲x+۳\Rightarrow a=۶$$

۲۴۹۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{x}{۲x-۱}\Rightarrow\frac{۱}{g(x)+۱}=\frac{x}{۲x-۱}$$

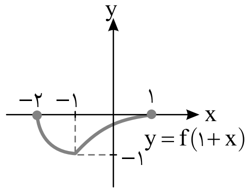
$$xg(x)+x=۲x-۱\Rightarrow xg(x)=x-۱\Rightarrow g(x)=\frac{x-۱}{x}$$

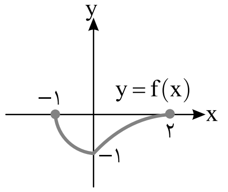
۲۴۹۸- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $D_{fof}=\{x|x\in D_f\ ,f(x)\in D_f\}$. پس

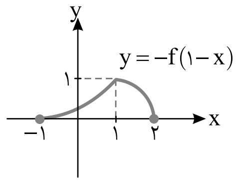
$$\begin{cases} x\in D_f\Rightarrow -۱\leq x\leq ۳\\ f(x)\in D_f\Rightarrow -۱\leq ۲x-۵\leq ۳\Rightarrow ۴\leq ۲x\leq ۸\Rightarrow ۲\leq x\leq ۴\end{cases}$$

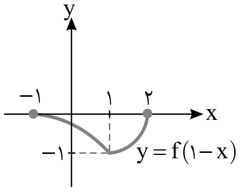
اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به‌صورت $۲\leq x\leq ۳$ است، پس $D_{fof}=[۲,۳]$.

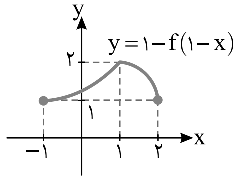
۲۴۹۹- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱+x)$ رسم شود. اکنون نمودار این تابع را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱-x)$ حاصل شود. سپس نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۱-x)$ به‌دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به سمت بالا جابه‌جا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۱-f(۱-x)$ به‌دست آید.











۲۵۰۰- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=۳f(۲x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲(x+۱))=۳f(۲x+۲)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را سه واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲x+۲)+۳$ به‌دست می‌آید. در نهایت اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲(\frac{۱}{۲}x)+۲)+۳=۳f(x+۲)+۳$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را یک سوم کنیم، نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}\times(۳f(x+۲)+۳)=f(x+۲)+۱$ به‌دست می‌آید.

۲۵۰۱- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=۱-\sqrt{۳+x}\Rightarrow\sqrt{۳+x}=۱-y\Rightarrow ۳+x=(۱-y)^۲\Rightarrow x=(۱-y)^۲-۳$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(۱-x)^۲-۳$، پس

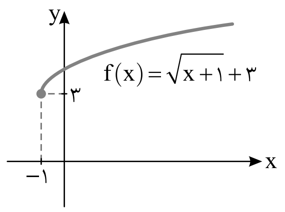
$$f^{-۱}(x)=(۱-x)^۲-۳=۱+x^۲-۲x-۳=x^۲-۲x-۲=x^۲+ax+b$$

در نتیجه

$$a=-۲,b=-۲\Rightarrow ۲a+۳b=-۱۰$$

۲۵۰۲- گزینهٔ ۱ برای هر $x\in R_f$ تساوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار است. با توجه به نمودار تابع f، $R_f=[۳,+\infty)$. پس برای هر $x\geq ۳$، $g(x)=x-۲$، بنابراین

$$x\geq ۳\Rightarrow x-۲\geq ۱\Rightarrow g(x)\geq ۱\Rightarrow R_g=[۱,+\infty)$$



۲۵۰۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=۳(x+m)-۴=۳x+۳m-۴$$

از طرف دیگر،

$$(fog)^{-۱}(۸)=-۱\Rightarrow(fog)(-۱)=۸$$

$$۳\times(-۱)+۳m-۴=۸\Rightarrow۳m-۷=۸\Rightarrow m=۵$$

۲۵۰۴- گزینهٔ ۳ اگر (m,n) نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ باشد، نتیجه می‌شود $f(m)=n$ و $f(n)=m$. پس

$$\begin{cases}f(۰)=۲\\ f(۲)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۰+۰+b=۲\\ -۱+۲a+b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=۲\\ a=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

بنابراین $ab=-۱$.

۲۵۰۵- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|a\pi|}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow|a|=۴$$

کمترین مقدار تابع f برابر $a^۲-|b|$ است. بنابراین

$$a^۲-|b|=-۴\Rightarrow۱۶-|b|=-۴\Rightarrow|b|=۲۰$$

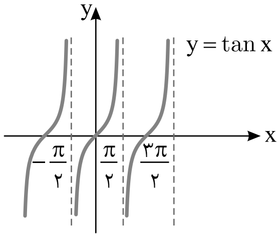
بیشترین مقدار تابع f برابر $a^۲+|b|$ است که برابر است با $۱۶+۲۰=۳۶$.

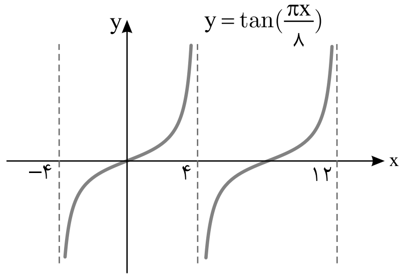
۲۵۰۶- گزینهٔ ۱ تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است، پس $\tan x\geq\tan(-\frac{\pi}{۴})$ و در نتیجه $\tan x\geq-۱$. بنابراین

$$۲m^۲-۵\geq-۱\Rightarrow۲m^۲\geq۴\Rightarrow m^۲\geq۲\Rightarrow|m|\geq\sqrt{۲}$$

پس حداقل مقدار $|m|$ برابر $\sqrt{۲}$ است.

۲۵۰۷- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=\tan x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{۸}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. نمودار تابع به شکل زیر است. پس حداقل مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازهٔ $(a,۱۲)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۴ است.





۲۵۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $۳a-۲$ است که با توجه به نمودار تابع برابر -۱ است. پس

$$۳a-۲=-۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۴۵}{۷}-\frac{۳}{۷}=۶$ است. پس

$$T=\frac{۲\pi}{|\frac{۲\pi}{b}|}=۶\Rightarrow|b|=۶\Rightarrow b=\pm۶$$

اگر $b=-۶$، آن‌گاه $f(x)=۱+۲\sin(-\frac{۲\pi}{۶}x+\frac{\pi}{۳})$ که در این صورت تابع باید در همسایگی راست $x=۰$ نزولی باشد که این طور نیست. پس $b=۶$ و در نتیجه $ab=۲$.

۲۵۰۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که α در ناحیهٔ سوم قرار دارد، پس $\cos\alpha<۰$. از طرف دیگر،

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow(\frac{-۴}{۵})^۲+\cos^۲\alpha=۱$$

$$\cos^۲\alpha=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow|\cos\alpha|=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-۳}{۵}$$

می‌دانیم $\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$، پس

$$\sin۲\alpha=۲\times(\frac{-۴}{۵})\times(\frac{-۳}{۵})=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos۲\alpha=(\frac{-۳}{۵})^۲-(\frac{-۴}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{-۷}{۲۵}$$

می‌دانیم $\cot۲\alpha=\frac{\cos۲\alpha}{\sin۲\alpha}$، پس $\cot۲\alpha=\frac{\frac{-۷}{۲۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{-۷}{۲۴}$.

۲۵۱۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{۱+\cos۴۰^\circ}{\sin۴۰^\circ}=\frac{۱+(۲\cos^۲۲۰^\circ-۱)}{۲\sin۲۰^\circ\cos۲۰^\circ}$$

$$=\frac{۲\cos^۲۲۰^\circ}{۲\sin۲۰^\circ\cos۲۰^\circ}=\frac{\cos۲۰^\circ}{\sin۲۰^\circ}=\cot۲۰^\circ$$

۲۵۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$A=\tan۲۳۰^\circ-\tan۴۰^\circ=\tan(۱۸۰^\circ+۵۰^\circ)-\tan(۹۰^\circ-۵۰^\circ)$$

$$=\tan۵۰^\circ-\cot۵۰^\circ=\frac{\sin۵۰^\circ}{\cos۵۰^\circ}-\frac{\cos۵۰^\circ}{\sin۵۰^\circ}=\frac{\sin^۲۵۰^\circ-\cos^۲۵۰^\circ}{\cos۵۰^\circ\sin۵۰^\circ}$$

چون $\cos^۲x-\sin^۲x=\cos۲x$ و $۲\sin x\cos x=\sin۲x$، پس

$$A=\frac{-\cos۱۰۰^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin۱۰۰^\circ}=-۲\cot۱۰۰^\circ=-۲\cot(۹۰^\circ+۱۰^\circ)=۲\tan۱۰^\circ$$

۲۵۱۲- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت $\cos x=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌ها به‌صورت زیر هستند: $(k\in\mathbb{Z})$

$$\begin{cases}x=۲k\pi+x+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow k=-\frac{۱}{۸}\ \text{(غ.ق.ق.)}\\ x=۲k\pi-x-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۸}\end{cases}$$

۲۵۱۳- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(۱-\sin^۲x)+۵\sin x-۵=۰\Rightarrow۲\sin^۲x-۵\sin x+۳=۰$$

اگر فرض کنیم $t=\sin x$، معادله به‌صورت $۲t^{۲}-۵t+۳=۰$ در می‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود $t_{۱}=\frac{۳}{۲}$ و $t_{۲}=۱$. چون $\sin x=\frac{۳}{۲}$ قابل قبول نیست، پس

$$\sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{x\in(۰,۲\pi)}x=\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ داده شده تنها یک جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۲۵۱۴- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^{۲}\frac{x}{۲}+\cos^{۲}\frac{x}{۲}-۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}=۱\xrightarrow{۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha}$$

$$۱-\sin x=۱\Rightarrow\sin x=۰$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۴\pi]$ عبارت‌اند از $x=۰$، $x=\pi$، $x=۲\pi$، $x=۳\pi$ و $x=۴\pi$. ولی توجه کنید که جواب‌های $x=\pi$ و $x=۲\pi$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کنند و قابل قبول نیستند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم تولید شده‌اند. بنابراین معادله در بازهٔ $[۰,۴\pi]$ سه جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر ۷π است.

۲۵۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که حد مخرج کسر وقتی $x\to۱$ برابر صفر است، بنابراین باید حد صورت کسر نیز وقتی $x\to۱$ برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x\to۱}(x^{۲}-ax+b)=۱-a+b=۰\Rightarrow b-a=-۱$$

راه‌حل اول چون $b=a-۱$، پس

$$\lim_{x\to۱}\frac{x^{۲}-ax+b}{۲x^{۲}-۳x+۱}=\lim_{x\to۱}\frac{x^{۲}-ax+a-۱}{(۲x-۱)(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(x+۱-a)}{(۲x-۱)(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{(x+۱-a)}{(۲x-۱)}=\frac{۲-a}{۲-۱}=۲-a$$

طبق فرض مسئله حاصل حد برابر ۳ است، پس $۲-a=۳$، یعنی $a=-۱$. بنابراین $b=a-۱=-۲$. در نتیجه $a+b=-۳$.

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{x^{۲}-ax+b}{۲x^{۲}-۳x+۱}=\lim_{x\to۱}\frac{۲x-a}{۴x-۳}=\frac{۲-a}{۱}=۲-a$$

پس $۲-a=۳$، بنابراین $a=-۱$. چون $b-a=-۱$، پس $b=-۲$. بنابراین

$$a+b=-۳$$

۲۵۱۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to۲}\left(\frac{\sqrt{۳x-۲}-۲}{\sqrt{x+۲}-x}\times\frac{\sqrt{۳x-۲}+۲}{\sqrt{۳x-۲}+۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+x}{\sqrt{x+۲}+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to۲}\left(\frac{۳x-۲-۴}{x+۲-x^{۲}}\times\frac{\sqrt{x+۲}+x}{\sqrt{۳x-۲}+۲}\right)$$

$$=\lim_{x\to۲}\left(\frac{۳(x-۲)}{(۲-x)(x+۱)}\times\frac{\sqrt{x+۲}+x}{\sqrt{۳x-۲}+۲}\right)$$

$$=\lim_{x\to۲}\left(\frac{۳}{-(x+۱)}\times\frac{\sqrt{x+۲}+x}{\sqrt{۳x-۲}+۲}\right)=\frac{۳}{-۳}\times\frac{۲+۲}{۲+۲}=-۱$$

۲۵۱۷- گزینهٔ ۱ اگر $x\to۳^{+}$، آن‌گاه $[x]=۳$ و $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$، در نتیجه $\lim\limits_{x\to۳^{+}}f(x)=+\infty$. اگر $x\to۳^{-}$، آن‌گاه $[x]=۲$ و $f(x)=\frac{-۱}{x-۳}$، در نتیجه $\lim\limits_{x\to۳^{-}}f(x)=+\infty$.

۲۵۱۸- گزینهٔ ۲ چون حد صورت در نقطهٔ $x=۲$ برابر ۳ است. باید حد مخرج کسر در این نقطه برابر صفر باشد، تا حد مورد نظر نامتناهی شود. همچنین، چون حد چپ و حد راست کسر هر دو $+\infty$ شده‌اند، پس باید مقادیر $۳x^{۲}+ax-b$ در یک همسایگی محذوف نقطهٔ $x=۲$ مثبت باشند. در نتیجه $x=۲$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $۳x^{۲}+ax-b=۰$ است، یعنی $۳x^{۲}+ax-b$ باید به‌صورت $۳(x-۲)^{۲}$ باشد.

در نتیجه

$$۳x^{۲}+ax-b=۳(x-۲)^{۲}=۳x^{۲}-۱۲x+۱۲$$

پس $a=-۱۲$، $b=-۱۲$. یعنی $a+b=-۲۴$.

۲۵۱۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-۳$. از طرف دیگر اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-۳$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{t\to(-۳)^{-}}f(t)=-\infty$$

۲۵۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جمله‌ای شامل $x^{۴}$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^{۴}$ در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه $۲a-۴=۰$. پس $a=۲$. به این ترتیب

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^{۳}-۱}{۱۲x^{۳}+x^{۲}+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^{۳}}{۱۲x^{۳}}=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $ab=\frac{۲}{۳}$.

۲۵۲۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(-۲)=\lim_{x\to-۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to-۲}\frac{f(x)-k}{x+۲}$$

از طرف دیگر

$$\lim_{x\to-۲}\frac{f^{۲}(x)-kf(x)}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to-۲}\frac{f(x)(f(x)-k)}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to-۲}\frac{f(x)-k}{x+۲}\times\lim_{x\to-۲}\frac{f(x)}{x-۲}=f'(-۲)\times\frac{f(-۲)}{-۴}=\frac{k^{۲}}{-۴}$$

بنابراین $\frac{k^{۲}}{-۴}=-۲$، در نتیجه $k^{۲}=۸$.

۲۵۲۲- گزینهٔ ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{|x|\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{x\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰^{+}}\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}=۱$$

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{|x|\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{-x\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰^{-}}(-\sqrt[۳]{x^{۲}+۱})=-۱$$

بنابراین $۲f'_{+}(۰)-f'_{-}(۰)=۳$.

۲۵۲۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=(۸x^۳+۱۰x)(ax^۲+۱)+(۲ax)(۲x^۴+۵x^۲-۳)$$

بنابراین

$$f'(۱)=(۸+۱۰)(a+۱)+(۲a)(۲+۵-۳)=۱۸a+۱۸+۸a=۲۶a+۱۸$$

چون $f'(۱)=-۸$، پس

$$۲a+۱۸=-۸\Rightarrow ۲۶a=-۲۶\Rightarrow a=-۱$$

۲۵۲۴- گزینهٔ ۳ چون تابع در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

$$۸a+۴=۴+۲b\Rightarrow ۴a-b=۰$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases} ۳ax^۲+۲ & x>۲ \\ ۲x+b & x<۲ \end{cases}$، بنابراین

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}(۳ax^۲+۲)=۱۲a+۲$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}(۲x+b)=۴+b$$

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۱۲a+۲=۴+b\Rightarrow ۱۲a-b=۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} ۴a-b=۰ \\ ۱۲a-b=۲ \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۴}$ و $b=۱$.

پس $a+b=\frac{۵}{۴}$.

۲۵۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=f(\frac{۱}{\sqrt{x}})\Rightarrow g'(x)=(\frac{۱}{\sqrt{x}})'f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})$$

بنابراین $g'(\frac{۱}{۴})=\frac{-۱}{۲\times\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۱}{۴}}}f'(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}})=-۴f'(۲)$. از طرف دیگر $f'(۲)=\frac{۴+۱}{۲-۳}=-۵$. در نتیجه $g'(\frac{۱}{۴})=(-۴)(-۵)=۲۰$.

۲۵۲۶- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۲x^۳+۳ax^۲+۶x,\quad f''(x)=۶x^۲+۶ax+۶$$

پس معادلهٔ $۶x^۲+۶ax+۶=۰$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta=۳۶a^۲-۱۴۴<۰\Rightarrow a^۲<۴\Rightarrow |a|<۲$$

۲۵۲۷- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,۱]$ برابر است با

$$\frac{f(۱)-f(a)}{۱-a}=\frac{۰-(a-۲)\sqrt{۱-a}}{۱-a}=\frac{۲-a}{\sqrt{۱-a}}$$

بنابراین

$$\frac{۲-a}{\sqrt{۱-a}}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{(۲-a)^۲}{۱-a}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow\frac{۴+a^۲-۴a}{۱-a}=\frac{۲۵}{۴}$$

$$۴a^۲-۱۶a+۱۶=۲۵-۲۵a$$

$$۴a^۲+۹a-۹=۰\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}, a=-۳$$

با توجه به گزینه‌های داده شده جواب -۳ است.

۲۵۲۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ مورد نظر $(x_۰,y_۰)$ باشد. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_۰)$ است که چون خط مماس موازی محور x است، پس $f'(x_۰)=۰$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۱۲=۳(x-۲)^۲$$

$$f'(x_۰)=۰\Rightarrow ۳(x_۰-۲)^۲=۰\Rightarrow x_۰=۲$$

بنابراین $y_۰=f(x_۰)=f(۲)=۶$.

۲۵۲۹- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ بر نمودار تابع f مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=x_۰$ برابر با شیب خط $y=۲x+۴$ یعنی ۲ است. بنابراین

$$f'(x)=۶x^۲-۴\Rightarrow f'(x_۰)=۲\Rightarrow ۶x_۰^۲-۴=۲$$

$$x_۰^۲=۱\Rightarrow x_۰=۱ \text{ یا } x_۰=-۱$$

چون نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی نمودار تابع f است، پس

$$y_۰=f(۱)=۲-۴+۶=۴ \quad \text{یا} \quad y_۰=f(-۱)=-۲+۴+۶=۸$$

بنابراین خط‌های مورد نظر از نقطهٔ $(۱,۴)$ یا نقطهٔ $(-۱,۸)$ می‌گذرند و شیب آن‌ها ۲ است. پس معادلهٔ این دو خط به‌صورت $y=۲x+۲$ یا $y=۲x+۱۰$ است.

۲۵۳۰- گزینهٔ ۴ خط $y=۴x+۲$ در نقطهٔ $A(۱,۶)$ بر نمودار تابع f مماس است. بنابراین $f(۱)=۶$ و $f'(۱)=۴$. در نتیجه چون $f'(x)=۳x^۲-۲ax$، پس

$$\begin{cases} f(۱)=۱-a+b=۶ \\ f'(۱)=۳-۲a=۴ \end{cases}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}, b=\frac{۹}{۲}\Rightarrow a+b=۴$$

۲۵۳۱- گزینهٔ ۱ باید تابع مشتق تابع f را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲+۱\Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x, f'(x)=۰\Rightarrow x=۰, x=۱$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[۰,۱]$ نزولی است. می‌دانیم در صورتی‌که $c\geq ۰$ و $d\leq ۱$، تابع f روی بازهٔ $[c,d]$ نزولی است اما بیشترین مقدار $b-a$، زمانی است که $a=۰$ و $b=۱$. پس $b-a=۱-۰=۱$.

۲۵۳۲- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f برابر است با $f'(x)=-۶x^۲+۲ax-۶$. برای آنکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد باید همواره $f'\leq ۰$. پس

$$a<۰, \Delta\leq ۰\Rightarrow -۶<۰, \Delta=۴a^۲-۱۴۴\leq ۰\Rightarrow -۶\leq a\leq ۶$$

۲۵۳۳- گزینهٔ ۲ ابتدا تابع f' را تعیین علامت می‌کنیم

x	$-\infty$		-۳		-۲		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	
$f(x)$		↘		↘		↗		↘		↗	

تابع f' در نقطه‌های -۲، ۰ و ۱ هم برابر صفر است و هم در اطراف این نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین تابع f در این نقطه‌ها اکسترمم نسبی دارد. پس مجموع طول این نقطه‌ها برابر $-۲+۰+۱=-۱$ است.

۲۵۳۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=x^{۲}-۲x-۸$ و

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^{۲}-۲x-۸=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۴\,,\,x=-۲$$

با توجه به آنکه $f(-۲)=\frac{۲۵}{۳}$ و $f(۴)=-\frac{۸۳}{۳}$، پس نقاط $(-۲,\frac{۲۵}{۳})$ و $(۴,-\frac{۸۳}{۳})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند، بنابراین فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(۴-(-۲))^{۲}+(-\frac{۸۳}{۳}-\frac{۲۵}{۳})^{۲}}=\sqrt{۶^{۲}+۳۶^{۲}}=۶\sqrt{۳۷}$$

۲۵۳۵- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، برای آنکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(۲)=۰$. پس

$$f'(x)=\sqrt[۳]{x+a}+\frac{x+۱}{۳\sqrt[۳]{(x+a)^{۲}}}\,,\,f'(۲)=۰$$

$$f'(۲)=\sqrt[۳]{۲+a}+\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۲+a)^{۲}}}=\frac{۳(۲+a)+۳}{۳\sqrt[۳]{(۲+a)^{۲}}}=۰\Rightarrow ۹+۳a=۰\Rightarrow a=-۳$$

۲۵۳۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

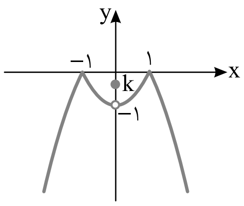
$$f(x)=\begin{cases} ۲x-x^{۳} & x\le-\sqrt{۲} \text{ یا } ۰\le x\le\sqrt{۲} \\ x^{۳}-۲x & -\sqrt{۲}\le x\le ۰ \text{ یا } x\ge\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲-۳x^{۲} & x<-\sqrt{۲} \text{ یا } ۰<x<\sqrt{۲} \\ ۳x^{۲}-۲ & -\sqrt{۲}<x<۰ \text{ یا } x>\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲-۳x^{۲}=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

همچنین در نقاط $x=۰$، $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ مشتق چپ و مشتق راست تابع برابر نیستند، پس تابع در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. بنابراین تابع f، پنج نقطهٔ بحرانی دارد.

۲۵۳۷- گزینهٔ ۴ به نمودار تابع f توجه کنید. واضح است که اگر تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، اما ماکزیمم مطلق نداشته باشد، باید $-۱<k<۰$. توجه کنید که اگر $k\ge۰$، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم مطلق تابع f دارد و اگر $k\le-۱$، در نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی دارد.



۲۵۳۸- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقطه‌های دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+۱)-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+a)}{(\sqrt{x}+۱)^{۲}}=\frac{۱-a}{۲\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)^{۲}}$$

اگر $f'(x)=۰$، آن‌گاه $a=۱$ که در این صورت $f(x)=۱$. چون کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[۰,۴]$ برابر $\frac{۴}{۳}$ است، پس $a=۱$ قابل قبول نیست. پس $f'(x)\neq۰$، بنابراین نقاط ابتدا و انتهای بازه را بررسی می‌کنیم: $f(۰)=a$ و $f(۴)=\frac{۲+a}{۳}$. اگر $f(۰)=a=\frac{۴}{۳}$، آن‌گاه $a=\frac{۴}{۳}$ و اگر $f(۴)=\frac{۲+a}{۳}=\frac{۴}{۳}$، آن‌گاه $a=۲$. بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{۴}{۳}\times۲=\frac{۸}{۳}$ است.

۲۵۳۹- گزینهٔ ۴ فرض کنید نقطهٔ B روی سهمی به معادلهٔ $y=۲x^{۲}$ باشد. بنابراین مختصات آن به‌صورت $B(x,۲x^{۲})$ است. پس

$$AB=\sqrt{(x-۹)^{۲}+(۲x^{۲}-۰)^{۲}}=\sqrt{x^{۲}-۱۸x+۸۱+۴x^{۴}}$$

اگر $f(x)=\sqrt{۴x^{۴}+x^{۲}-۱۸x+۸۱}$، آن‌گاه

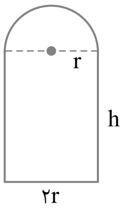
$$f'(x)=\frac{۸x^{۳}+x-۹}{\sqrt{۴x^{۴}+x^{۲}-۱۸x+۸۱}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۸x^{۳}+x-۹=۰\Rightarrow (۸x^{۳}-۸)+(x-۱)=۰$$

$$۸(x-۱)(x^{۲}+x+۱)+(x-۱)=(x-۱)(۸x^{۲}+۸x+۹)=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید. پس B نقطهٔ $(۱,۲)$ و عرض آن برابر ۲ است.

۲۵۴۰- گزینهٔ ۴ در واقع باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد. پس



$$\text{محیط}=۵\Rightarrow ۲h+۲r+(\frac{۲\pi r}{۲})=۲h+۲r+r\pi=۵$$

$$h=\frac{۵-۲r-r\pi}{۲}=\frac{۵}{۲}-r-\frac{r\pi}{۲}$$

$$\text{مساحت پنجره}=S_{\text{مستطیل}}+S_{\text{نیم‌دایره}}$$

$$S(r)=(h\times۲r)+(\frac{r\times r\times\pi}{۲})=(\frac{۵}{۲}-r-\frac{r\pi}{۲})\times۲r+\frac{r^{۲}\pi}{۲}=-۲r^{۲}-\frac{r^{۲}\pi}{۲}+۵r$$

$$S'(r)=-۴r-r\pi+۵\,,\,S'(r)=۰\Rightarrow -۴r-r\pi+۵=۰\Rightarrow r=\frac{۵}{۴+\pi}$$

۲۵۴۱- گزینهٔ ۳ حجم جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع ۸ و ارتفاع ۳ است که استوانه‌ای به شعاع ۳ و ارتفاع ۳ از آن حذف شده است. بنابراین حجم جسم حاصل برابر با $V=(۸\times۸\times\pi)\times۳-(۳\times۳\times\pi)\times۳=۱۶۵\pi$ است.

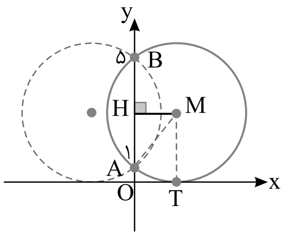
۲۵۴۲- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه BB' قطر کوچک بیضی است و روی محور y قرار دارد، مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است. پس $b=OB=۴\sqrt{۲}$ و $c=OF'=۲$، در نتیجه

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}=(۴\sqrt{۲})^{۲}+۲^{۲}=۳۶\Rightarrow a=۶$$

$$S_{ABF'}=\frac{BO\times AF'}{۲}=\frac{۴\sqrt{۲}\times(۶+۲)}{۲}=۱۶\sqrt{۲}$$

توجه کنید که $AF'=OA+OF'=a+c=۶$.

۲۵۴۳- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ M مرکز دایرهٔ مورد نظر باشد و این دایره در نقطهٔ T بر محور x مماس شده باشد. با توجه به نام‌گذاری‌های روی شکل $AB=۵-۱=۴$، پس $AH=۲$. بنابراین $TM=OH=۳$، یعنی شعاع این دایره برابر ۳ است.



بنابراین $AM=۳$. با توجه به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM ،

$$AM^۲=AH^۲+HM^۲\Rightarrow ۳^۲=۲^۲+HM^۲\Rightarrow HM=\sqrt{۵}$$

پس مرکز این دایره نقطهٔ $(\sqrt{۵},۳)$ و شعاع آن برابر ۳ است. پس معادله‌اش به‌صورت $(x-\sqrt{۵})^۲+(y-۳)^۲=۹$ است. دقت داشته باشید که دایره‌ای به معادلهٔ $(x+\sqrt{۵})^۲+(y-۳)^۲=۹$ نیز می‌تواند پاسخ این سؤال باشد.

۲۵۴۴- گزینهٔ ④ مرکز این دایره نقطهٔ $(۱,-۴)$ است. پس شیب خطی که شعاع نظیر نقطهٔ $(۲,-۳)$ روی آن است، برابر است با $m=\frac{-۳-(-۴)}{۲-۱}=۱$.

چون خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است، پس شیب خط مماس مورد نظر برابر با $m'=-۱$ است. پس برای نوشتن معادلهٔ خط مورد نظر، معادلهٔ خطی با شیب -۱ و گذرنده از نقطهٔ $(۲,-۳)$ را می‌نویسیم:

$$y+۳=-۱\,(x-۲)\Rightarrow y=-x-۱$$

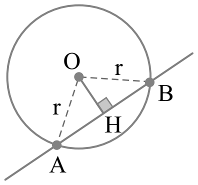
۲۵۴۵- گزینهٔ ② **راه‌حل اول** فرض کنید نقاط A و B محل برخورد خط با دایره و O مرکز دایره باشد. ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $O(-۱,-۲)$ است و شعاع این دایره برابر است با $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+۴^۲-۴\times(-۴)}=۳$. از طرف دیگر طول پاره‌خط OH برابر با فاصلهٔ مرکز دایره از خط است. پس

$$OH=\frac{|۲\times(-۱)+۱\times(-۲)-۱|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA ،

$$r^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow ۳^۲=\sqrt{۵}^۲+AH^۲\Rightarrow AH=۲$$

بنابراین طول وتر مورد نظر برابر با $AB=۲AH=۴$ است.



راه‌حل دوم ابتدا محل‌های برخورد خط و دایره را مشخص می‌کنیم، سپس فاصلهٔ بین این دو نقطه را به‌دست می‌آوریم که برابر با طول وتر مورد نظر است:

$$۲x+y-۱=۰\Rightarrow y=۱-۲x$$

$$x^۲+y^۲+۲x+۴y-۴=۰\Rightarrow x^۲+(۱-۲x)^۲+۲x+۴(۱-۲x)-۴=۰$$

$$۵x^۲-۱۰x+۱=۰\Rightarrow x_۱=\frac{۱۰+۴\sqrt{۵}}{۱۰}\ ,\ x_۲=\frac{۱۰-۴\sqrt{۵}}{۱۰}$$

$$A(x_۱,y_۱)=(\frac{۱۰+۴\sqrt{۵}}{۱۰},\frac{-۱۰-۸\sqrt{۵}}{۱۰})=(۱+\frac{۲\sqrt{۵}}{۵},-۱-\frac{۴\sqrt{۵}}{۵})$$

$$B(x_۲,y_۲)=(\frac{۱۰-۴\sqrt{۵}}{۱۰},\frac{-۱۰+۸\sqrt{۵}}{۱۰})=(۱-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵},-۱+\frac{۴\sqrt{۵}}{۵})$$

$$AB=\sqrt{(۱+\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}-(۱-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}))^۲+(-۱-\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}-(-۱+\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}))^۲}$$

$$=\sqrt{(\frac{۴\sqrt{۵}}{۵})^۲+(\frac{-۸\sqrt{۵}}{۵})^۲}=۴$$

۲۵۴۶- گزینهٔ ① در دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۸=۰$ مرکز دایره نقطهٔ $O(۱,-۲)$ و شعاع دایره $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+۴^۲-۴\times(-۸)}=\sqrt{۱۳}$ و در دایرهٔ $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۹$ مرکز دایره نقطهٔ $O'(۲,-۱)$ و شعاع دایره $r'=۳$ است. پس

$$OO'=\sqrt{(۱-۲)^۲+(-۲-(-۱))^۲}=\sqrt{۲}$$

$$r+r'=\sqrt{۱۳}+۳$$

$$|r-r'|=\sqrt{۱۳}-۳$$

$$|r-r'|<OO'<r+r'$$

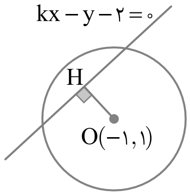
بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

۲۵۴۷- گزینهٔ ② در این دایره شعاع برابر ۱ و مرکز نقطهٔ $O(-۱,۱)$ است. چون خط $kx-y-۲=۰$ ، دایره را در دو نقطه قطع کرده است باید فاصلهٔ مرکز دایره از خط کمتر از شعاع دایره باشد، پس

$$OH=\frac{|k(-۱)-۱-۲|}{\sqrt{k^۲+(-۱)^۲}}<۱\Rightarrow\frac{|-k-۳|}{\sqrt{k^۲+۱}}<۱$$

$$\frac{(k+۳)^۲}{k^۲+۱}<۱\Rightarrow k^۲+۶k+۹<k^۲+۱$$

$$۶k<-۸\Rightarrow k<-\frac{۴}{۳}$$

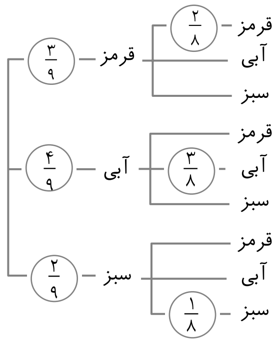


۲۵۴۸- گزینهٔ ③ A را پیشامد هم‌رنگ‌بودن هر دو مهره در نظر می‌گیریم. پس A' پیشامد غیرهم‌رنگ بودن مهره‌ها است. با توجه به نمودار درختی زیر، احتمال هم‌رنگ‌بودن مهره‌ها برابر است با

$$P(A)=\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۲}{۹}\times\frac{۱}{۸}=\frac{۲۰}{۷۲}=\frac{۵}{۱۸}$$

بنابراین احتمال هم‌رنگ نبودن مهره‌ها برابر است با

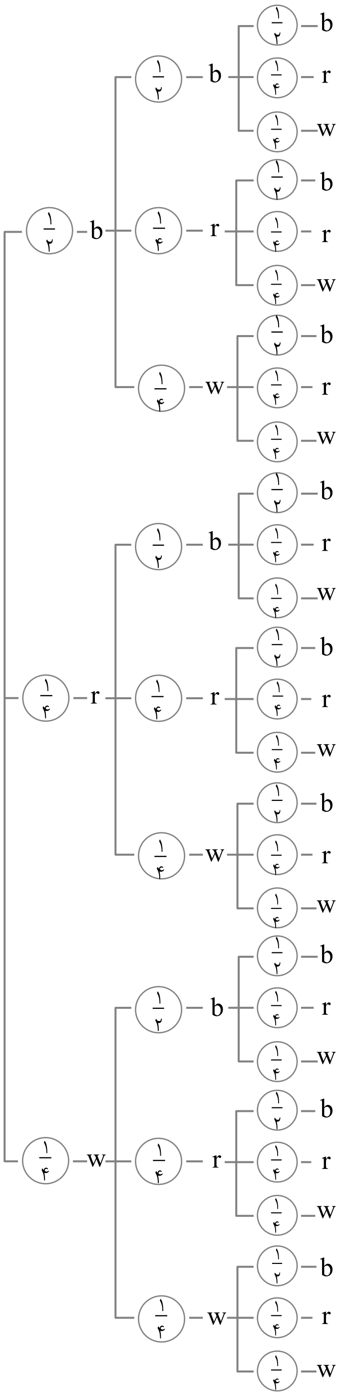
$$P(A')=۱-P(A)=\frac{۱۳}{۱۸}$$



۲۵۴۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید. از روی نمودار معلوم می‌شود احتمال موردنظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴})+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$$

$$=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$



(دقت کنید که b، r و w به‌ترتیب نماد سیاه، قرمز و سفید هستند.)

راه‌حل دوم عقربه باید دقیقاً دو بار روی سیاه و یک بار روی قرمز یا سفید قرار گیرد. بنابراین دو حالت رخ می‌دهد.

حالت اول

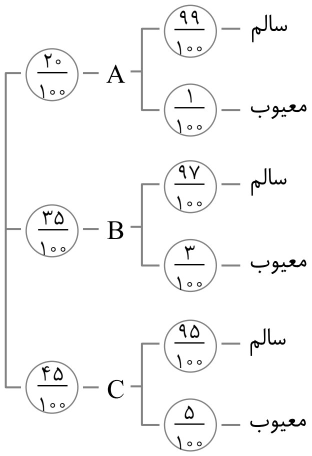
دو بار سیاه و یک بار سفید $\binom{۳}{۲}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱۲}{۴^۳}$

حالت دوم

دو بار سیاه و یک بار قرمز $\binom{۳}{۲}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱۲}{۴^۳}$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{۱۲}{۴^۳}+\frac{۱۲}{۴^۳}=\frac{۲۴}{۴^۳}=\frac{۳}{۸}$.

۲۵۵۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که



اگر X پیشامد معیوب‌بودن محصول انتخاب‌شده باشد، آن‌گاه

$$P(X)=\frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۳۵}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۴۵}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}$$

$$=\frac{۲۰}{۱۰۰۰۰}+\frac{۱۰۵}{۱۰۰۰۰}+\frac{۲۲۵}{۱۰۰۰۰}=\frac{۳۵۰}{۱۰۰۰۰}=۰/۰۳۵$$

۲۵۵۱- گزینهٔ ۱ a باید از $-a-۲$ کمتر نباشد:

$$a\geq -a-۲\Rightarrow a\geq -۱$$

a باید از $-۳a+۲$ کمتر باشد:

$$a<-۳a+۲\Rightarrow a<\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $-۱\leq a<\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه بازهٔ $[-۱,\frac{۱}{۲})$ مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a است.

۲۵۵۲- گزینهٔ ۲ تساوی داده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۴(a+d)}{a}=\frac{۵(a+۲d)}{a+d}+۲\Rightarrow ۴(a+d)^۲=۵a(a+۲d)+۲a(a+d)$$

$$۳a^۲+۴ad-۴d^۲=۰\Rightarrow\frac{۳a^۲}{d^۲}+\frac{۴ad}{d^۲}-\frac{۴d^۲}{d^۲}=۰\Rightarrow ۳(\frac{a}{d})^۲+۴(\frac{a}{d})-۴=۰$$

اگر فرض کنیم $k=\frac{a}{d}$، آن‌گاه

$$۳k^۲+۴k-۴=۰\Rightarrow k=\frac{۲}{۳}\ \text{یا}\ k=-۲$$

۲۵۵۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{۵\sqrt[۴]{۵\sqrt[۳]{۵}}}=۵^{\frac{۱}{۲}}\times۵^{\frac{۱}{۸}}\times۵^{\frac{۱}{۶}}=۵^{\frac{۱۲+۳+۴}{۲۴}}=۵^{\frac{۱۹}{۲۴}}$$

$$\sqrt[۴]{۵\sqrt[۶]{۵}}=۵^{\frac{۱}{۴}}\times۵^{\frac{۱}{۲۴}}=۵^{\frac{۶+۱}{۲۴}}=۵^{\frac{۷}{۲۴}}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۵^{\frac{۱۹}{۲۴}}}{۵^{\frac{۷}{۲۴}}}=۵^{\frac{۱۹}{۲۴}-\frac{۷}{۲۴}}=۵^{\frac{۱۲}{۲۴}}=۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵}$$

۲۵۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$a^۲+ab-۶b^۲=۰\Rightarrow(a-۲b)(a+۳b)=۰$$

چون $a+۳b\neq۰$، پس $a-۲b=۰$ و در نتیجه $a=۲b$. پس $\frac{a-۴b}{a+۳b}=\frac{۲b-۴b}{۲b+۳b}=\frac{-۲}{۵}$. توجه کنید که $b\neq۰$، زیرا در غیر این صورت $a=۰$ و در نتیجه $a+۳b=۰$ که تناقض است.)

۲۵۵۵- گزینهٔ ۱ طول رأس سهمی برابر $\frac{۵}{۲}$ است، پس

$$-\frac{a}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=-۵$$

مقدار $f(۰)$ مساوی ۴ است. پس

$$f(۰)=-b\Rightarrow -b=۴\Rightarrow b=-۴$$

بنابراین $f(x)=x^۲-۵x+۴$. مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ به‌ترتیب برابر ۵ و ۴ هستند، پس مجموع جواب‌ها یک واحد بیشتر از حاصل‌ضرب آن‌هاست.

۲۵۵۶- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $x^۲+x=t$ و معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^۲-۵t-۶=۰\Rightarrow(t-۶)(t+۱)=۰\Rightarrow t=-۱, t=۶$$

اگر $t=-۱$،

$$x^۲+x=-۱\Rightarrow x^۲+x+۱=۰$$

این معادله جواب حقیقی ندارد. اگر $t=۶$،

$$x^۲+x=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰$$

معادلهٔ بالا یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. پس معادلهٔ مورد نظر هم یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

۲۵۵۷- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $\sqrt{۳-x}=۲-\sqrt{x}$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$۳-x=۴+x-۴\sqrt{x}\Rightarrow ۴\sqrt{x}=۱+۲x$$

مجدداً طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$۱۶x=۱+۴x^۲+۴x\Rightarrow ۴x^۲-۱۲x+۱=۰$$

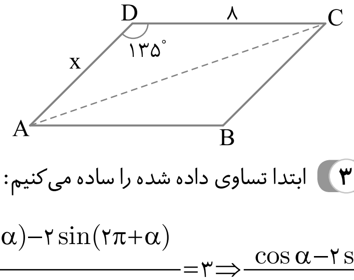
مجموع جواب‌های معادلهٔ بالا مورد نظر است که برابر ۳ است (توجه کنید که معادله درجهٔ دوم فوق دو جواب دارد که در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند).

۲۵۵۸- گزینهٔ ۱ مطابق شکل، مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD دو برابر مساحت مثلث ADC است،

$$S_{ABCD}=۲S_{ABD}=۲\times\frac{۱}{۲}\times x\times ۸\sin ۱۳۵^\circ=۴\sqrt{۲}x$$

بنابراین

$$۴\sqrt{۲}x=۲۴\sqrt{۲}\Rightarrow x=۶$$



۲۵۵۹- گزینهٔ ۳ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)-۲\sin(۲\pi+\alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)-۲\cos(۳\pi-\alpha)}=۳\Rightarrow\frac{\cos\alpha-۲\sin\alpha}{-\sin\alpha+۲\cos\alpha}=۳$$

$$\cos\alpha-۲\sin\alpha=-۳\sin\alpha+۶\cos\alpha$$

$$\sin\alpha=۵\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=۵$$

بنابراین $\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha=\frac{۱}{۵}$.

۲۵۶۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\frac{\sin x+۲\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴\sin x+۸\cos x=\cos x-\sin x$$

$$۵\sin x=-۷\cos x\Rightarrow\tan x=-\frac{۷}{۵}$$

بنابراین $\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۲(-\frac{۷}{۵})}{۱+(-\frac{۷}{۵})^۲}=-\frac{۳۵}{۳۷}$.

۲۵۶۱- گزینهٔ ۲ در نقاطی نمودار تابع f محور طول‌ها را قطع می‌کند که $f(x)=۰$، پس

$$\cos ۳x=۰\Rightarrow ۳x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

چون جواب‌های واقع در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۲})$ را می‌خواهیم، پس

$$\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۷\pi}{۲}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}<\frac{(۲k+۱)\pi}{۶}<\frac{۷\pi}{۲}\Rightarrow ۳<۲k+۱<۲۱\Rightarrow ۱<k<۱۰$$

بنابراین به ازای $k=۲$، $k=۳$، ... و $k=۹$ برای x هشت مقدار به‌دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور طول‌هاست.

۲۵۶۲- گزینهٔ ۲ اگر $x<۰$، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن صدق می‌کنند. اگر $x>۰$، آن‌گاه

$$\begin{cases}x^۲-x>۲x\Rightarrow x^۲-۳x>۰\Rightarrow x(x-۳)>۰\Rightarrow x-۳>۰\Rightarrow x>۳\\ \text{یا}\\ x^۲-x<-۲x\Rightarrow x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow x+۱<۰\Rightarrow x<-۱\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

واضح است که $x=۰$ نیز جواب نامعادله نیست. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,۰)\cup(۳,+\infty)$ است که می‌توانیم آن را به‌صورت $\mathbb{R}-[۰,۳]$ بنویسیم. پس $a=۰$ و $b=۳$ و در نتیجه $a+b=۳$.

۲۵۶۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$۴x-x^۲\geq۰\Rightarrow x(۴-x)\geq۰\Rightarrow۰\leq x\leq۴\Rightarrow D_f=[۰,۴]$$

بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_f\}=\{x|۰\leq x\leq۴,۰\leq\sqrt{۴x-x^۲}+۳\leq۴\}$$

از طرف دیگر

$$-۳\leq\sqrt{۴x-x^۲}\leq۱\Rightarrow۴x-x^۲\leq۱\Rightarrow x^۲-۴x+۴\geq۳$$

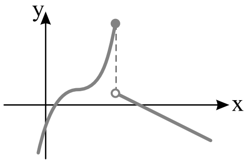
$$(x-۲)^۲\geq۳\Rightarrow\begin{cases}x-۲\geq\sqrt{۳}\\x-۲\leq-\sqrt{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq۲+\sqrt{۳}\\x\leq۲-\sqrt{۳}\end{cases}$$

بنابراین

$$D_{fof}=\{x|۰\leq x\leq۴,x\geq۲+\sqrt{۳}\ \text{یا}\ x\leq۲-\sqrt{۳}\}$$
$$=[۰,۲-\sqrt{۳}]\cup[۲+\sqrt{۳},۴]$$

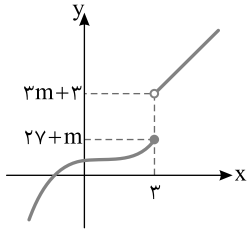
پس $a=۲-\sqrt{۳}$، $b=۲+\sqrt{۳}$ و $ab=۴-۳=۱$.

۲۵۶۴- گزینهٔ ۳ اگر $m\neq۰$، هر یک از بخش‌های تابع یک‌به‌یک هستند. اگر $m<۰$، نمودار بخش دوم خطی با شیب منفی می‌شود که در این صورت یک‌به‌یک بودن تابع نقض می‌شود. زیرا شکل کلی آن به‌صورت زیر می‌شود:



اگر $m>۰$ ، نمودار تابع شبیه شکل زیر می‌شود. برای اینکه تابع یک‌به‌یک باشد، کافی است عرض نقطهٔ توخالی بیشتر یا مساوی عرض نقطهٔ توپر باشد. در نتیجه

$$۲۷+m\le ۳m+۳\Rightarrow m\ge ۱۲$$



۲۵۶۵- گزینهٔ ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع f را پیدا می‌کنیم

$$y=۲-\sqrt{۴-x^{۲}},\quad -۲\le x\le ۰$$

$$\sqrt{۴-x^{۲}}=۲-y\Rightarrow ۴-x^{۲}=(۲-y)^{۲}$$

$$x^{۲}=۴-(۲-y)^{۲}\Rightarrow |x|=\sqrt{۴-(۲-y)^{۲}}=\sqrt{۴y-y^{۲}}$$

چون $-۲\le x\le ۰$ ، پس $x=-\sqrt{۴y-y^{۲}}$ و در نتیجه

$$f^{-۱}(x)=-\sqrt{۴x-x^{۲}}$$

بنابراین $a=-۱$ و $b=۰$ و در نتیجه $a+b=-۱$.

۲۵۶۶- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=۴f(۲x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع مقابل به‌دست می‌آید: $y=۴f(۲(x-۱))=۴f(۲x-۲)$ اگر این نمودار را دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۴f(۲x-۲)+۲$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=۴f(۲(۲x)-۲)+۲$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع بازهٔ $y=\frac{۱}{۲}(۴f(۴x-۲)+۲)$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده است به‌صورت $y=۲f(۴x-۲)+۱$ است.

۲۵۶۷- گزینهٔ ۴ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$x-۳>۰\Rightarrow x>۳$$

$$\log_{۰/۵}(x-۳)\ge ۱\Rightarrow \log_{۰/۵}(x-۳)\ge \log_{۰/۵}۰/۵$$

$$x-۳\le ۰/۵\Rightarrow x\le ۳/۵$$

بنابراین دامنهٔ تابع بازهٔ $(۳,۳/۵]$ است. پس $a=۳$ و $b=۳/۵$ و در نتیجه

$$b-a=\frac{۱}{۲}$$

۲۵۶۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x^{۳}-x^{۲}+x-۱=x^{۲}(x-۱)+(x-۱)=(x-۱)(x^{۲}+۱)$$

اکنون اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب کنیم، معلوم می‌شود که حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^{۲}+۱)(۲x+\sqrt{۳x^{۲}+۱})}{(۲x-\sqrt{۳x^{۲}+۱})(۲x+\sqrt{۳x^{۲}+۱})}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^{۲}+۱)(۲x+\sqrt{۳x^{۲}+۱})}{۴x^{۲}-۳x^{۲}-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^{۲}+۱)(۲x+\sqrt{۳x^{۲}+۱})}{(x-۱)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^{۲}+۱)(۲x+\sqrt{۳x^{۲}+۱})}{x+۱}=\frac{۲(۲+۲)}{۲}=۴$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۳}-x^{۲}+x-۱}{۲x-\sqrt{۳x^{۲}+۱}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^{۲}-۲x+۱}{۲-\frac{۶x}{۲\sqrt{۳x^{۲}+۱}}}=\frac{۲}{۲-\frac{۳}{۲}}=۴$$

۲۵۶۹- گزینهٔ ۴ اگر $x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}$ ، آن‌گاه $\cos x\to ۰^{-}$ و در نتیجه $[\cos x]=-۱$. پس باید مقدار عبارت زیر را به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}\frac{-۱}{\sin x-\sin^{۲}x}$$

حد مخرج کسر صفر است و مقدار عبارت مخرج مثبت است، زیرا در یک همسایگی راست $\frac{\pi}{۲}$ ، نابرابری $۰<\sin x<۱$ برقرار است. بنابراین

$$\sin x-\sin^{۲}x=\sin x(۱-\sin x)\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}\frac{-۱}{\sin x-\sin^{۲}x}=-\infty$$

۲۵۷۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f(۲)=a$ و

$$\lim_{x\to ۲^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}(۳x-[x])=\lim_{x\to ۲^{-}}(۳x-۱)=۵$$

$$\lim_{x\to ۲^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}(x+۲)=۴$$

پس به ازای هیچ مقدار a حد چپ و حد راست تابع نمی‌توانند با مقدار تابع در نقطهٔ $x=۲$ برابر باشند.

۲۵۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}})(\sqrt{x+۶}+۱)-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۶}}(\sqrt{x+۱}+۲)}{(\sqrt{x+۶}+۱)^{۲}}$$

در نتیجه $f'(۳)=\frac{\frac{۱}{۲\times ۲}(۳+۱)-\frac{۱}{۲\times ۳}(۲+۲)}{(۳+۱)^{۲}}=\frac{۱}{۴۸}$.

۲۵۷۲- گزینهٔ ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه پیوستگی آن است:

$$\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}f(x)\Rightarrow \lim_{x\to ۱^{+}}(۱-a\sqrt{x})=\lim_{x\to ۱^{-}}(bx^{۲}+x)$$

$$۱-a=b+۱\Rightarrow b=-a$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=۱$ با هم برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{a}{۲\sqrt{x}} & x>۱\\ ۲bx+۱ & x<۱\end{cases}$$

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}f'(x)=-\frac{a}{۲}\ ,\quad f'_{-}(۱)=\lim_{x\to ۱^{-}}f'(x)=۲b+۱$$

$$۲b+۱=-\frac{a}{۲}\xrightarrow{b=-a}-۲a+۱=-\frac{a}{۲}\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

۲۵۷۳- گزینهٔ ۳ با توجه به تعریف مشتق، از $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-۹}{h}=\frac{۳}{۲}$ نتیجه می‌شود $f'(۲)=\frac{۳}{۲}$ و $f(۲)=۹$. از طرف دیگر،

$$g'(x)=\sqrt{f(x)}+\frac{xf'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}$$

بنابراین

$$g'(۲)=\sqrt{f(۲)}+\frac{۲f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}}=۳+\frac{۳}{۶}=۳/۵$$

۲۵۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{۲x(x^۳+۴)-۳x^۴}{(x^۳+۴)^۲}=\frac{x(۸-x^۳)}{(x^۳+۴)^۲}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt[۳]{۴}$		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		−	ت ن	−	۰	+	۰	−	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[۰,۲]$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۲۵۷۵- گزینهٔ ۴ تعداد راه‌های انتخاب سه نقطه از ده نقطهٔ مشخص شده برابر با $\binom{۱۰}{۳}$ است. از این سه‌تایی‌ها، با آن‌هایی که روی یک خط راست هستند، نمی‌توان مثلث رسم کرد. بنابراین تعداد مثلث‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{۱۰}{۳}-\binom{۵}{۳}-\binom{۶}{۳}=۱۲۰-۱۰-۲۰=۹۰$$

۲۵۷۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{۱}{۷}+\frac{۳}{۷}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۴}$$

از طرف دیگر،

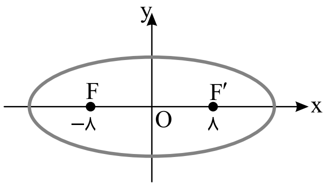
$$P(B)=P(A'\cap B)+P(A\cap B)\Rightarrow\frac{۳}{۷}=P(A'\cap B)+\frac{۱}{۱۴}$$

$$P(A'\cap B)=\frac{۳}{۷}-\frac{۱}{۱۴}=\frac{۵}{۱۴}$$

۲۵۷۷- گزینهٔ ۱ فاصلهٔ کانونی بیضی مورد نظر برابر است با $FF'=۱۶$. پس $۲c=۱۶$، یعنی $c=۸$. از طرف دیگر، طول قطر بزرگ بیضی برابر است با $۲a$. پس $۲a=۲۰$، یعنی $a=۱۰$، اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۱۰۰=b^۲+۶۴\Rightarrow b=۶$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $۲b=۱۲$.

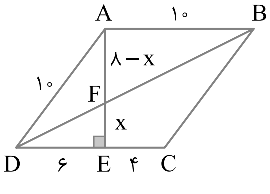


۲۵۷۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که چون طول ضلع‌های لوزی برابرند، پس $AB=AD=DC=۱۰$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AED،

$$AD^۲=DE^۲+AE^۲\Rightarrow ۱۰^۲=۶^۲+AE^۲\Rightarrow AE=۸$$

فرض کنید $EF=x$. در این صورت، از تشابه مثلث‌های AFB و EFD (زز) نتیجه می‌شود

$$\frac{AB}{ED}=\frac{AF}{EF}\Rightarrow\frac{۱۰}{۶}=\frac{۸-x}{x}\Rightarrow ۱۰x=۴۸-۶x\Rightarrow ۱۶x=۴۸\Rightarrow x=۳$$



۲۵۷۹- گزینهٔ ۱ بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$EX\|BM\Rightarrow\frac{EX}{BM}=\frac{AX}{AM}\qquad(۱)$$

$$XY\|MN\Rightarrow\frac{AX}{AM}=\frac{XY}{MN}\qquad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{EX}{BM}=\frac{XY}{MN}\xrightarrow{BM=XY}\frac{۴}{XY}=\frac{XY}{۹}\Rightarrow XY=۶$$

بنابراین تساوی (۲) می‌شود $\frac{AX}{AM}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$. اکنون چون $XF\|MC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث AMC،

$$\frac{AX}{AM}=\frac{XF}{MC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۹+NC}\Rightarrow NC=۳$$

۲۵۸۰- گزینهٔ ۳ طبق فرض

$$\frac{۳+۰+a+a+۴+a+۶+a+۳}{۹}=۴\Rightarrow\frac{۱۶+۴a}{۹}=۴\Rightarrow ۱۶+۴a=۳۶$$

$$۴a=۲۰\Rightarrow a=۵$$

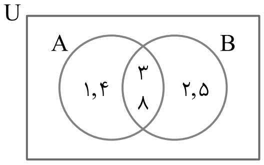
در نتیجه مرتب شدهٔ داده‌ها به‌صورت ۶ ,۵ ,۵ ,۵ ,۵ ,۴ ,۳ ,۳ ,۰ است. چون تعداد داده‌ها برابر ۹ است، پس میانه برابر دادهٔ پنجم یعنی برابر ۵ است.

۲۵۸۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $U=\{۱,۲,...,۸\}$ و $X=(X')'$. بنابراین

$$A\cap B=((A\cap B)')'=\{۳,۸\}$$

$$A\cup B=((A\cup B)')'=\{۱,۲,۳,۴,۵,۸\}$$

و چون $B-A=\{۲,۵\}$، پس نمودار وِن زیر به‌دست می‌آید. بنابراین $A=\{۱,۳,۴,۸\}$ و مجموع اعضای A برابر ۱۶ است.



۲۵۸۲- گزینهٔ ۱ چون $a+b$ واسطهٔ هندسی $a-b$ و $۲a-b$ است، پس

$$(a+b)^۲=(a-b)(۲a-b)\Rightarrow a^۲+۲ab+b^۲=۲a^۲+b^۲-۳ab$$

$$a^۲-۵ab=۰\Rightarrow a(a-۵b)=۰$$

چون $a\neq۰$، پس $a-۵b=۰$، در نتیجه $a=۵b$ و $r=\frac{a+b}{a-b}=\frac{۵b+b}{۵b-b}=\frac{۳}{۲}$.

بنابراین $\frac{a_۴}{a_۱}=\frac{a_۱r^۳}{a_۱}=r^۳=(\frac{۳}{۲})^۳=\frac{۲۷}{۸}$.

۲۵۸۳- گزینهٔ ۴ اعداد را با توان‌های گویا می‌نویسیم:

$$\sqrt[۶]{۱۲}=۱۲^{\frac{۱}{۶}}=(۲^۲)^{\frac{۱}{۶}}\times۳^{\frac{۱}{۶}}=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۱}{۶}}$$

$$\sqrt[۴]{۵۴}=۵۴^{\frac{۱}{۴}}=(۳^۳)^{\frac{۱}{۴}}\times۲^{\frac{۱}{۴}}=۳^{\frac{۳}{۴}}\times۲^{\frac{۱}{۴}}$$

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۶}}=(۲\times۶^{\frac{۱}{۴}})^{\frac{۱}{۳}}=(۲\times۲^{\frac{۱}{۴}}\times۳^{\frac{۱}{۴}})^{\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۵}{۱۲}}\times۳^{\frac{۱}{۱۲}}$$

بنابراین

$$\sqrt[۶]{۱۲}\times\sqrt[۴]{۵۴}\times\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۶}}=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۱}{۶}}\times۳^{\frac{۳}{۴}}\times۲^{\frac{۱}{۴}}\times۲^{\frac{۵}{۱۲}}\times۳^{\frac{۱}{۱۲}}$$

$$=۲^{(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۱۲})}\times۳^{(\frac{۱}{۶}+\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۱۲})}=۲\times۳=۶$$

۲۵۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $a-c=(a-b)+(b-c)=۸$ ، همچنین،

$$\frac{ab-ac+bc-b^۲}{a-c}=\frac{-ac+b(a+c)-b^۲}{a-c}=\frac{-(b^۲-b(a+c)+ac)}{a-c}$$

$$=\frac{-(b-a)(b-c)}{a-c} \qquad =\frac{-(-۴)(۴)}{۸}=۲$$

۲۵۸۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۳$ و $x_۱x_۲=۲m+۱$. بنابراین

$$\begin{cases} x_۱+x_۲=۳ \\ ۳x_۱-x_۲=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=۲ \end{cases}$$

در نتیجه

$$x_۱x_۲=۲ \Rightarrow ۲m+۱=۲ \Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۲۵۸۶- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$(x-۱)(x-۵)(x-۲)(x-۴)=۴۰ \Rightarrow (x^۲-۶x+۵)(x^۲-۶x+۸)=۴۰$$

اکنون فرض می‌کنیم $t=x^۲-۶x+۵$ و معادله به‌صورت $t(t+۳)=۴۰$ درمی‌آید. بنابراین

$$t^۲+۳t-۴۰=۰ \Rightarrow (t+۸)(t-۵)=۰ \Rightarrow t=-۸\,,t=۵$$

اگر $t=۵$ ، آن‌گاه

$$x^۲-۶x+۵=۵ \Rightarrow x^۲-۶x=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ x=۶$$

اگر $t=-۸$ ، آن‌گاه

$$x^۲-۶x+۵=-۸ \Rightarrow x^۲-۶x+۱۳=۰$$

$\Delta<۰ \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۶ است.

۲۵۸۷- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{۱}{x+۳}<\frac{x-۵}{۹} \Rightarrow \frac{۹}{x+۳}+۵-x<۰ \Rightarrow \frac{۹+(۵-x)(x+۳)}{x+۳}<۰$$

$$\frac{-x^۲+۲x+۲۴}{x+۳}<۰ \Rightarrow \frac{(x-۶)(x+۴)}{x+۳}>۰$$

بـا توجه به جدول تعییـن علامت زیر، مجموعهٔ جواب‌هـای نامعادله به‌صورت $(-۴\,,-۳)\cup(۶,+\infty)$ است.

x	$-\infty$		-۴		-۳		۶		$+\infty$
$\frac{(x-۶)(x+۴)}{x+۳}$		$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	

پس $a=-۴$ ، $b=۶$ و $ab=-۲۴$.

۲۵۸۸- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin x+۱-\cos x=۰ \Rightarrow ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}+۲\sin^۲\frac{x}{۲}=۰$$

$$۲\sin\frac{x}{۲}(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})=۰$$

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{۲}=۰ \Rightarrow x=۰\,,x=۲\pi \\ \sin\frac{x}{۲}=-\cos\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

۲۵۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x\in[-۴,-۱]\cup[۱,۴] \Rightarrow \begin{cases} -۴\le x\le ۴ \Rightarrow |x|\le ۴ \\ \text{و} \\ x\le -۱ \text{ یا } x\ge ۱ \Rightarrow |x|\ge ۱ \end{cases}$$

پس $۱\le|x|\le۴$.

۲۵۹۰- گزینهٔ ۱ طـول رأس سـهمی $y=ax^۲+bx+ab$ برابر $-\frac{b}{۲a}$ است. پس

$$-\frac{b}{۲a}=۱ \Rightarrow b=-۲a$$

عرض رأس این سهمی برابر $\frac{-\Delta}{۴a}$ است. پس

$$\frac{-\Delta}{۴a}=-۲ \Rightarrow \frac{b^۲-۴a^۲b}{۴a}=۲ \qquad (*)$$

اگر در تساوی $(*)$ به جای b قرار دهیم $-۲a$ نتیجه می‌شود

$$\frac{۴a^۲+۸a^۳}{۴a}=۲ \Rightarrow a+۲a^۲=۲ \Rightarrow ۲a^۲+a-۲=۰$$

$$\begin{cases} a=\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۴},\quad b=\frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۲} \qquad \text{(غ.ق.ق.)} \\ a=\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۴},\quad b=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲} \end{cases}$$

این سـهمی در نقطهٔ $(۰\,,ab)$ محور عرض‌ها را قطع می‌کند و عرض این نقطه برابر است با $ab=\frac{-(۱+\sqrt{۱۷})^۲}{۸}=-\frac{۹+\sqrt{۱۷}}{۴}$.

۲۵۹۱- گزینهٔ ۲ توجه کنیـد که $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$ ، بنابراین

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g\,,g(x)\in D_f\}=\{x|x\neq-۲,\frac{۲x-۳}{x+۲}\neq۱\}$$

از طرف دیگر

$$\frac{۲x-۳}{x+۲}\neq۱ \Rightarrow ۲x-۳\neq x+۲ \Rightarrow x\neq۵$$

پـس $D_{fog}=\{x|x\neq-۲,x\neq۵\}=\mathbb{R}-\{-۲,۵\}$. بنابراین -۲ و ۵ در دامنهٔ تابع fog قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر ۳ است.

۲۵۹۲- گزینهٔ ۳ چون این دو نمودار در نقطهٔ $(۱,۲)$ برخورد می‌کنند، پس

$$(۱,۲)\in f \Rightarrow f(۱)=۲ \Rightarrow \sqrt[۳]{a+b}=۲ \Rightarrow a+b=۸$$

$$(۱,۲)\in f^{-۱} \Rightarrow (۲,۱)\in f \Rightarrow f(۲)=۱$$

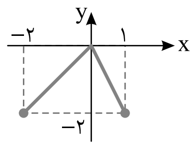
$$\sqrt[۳]{۲a+b}=۱ \Rightarrow ۲a+b=۱$$

در نتیجه

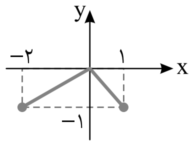
$$\begin{cases} a+b=۸ \\ ۲a+b=۱ \end{cases} \Rightarrow a=-۷\,,b=۱۵$$

بنابراین $۳a+b=-۶$.

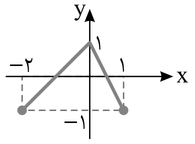
۲۵۹۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دسـت می‌آید. اگر عرض نقاط نمودار به‌دسـت آمـده را دو برابر کنیم، نمـودار تابع $y=۲f(-x)$ به‌دسـت می‌آید. نمـودار اخیر را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۱+۲f(-x)$ به‌دست آید که به‌صورت شکل (۲) خواهد بود.



$y=۲f(-x)$



$y=f(-x)$



$y=۱+۲f(-x)$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(-۱)=f(۲)=-۱$. اگر شکل (۲) مربوط به تابع g باشد، آن‌گاه $g(-۲)=g(۱)=-۱$. از طرف دیگر،

$$g(x)=۱+۲f(-x)\Rightarrow g(-۲)=۱+۲f(۲)=۱-۲=-۱$$

$$g(۱)=۱+۲f(-۱)=۱-۲=-۱$$

بنابراین شکل (۲) متعلق به تابع $g(x)=۱+۲f(-x)$ است.

۲۵۹۴- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل، دامنهٔ تابع به‌صورت $(-\infty, ۳)$ است.

از طرف دیگر، با توجه به ضابطهٔ تابع، دامنهٔ تابع به‌صورت $(-\infty, -\frac{b}{a})$ است که در آن $a<۰$. بنابراین

$$-\frac{b}{a}=۳\Rightarrow b=-۳a$$

در نتیجه $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(ax-۳a)$. اکنون توجه کنید که نمودار تابع f از نقطهٔ $(\frac{۳}{۲}, ۰)$ گذشته است. بنابراین

$$f(\frac{۳}{۲})=۰\Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{۳}{۲}a-۳a)=۰\Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}}(-\frac{۳}{۲}a)=۰$$

در نتیجه $-\frac{۳}{۲}a=۱$ ، یعنی $a=-\frac{۲}{۳}$ ، پس $b=۲$. بنابراین

$$f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(-\frac{۲}{۳}x+۲)$$

در نتیجه اگر $f^{-۱}(-۲)=m$ ، آن‌گاه

$$f(m)=-۲\Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}}(-\frac{۲}{۳}m+۲)=-۲$$

$$(\frac{۱}{۲})^{-۲}=-\frac{۲}{۳}m+۲\Rightarrow ۴=-\frac{۲}{۳}m+۲\Rightarrow m=-۳$$

بنابراین $f^{-۱}(-۲)=-۳$.

۲۵۹۵- گزینهٔ ۳ از تساوی $\log\sqrt{۸}=a$ نتیجه می‌شود

$$\log ۲^{\frac{۳}{۲}}=a\Rightarrow \frac{۳}{۲}\log ۲=a\Rightarrow \log ۲=\frac{۲a}{۳}$$

بنابراین

$$\log ۱۲۵=\log ۵^{۳}=۳\log ۵=۳\log\frac{۱۰}{۲}$$

$$=۳(\log ۱۰-\log ۲)=۳(۱-\frac{۲a}{۳})=۳-۲a$$

۲۵۹۶- گزینهٔ ۲ چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ در بیاید. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۱}(x^{۲}-ax+b)=۰\Rightarrow ۱-a+b=۰\Rightarrow b=a-۱$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-ax+a-۱}{۲x^{۲}-۳x+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-a+۱)}{(x-۱)(۲x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-a+۱}{۲x-۱}=۲-a$$

بنابراین

$$۲-a=a-۴\Rightarrow a=۳$$

پس $b=۲$ و در نتیجه $a+b=۵$.

۲۵۹۷- گزینهٔ ۳ اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل $x^{۳}$ وجود داشته باشد، مقدار حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ است. بنابراین باید ضریب $x^{۳}$ در صورت کسر داده شده صفر باشد، یعنی $a+۱=۰$ ، پس $a=-۱$. در این صورت حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x^{۲}+x}{(b+۱)x^{۲}-۴}=\frac{-۲}{b+۱}$$

بنابراین $\frac{-۲}{b+۱}=۲$ ، یعنی $b=-۲$. به این ترتیب $a+b=-۳$.

۲۵۹۸- گزینهٔ ۲ با توجه به رابطهٔ

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

تابع g همان تابع ثابت $g(x)=-۱$ است که روی بازهٔ $[-۴, ۴]$ فقط در نقطه‌های -۴ و ۴ ناپیوسته است.

۲۵۹۹- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=۱$ همان $f'(۱)$ است. پس،

$$f'(x)=۴x^{۳}+۲mx+۱\Rightarrow f'(۱)=۴+۲m+۱=۲\Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}$$

۲۶۰۰- گزینهٔ ۲ تابع در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته است و

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} & x>۳ \\ ۱ & x<۳\end{cases}$$

$$f'_{+}(۳)=\lim_{x\to ۳^{+}}\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}=\frac{۱}{۴}\ , \quad f'_{-}(۳)=\lim_{x\to ۳^{-}}۱=۱$$

بنابراین

$$\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۳+h)-f(۳-h)}{h}=\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}+\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۳-h)-f(۳)}{-h}$$

$$=f'_{+}(۳)+f'_{-}(۳)=\frac{۱}{۴}+۱=\frac{۵}{۴}$$

توجه کنید که می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال نیز استفاده کنیم:

$$\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۳+h)-f(۳-h)}{h}=\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f'(۳+h)+f'(۳-h)}{۱}$$

$$=f'_{+}(۳)+f'_{-}(۳)=\frac{۱}{۴}+۱=\frac{۵}{۴}$$

۲۶۰۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f(x)=x^{۳}x^{\frac{۱}{۲}}=x^{\frac{۷}{۲}}$ و

$$f'(x)=\frac{۷}{۲}x^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow f''(x)=\frac{۳۵}{۴}x^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳۵}{۴}x\sqrt{x}$$

بنابراین

$$f''(۴)=\frac{۳۵}{۴}\times ۴\times ۲=۷۰$$

۲۶۰۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $y'=x^{۲}+۲x+k$. برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن به ازای هر x نامنفی باشد:

$$x^{۲}+۲x+k\geq ۰$$

بنابراین

$$\Delta=۴-۴k\leq ۰\Rightarrow k\geq ۱$$

۲۶۰۳- گزینهٔ ۱ مقدار تابع f' در نقطه‌های -۱ و ۵ برابر صفر است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول -۱ و ۵ موازی محور x است. روی بازه‌های $(-\infty,-۱)$ و $(۵,+\infty)$ علامت f' منفی است، پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً نزولی است. روی بازهٔ $(-۱,۵)$ علامت f' مثبت است، پس تابع f روی این بازه اکیداً صعودی است. توجه کنید که فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

۲۶۰۴- گزینهٔ ۳ اگر دایره‌ها بر هم مماس درونی باشند، طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر با اختلاف شعاع‌های دایره‌هاست. مرکز دایره‌ها، نقطه‌های $(k,۲)$ و $(-۱,-۳)$ و شعاع‌های آن‌ها ۹ و ۲ است.

بنابراین

$$\text{طول خط‌المرکزین}=\sqrt{(k+۱)^۲+(۲+۳)^۲}=\sqrt{(k+۱)^۲+۲۵}$$

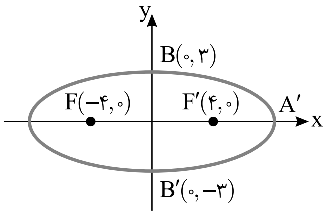
در نتیجه

$$\sqrt{(k+۱)^۲+۲۵}=۹-۲=۷\Rightarrow(k+۱)^۲+۲۵=۴۹$$

$$(k+۱)^۲=۲۴\Rightarrow k=\pm\sqrt{۲۴}-۱$$

بنابراین مجموع مقادیر k برابر -۲ است.

۲۶۰۵- گزینهٔ ۱ چون کانون‌های بیضی روی محور x و دو سر قطر کوچک بیضی روی محور y هستند، پس مبدأ مختصات مرکز بیضی است (شکل رسم شده را ببینید). از طرف دیگر، $a=BF=\sqrt{(۰+۴)^۲+(۳-۰)^۲}=۵$ در نتیجه، مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۰,۰)$ و شعاع آن برابر ۵ است، پس معادله‌اش $x^۲+y^۲=۲۵$ است.



۲۶۰۶- گزینهٔ ۴ فرض کنید تعداد مهره‌های آبی برابر n باشد. در این صورت تعداد مهره‌های قرمز برابر $۲n$ است. اکنون توجه کنید که بنابر فرض،

$$\frac{\binom{n}{۱}\binom{۲n}{۱}}{\binom{۳n}{۲}}=\frac{۷}{۱۵}\Rightarrow\frac{n(۲n)}{\frac{۳n(۳n-۱)}{۲}}=\frac{۷}{۱۵}$$

$$\frac{۴n}{۳(۳n-۱)}=\frac{۷}{۱۵}\Rightarrow۲۰n=۲۱n-۷\Rightarrow n=۷$$

۲۶۰۷- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که شخص سرطان داشته باشد، B پیشامد این باشد که جواب آزمایش مثبت باشد و شخص سرطان داشته باشد و C پیشامد این باشد که جواب آزمایش مثبت باشد و شخص سرطان نداشته باشد. اگر جواب آزمایش مثبت باشد، یا شخص سرطان دارد یا ندارد. بنابراین پیشامد مورد نظر $(A\cap B)\cup(A'\cap C)$ است. همچنین پیشامدهای $A\cap B$ و $A'\cap C$ ناسازگارند. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $P(A\cap B)+P(A'\cap C)$. همچنین، پیشامدهای A و B و نیز A و C، و در نتیجه A' و C، مستقل‌اند. بنابراین

$$P(A\cap B)+P(A'\cap C)=P(A)P(B)+P(A')P(C)$$

$$=۰/۰۲\times۰/۹۵+(۱-۰/۰۲)(۰/۰۳)=۰/۰۴۸۴$$

۲۶۰۸- گزینهٔ ۲ چون $EF\|AC$، بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\hat{A}_۱=\hat{F}_۱$ و $\hat{C}_۱=\hat{E}_۱$. بنابراین مثلث‌های AKC و FEK متشابه‌اند (زز). در نتیجه

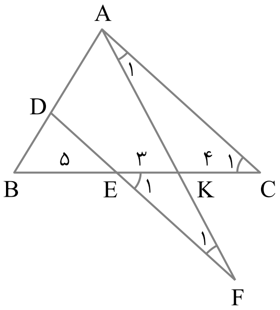
$$\frac{AC}{FE}=\frac{KC}{KE}\qquad(۱)$$

همچنین، چون $DE\|AC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BAC،

$$\frac{DE}{AC}=\frac{BE}{BC}\qquad(۲)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم به‌دست می‌آید

$$\frac{AC}{FE}\times\frac{DE}{AC}=\frac{۴}{۳}\times\frac{۵}{۱۲}\Rightarrow\frac{DE}{FE}=\frac{۵}{۹}$$



۲۶۰۹- گزینهٔ ۲ چون $EF\|BC$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^۲=\left(\frac{۱}{AB}\right)^۲=\frac{۱}{AB^۲}$$

اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S_{AEF}}{S_{BEFC}}=\frac{۱}{AB^۲-۱}\qquad(۱)$$

اما طبق فرض، $S_{AEF}=S_{BEFC}$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $\frac{۱}{AB^۲-۱}=۱$، پس $AB^۲-۱=۱$، یعنی $AB^۲=۲$ و در نتیجه $AB=\sqrt{۲}$.

۲۶۱۰- گزینهٔ ۳ ابتدا میانگین داده‌های جدید را به‌دست می‌آوریم

$$\overline{y}=\frac{۱۸\times۲۵+۲۰+۲۷+۲۸}{۱۸+۳}\Rightarrow\overline{y}=۲۵$$

برای محاسبهٔ واریانس از فرمول زیر کمک می‌گیریم:

$$\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲}{n}-(\overline{x})^۲\Rightarrow۹=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲}{۱۸}-۶۲۵$$

$$x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲=۱۸\times۶۳۴=۱۱۴۱۲$$

بنابراین مجموع مربعات داده‌های قبلی برابر ۱۱۴۱۲ است. مجموع مربعات داده‌های جدید برابر است با

$$A=۱۱۴۱۲+۲۰^۲+۲۷^۲+۲۸^۲=۱۳۳۲۵$$

در نتیجه $\sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{A}{۲۱}-(۲۵)^۲=\frac{۱۳۳۲۵}{۲۱}-۶۲۵\simeq۹/۵۲$.

۲۶۱۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$n(A)+n(A')=n(U)=۵۶,\quad n(B)+n(B')=n(U)=۵۶$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید:

$$n(A)+n(B)+n(A')+n(B')=۱۱۲$$

$$۶۲+n(A')+n(B')=۱۱۲\Rightarrow n(A')+n(B')=۵۰$$

بنابراین $n(A'\cap B')=n(A')+n(B')-n(A'\cup B')=۵۰-۴۴=۶$.

۲۶۱۲- گزینهٔ ۴ اگر a, b, c جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، آن‌گاه c, b, a هم جملات متوالی دنبالهٔ حسابی‌اند و چون c, b, a جملات متوالی دنباله‌ای هندسی هم هستند، پس $a=b=c$. بنابراین

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱}{b}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow b=۳۶$$

۲۶۱۳- گزینهٔ ۲ ابتدا مخرج کسرها را با استفاده از اتحادهای چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{(\sqrt[۳]{۲}-۱)(\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱)}=\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{۲-۱}=\sqrt[۳]{۲}-۱$$

$$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{(\sqrt[۳]{۲}+۱)(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)}=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۲+۱}=\sqrt[۳]{۲}+۱$$

بنابراین $A=\sqrt[۳]{۲}-۱+\sqrt[۳]{۲}+۱=۲\sqrt[۳]{۲}$.

۲۶۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$a^۳-a-(b^۳-b)=۰\Rightarrow a^۳-b^۳-(a-b)=۰$$

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)-(a-b)=۰\Rightarrow(a-b)(a^۲+ab+b^۲-۱)=۰$$

و چون $a-b\neq۰$، پس $a^۲+ab+b^۲=۱$.

۲۶۱۵- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ زیر باشند،

$$x^۲-(۲m-۳)x+۲n+۲=۰$$

آن‌گاه

$$\alpha+\beta=۲m-۳,\quad \alpha\beta=۲n+۲$$

همچنین اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-nx+m+۱=۰$ باشند، آن‌گاه

$$x_۱+x_۲=n,\quad x_۱x_۲=m+۱$$

با توجه به $\alpha=x_۱+۱$ و $\beta=x_۲+۱$ نتیجه می‌شود

$$\alpha+\beta=x_۱+x_۲+۲$$

$$\alpha\beta=(x_۱+۱)(x_۲+۱)=x_۱x_۲+x_۱+x_۲+۱$$

بنابراین

$$\begin{cases}۲m-۳=n+۲\\ ۲n+۲=m+۱+n+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲m-۵=n\\ m=n\end{cases}$$

پس

$$۲m-۵=m\Rightarrow m=۵,\quad n=۵$$

بنابراین $m+n=۱۰$.

۲۶۱۶- گزینهٔ ۱ اگـر فـرض کنیـم $x^۲=t$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$، $t\geq۰$ و معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^۲+۲mt+m^۲-۱=۰\quad(*)$$

در این معادله

$$\Delta=۴m^۲-۴(m^۲-۱)=۴>۰$$

بنابراین معادلهٔ $(*)$ به ازای هر مقدار m دو جواب دارد. اگر هر دو جواب این معادلـه منفـی باشـند، آن‌گاه معادلهٔ اولیه جـواب نخواهد داشـت. بنابراین اگر $t_۱$ و $t_۲$ جواب‌های معادلهٔ $(*)$ باشند، باید

$$t_۱+t_۲<۰\Rightarrow-۲m<۰\Rightarrow m>۰$$

$$t_۱t_۲>۰\Rightarrow m^۲-۱>۰\Rightarrow m<-۱ \text{ یا } m>۱$$

بنابراین اگر $m>۱$، آن‌گاه معادلهٔ اولیه جواب ندارد.

۲۶۱۷- گزینهٔ ۴ ابتـدا توجـه کنید کـه اگـر $x<-\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه علامت دو طرف تسـاوی یکسـان نیسـت و معادله جواب ندارد. پس با شرط $x\geq-\frac{۱}{۲}$، طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۳x+۲=۴x^۲+۴x+۱\Rightarrow۴x^۲+x-۱=۰$$

پس

$$x_۱=\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۸},\quad x_۲=\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۸}$$

واضح اسـت کـه $\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۸}<-\frac{۱}{۲}$ و تنها جواب معادله $\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۸}$ اسـت.

بنابراین $a=-۱$ و $b=۱$ و در نتیجه $a+b=۰$.

۲۶۱۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\cos^۲x-\cos^۴x=\cos^۲x(۱-\cos^۲x)=\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۱}{۸}$$

بنابراین

$$\tan^۲x+\cot^۲x=\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}+\frac{\cos^۲x}{\sin^۲x}=\frac{\sin^۴x+\cos^۴x}{\sin^۲x\cos^۲x}$$

صورت کسر بالا را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin^۴x+\cos^۴x+۲\sin^۲x\cos^۲x-۲\sin^۲x\cos^۲x$$

$$=(\underbrace{\sin^۲x+\cos^۲x}_{۱})^۲-۲\sin^۲x\cos^۲x=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x$$

در نتیجه

$$\frac{\sin^۴x+\cos^۴x}{\sin^۲x\cos^۲x}=\frac{۱-۲\sin^۲x\cos^۲x}{\sin^۲x\cos^۲x}=\frac{۱-\frac{۲}{۸}}{\frac{۱}{۸}}=۶$$

۲۶۱۹- گزینهٔ ۲ بایـد ببینیم معادلـهٔ $۳\cos۴x+۱=۱$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ چند جواب دارد. یعنی $\cos۴x=۰$ چند بار در این بازه اتفاق می‌افتد.

$$۴x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲},\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۸}\Rightarrow k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}$$

$$k=۱\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۸},\quad k=۲\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۸}>\frac{\pi}{۲}\ (\text{غ.ق.ق})$$

پس دو بار خط $y=۱$ نمودار تابع f را در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ قطع می‌کند.

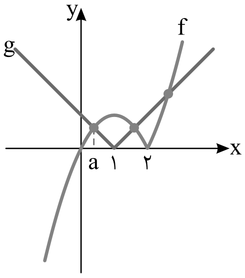
۲۶۲۰- گزینهٔ ۴ می‌دانیـم اگـر $-۱\leq a\leq۱$، آن‌گاه $|a|\leq۱$. بنابرایـن نامعادله را به‌صورت $|\frac{x-۲}{x-۳}|\leq۱$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\frac{|x-۲|}{|x-۳|}\leq۱\Rightarrow|x-۲|\leq|x-۳|,\quad x\neq۳$$

$$|x-۲|^۲\leq|x-۳|^۲\Rightarrow x^۲-۴x+۴\leq x^۲-۶x+۹\Rightarrow x\leq\frac{۵}{۲}$$

بنابرایـن $(-\infty,\frac{۵}{۲}]$ مجموعـهٔ جواب‌هـای نامعادله اسـت و در نتیجه $a=۵$، $b=۲$. پس $a+b=۷$.

۲۶۲۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & x\geq ۲\\ -x^۲+۲x & x\leq ۲\end{cases}$. پس نمودار تابع‌های f و g به‌صورت مقابل است. کمترین طول نقطه‌های برخورد برابر a است. چون $a<۱$، پس $f(x)=-x^۲+۲x$ و $g(x)=-x+۱$.



مقدار a از حل معادلهٔ $-x^۲+۲x=-x+۱$ به‌دست می‌آید:

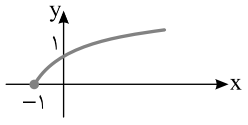
$$x^۲-۳x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$$ (غ.ق.ق)، $$x=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

۲۶۲۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین $f(x)=[-۲x]+۳$. اکنون توجه کنید که

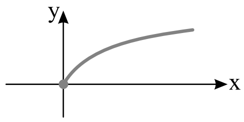
$$f(x)=\begin{cases} ۳ & x=۰\\ -۱+۳ & ۰<x\leq\frac{۱}{۲}\\ -۲+۳ & \frac{۱}{۲}<x\leq ۱\\ -۳+۳ & ۱<x\leq\frac{۳}{۲}\\ -۴+۳ & \frac{۳}{۲}<x\leq ۲\end{cases}$$

بنابراین $R_f=\{۳,۲,۱,۰,-۱\}$ و برد تابع f پنج عضو دارد.

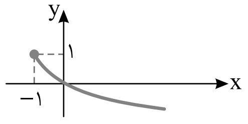
۲۶۲۳- گزینهٔ ۱ مراحل رسم نمودار به‌صورت زیر است.



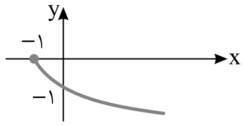
$y=\sqrt{x+۱}$



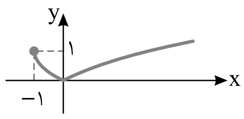
$y=\sqrt{x}$



$y=۱-\sqrt{x+۱}$



$y=-\sqrt{x+۱}$



$y=|۱-\sqrt{x+۱}|$

۲۶۲۴- گزینهٔ ۳ اگر $x<۰$، باید وارون تابع $g(x)=\frac{۲x+x}{۲}$ را پیدا کنیم:

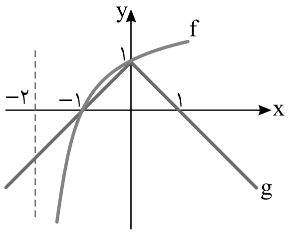
$$g(x)=\frac{۳x}{۲}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۲x}{۳},\quad x<۰$$

اگر $x\geq ۰$، باید وارون تابع $h(x)=\frac{۲x-x}{۲}$ را پیدا کنیم:

$$h(x)=\frac{x}{۲}\Rightarrow h^{-۱}(x)=۲x,\quad x\geq ۰$$

بنابراین تابع وارون تابع f به‌صورت $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{۲x}{۳} & x<۰\\ ۲x & x\geq ۰\end{cases}$ است. که همان $f^{-۱}(x)=\frac{۴x+۲|x|}{۳}$ است. بنابراین $a=۴$، $b=۳$ و $a+b=۷$.

۲۶۲۵- گزینهٔ ۴ به نمودار این توابع توجه کنید. نقاط مشترک f و g به‌صورت $(-۱,۰)$ و $(۰,۱)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر $\sqrt{۲}$ است.



۲۶۲۶- گزینهٔ ۴ معادلهٔ داده شده را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_{۲^۲}(xy)+\log_{۲^۳}\frac{x}{y}=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\log_۲(xy)+\frac{۱}{۳}\log_۲\frac{x}{y}=۰$$

$$۳\log_۲(xy)+۲\log_۲\frac{x}{y}=۰\Rightarrow\log_۲(xy)^۳+\log_۲(\frac{x}{y})^۲=۰$$

$$\log_۲((x^۳y^۳)(\frac{x}{y})^۲)=۰\Rightarrow x^۵y=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{x^۵}=x^{-۵}$$

بنابراین $\log_x y=\log_x x^{-۵}=-۵\log_x x=-۵$.

۲۶۲۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\lim_{x\to-\infty}f(x)=۱$ و حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^۲(x)-۱}{۲f^۲(x)-۳f(x)+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(f(x)-۱)(f(x)+۱)}{(f(x)-۱)(۲f(x)-۱)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+۱}{۲f(x)-۱}=\frac{۱+۱}{۲-۱}=۲$$

۲۶۲۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{x^۲-۱}{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x^۲-۳x+۲)}=\frac{x+۱}{(x-۱)(x-۲)}$$

پس $\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۱}{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x+۱}{(x-۱)(x-۲)}=+\infty$.

۲۶۲۹- گزینهٔ ۲ تابع f باید در نقطهٔ $x=۶$ پیوسته باشد، پس

$$\lim_{x\to ۶^+}f(x)=f(۶)=\lim_{x\to ۶^-}f(x)$$

$$a+\cos^۲\frac{\pi}{۶}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow a+\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

۲۶۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با -۱. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=۲$ برابر -۱ است. یعنی $f'(۲)=-۱$. بنابراین

$$g(x)=f^۲(x)\Rightarrow g'(x)=۲f(x)f'(x)$$

$$g'(۲)=۲f(۲)f'(۲)=۲\times۳\times(-۱)=-۶$$

۲۶۳۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{۵h}=\frac{۳}{۵}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{۳h}=\frac{۳}{۵}f'(۲)$$

از طـرف دیگر، $f'(x)=۳x^۲-۲$ ، پس $f'(۲)=۱۰$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $\frac{۳}{۵}\times ۱۰=۶$.

۲۶۳۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[۳,۵]$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۳}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۵-x}}\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{x-۳}=\sqrt{۵-x}$$

$$x-۳=۵-x\Rightarrow x=۴$$

پس $(۴,۲)$ نقطهٔ بحرانی تابع f است و مجموع طول و عرض آن برابر ۶ است.

۲۶۳۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $n>۴$ و

$$\binom{n-۲}{n-۴}<۴۵\Rightarrow\frac{(n-۲)!}{(n-۴)!(n-۲-n+۴)!}<۴۵$$

$$\frac{(n-۴)!(n-۳)(n-۲)}{(n-۴)!۲!}<۴۵$$

$$(n-۳)(n-۲)<۹۰\Rightarrow n^۲-۵n-۸۴<۰$$

$$(n-۱۲)(n+۷)<۰\Rightarrow n-۱۲<۰\Rightarrow n<۱۲$$

بنابرایـن $۴<n<۱۲$ ، بنابرایـن n یکـی از عددهای ۵، ۶، ... و ۱۱ اسـت، که تعداد آن‌ها ۷تاست.

۲۶۳۴- گزینهٔ ۲ اگر پیشـامد «پیروزی بر تیم A» و پیشـامد «پیروزی بر تیـم B» را به‌ترتیـب بـا A و B نشـان دهیم، A و B مسـتقل از هم هسـتند. همچنین A و B' و A' و B مسـتقل از هم هسـتند. بنابراین احتمال پیروزی فقط بر یکی از دو تیم را به این صورت حساب می‌کنیم:

احتمال پیروزی بر A و شکست از B :

$$P(A\cap B')=P(A)P(B')=\frac{۱}{۴}(۱-\frac{۳}{۸})=\frac{۵}{۳۲}$$

احتمال پیروزی بر B و شکست از A :

$$P(A'\cap B)=P(A')P(B)=(۱-\frac{۱}{۴})\frac{۳}{۸}=\frac{۹}{۳۲}$$

بنابرایـن احتمال مورد نظر برابر اسـت با $\frac{۵}{۳۲}+\frac{۹}{۳۲}=\frac{۱۴}{۳۲}=\frac{۷}{۱۶}$. توجه کنید که $A\cap B'$ و $A'\cap B$ ناسازگارند، زیرا $(A\cap B')\cap(A'\cap B)=\varnothing$.

۲۶۳۵- گزینهٔ ۱ برحسـب اینکه رأس مثلث متساوی‌السـاقین کدام نقطه باشد، سه حالت پیش می‌آید.

حالت اول نقطهٔ $A(\alpha,۶)$ رأس مثلث باشد. در این صورت

$$AB=AC\Rightarrow\sqrt{(\alpha+۵)^۲+(۶-۰)^۲}=\sqrt{(\alpha-۵)^۲+(۶-۰)^۲}$$

$$(\alpha+۵)^۲+۶^۲=(\alpha-۵)^۲+۶^۲\Rightarrow|\alpha+۵|=|\alpha-۵|\Rightarrow\alpha=۰$$

حالت دوم نقطهٔ $B(-۵,۰)$ رأس مثلث باشد. در این صورت

$$BA=BC\Rightarrow\sqrt{(-۵-\alpha)^۲+(۰-۶)^۲}=\sqrt{(-۵-۵)^۲+(۰-۰)^۲}$$

$$(\alpha+۵)^۲+۶^۲=۱۰^۲\Rightarrow(\alpha+۵)^۲=۸^۲\Rightarrow\alpha=۳,\alpha=-۱۳$$

حالت سوم نقطهٔ $C(۵,۰)$ رأس مثلث باشد. در این صورت

$$CA=CB\Rightarrow\sqrt{(۵-\alpha)^۲+(۰-۶)^۲}=\sqrt{(۵+۵)^۲+(۰-۰)^۲}$$

$$(۵-\alpha)^۲+۶^۲=۱۰^۲\Rightarrow(۵-\alpha)^۲=۸^۲\Rightarrow\alpha=-۳,\alpha=۱۳$$

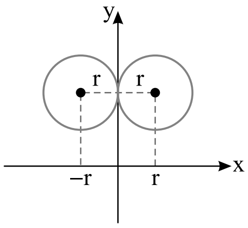
بنابراین مجموع قدرمطلق‌های مقادیر ممکن α برابر است با

$$۰+۲\times۳+۲\times۱۳=۳۲$$

۲۶۳۶- گزینهٔ ۱ اگـر دایره‌ای بر محور y مماس باشـد، شـعاعش برابر با قدرمطلق طول مرکز آن اسـت (شـکل زیر را ببینید). طول مرکز این دایره برابر است با $-\frac{۴}{۲}=-۲$ و شعاعش برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴a^۲-۴(۴)}=|a|$$

بنابراین $|a|=۲$.



۲۶۳۷- گزینهٔ ۱ چون $EK||AB$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث DAB،

$$\frac{EK}{AB}=\frac{DK}{DB}\Rightarrow\frac{۴}{۶}=\frac{DK}{DB}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{DK}{DB}\Rightarrow\frac{۳-۲}{۳}=\frac{DB-DK}{DB}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{BK}{BD}$$

اکنون، چون $KF||DC$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BDC ،

$$\frac{KF}{DC}=\frac{BK}{BD}\Rightarrow\frac{۵}{DC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow DC=۱۵$$

۲۶۳۸- گزینهٔ ۴ مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر مجموع مساحت دو مثلث ABD و ADC است. پس

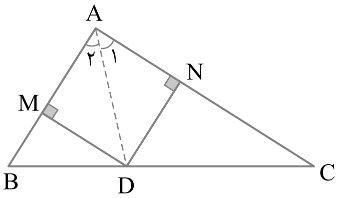
$$S_{ABC}=S_{ADC}+S_{ABD}\Rightarrow\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{DN\times AC}{۲}+\frac{DM\times AB}{۲}$$

هـر نقطـه روی نیمسـاز، از دو ضلـع زاویـه، بـه یـک فاصلـه اسـت، پـس $DM=DN=x$. در نتیجه

$$۳\times۷=x\times۷+x\times۳\Rightarrow۱۰x=۲۱\Rightarrow x=۲/۱$$

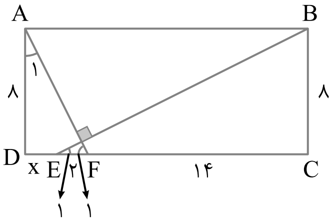
توجـه کنید کـه $\hat{A}_۱=۴۵^\circ$ ، پس مثلـث ADN قائم‌الزاویهٔ متساوی‌السـاقین است. بنابراین

$$AD=x\sqrt{۲}\Rightarrow AD=۲/۱\sqrt{۲}$$



۲۶۳۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید $DE=x$. توجـه کنید که زاویه‌های $E_۱$ و $F_۱$ متمـم یکدیگرند، همین‌طور زاویه‌های $A_۱$ و $F_۱$ متمم یکدیگرند. بنابراین $\hat{A}_۱=\hat{E}_۱$. در نتیجه، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADF و EBC متشـابه‌اند (زز). به این ترتیب،

$$\frac{DF}{CB}=\frac{AD}{EC}\Rightarrow\frac{x+۲}{۸}=\frac{۸}{۱۶}\Rightarrow x=۲$$



۲۶۴۰- گزینهٔ ۲ با افزودن مقدار ثابتی به هر داده، انحراف معیار تغییری نمی‌کند ولی میانگین به همان مقدار افزایش پیدا می‌کند.

$$(CV)'=\frac{\sigma'}{\overline{x}'}=\frac{\sigma}{\overline{x}+۵\overline{x}}=\frac{\sigma}{۶\overline{x}}=\frac{CV}{۶}=\frac{۰/۲}{۶}=\frac{۱}{۳۰}$$

۲۶۴۱- گزینهٔ ۱ تعداد دایره‌های رنگی در شکل‌ها، مطابق جدول زیر است:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد کل دایره‌ها	۴	۹	۱۶	۲۵
تعداد دایره‌های رنگی	۲	۵	۸	۱۳

تعداد کل دایره‌ها در شکل n ام برابر $(n+۱)^۲$ است و اگر n عددی فرد باشد، تعداد دایره‌های رنگی $\frac{(n+۱)^۲}{۲}$ است. پس در شکل سیزدهم $\frac{۱۴^۲}{۲}$ یعنی ۹۸ دایرهٔ رنگی وجود دارد.

۲۶۴۲- گزینهٔ ۳ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته است، برای نوشتن ۲۹ دستهٔ نخست از $۱+۲+۳+۰۰۰+۲۹$ عدد استفاده شده است. چون $۱+۲+۳+۰۰۰+۲۹=\frac{۲۹\times۳۰}{۲}=۴۳۵$. پس برای نوشتن ۲۹ دستهٔ نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس جملهٔ اول دستهٔ سی‌اُم، ۴۳۶اُمین عدد فرد و جملهٔ آخر آن $(۴۳۶+۲۹)$ اُمین عدد فرد است. از طرف دیگر، جملهٔ عمومی عددهای فرد به‌صورت $a_n=۲n-۱$ است، پس

$$a_{۴۶۵}+a_{۴۳۶}=۲(۴۶۵)-۱+۲(۴۳۶)-۱=۲(۴۶۵+۴۳۶-۱)$$
$$=۲(۹۰۰)=۱۸۰۰$$

۲۶۴۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{۵\sqrt[۴]{۳}}=\sqrt[۴]{۵\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt{۵}\times\sqrt[۸]{۳}=\sqrt[۴]{۵}\times\sqrt[۸]{x}\Rightarrow۵^{\frac{۱}{۲}}۳^{\frac{۱}{۸}}=۵^{\frac{۱}{۴}}x^{\frac{۱}{۸}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان ۸ برسانیم، معلوم می‌شود که

$$۵^۴\times۳=۵^۲\times x\Rightarrow x=۵^۲\times۳=۷۵$$

۲۶۴۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\frac{۱}{c}-\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=\frac{۳}{abc}\xrightarrow{\times abc}ab-bc-ca=۳$$

از طرف دیگر،

$$(a+b-c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab-bc-ca)$$

بنابراین

$$۴^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲\times۳\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲=۱۰$$

۲۶۴۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x_۱+x_۲=-۶$ و $x_۱x_۲=-۳$.

بنابراین

$$(\frac{x_۱}{x_۲}+x_۲)(\frac{x_۲}{x_۱}+x_۱)=۱+\frac{x_۱^۲}{x_۲}+\frac{x_۲^۲}{x_۱}+x_۱x_۲=۱+\frac{x_۱^۳+x_۲^۳}{x_۱x_۲}+x_۱x_۲$$
$$=۱+\frac{(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)}{x_۱x_۲}+x_۱x_۲$$
$$=۱+\frac{(-۶)^۳-۳(-۳)(-۶)}{-۳}-۳=۸۸$$

۲۶۴۶- گزینهٔ ۲ چون $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است پس $P(۱)=۰$ و در نتیجه $a+۴+۱۴+۱۰=۰$. پس $a=-۲۸$.

۲۶۴۷- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی داده شده را بر $\sin^۲\alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۴\sin^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}-\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^۲\alpha}=\frac{۲}{\sin^۲\alpha}$$
$$۴-\cot^۲\alpha+\cot\alpha=۲(۱+\cot^۲\alpha)$$

$$۳\cot^۲\alpha-\cot\alpha-۲=۰\Rightarrow\cot\alpha=۱ \text{ یا } \cot\alpha=-\frac{۲}{۳}$$

با توجه به اینکه انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\cot\alpha=-\frac{۲}{۳}$. بنابراین $\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha=\frac{۲}{۳}$.

۲۶۴۸- گزینهٔ ۲ از اتحاد $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ نتیجه می‌شود

$$\sin\frac{\pi}{۲۴}\cos\frac{\pi}{۲۴}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۱۲}$$

پس

$$\sin\frac{\pi}{۲۴}\cos\frac{\pi}{۲۴}\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

۲۶۴۹- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$۲\sin^۲x+\cos x-۱=۰\Rightarrow۲-۲\cos^۲x+\cos x-۱=۰$$
$$۲\cos^۲x-\cos x-۱=۰\Rightarrow(\cos x-۱)(۲\cos x+۱)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند

$$\cos x=۱\Rightarrow x=۰,\quad x=۲\pi$$
$$\cos x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳},\quad x=\frac{۴\pi}{۳}$$

پس مجموع جواب‌های بالا برابر است با ۴π.

۲۶۵۰- گزینهٔ ۲ ابتدا مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ داده شده را می‌یابیم

$$x^۲\le|x|\Rightarrow|x|^۲\le|x|\Rightarrow|x|\le۱\Rightarrow-۱\le x\le۱$$

بنابراین $x^۲-۱\le۰$. پس

$$A=-(x^۲-۱)-|x|=-|x|^۲-|x|+۱=\frac{۵}{۴}-(|x|+\frac{۱}{۲})^۲$$

اکنون محدودهٔ عبارت فوق را می‌یابیم

$$۰\le|x|\le۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}\le|x|+\frac{۱}{۲}\le\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۴}\le(|x|+\frac{۱}{۲})^۲\le\frac{۹}{۴}$$
$$-\frac{۹}{۴}\le-(|x|+\frac{۱}{۲})^۲\le-\frac{۱}{۴}\Rightarrow-۱\le\frac{۵}{۴}-(|x|+\frac{۱}{۲})^۲\le۱$$

بنابراین $-۱\le A\le۱$ و کمترین مقدار A برابر -۱ است.

۲۶۵۱- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۴x-x^۲-۳\ge۰$ است:

$$x^۲-۴x+۳\le۰\Rightarrow(x-۱)(x-۳)\le۰\Rightarrow۱\le x\le۳$$

پس $D_f=[۱,۳]$. در نتیجه $a=۱$، $b=۳$ و $۲a+b=۵$.

۲۶۵۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(g(x))=\frac{۳x-۲}{۲x-۱}\Rightarrow f(\frac{۳}{۲x})=\frac{۳x-۲}{۲x-۱}$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $\frac{۳}{۲x}$، به‌دست می‌آید

$$f(x)=\frac{۳\times\frac{۳}{۲x}-۲}{۲\times\frac{۳}{۲x}-۱}=\frac{۹-۴x}{۶-۲x}$$

در نتیجه $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{۹-۴x}{۶-۲x}+\frac{۳}{۲x}=\frac{۴x^۲-۶x-۹}{۲x^۲-۶x}$.

۲۶۵۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ را دو واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x+۲)}=\sqrt{-x-۲}$ به‌دست می‌آید، اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۲}$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را مجدداً دو واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{(x+۲)-۲}=\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید.

۲۶۵۴- گزینهٔ ۲ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع $f^{-۱}$ است. پس باید f و $f^{-۱}$ برابر باشند. ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt[۳]{a+bx^۳}\Rightarrow y^۳=a+bx^۳\Rightarrow x^۳=\frac{y^۳-a}{b}$$

$$x=\sqrt[۳]{\frac{۱}{b}y^۳-\frac{a}{b}}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{\frac{۱}{b}x^۳-\frac{a}{b}}$$

از تساوی $f(x)=f^{-۱}(x)$ نتیجه می‌شود $\sqrt[۳]{a+bx^۳}=\sqrt[۳]{-\frac{a}{b}+\frac{۱}{b}x^۳}$.

پس $a=-\frac{a}{b}$ و $\frac{۱}{b}=b$ و در نتیجه $b=\pm۱$. اگر $b=۱$، آن‌گاه $a=۰$ که قابل قبول نیست. پس $b=-۱$.

۲۶۵۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$۲^a=۳\Rightarrow a=\log_۲ ۳\Rightarrow\frac{۱}{a}=\log_۳ ۲$$

$$۳^b=۸\Rightarrow b=\log_۳ ۸$$

بنابراین $b+\frac{۱}{a}=\log_۳ ۸+\log_۳ ۲=\log_۳ ۱۶$ و در نتیجه

$$۳^{b+\frac{۱}{a}}=۳^{\log_۳ ۱۶}=۱۶$$

۲۶۵۶- گزینهٔ ۱ با استفاده از خاصیت $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$ معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{\log x}{\log ۲}+\frac{\log x}{\log ۵}=۲\Rightarrow\log x(\frac{۱}{\log ۲}+\frac{۱}{\log ۵})=۲$$

$$\log x(\frac{\log ۵+\log ۲}{\log ۲\times\log ۵})=۲\Rightarrow\log x(\frac{۱}{\log ۲\times\log ۵})=۲$$

$$\log x=۲\log ۲\times\log ۵=\log ۴\times\log ۵$$

$$x=۱۰^{\log ۴\times\log ۵}=(۱۰^{\log ۴})^{\log ۵}=۴^{\log ۵}$$

۲۶۵۷- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x\to۱}f(x)=\lim_{x\to۱}(\frac{\sqrt[۳]{x-\sqrt{x}}}{x-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[۳]{x+\sqrt{x}}})$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt[۳]{x^۲-x}}{x-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt[۳]{x}\sqrt[۳]{x-۱}}{x-۱}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}=\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{۲}\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}}=+\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطهٔ ۱ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

۲۶۵۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۲}{(a+۲)x^۲}=\frac{a}{a+۲}$$

پس

$$\frac{a}{a+۲}=۳\Rightarrow a=-۳$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-۱}f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{-۳x^۲+x+۴}{-x^۲-۳x-۲}=\lim_{x\to-۱}\frac{(x+۱)(-۳x+۴)}{(x+۱)(-x-۲)}$$

$$=\lim_{x\to-۱}\frac{-۳x+۴}{-x-۲}=-۷$$

۲۶۵۹- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر است با

$$\frac{f(۲)-f(-۱)}{۲-(-۱)}=\frac{f(۲)-f(-۱)}{۳}=\frac{۶-۰}{۳}=۲$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a برابر $f'(a)$ است.

$$f'(x)=۳x^۲-۱\Rightarrow f'(a)=۳a^۲-۱$$

بنابراین

$$۳a^۲-۱=۲\Rightarrow۳a^۲=۳\Rightarrow a=\pm۱$$

پس نقطهٔ $x=۱$ جواب مسئله است.

۲۶۶۰- گزینهٔ ۴ با استفاده از قواعد مشتق گیری، مشتق تابع را حساب می کنیم:

$$f'(x)=\frac{\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳+۱}}\sqrt[۳]{x^۲+۱}-\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۱)^۲}}\sqrt{x^۳+۱}}{\sqrt[۳]{(x^۲+۱)^۲}}$$

بنابراین $f'(۰)=\frac{۰-۰}{۱}=۰$.

۲۶۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می کنیم:

$$f'(x)=x^۳-۳x^۲-۴x$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x(x^۲-۳x-۴)=۰\Rightarrow x=۰,x=-۱,x=۴$$

بنابراین کمترین مقدار تابع بین مقادیر زیر است:

$$f(۰)=۰,\quad f(-۱)=-\frac{۳}{۴},\quad f(۴)=-۳۲$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

پس کمترین مقدار تابع برابر -۳۲ است.

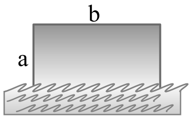
۲۶۶۲- گزینهٔ ۲ اگر مطابق شکل مستطیل را به ابعاد a و b در نظر بگیریم، آن‌گاه $۲a+b=۴۸$ و می‌خواهیم $S=ab$ ماکزیمم شود. توجه کنید که $b=۴۸-۲a$ و در نتیجه

$$S=a(۴۸-۲a)=۴۸a-۲a^۲\Rightarrow S'=۴۸-۴a$$

$$S'=۰\Rightarrow a=۱۲$$

بنابراین بیشترین مقدار S به‌ازای $a=۱۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$۱۲\times۲۴=۲۸۸$$



۲۶۶۳- گزینهٔ ۲ تساوی داده شده را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{\dfrac{(n+۲)!}{(n+۲-۴)!}}{\dfrac{(n+۱)!}{(n+۱-۳)!}-n\times\dfrac{(n-۱)!}{(n-۱-۲)!}}=۲۴\Rightarrow\frac{\dfrac{(n+۲)!}{(n-۲)!}}{\dfrac{(n+۱)!}{(n-۲)!}-n\dfrac{(n-۱)!}{(n-۳)!}}=۲۴$$

$$\frac{(n+۲)!}{(n+۱)!-n(n-۱)!(n-۲)}=۲۴\Rightarrow\frac{(n-۱)!n(n+۱)(n+۲)}{(n-۱)!n(n+۱)-n(n-۱)!(n-۲)}=۲۴$$

$$\frac{(n+۱)(n+۲)}{n+۱-(n-۲)}=۲۴\Rightarrow(n+۱)(n+۲)=۷۲$$

$$n^۲+۳n-۷۰=۰\Rightarrow(n-۷)(n+۱۰)=۰\Rightarrow n=۷$$

۲۶۶۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که سمانه استخدام شود و B پیشامد این باشد که سمیرا استخدام شود. پیشامد مورد نظر $(A\cap B')\cup(A'\cap B)$ است و چون $A\cap B'$ و $A'\cap B$ ناسازگارند، پس احتمال مورد نظر برابر است با $P(A\cap B')+P(A'\cap B)$.

از طرف دیگر، چون A و B مستقل‌اند، پس A و B' و نیز A' و B هم مستقل‌اند. بنابراین

$$P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A)P(B')+P(A')P(B)$$

$$=\frac{۱}{۵}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۹}{۳۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

۲۶۶۵- گزینهٔ ۴ نقطهٔ تقاطع دو قطر با معادلات $y=۲x-۱$ و $y=x+۲$ را از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}y=۲x-۱\\y=x+۲\end{cases}$ به‌دست می‌آوریم که همان مرکز دایره است:

$$۲x-۱=x+۲\Rightarrow x=۳, y=۵$$

پس $O(۳,۵)$ مرکز دایره و $A(۰,۱)$ نقطه‌ای روی دایره است، در نتیجه

$$r=OA=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۵-۱)^۲}=۵$$

۲۶۶۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که O وسط AB است. بنابراین

$$x_O=\frac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow۱=\frac{۲b+a}{۲}\Rightarrow۲b+a=۲$$

$$y_O=\frac{y_A+y_B}{۲}\Rightarrow-۲=\frac{۳a+۳b-۱}{۲}\Rightarrow۳a+۳b=-۳$$

در نتیجه $a=-۴$ و $b=۳$. پس کافی است فاصلهٔ نقطه‌های $O(۱,-۲)$ و $A(۶,-۱۲)$ را حساب کنیم تا طول شعاع دایره به‌دست آید:

$$OA=\sqrt{(۶-۱)^۲+(-۱۲+۲)^۲}=\sqrt{۱۲۵}=۵\sqrt{۵}$$

۲۶۶۷- گزینهٔ ۳ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. در نتیجه

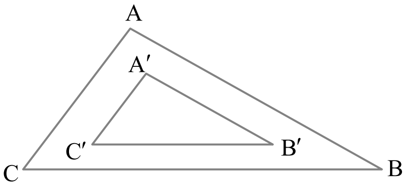
$$۲a=\sqrt{(۳+۳)^۲+(\frac{۱۶}{۵}-۰)^۲}+\sqrt{(۳-۳)^۲+(\frac{۱۶}{۵}-۰)^۲}$$

$$=\sqrt{۶^۲+\frac{۱۶^۲}{۵^۲}}+\frac{۱۶}{۵}=\frac{۲}{۵}\sqrt{۱۵^۲+۸^۲}+\frac{۱۶}{۵}=\frac{۲\times۱۷}{۵}+\frac{۱۶}{۵}=۱۰$$

پس $a=۵$. از طرف دیگر $c=OF=۳$، در نتیجه خروج از مرکز بیضی مورد نظر برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}$.

۲۶۶۸- گزینهٔ ۳ این دو مثلث که اضلاعی موازی دارند، متشابه هستند. نسبت تشابه آن‌ها، برابر نسبت دو ضلع بزرگ‌تر یعنی $\frac{۹}{۶}$ یا $\frac{۳}{۲}$ است. اگر مساحت مثلث ABC و $A'B'C'$ را به ترتیب S و S' بنامیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S}{S'}=(\frac{۳}{۲})^۲\Rightarrow\frac{S}{S'}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\frac{S-S'}{S'}=\frac{۹-۴}{۴}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$



۲۶۶۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ارتفاع DH را در مثلث BCD رسم می‌کنیم. چون D روی نیمساز زاویهٔ ABC است، پس $DH=AD=۲\sqrt{۳}$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ DHC،

$$DC^۲=DH^۲+HC^۲\Rightarrow۱۶=۱۲+HC^۲\Rightarrow HC=۲$$

اکنون توجه کنید که بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$DH^۲=HC\times HB\Rightarrow۱۲=۲\times HB\Rightarrow HB=۶$$

پس $BC=۶+۲=۸$. به این ترتیب، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC،

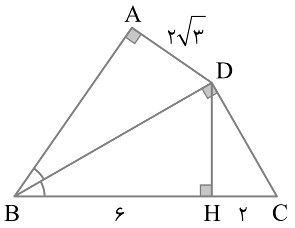
$$BC^۲=BD^۲+DC^۲\Rightarrow۶۴=BD^۲+۱۶\Rightarrow BD=۴\sqrt{۳}$$

راه‌حل دوم مثلث‌های ABD و DBC متشابه‌اند (زز). بنابراین

$$\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{DC}\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow BC=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}BD$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC،

$$BC^۲=BD^۲+CD^۲\Rightarrow\frac{۴}{۳}BD^۲=BD^۲+۱۶\Rightarrow BD=۴\sqrt{۳}$$



۲۶۷۰- گزینهٔ ۴ با توجه به $n=۲۵$ ، $\overline{x}=۳۰$ و $\sigma=۸$،

$$۶۴=\frac{\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها}}{۲۵}$$

$$۱۶۰۰=۶۴\times۲۵=\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها}$$

از طرفی داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ دارای میانگین ۳۰ هستند. در نتیجه

x_i	۱۰	۱۵	۴۵	۵۰
$x_i-۳۰$	−۲۰	−۱۵	۱۵	۲۰

مجموع مربعات اختلاف از میانگین داده‌ها برابر است با

$$۴۰۰+۲۲۵+۲۲۵+۴۰۰=۱۲۵۰$$

حال واریانس ۲۱ دادهٔ باقی‌مانده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\sigma^۲=\frac{۶۴\times۲۵-۱۲۵۰}{۲۵-۴}=\frac{۱۶۰۰-۱۲۵۰}{۲۱}=\frac{۵۰}{۳}\simeq۱۶/۶۶$$

۲۶۷۱- گزینهٔ ۱ اگر دو عدد را a و b بنامیم، واسطهٔ حسابی آن‌ها $\frac{a+b}{۲}$ و واسطهٔ هندسی آن‌ها $\pm\sqrt{ab}$ است. پس

$$\frac{a+b}{۲\sqrt{ab}}=\frac{۳}{\sqrt{۸}}\Rightarrow\frac{(a+b)^۲}{۴ab}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow۸(a+b)^۲=۳۶ab$$

$$۲a^۲+۲b^۲-۵ab=۰\Rightarrow(۲a-b)(a-۲b)=۰$$

$$b=۲a\Rightarrow\frac{b}{a}=۲\ ,\quad a=۲b\Rightarrow\frac{a}{b}=۲$$

بنابراین نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر برابر با ۲ است.

۲۶۷۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $x=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}$ و طرفین تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x^۳=(\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}})^۳+(\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}})^۳$$

$$+۳\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}\ \underbrace{(\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}})}_{x}$$

$$x^۳=۲+\sqrt{۵}+۲-\sqrt{۵}+۳\underbrace{\sqrt[۳]{(۲+\sqrt{۵})(۲-\sqrt{۵})}}_{-۱}\ x$$

بنابراین

$$x^۳=۴-۳x\Rightarrow x^۳+۳x-۴=۰$$

از حل این معادله مقدار x را به‌دست می‌آوریم.

$$x^۳+۳x-۴=x^۳-۱+۳x-۳=(x-۱)(x^۲+x+۱)+۳(x-۱)$$

$$(x-۱)\underbrace{(x^۲+x+۴)}_{\Delta<۰}=۰\Rightarrow x-۱=۰\Rightarrow x=۱$$

راه‌حل دوم می‌دانیم اگر $a+b+c=۰$ آنگاه، $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$ ، بنابراین

$$x=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}\Rightarrow\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}+(-x)=۰$$

$$۲+\sqrt{۵}+۲-\sqrt{۵}-x^۳=۳\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}(-x)$$

پس از ساده کردن مجدداً به معادلهٔ $x^۳+۳x-۴=۰$ می‌رسیم که در راه‌حل اول آن را حل کرده‌ایم.

۲۶۷۳- گزینهٔ ۳ خط $(۵-k)y+۲x=۳$ محور x را در نقطهٔ $(\frac{۳}{۲},۰)$ قطع می‌کند. این نقطه روی خط $mx-y=-۲$ نیز است. پس

$$m(\frac{۳}{۲})-۰=-۲\Rightarrow m=-\frac{۴}{۳}$$

چون دو خط بر هم عمودند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها ۱− است، پس

$$m\times(\frac{-۲}{۵-k})=-۱\Rightarrow-\frac{۴}{۳}\times\frac{-۲}{۵-k}=-۱\Rightarrow k=\frac{۲۳}{۳}$$

بنابراین $k-m=۹$.

۲۶۷۴- گزینهٔ ۴ برای آنکه چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد، باید $P(-۲)=۰$. بنابراین

$$P(-۲)=۱۶-۸a+۱۶=۰\Rightarrow a=۴$$

پس $P(x)=x^۴+۴x^۳-۸x$.

اکنون جواب‌های معادلهٔ $P(x)=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۴+۴x^۳-۸x=۰\Rightarrow(x+۲)(x^۳+۲x^۲-۴x)=۰$$

$$x(x+۲)(x^۲+۲x-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-۲\\x^۲+۲x-۴=۰\end{cases}$$

$$x^۲+۲x=۴\Rightarrow(x+۱)^۲=۵\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{۵}-۱\\x=-\sqrt{۵}-۱\end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین جواب $-\sqrt{۵}-۱$ است.

۲۶۷۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=-\frac{-۵}{۱}=۵\ ,\quad x_۱x_۲=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۱}=۱$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{۲x_۱-۱}+\frac{۱}{۲x_۲-۱}=\frac{۲x_۲-۱+۲x_۱-۱}{(۲x_۱-۱)(۲x_۲-۱)}=\frac{۲(x_۱+x_۲)-۲}{۴x_۱x_۲-۲(x_۱+x_۲)+۱}$$

$$=\frac{۲\times۵-۲}{۴\times۱-۲\times۵+۱}=-\frac{۸}{۵}$$

$$\frac{۱}{۲x_۱-۱}\times\frac{۱}{۲x_۲-۱}=\frac{۱}{۴x_۱x_۲-۲(x_۱+x_۲)+۱}=-\frac{۱}{۵}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر $x^۲+\frac{۸}{۵}x-\frac{۱}{۵}=۰$ ، یعنی $۵x^۲+۸x-۱=۰$ است.

۲۶۷۶- گزینهٔ ۴ واضح است که $x=۱$ جواب معادله است. پس $x-۱$ عامل معادله است

$$(x^۳-۱)+(mx-m)=۰\Rightarrow(x-۱)(x^۲+x+۱)+m(x-۱)=۰$$

$$(x-۱)(x^۲+x+۱+m)=۰$$

برای اینکه معادله سه جواب متمایز داشته باشد، باید معادلهٔ $x^۲+x+m+۱=۰$ دو جواب داشته باشد که برابر ۱ نباشند. بنابراین

$$\Delta=۱-۴(m+۱)>۰\Rightarrow-۴m-۳>۰\Rightarrow m<-\frac{۳}{۴}$$

$$۱^۲+۱+m+۱\neq۰\Rightarrow m\neq-۳$$

پس

$$m\in(-\infty,-\frac{۳}{۴})-\{-۳\}$$

۲۶۷۷- گزینهٔ ۲ برای حل این مسئله باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\frac{۲}{x}+x>۳\Rightarrow\frac{۲}{x}+x-۳>۰$$

عبارت طرف چپ این نامعادله به‌صورت $\frac{x^۲-۳x+۲}{x}>۰$ درمی‌آید. چون $x^۲-۳x+۲=(x-۱)(x-۲)$ ، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$\frac{x^۲-۳x+۲}{x}$		−	ت ن	+	۰	−	۰	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(۰,۱)\cup(۲,+\infty)$ است. در نتیجه $a=۰$ ، $b=۲$ و $a+b=۲$.

۲۶۷۸- گزینهٔ ۳ اگـر در صورت و مخرج به جـای $\cos^۲ ۱۰^\circ$ قرار دهیم $۱-\sin^۲ ۱۰^\circ$ نتیجه می‌شود

$$\frac{۷+۵\sin^۲ ۱۰^\circ-\cos^۲ ۱۰^\circ}{۳\sin^۲ ۱۰^\circ+۲\cos^۲ ۱۰^\circ-۱}=\frac{۷+۵\sin^۲ ۱۰^\circ-(۱-\sin^۲ ۱۰^\circ)}{۳\sin^۲ ۱۰^\circ+۲(۱-\sin^۲ ۱۰^\circ)-۱}$$

$$=\frac{۶+۶\sin^۲ ۱۰^\circ}{\sin^۲ ۱۰^\circ+۱}=\frac{۶(۱+\sin^۲ ۱۰^\circ)}{۱+\sin^۲ ۱۰^\circ}=۶$$

۲۶۷۹- گزینهٔ ۲ نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,۲)$ عبور می‌کند یعنی $f(۰)=۲$. بنابراین

$$f(۰)=۴a-۲b\sin ۰^\circ=۲\Rightarrow ۴a=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=۲-۲b\sin x$ اسـت. بیشترین مقدار تابع برابر ۶ است که یا به ازای $\sin x=۱$ به‌دست می‌آید یا به ازای $\sin x=-۱$ (بسـتگی به علامـت b دارد). اگر $b>۰$، آن‌گاه بیشـترین مقـدار تابع به ازای $\sin x=-۱$ به‌دست می‌آید که برابر است با $۲+۲b$. بنابراین

$$۲+۲b=۶\Rightarrow b=۲$$

و در نتیجـه $f(x)=۲-۴\sin x$. اگر $b<۰$، آن‌گاه بیشـترین مقـدار تابع به ازای $\sin x=۱$ به‌دست می‌آید که برابر است با $۲-۲b$. بنابراین

$$۲-۲b=۶\Rightarrow b=-۲$$

و در نتیجـه $f(x)=۲+۴\sin x$. بـا توجـه بـه اینکه بـرای xهایـی که کمی بزرگ‌تر از صفر هستند، مقدار تابع کمتر از ۲ است، ضابطهٔ $f(x)=۲+۴\sin x$ قابل قبول نیست. بنابراین $b=۲$ و در نتیجه $ab=۱$.

۲۶۸۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^۶ x+\cos^۶ x$$

$$=(\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱})^۳-۳\sin^۲ x\cos^۲ x(\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱})$$

$$\frac{۴}{۵}=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x\Rightarrow ۳(\sin x\cos x)^۲=\frac{۱}{۵}$$

$$(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲=\frac{۱}{۱۵}\Rightarrow \sin^۲ ۲x=\frac{۴}{۱۵}$$

بنابراین $\cos ۴x=۱-۲\sin^۲ ۲x=۱-۲(\frac{۴}{۱۵})=\frac{۷}{۱۵}$.

۲۶۸۱- گزینهٔ ۳ اگـر $|x+۱|\le ۷$، آن‌گاه $-۷\le x+۱\le ۷$، یعنـی $-۸\le x\le ۶$. اگـر $۰\le x\le ۶$، آن‌گاه عبـارت مـورد نظـر برابـر اسـت بـا $A=x^۲-۴x$ که حدود آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A=x^۲-۴x=(x-۲)^۲-۴$$

$$۰\le x\le ۶\Rightarrow -۲\le x-۲\le ۴\Rightarrow ۰\le (x-۲)^۲\le ۱۶\Rightarrow -۴\le A\le ۱۲$$

اگـر $-۸\le x\le ۰$، آن‌گاه عبـارت مورد نظر برابر اسـت با $A=-x^۲-۴x$ که حدود آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A=-x^۲-۴x=-(x+۲)^۲+۴$$

$$-۸\le x\le ۰\Rightarrow -۶\le x+۲\le ۲\Rightarrow ۰\le (x+۲)^۲\le ۳۶$$

$$-۳۶\le -(x+۲)^۲\le ۰\Rightarrow -۳۲\le A\le ۴$$

پس بیشترین مقدار A برابر ۱۲ و کمترین مقدار آن برابر −۳۲ است و مجموع این دو مقدار برابر −۲۰ است.

۲۶۸۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(x^۲-۴)+(۳ax+۶a)}{x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)+۳a(x+۲)}{x+۲}$$

$$=\frac{(x+۲)(x-۲+۳a)}{x+۲}=x+۳a-۲\ ,\ x\neq -۲$$

بـرای اینکـه تابع همانی باشـد، باید $f(x)=x$، پـس $۳a-۲=۰$ و در نتیجه $a=\frac{۲}{۳}$. بنابراین $f(۳a)=۳a=۲$.

۲۶۸۳- گزینهٔ ۳ می‌دانیـم $f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$.

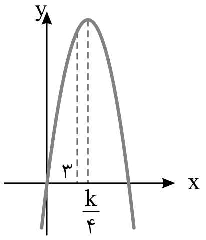
پس

$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow g(f(x))=g(۰)=-۲$$

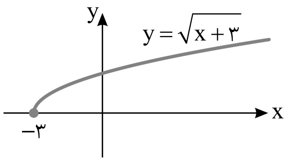
$$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow g(f(x))=g(-۱)=-۲$$

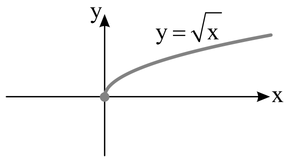
بنابراین به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $g(f(x))=-۲$.

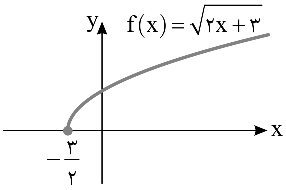
۲۶۸۴- گزینهٔ ۳ نمـــودار تـــابـــع $y=-۲x^۲+kx$ به شـکل مقابل اسـت. اگر $x=۳$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شـود، تابع یک‌به‌یک است. بنابراین $۳\le\frac{k}{۴}$، پس $k\ge ۱۲$.



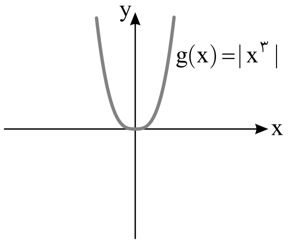
۲۶۸۵- گزینهٔ ۲ اگـر نمـودار تابع $y=\sqrt{x}$ را سـه واحد بـه چپ منتقل کنیم نمودار تابع $y=\sqrt{x+۳}$ به‌دسـت می‌آید و اگـر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۲x+۳}$ به‌دست می‌آید.

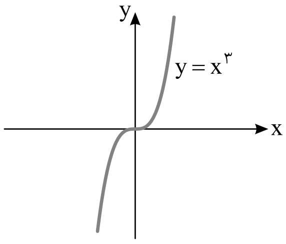




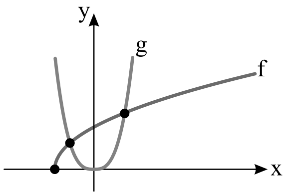


برای رسم نمودار تابع $g(x)=|x^۳|$، کافی است نمودار تابع $y=x^۳$ را رسم کنیم و قسمتی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد، نسبت به این محور قرینه کنیم.





بنابراین نمودار توابع f و g مطابق شکل زیر در دو نقطه متقاطع‌اند.



۲۶۸۶- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$y=۳^{\frac{۲-x}{۲}}-۱\Rightarrow y+۱=۳^{\frac{۲-x}{۲}}\Rightarrow \log_{۳}(y+۱)=\frac{۲-x}{۲}$$

$$x=۲-۲\log_{۳}(y+۱)=\log_{۳}۳^{۲}-\log_{۳}(y+۱)^{۲}=\log_{۳}(\frac{۳}{y+۱})^{۲}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\log_{۳}(\frac{۳}{x+۱})^{۲}$.

۲۶۸۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\log_{۸}۹=\log_{۲^۳}۳^{۲}=\frac{۲}{۳}\log_{۲}۳$. پس

$$۴^{۱+\log_{۸}۹}=۴\times۴^{\frac{۲}{۳}\log_{۲}۳}=۴\times۲^{\frac{۴}{۳}\log_{۲}۳}=۴\times(۲^{\log_{۲}۳})^{\frac{۴}{۳}}$$

$$=۴\times۳^{\frac{۴}{۳}}=۴\times\sqrt[۳]{۳^{۴}}=۱۲\sqrt[۳]{۳}$$

۲۶۸۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون حد مورد نظر وجود دارد و حد مخرج برابر صفر است، باید حد صورت هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to۲}(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x+a}+۱)=۰\Rightarrow ۲-\sqrt{۲+a}+۱=۰\Rightarrow a=۷$$

اگر $a=۷$، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{x+۷}+۱}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to۲}(\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}-\frac{\sqrt{x+۷}-۳}{x-۲})\times\lim_{x\to۲}\frac{۱}{x+۲}$$

$$=\frac{۱}{۴}(\lim_{x\to۲}\frac{x+۲-۴}{(x-۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}-\lim_{x\to۲}\frac{x+۷-۹}{(x-۲)(\sqrt{x+۷}+۳)})$$

$$=\frac{۱}{۴}\times\lim_{x\to۲}(\frac{۱}{\sqrt{x+۲}+۲}-\frac{۱}{\sqrt{x+۷}+۳})=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶})=\frac{۱}{۴۸}$$

بنابراین $b=۴۸$ و $b-a=۴۱$.

راه‌حل دوم توجه کنید که حاصل حد را می‌توانیم به کمک قاعدهٔ هوپیتال نیز به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{x+۷}+۱}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to۲}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۷}}}{۲x}=\frac{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}}{۴}=\frac{۱}{۴۸}$$

۲۶۸۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۱)=\lim_{x\to۱^{-}}f(x)=\lim_{x\to۱^{-}}(ax-a+۲)=a-a+۲=۲$$

$$\lim_{x\to۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to۱^{+}}\frac{x-۱}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to۱^{+}}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}=\lim_{x\to۱^{+}}\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}}=۲$$

بنابراین به ازای هر مقدار a، $\lim_{x\to۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to۱^{-}}f(x)=f(۱)=۲$.

۲۶۹۰- گزینهٔ ۴ چون ۱− و ۵ صفرهای تابع درجهٔ دوم f هستند، پس

$$f(x)=a(x+۱)(x-۵)=ax^{۲}-۴ax-۵a$$

بنابراین $f'(x)=۲ax-۴a$، در نتیجه $f'(-۳)=-۱۰a$ و $f'(۱)=-۲a$.

همچنین، $f(۱)=-۸a$. بنابراین

$$f'(-۳)f'(۱)=۵f(۱)\Rightarrow(-۱۰a)(-۲a)=-۴۰a\Rightarrow a=-۲$$

به این ترتیب $f(x)=-۲(x+۱)(x-۵)$ و $f(۲)=۱۸$.

۲۶۹۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $g'(x)=۱+۳x^{۲}f'(x^{۳})$.

بنابراین $g'(۲)=۱+۳\times۴f'(۸)=۱+۱۲\times۲=۲۵$.

۲۶۹۲- گزینهٔ ۱ در $x=۰$ تابع مشتق دارد، زیرا

$$f'(۰)=\lim_{x\to۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{x\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to۰}\sqrt[۳]{x}=۰$$

اگر $x\neq۰$، آن‌گاه مشتق تابع به‌صورت $f'(x)=\sqrt[۳]{x}+\frac{x}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$ محاسبه می‌شود.

بنابراین مشتق تابع به ازای هر x حقیقی تعریف می‌شود و در نتیجه $D_{f'}=\mathbb{R}$.

۲۶۹۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$۲b=۸\Rightarrow b=۴\,,\quad ۲a=۱۰\Rightarrow a=۵$$

بنابراین

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow۲۵=۱۶+c^{۲}\Rightarrow c=۳$$

در نتیجه $FF'=۲c=۶$. از طرف دیگر، چون مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر ۲a است، پس $KF+KF'=۲a=۱۰$. به این ترتیب،

$$\text{محیط مثلث } KFF'=KF+KF'+FF'=۱۰+۶=۱۶$$

۲۶۹۴- گزینهٔ ۴ در صورت گستردهٔ دایره، ضرایب $x^{۲}$ و $y^{۲}$ برابرند. پس $a=۳$. بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$۳x^{۲}+۳y^{۲}+۶x-by+۳=۰\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲x-\frac{b}{۳}y+۱=۰$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+\frac{b^{۲}}{۹}-۴(۱)}=\frac{|b|}{۶}$. طبق فرض $r=۲$، در نتیجه $\frac{|b|}{۶}=۲$ پس $|b|=۱۲$.

۲۶۹۵- گزینهٔ ۴ تعداد نقطه‌های مشخص شده ۹ تاست. تعداد راه‌های انتخاب ۴ نقطه از این ۹ نقطه برابر است با $\binom{۹}{۴}=۱۲۶$. تعداد راه‌های انتخاب به‌طوری که دست کم دو تا از آن‌ها از رأس‌های مثلث باشند، برابر است با

$$\binom{۳}{۲}\binom{۶}{۲}+\binom{۳}{۳}\binom{۶}{۱}=۳\times۱۵+۱\times۶=۵۱$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{۵۱}{۱۲۶}=\frac{۱۷}{۴۲}$.

۲۶۹۶- گزینهٔ ۱ چون یکی از سه ظرف به تصادف انتخاب می‌شود، احتمال انتخاب هر یک برابر $\frac{۱}{۳}$ است. اگر از ظرف A، ۴ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آنکه ۲ مهره سفید باشد برابر است با

$$\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}}=\frac{۶\times۱۰}{\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}}=\frac{۶۰}{۱۲۶}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

اگر از هر یک از دو ظرف B یا C، ۴ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آنکه ۲ مهره سفید باشند برابر است با

$$\frac{\binom{۶}{۲}\times\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}}=\frac{۱۵\times۳}{۱۲۶}=\frac{۵}{۱۴}$$

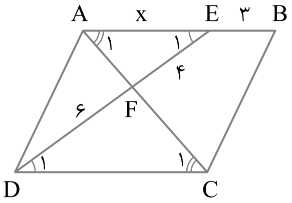
بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$P=\overset{A}{(\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۰}{۲۱})}+\overset{B}{(\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۱۴})}+\overset{C}{(\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۱۴})}=\frac{۱}{۳}(\frac{۱۰}{۲۱}+۲\times\frac{۵}{۱۴})=\frac{۱}{۳}(\frac{۱۰}{۲۱}+\frac{۵}{۷})$$

$$=\frac{۱}{۳}(\frac{۱۰+۱۵}{۲۱})=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲۵}{۲۱}=\frac{۲۵}{۶۳}$$

۲۶۹۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $AE=x$. چون $AE\|DC$ ، بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$ و $\hat{E}_۱=\hat{D}_۱$. بنابراین مثلث‌های AEF و CDF متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{AE}{CD}=\frac{EF}{DF}\Rightarrow\frac{x}{x+۳}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow ۶x=۴x+۱۲=x=۶$$



۲۶۹۸- گزینهٔ ۱ طبق تعمیم قضیهٔ تالس در دو مثلث OBD و ODE ،

$$\begin{cases}AC\|BD\Rightarrow\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OC}{OD}\\ BC\|DE\Rightarrow\dfrac{OB}{OE}=\dfrac{OC}{OD}\end{cases}\Rightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OE}\Rightarrow\frac{۳}{۳+۵}=\frac{۳+۵}{OE}$$

$$۳OE=۶۴\Rightarrow OE=\frac{۶۴}{۳}\xrightarrow{OE=OB+BE}$$

$$۸+BE=\frac{۶۴}{۳}\Rightarrow BE=\frac{۴۰}{۳}=۱۳\frac{۱}{۳}$$

۲۶۹۹- گزینهٔ ۴ فرض کنید $DE=x$. مثلث‌های AEF و DEC متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{AF}{DC}=\frac{EF}{ED}\qquad(۱)$$

چون $FB\|DC$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث KDC،

$$\frac{FB}{DC}=\frac{KF}{KD}\qquad(۲)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$\frac{AF+FB}{DC}=\frac{۴}{x}+\frac{۵}{۹+x}\Rightarrow\frac{DC}{DC}=\frac{۴}{x}+\frac{۵}{۹+x}\Rightarrow ۱=\frac{۴}{x}+\frac{۵}{۹+x}$$

$$x(۹+x)=۴(۹+x)+۵x\Rightarrow x^۲=۳۶\Rightarrow x=۶$$

۲۷۰۰- گزینهٔ ۴ میانگین ۳ دادهٔ ۱۶، ۲۴ و ۲۶ برابر است با $۲۲=\frac{۱۶+۲۴+۲۶}{۳}$. بنابراین میانگین ۱۱ دادهٔ دیگر نیز ۲۲ است و چون واریانس آن‌ها صفر است پس تمام آن‌ها با هم برابرند و ۲۲ هستند.

بنابراین واریانس این ۱۴ داده برابر است با

$$\sigma^۲=\frac{(۲۲-۲۲)^۲+\cdots+(۲۲-۲۲)^۲}{۱۴}+\frac{(۱۶-۲۲)^۲+(۲۴-۲۲)^۲+(۲۶-۲۲)^۲}{۱۴}$$

$$=\frac{۳۶+۴+۱۶}{۱۴}=۴$$

بنابراین انحراف معیار ۱۴ داده برابر $\sigma=۲$ است.

۲۷۰۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۱+\tan^۲ x}=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}=\frac{۱}{|\cos x|}=\frac{۱}{-\cos x}\qquad(\pi<x<\frac{۳\pi}{۲})$$

$$\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\sin^۲\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\sin^۲ x)=-\frac{۱}{\cos x}(۲\times\frac{۱}{۲}-\sin^۲ x)$$

$$=-\frac{۱}{\cos x}(۱-\sin^۲ x)=-\frac{۱}{\cos x}\times\cos^۲ x=-\cos x$$

۲۷۰۲- گزینهٔ ۳ فرض کنید سرعت آب برابر v باشد. در این صورت، سرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب $۱۰۰+v$ و در جهت مخالف حرکت آب برابر $۱۰۰-v$ است. در نتیجه

$$\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v}-\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v}=۵\Rightarrow\frac{۲۴۰}{۱۰۰-v}-\frac{۲۴۰}{۱۰۰+v}=۱$$

$$۲۴۰(\frac{۱}{۱۰۰-v}-\frac{۱}{۱۰۰+v})=۱\Rightarrow ۲۴۰(\frac{۲v}{۱۰۰^۲-v^۲})=۱$$

$$۱۰۰^۲-v^۲=۴۸۰v\Rightarrow v^۲+۴۸۰v-۱۰۰^۲=۰$$

$$(v-۲۰)(v+۵۰۰)=۰\Rightarrow v=۲۰$$

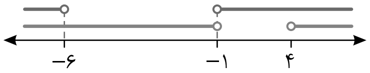
۲۷۰۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(۱)\qquad\frac{۲x-۳}{x+۱}>۱\Rightarrow\frac{۲x-۳}{x+۱}-۱>۰\Rightarrow\frac{x-۴}{x+۱}>۰\Rightarrow x>۴ \text{ یا } x<-۱$$

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳\Rightarrow\frac{۲x-۳}{x+۱}-۳<۰\Rightarrow\frac{-x-۶}{x+۱}<۰\Rightarrow\frac{x+۶}{x+۱}>۰$$

$$(۲)\qquad x<-۶ \text{ یا } x>-۱$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ است.



راه‌حل دوم اعداد ۵ و ۷- در نامعادله صدق می‌کنند:

$$۱<\frac{۲\times ۵-۳}{۵+۱}=\frac{۷}{۶}<۳\ ,\quad ۱<\frac{۲\times(-۷)-۳}{-۷+۱}=\frac{۱۷}{۶}<۳$$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب نامعادله است.

۲۷۰۴- گزینهٔ ۳ باید دسته‌های چهارتایی، پنج‌تایی یا شش‌تایی از هشت شیء متمایز انتخاب کند. تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$$

۲۷۰۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲\Rightarrow\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲-۳a\Rightarrow ۲a^۲+۴a=۴-۱۲a+۹a^۲$$

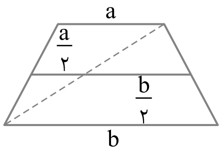
$$۷a^۲-۱۶a+۴=۰\Rightarrow(۷a-۲)(a-۲)=۰\Rightarrow a=\frac{۲}{۷}, a=۲$$

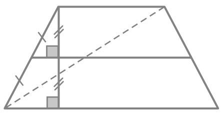
توجه کنید که اگر $a=۲$ ، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر از ۲ است). بنابراین $a=\frac{۲}{۷}$. در نتیجه $\frac{a+۱}{a}=۱+\frac{۱}{a}=۱+\frac{۷}{۲}=۴/۵$.

۲۷۰۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول قاعده‌ها a و b باشد (شکل رسم شده را ببینید). در این صورت طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌ها را به هم وصل می‌کند برابر $\frac{a+b}{۲}$ است. توجه کنید که ارتفاع ذوزنقهٔ بالایی و پایینی برابر است. در نتیجه اگر این ارتفاع برابر h باشد، آن‌گاه

$$\frac{\frac{۱}{۲}h(a+\frac{a+b}{۲})}{\frac{۱}{۲}h(\frac{a+b}{۲}+b)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{a+\frac{a+b}{۲}}{\frac{a+b}{۲}+b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳a+b}{a+۳b}=\frac{۱}{۲}$$

$$۶a+۲b=a+۳b\Rightarrow ۵a=b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱}{۵}$$





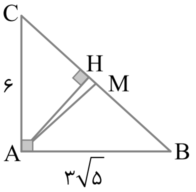
۲۷۰۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس

$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=(۳\sqrt{۵})^{۲}+۶^{۲}=۸۱\Rightarrow BC=۹$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^{۲}=CH\times CB\Rightarrow ۳۶=CH\times ۹\Rightarrow CH=۴$$

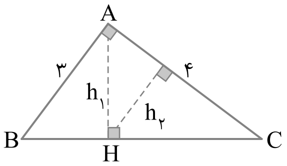
بنابراین $HM=CM-CH=\frac{BC}{۲}-CH=\frac{۹}{۲}-۴=\frac{۱}{۲}$.



اکنون توجه کنید که

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{BC}{HM}=\frac{۹}{\frac{۱}{۲}}=۱۸$$

۲۷۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که طول ضلع دیگر مثلث ABC برابر $\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵$ است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث متشابه با مثلث اصلی ایجاد می‌کند. بنابراین، با نمادگذاری شکل زیر، مثلث‌های ABC و AHC متشابه‌اند. در نتیجه نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست یعنی $\frac{h_{۲}}{h_{۱}}=\frac{AC}{BC}=\frac{۴}{۵}$.



۲۷۰۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})=\sin(۵\pi+\frac{۲\pi}{۳})=-\sin\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})=\tan(۵\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})=-\sin(\frac{۱۱\pi}{۶})=-\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=-(-\sin\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-۱)(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$.

۲۷۱۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار تابع $y=\sin x$ با تبدیلات به‌دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر بالای محور x هستند، پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ برابر $a+b$ است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر $\sqrt{۳}$ است، پس $a+b=\sqrt{۳}$. از طرف دیگر، چون نقطهٔ $(\pi,-\frac{۳}{۲})$ روی نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a-b(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=\sqrt{۳}\\ a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b=-\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow b+b\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}+\frac{۳}{۲}$$

$$b(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\sqrt{۳}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})\Rightarrow b=\sqrt{۳}$$

۲۷۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(۰/۴)^{۲x-۱}=(\frac{۱۲۵}{۸})^{x^{۲}}\Rightarrow(\frac{۲}{۵})^{۲x-۱}=((\frac{۵}{۲})^{۳})^{x^{۲}}\Rightarrow(\frac{۲}{۵})^{۲x-۱}=(\frac{۲}{۵})^{-۳x^{۲}}$$

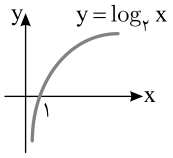
بنابراین

$$۲x-۱=-۳x^{۲}\Rightarrow ۳x^{۲}+۲x-۱=۰\Rightarrow(۳x-۱)(x+۱)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳},\ x=-۱$$

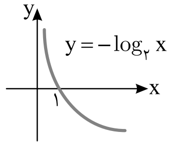
به ازای $x=-۱$ ، مقدار $۹x+۱$ منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸ تعریف نمی‌شود. بنابراین $x=\frac{۱}{۳}$ و

$$\log_{۸}(۹x+۱)=\log_{۸}(۳+۱)=\log_{۸}۴=\log_{۲^{۳}}۲^{۲}=\frac{۲}{۳}\log_{۲}۲=\frac{۲}{۳}$$

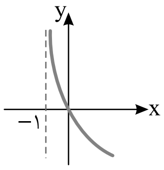
۲۷۱۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=\log_{۲}x$ به‌صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع $y=-\log_{۲}x$ به‌صورت زیر است:



اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع $y=-\log_{۲}(x+۱)$ می‌رسیم که همان نمودار داده شده است:



توجه کنید که $y=-\log_{۲}(x+۱)=\log_{۲}(x+۱)^{-۱}$ ، بنابراین

$$U(x)=(x+۱)^{-۱}$$

۲۷۱۳- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ فقط از چپ پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to(-۲)^{-}}f(x)=f(-۲)$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^{+}}f(x)\neq f(-۲)$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۲)^{-}}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^{-}}\frac{۸+x^{۳}}{|x+۲|}=\lim_{x\to(-۲)^{-}}\frac{(۲+x)(۴-۲x+x^{۲})}{-(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^{-}}(-(۴-۲x+x^{۲}))=-(۴-۲(-۲)+(-۲)^{۲})=-۱۲$$

چون $f(-۲)=a$ ، پس باید $a=-۱۲$.

توجه کنید که $\lim\limits_{x\to(-۲)^{+}}f(x)=۱۲$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to(-۲)^{+}}f(x)\neq f(-۲)$.

۲۷۱۴- گزینهٔ ۱ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای قبولی این فرد در آزمون‌های اول و دوم باشند. در این صورت $P(A)=۰/۷$ ، $P(B)=۰/۶$ و $P(B|A)=۰/۸$. اکنون توجه کنید که

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow ۰/۸=\frac{P(A\cap B)}{۰/۷}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۵۶$$

در نتیجه،

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۷+۰/۶-۰/۵۶=۰/۷۴$$

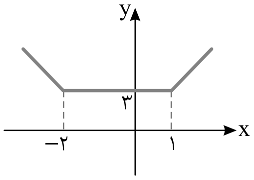
۲۷۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

گروه اول: $\bar{x}=۸۰\,,\,\sigma^{۲}=۲۵\Rightarrow\sigma=۵\,,\,CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۵}{۸۰}=\frac{۱}{۱۶}$

گروه دوم: $\bar{x}=۷۲\,,\,\sigma^{۲}=۱۶\Rightarrow\sigma=۴\,,\,CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۴}{۷۲}=\frac{۱}{۱۸}$

چون ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است، پس گروه دوم بهتر است. البته بهتر است که در صورت سؤال پرسیده شود «پراکندگی مسئولیت‌پذیری در کدام گروه کمتر است».

۲۷۱۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty\,,-۲)$ اکیداً نزولی است.



۲۷۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$۴\sin x(-\cos x)=۱\Rightarrow\sin ۲x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله و جواب‌های درون بازهٔ $[۰\,,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۰\leq k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\leq ۲\pi$$

$$\frac{۱}{۱۲}\leq k\leq ۲+\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow k=۱,۲$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{۱۲},x=۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}\qquad(۱)$$

$$۲x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۰\leq k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\leq ۲\pi$$

$$-\frac{۷}{۱۲}\leq k<۲-\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow k=۰,۱$$

$$x=\frac{۷\pi}{۱۲},x=\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\qquad(۲)$$

مجموع جواب‌های (۱) و (۲) برابر است با $۴\pi+\frac{۱۴\pi-۲\pi}{۱۲}=۵\pi$.

۲۷۱۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x^{۲}+۱۰x+۱۶=(x+۲)(x+۸)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^{۲}+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(x+۸)}{۲+\sqrt[۳]{x}}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to -۸}(\frac{(x+۲)(x+۸)}{۲+\sqrt[۳]{x}}\times\frac{۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}}{۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}})$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(x+۸)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}})}{۲^{۳}+\sqrt[۳]{x}^{۳}}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(x+۸)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}})}{۸+x}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to -۸}((x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}))$$

$$=\frac{۱}{۶}(-۸+۲)(۴-۲(-۲)+۲^{۲})=-۱۲$$

راه‌حل دوم با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به‌دست می‌آید

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^{۲}+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}}=\frac{-۱۶+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\times(-۲)^{۲}}}=\frac{-۶}{\frac{۱}{۲}}=-۱۲$$

۲۷۱۹- گزینهٔ ۴ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطهٔ صفر تعریف نشده است، پس دربارهٔ حد چپ آن در نقطهٔ صفر نمی‌توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to ۰^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x^{۲}-۱}{x+x}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x^{۲}-۱}{۲x}$$

چون $\lim_{x\to ۰^{+}}(x^{۲}-۱)=-۱$ ، $\lim_{x\to ۰^{+}}(۲x)=۰$ و در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر مقادیر ۲x مثبت‌اند، پس $\lim_{x\to ۰^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x^{۲}-۱}{۲x}=-\infty$.

۲۷۲۰- گزینهٔ ۳ خارج از برنامهٔ درسی

۲۷۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=f'(۴)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)-(-۲)(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(-۳)+۲(۳)}{(-۳)^{۲}}=\frac{۷}{۱۲}$$

۲۷۲۲- گزینهٔ ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه در $x=۲$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$\lim_{x\to ۲^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to ۲^{-}}(-x^{۲}+ax+b)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{۱}{x-۱}$$

$$-۴+۲a+b=\frac{۱}{۲-۱}=۱\Rightarrow ۲a+b=۵$$

همچنین،

$$f'_{-}(۲)=f'_{+}(۲)\Rightarrow\lim_{x\to ۲^{-}}f'(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}f'(x)$$

$$\lim_{x\to ۲^{-}}(-۲x+a)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{-۱}{(x-۱)^{۲}}\Rightarrow -۴+a=-۱\Rightarrow a=۳$$

بنابراین $b=۵-۲a=-۱$.

۲۷۲۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(۲)=g'(۲)\times f'(g(۲))\qquad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$g'(x)=\frac{۲(x-۱)-(۱)(۲x+۱)}{(x-۱)^{۲}}=\frac{-۳}{(x-۱)^{۲}}\Rightarrow g'(۲)=-۳$$

همچنین، $g(۲)=۵$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $۶=(-۳)f'(۵)$ ، پس $f'(۵)=-۲$.

۲۷۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

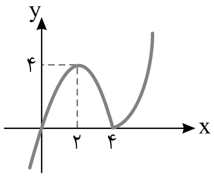
آهنگ تغییر متوسط $=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{۸-\frac{۱}{۴}-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\frac{۱۱}{۴}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای $=f'(۲)$

از طرف دیگر، $f'(x)=x+\frac{۱}{x^{۲}}$ ، پس $f'(۲)=\frac{۹}{۴}$. بنابراین اختلاف مورد نظر می‌شود $\frac{۱۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$.

۲۷۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجـه کنید که $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۴x & x\leq ۴\\ x^۲-۴x & x>۴\end{cases}$.

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر اسـت. از روی این شـکل معلوم می‌شود که $(۴,۰)$ نقطهٔ مینیمم نسـبی تابع f و $(۲,۴)$ نقطهٔ ماکزیمم نسـبی تابع f است. فاصلهٔ این نقطه‌ها برابر است با $\sqrt{(۴-۲)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$.



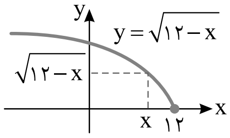
۲۷۲۶- گزینهٔ ۳ اگـر مطابـق شـکل داده شـده، طـول یکـی از ضلع‌های مستطیل برابر x باشد، طول ضلع دیگرش می‌شود $\sqrt{۱۲-x}$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل}=x\sqrt{۱۲-x}$$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x\sqrt{۱۲-x}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=(۱)\sqrt{۱۲-x}+x(\frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲-x}})$$

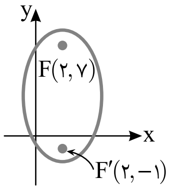
$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۱۲-x}(۲\sqrt{۱۲-x})=x\Rightarrow ۲(۱۲-x)=x\Rightarrow x=۸$$



بنابرایـن بیشـترین مقـدار تابـع f ، یعنـی بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر به ازای $x=۸$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۸\sqrt{۴}=۱۶$.

۲۷۲۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$FF'=۲c\Rightarrow ۸=۲c\Rightarrow c=۴$$



از طرف دیگر، $۲b=۶$ ، پس $b=۳$ و در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow a=۵$$

به این ترتیب $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$.

۲۷۲۸- گزینهٔ ۱ توجـه کنیـد کـه شـکل n ام از مربعـی بـا $n^۲$ دایره و ردیف‌هایی از ۱ ، ۲ ، ... و $n-۱$ دایره درست شده است. بنابراین

$$۹^۲+۱+۲+۳+\cdots+۸=۸۱+\frac{۸\times۹}{۲}=۱۱۷$$

۲۷۲۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۱)^۲-۴\Rightarrow f(x)+۴=(x-۱)^۲$$

$$x=\sqrt{f(x)+۴}+۱$$

بنابرایـن $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$. در نتیجه طول نقطهٔ تقاطـع نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ زیر است:

$$\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}+۲=x-۹\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱ \qquad (۱)$$

$$۴(x+۴)=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰\Rightarrow(x-۵)(x-۲۱)=۰$$

$$x=۵\,,\,x=۲۱$$

توجه کنید که $x=۵$ جواب نیست، زیرا به ازای $x=۵$ سمت چپ معادلهٔ (۱) مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین $x=۲۱$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x-۱)^۲-۴$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-۱}(x)=g(x)\Rightarrow f(f^{-۱}(x))=f(g(x))\Rightarrow x=f(g(x))$$

$$x=(g(x)-۱)^۲-۴\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۹}{۲}-۱)^۲\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۱۱}{۲})^۲$$

$$۴x+۱۶=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰$$

$$(x-۵)(x-۲۱)=۰\Rightarrow x=۵\,,\,x=۲۱$$

اکنـون توجـه کنید که $R_{f^{-۱}}=D_f=[۱,+\infty)$ ، پـس مقادیـر $f^{-۱}$ مثبت‌اند. اما $g(۵)<۰$ ، پس $x=۵$ جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ نیست. بنابراین $x=۲۱$.

۲۷۳۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید $A_۱$ پیشـامد این باشـد که مهرهٔ خارج شده سـفید باشـد و $A_۲$ پیشامد این باشـد که مهرهٔ خارج شده سـیاه باشد. در این صورت اگر B پیشامد مورد نظر باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)$$

$$=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

$$=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۶}{۴۵}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۱۰}{۴۵}=\frac{۹۰}{۱۱\times۴۵}=\frac{۲}{۱۱}$$

۲۷۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۱+\tan^۲ x}=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}=\frac{۱}{|\cos x|}=\frac{۱}{-\cos x} \qquad (\frac{\pi}{۲}<x<\pi)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}(\frac{۱}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{-\frac{۱}{\cos x}}(\frac{۱-\sin^۲ x}{\sin x})$$

$$=-\tan x\cos x\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=-\sin x\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=-\cos^۲ x$$

۲۷۳۲- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم سرعت پرنده در هوای آرام برابر v باشد. چون سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت است، پس سرعت پرنده در جهت موافق بـاد برابـر $v+۵$ و در جهـت مخالف باد برابر $v-۵$ اسـت. چـون پرنده یک کیلومتر رفته و یک کیلومتر برگشته است، پس مدت زمان رفت $\frac{۱}{v+۵}$ و مدت زمان برگشت $\frac{۱}{v-۵}$ کیلومتر برساعت است. به این ترتیب،

$$\frac{۱}{v+۵}+\frac{۱}{v-۵}=\frac{۹}{۶۰}=\frac{۳}{۲۰}\Rightarrow\frac{۲v}{v^۲-۲۵}=\frac{۳}{۲۰}$$

$$۳v^۲-۴۰v-۷۵=۰\Rightarrow(۳v+۵)(v-۱۵)=۰\Rightarrow v=۱۵$$

۲۷۳۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}>\frac{x}{x-۲}\Rightarrow\frac{۷x-۸}{(x+۱)(x-۲)}-\frac{x}{x-۲}>۰\Rightarrow\frac{۷x-۸-x(x+۱)}{(x+۱)(x-۲)}>۰$$

$$\frac{-x^۲+۶x-۸}{(x+۱)(x-۲)}>۰\Rightarrow\frac{-(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}>۰\Rightarrow\frac{(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}<۰$$

x	$-\infty$		-۱		۲		۴		$+\infty$
$\frac{(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}$		+	ت ن	−	ت ن	−	۰	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ می‌شود.

راه‌حل دوم توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{۰-۸}{۰-۰-۲}>\frac{۰}{۰-۲}\Rightarrow ۴>۰\ ,\qquad \frac{۲۱-۸}{۹-۳-۲}>\frac{۳}{۳-۱}\Rightarrow\frac{۱۳}{۴}>\frac{۳}{۲}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) جواب نامعادله است.

۲۷۳۴- گزینهٔ ۴ باید سه مدرسه از پنج مدرسه انتخاب کنیم (به $\binom{۵}{۳}$ طریق) و از هر کدام از آن‌ها یک نفر را انتخاب کنیم (هر کدام به $\binom{۴}{۱}$ طریق). بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۰\times۴\times۴\times۴=۶۴۰$.

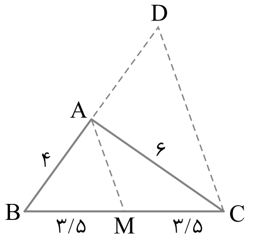
۲۷۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲a+\sqrt{۳a+۱۶}=۱\Rightarrow\sqrt{۳a+۱۶}=۱-۲a\Rightarrow\sqrt{۳a+۱۶}^{\,۲}=(۱-۲a)^۲$$

$$۳a+۱۶=۱-۴a+۴a^۲\Rightarrow ۴a^۲-۷a-۱۵=۰$$

$$(۴a+۵)(a-۳)=۰\Rightarrow a=-\frac{۵}{۴}\ ,\ \ a=۳$$

توجه کنید که $a=۳$ در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی $a=-\frac{۵}{۴}$ در تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین $a=-\frac{۵}{۴}$ و $۴a+۹=۴$.



۲۷۳۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که در مثلث BCD، از نقطهٔ M، وسط ضلع BC، خطی موازی ضلع CD رسم شده است. در نتیجه، این خط از وسط ضلع DB نیز می‌گذرد. یعنی

$$BD=۲AB=۸$$

راه‌حل دوم چون $AM||DC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BCD،

$$\frac{BA}{BD}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow\frac{۴}{۳/۵}=\frac{BD}{۷}\Rightarrow BD=۸$$

۲۷۳۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در مثلث ایجاد شده هم ضلع‌ها به سه قسمت برابر تقسیم می‌شوند. از طرف دیگر، مثلث‌های ABC و AEF متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}}=(\frac{۱}{۲})^۲\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۴}S_{AEF}\qquad(۱)$$

همین‌طور، مثلث‌های AEF و AMN متشابه‌اند، پس

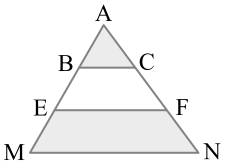
$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=(\frac{۲}{۳})^۲\Rightarrow S_{AMN}=\frac{۹}{۴}S_{AEF}$$

$$S_{AMN}-S_{AEF}=\frac{۹}{۴}S_{AEF}-S_{AEF}$$

$$S_{EFNM}=\frac{۵}{۴}S_{AEF}\qquad(۲)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

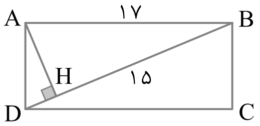
$$\frac{S_{ABC}}{S_{EFNM}}=\frac{۱}{۵}$$



۲۷۳۸- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD،

$$AB^۲=BH\times BD\Rightarrow ۱۷^۲=۱۵\times BD\Rightarrow BD=\frac{۱۷^۲}{۱۵}=\frac{۲۸۹}{۱۵}=۱۹\frac{۴}{۱۵}$$

پس طول قطر مستطیل $\frac{۴}{۱۵}$ واحد از عدد ۱۹ بیشتر است.



۲۷۳۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha\ ,\qquad\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=-\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha$$

بنابراین (چون α ربع سوم است، $\cos\alpha<۰$)

$$\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۱}{۱+\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{۴}{۳}\times(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۴}{۵}$$

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵})+\frac{۳}{۴}=۰/۲۷$

۲۷۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=a+b\sin x$. از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که b مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر $a+b$ است. چون این مقدار برابر ۳ است، پس $a+b=۳$. همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $(-\frac{۵\pi}{۶},۰)$ گذشته است، پس

$$۰=a+b\sin(-\frac{۵\pi}{۶})=a+b(-\frac{۱}{۲})=a-\frac{b}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=۳\\ a-\frac{b}{۲}=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر $y=۱+۲\sin x$ می‌شود، که مقدار آن به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ برابر است با $۱+۲\sin\frac{\pi}{۶}=۲$.

۲۷۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $۳^{۴x}=(۳^{۴})^{x}=۸۱^{x}=۳^{x^{۲}-۲}$.

بنابراین $x^{۲}-۲=۴x\Rightarrow x^{۲}-۴x-۲=۰\Rightarrow x=۲-\sqrt{۶}\,,\, x=۲+\sqrt{۶}$

چون به ازای $x=۲-\sqrt{۶}$ ، مقدار $x-۲$ منفی می‌شود و $\log_{۶}(x-۲)$ به ازای آن تعریف نشده است، پس $x=۲-\sqrt{۶}$ قابل قبول نیست. بنابراین $x=۲+\sqrt{۶}$ و در نتیجه $\log_{۶}(x-۲)=\log_{۶}\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}\log_{۶}۶=\frac{۱}{۲}$

۲۷۴۲- گزینهٔ ۲ چون دامنهٔ تابع بازهٔ $(-\frac{a}{۲},+\infty)$ است و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این بازه $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ است، پس $a=-۱$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(۲,۰)$ گذشته است، پس $y(۲)=۰$:

$$-۱+\log_{b}(۴-۱)=۰\Rightarrow\log_{b}۳=۱\Rightarrow b=۳$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=-۱+\log_{۳}(۲x-۱)$ می‌شود. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع مورد نظر با خط $y=۱$ جواب معادلهٔ زیر است:

$$-۱+\log_{۳}(۲x-۱)=۱\Rightarrow\log_{۳}(۲x-۱)=۲\Rightarrow ۲x-۱=۹\Rightarrow x=۵$$

۲۷۴۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{x^{۲}-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(-(x-۲))}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{x+۲}{-۲}=-۲$$

$$\lim_{x\to ۲^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{x^{۲}-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{x+۲}{۲}=۲$$

چون $f(۲)=۲$ ، پس تابع f در نقطهٔ $x=۲$ فقط از راست پیوسته است.

۲۷۴۴- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد موفقیت این فرد و B پیشامد موفقیت دوستش باشد. در این صورت

$$P(A)=۲P(B)\,,\quad P(A\cup B)=\frac{۷}{۹}$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{(P(A))^{۲}}{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{۷}{۹}$$

$$=P(A)+\frac{P(A)}{۲}-\frac{(P(A))^{۲}}{۲}$$

$$(P(A))^{۲}-۳P(A)+\frac{۱۴}{۹}=۰\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۳}\,,\quad P(A)=\frac{۷}{۳}\ \text{(غ.ق.)}$$

۲۷۴۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\overline{x}_{A}=۱۴$ و $\overline{x}_{B}=۱۴/۵$. بنابراین

$$\sigma_{A}^{۲}=\frac{۲^{۲}+۱^{۲}+۰^{۲}+۱^{۲}+۲^{۲}}{۵}=۲$$

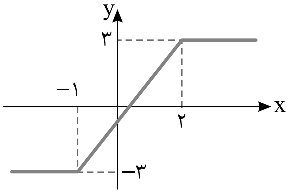
$$\sigma_{B}^{۲}=\frac{۲^{۲}+۱/۵^{۲}+۱^{۲}+۱/۵^{۲}+۳^{۲}}{۵}=۳/۷$$

چون $CV_{A}=\frac{\sigma_{A}}{\overline{x}_{A}}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۴}$ و $CV_{B}=\frac{\sigma_{B}}{\overline{x}_{B}}=\frac{\sqrt{۳/۷}}{۱۴/۵}$. پس

$$CV_{A}<CV_{B}$$

یعنی دقت عمل A بیشتر است. البته بهتر است در صورت سؤال پرسیده شود «نمرات مهارت» کدام کارگر پراکندگی کمتری دارد.

۲۷۴۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این نمودار معوم است که تابع f روی بازهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.



۲۷۴۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos ۳x+\cos x=۰\Rightarrow\cos ۳x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$

$$۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

$$۳x=۲k\pi-(\pi-x)\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲}$$

چون باید $\cos x\neq ۰$ ، پس جواب‌های به شکل $k\pi-\frac{\pi}{۲}$ قبول نیستند. در نتیجه، جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ هستند $(k\in\mathbb{Z})$.

۲۷۴۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^{۲}-۱۸x+۱۶}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{(۵x-۸)(x-۲)}\times\frac{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}}}{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۸-(۳x+۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳(x-۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}})}$$

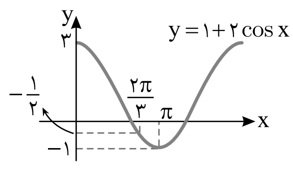
$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳}{(۵x-۸)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}})}$$

$$=\frac{-۳}{(۲)(۴+۲\times ۲+۲^{۲})}=-\frac{۱}{۸}$$

راه‌حل دوم بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^{۲}-۱۸x+۱۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}}}}{۱۰x-۱۸}=\frac{-\frac{۱}{۲^{۲}}}{۲۰-۱۸}=-\frac{۱}{۸}$$

۲۷۴۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^{+}}\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^{+}}(۱+۲\cos x)=۰$ و در یک همسایگی راست نقطهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ ، مقادیر $۱+۲\cos x$ منفی هستند. بنابراین $\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^{+}}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=-\infty$.



۲۷۵۰- گزینهٔ ۴ خارج از برنامهٔ درسی

۲۷۵۱- گزینهٔ ۳ ابتـدا توجه کنید که $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}=f'(\frac{۱}{۴})$.

از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{(-۱)(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{(\sqrt{x})^۲}$.

پس

$$f'(\frac{۱}{۴})=\frac{-\frac{۱}{۲}+(۱)(\frac{۱}{۴}+۱)}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

۲۷۵۲- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشـتق‌پذیر اسـت، پس در این نقطه پیوسته نیز است. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}\frac{۸}{ax+b}=۴\Rightarrow\frac{۸}{۲a+b}=۴\Rightarrow ۲a+b=۲$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲} & x>۲\\ -۳x^۲+۶ & x<۲\end{cases}$. پس

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲}=\frac{-۸a}{(۲a+b)^۲}=\frac{-۸a}{۲^۲}=-۲a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-۳x^۲+۶)=-۶$$

بنابراین

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow -۲a=-۶\Rightarrow a=۳$$

۲۷۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=x(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}$. پس

$$f'(x)=(۱)(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}+x\times\frac{۱}{۳}(\frac{(۳)(x+۲)-(۱)(۳x+۱)}{(x+۲)^۲})(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}-۱}$$

در نتیجه

$$f'(-۳)=(\frac{-۸}{-۱})^{\frac{۱}{۳}}+(-۳)(\frac{۱}{۳})(\frac{۳(-۱)-(-۸)}{(-۱)^۲})(\frac{-۸}{-۱})^{-\frac{۲}{۳}}=۲-۵\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۲۷۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجـه کنید که نقطه‌های ابتدایـی و انتهایی نمودار تابع $(۰,f(۰))$ و $(۸,f(۸))$ هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند برابر است با $\frac{f(۸)-f(۰)}{۸-۰}=\frac{۳-(-۵)}{۸}=۱$. اکنون طول نقطه‌ای را روی نمودار تابع f پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

$$f'(x)=\frac{۹}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=۱\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱$$

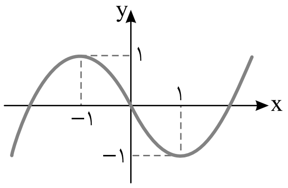
$$(x+۱)^۲=۹\Rightarrow x=۲\ ,\ \ x=-۴\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین طول نقطهٔ مورد نظر برابر ۲ اسـت و عرض آن برابر است با $f(۲)=۱$. معادلـهٔ خطـی که از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد و شـیب آن برابر ۱ اسـت به‌صورت $y-۱=(۱)(x-۲)$ یعنی $y=x-۱$ است. عرض نقطه‌ای که این خط محور y را قطع می‌کند برابر است با $y=۰-۱=-۱$.

۲۷۵۵- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجـه کنید که $f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲x & x\leq ۰\\ x^۲-۲x & x>۰\end{cases}$.

پـس نمـودار تابع f به‌صـورت زیر اسـت. بنابراین نقطه‌های ماکزیمم نسـبی و مینیمم نسبی تابع f به‌ترتیب نقطه‌های $(-۱,۱)$ و $(۱,-۱)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۱+۱)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

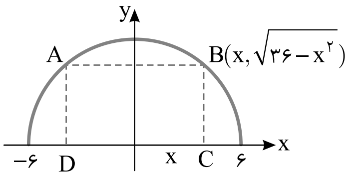


۲۷۵۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم مستطیل موردنظر ABCD باشد و طول نقطهٔ C برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطهٔ B روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۳۶$ اسـت، پس عرض نقطهٔ B برابر است با $\sqrt{۳۶-x^۲}$. به این ترتیـب، $S_{ABCD}=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$. بایـد بیشـترین مقـدار تابـع $f(x)=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۲\sqrt{۳۶-x^۲}-\frac{۲x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳۶-x^۲=x^۲\Rightarrow x^۲=۱۸\Rightarrow x=۳\sqrt{۲}\ (x>۰)$$

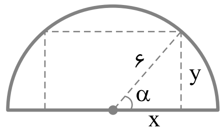
بنابراین بیشـترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مساحت مستطیل ABCD، به ازای $x=۳\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲(۳\sqrt{۲})\sqrt{۳۶-۱۸}=۳۶$.



راه‌حل دوم با نمادگذاری شـکل زیر، فرض می‌کنیم طول ضلع‌های مسـتطیل ۲x و y باشند. در این صورت $x=۶\cos\alpha$ و $y=۶\sin\alpha$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل}=۲xy=۲(۶\cos\alpha)(۶\sin\alpha)=۳۶\sin ۲\alpha\leq ۳۶$$

توجه کنید که تساوی وقتی به‌دست می‌آید که $۲\alpha=۹۰^\circ$، یعنی $\alpha=۴۵^\circ$.



۲۷۵۷- گزینهٔ ۱ از نمادگذاری شـکل زیر اسـتفاده می‌کنیـم. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $۲x-۳y+۱=۰$ برابر است با

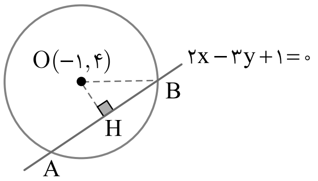
$$OH=\frac{|۲(-۱)-۳(۴)+۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

چون $HB=\frac{AB}{۲}=\sqrt{۷}$، پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

$$OB^۲=OH^۲+HB^۲=(\sqrt{۱۳})^۲+(\sqrt{۷})^۲=۲۰\Rightarrow OB=۲\sqrt{۵}$$

یعنی شـعاع دایـرهٔ مورد نظـر برابر $۲\sqrt{۵}$ اسـت. بنابرایـن معادلهٔ ایـن دایره به‌صورت $(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰$ است. طول نقطه‌های برخورد این دایره با خط $y=۲$ جواب معادلهٔ زیر هستند:

$$(x+۱)^۲+(۲-۴)^۲=۲۰\Rightarrow(x+۱)^۲=۱۶\Rightarrow x=-۵\ ,\ x=۳$$



۲۷۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که شکل nام از مستطیلی با $۲\times(n+۱)$ دایره و نواری با n دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره‌های شکل nام برابر است با $۲(n+۱)+n=۳n+۲$. پس تعداد دایره‌های شکل دوازدهم برابر است با $۳\times۱۲+۲=۳۸$.

۲۷۵۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$$

اکنون فرض کنید $f^{-۱}(۸)=a$. در این صورت

$$f(a)=۸\Rightarrow\frac{۲}{۵}a-۴=۸\Rightarrow a=۳۰$$

اکنون فرض کنید $g^{-۱}(۳۰)=b$. در این صورت

$$g(b)=۳۰\Rightarrow b^{۳}+b=۳۰\Rightarrow b=۳$$

بنابراین $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=g^{-۱}(۳۰)=۳$.

۲۷۶۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید A، B و C به‌ترتیب پیشامد انتخاب بسته‌های ریاضی، تجربی و علوم انسانی باشند. اگر پیشامد برنده شدن بهروز X باشد، آن‌گاه

$$P(X)=P(A)P(X|A)+P(B)P(X|B)+P(C)P(X|C)$$

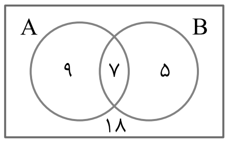
$$=\frac{۵}{۱۸}\times۰/۷+\frac{۷}{۱۸}\times۰/۸+\frac{۶}{۱۸}\times۰/۹=\frac{۳۵}{۱۸۰}+\frac{۵۶}{۱۸۰}+\frac{۵۴}{۱۸۰}=\frac{۱۴۵}{۱۸۰}=\frac{۲۹}{۳۶}$$

۲۷۶۱- گزینهٔ ۴ اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامهٔ دیواری را با B نمایش دهیم، آن‌گاه $n(A)=۱۶$ ، $n(B)=۱۲$ و $n(A-B)=۹$. بنابراین

$$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=۱۶-۹=۷$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۶+۱۲-۷=۲۱$$

بنابراین $۳۹-۲۱=۱۸$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۲۷۶۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۴}\times\sqrt[۱۵]{۱۶}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۵}}\times۲^{\frac{۴}{۱۵}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{۲}=۴$$

بنابراین $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=۸^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$.

۲۷۶۳- گزینهٔ ۲ برای اینکه سهمی به معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ همواره پایین محور x قرار بگیرد، باید $a<۰$ و $b^{۲}-۴ac<۰$. بنابراین در سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^{۲}+۲(m-۳)x-۱$ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$۱-m<۰\Rightarrow m>۱$$

$$۴(m-۳)^{۲}+۴(۱-m)<۰\Rightarrow m^{۲}-۷m+۱۰<۰\Rightarrow(m-۲)(m-۵)<۰$$

$$۲<m<۵$$

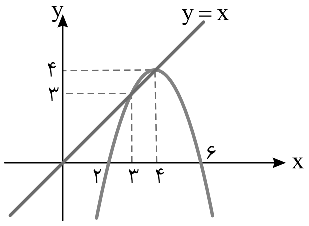
اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برابر $۲<m<۵$ است. بنابراین اگر $۲<m<۵$ ، آن‌گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور xها قرار دارد.

۲۷۶۴- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=-x^{۲}+۲x+۵$ را سه واحد به طرف x های مثبت سپس دو واحد به طرف y های منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=-(x-۳)^{۲}+۲(x-۳)+۵-۲$ به‌دست می‌آید. سادهٔ شدهٔ ضابطهٔ این تابع به‌صورت $f(x)=-x^{۲}+۸x-۱۲$ است. بنابراین می‌خواهیم بازه‌ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد.

راه‌حل اول برای اینکه بدانیم در چه بازه‌ای نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد، کافی است نامعادلهٔ $f(x)>x$ را حل کنیم:

$$-x^{۲}+۸x-۱۲>x\Rightarrow x^{۲}-۷x+۱۲<۰\Rightarrow(x-۳)(x-۴)<۰\Rightarrow۳<x<۴$$

راه‌حل دوم به نمودار این تابع و خط $y=x$ توجه کنید. در بازهٔ $(۳,۴)$ نمودار تابع f بالای این خط قرار دارد.



راه‌حل سوم در تابع $f(x)=-x^{۲}+۸x-۱۲$. مقادیر $f(۳)$ و $f(۴)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(۳)=-۹+۲۴-۱۲=۳\ ,\quad f(۴)=-۱۶+۳۲-۱۲=۴$$

بنابراین در نقاط $x=۳$ و $x=۴$ نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار ندارد، بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳ یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینهٔ (۱) جواب است.

۲۷۶۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید بهروز به تنهایی در t ساعت این کار را انجام می‌دهد. بنابراین فرهاد در $t+۹$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. پس بهروز در هر ساعت $\frac{۱}{t}$ از این کار و فرهاد در هر ساعت $\frac{۱}{t+۹}$ از این کار را انجام می‌دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار $\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}$ از این کار را انجام می‌دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{۱}{۲۰}$ کار را با هم انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow۲۰(t+۹)+۲۰t=t(t+۹)\Rightarrow t^{۲}-۳۱t-۱۸۰=۰$$

$$(t-۳۶)(t+۵)=۰\Rightarrow t=۳۶, t=-۵\ (\text{غ.ق.ق.})$$

۲۷۶۶- گزینهٔ ۲ اگر $x\geq\frac{۱}{۲}$ ، آن‌گاه معادله به‌صورت $۲x-۱+x+۲=۳$ در می‌آید که جواب آن $x=\frac{۲}{۳}$ است. اگر $-۲<x<\frac{۱}{۲}$ ، آن‌گاه معادله به‌صورت $-۲x+۱+x+۲=۳$ در می‌آید که $x=۰$ جواب آن است. اگر $x\leq-۲$ ، آن‌گاه معادله به‌صورت $-۲x+۱-x-۲=۳$ در می‌آید که $x=-\frac{۴}{۳}$ جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جواب‌های معادله $x=\frac{۲}{۳}$ و $x=۰$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۲۷۶۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$

بنابراین

$$(gof^{-۱})(۲)=g(۱)=\text{تعریف نشده}\ ,\quad(gof^{-۱})(۵)=g(۲)=۳$$

$$(gof^{-۱})(۴)=g(۳)=۱\ ,\quad(gof^{-۱})(۶)=g(۴)=۲$$

بنابراین

$$D_{gof^{-۱}}=\{۵\ ,۴,۶\}$$

در نتیجه

$$D_{\frac{g}{gof^{-۱}}}=D_g\cap D_{gof^{-۱}}-\{x|(gof^{-۱})(x)=۰\}=\{۴,۵\}$$

در توابع داده شده در گزینه‌ها فقط تابع گزینهٔ (۱) دامنه‌اش $\{۴,۵\}$ است.

۲۷۶۸- گزینهٔ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x-۱\neq ۰\Rightarrow x\neq ۱ \\ ۹-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۹\Rightarrow -۳\leq x\leq ۳ \end{cases}\Rightarrow D_f=[-۳,۱)\cup(۱,۳]$$

برای اینکه بازهٔ $(k-۲,۳k+۲)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع f باشد یا باید زیرمجموعهٔ $[-۳,۱)$ باشد یا باید زیرمجموعهٔ $(۱,۳]$ باشد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $(k-۲,۳k+۲)\subseteq[-۳,۱)$. در این حالت باید $k-۲\geq -۳$ و $۳k+۲\leq ۱$. پس $-۱\leq k\leq -\frac{۱}{۳}$.

حالت دوم $(k-۲,۳k+۲)\subseteq(۱,۳]$. در این حالت باید $k-۲\geq ۱$ و $۳k+۲\leq ۳$ که ممکن نیست.

بنابراین $k\in[-۱,-\frac{۱}{۳}]$ که در گزینهٔ (۴) بازهٔ $[-۱,-\frac{۱}{۳}]$ آمده است.

۲۷۶۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $g(x)=x^۲-x$، آن‌گاه $g(۱)=۰$ و $g(۲)=۲$. بنابراین

$$f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{Ax+B}\ ,\quad f(۱)=۰\ ,\quad f(۲)=۲$$

بنابراین

$$f(۱)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{A+B}=۰\Rightarrow ۲^{-A-B}=۲\Rightarrow -A-B=۱\Rightarrow A+B=-۱$$

$$f(۲)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{۲A+B}=۲\Rightarrow ۲^{-۲A-B}=۴\Rightarrow -۲A-B=۲\Rightarrow ۲A+B=-۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} A+B=-۱ \\ ۲A+B=-۲ \end{cases}$ نتیجه می‌شود $A=-۱$ و $B=۰$.

در نتیجه

$$f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-x}\Rightarrow f(۳)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-۳}=۶$$

۲۷۷۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین $\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=-۱+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۱}{۲}$.

۲۷۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=۱+\frac{a}{۲}\sin ۲bx$. بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|۲b|}$ و حداکثر مقدار تابع برابر $۱+|\frac{a}{۲}|$ است. با توجه به نمودار تابع f دورهٔ تناوب برابر $\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})=\pi$ و حداکثر مقدار تابع برابر $\frac{۳}{۲}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|۲b|}=\pi\Rightarrow |b|=۱\ ,\quad ۱+|\frac{a}{۲}|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow |a|=۱$$

با توجه به اینکه نمودار تابع f در اطراف نقطهٔ $x=۰$ صعودی است، مقادیر a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین $a=۱$ و $b=۱$ یا $a=-۱$ و $b=-۱$. پس $a+b$ می‌تواند برابر ۲ یا ۲− باشد که فقط حالت $a+b=۲$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۷۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=(\sin x+\cos x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x-\sin x\cos x)$$

$$=(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$(\sin x+\cos x-۱)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۰$$

$$\begin{cases} \sin x+\cos x-۱=۰ \\ ۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۰\Rightarrow \sin ۲x=۲\ \text{(غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

معادلهٔ $\sin x+\cos x-۱=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ جواب‌های $x=۰$، $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=۲\pi$ را دارد که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

۲۷۷۳- گزینهٔ ۱ بازهٔ $(x+۱,۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ است، بنابراین بایستی $x+۱<۳<۲x-۱$.

مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $x+۱<۳$ و $۳<۲x-۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x+۱<۳\Rightarrow x<۲\qquad (۱)$$

$$۳<۲x-۱\Rightarrow x>۲\qquad (۲)$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) برابر تهی است.

۲۷۷۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(۲)=۲a-۱$ و

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-\sqrt{x+۲})(x+\sqrt{x+۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x+\sqrt{x+۲})}{x+۱}=\frac{۳(۲+۲)}{۲+۱}=۴$$

بنابراین برای اینکه تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد باید تساوی $۲a-۱=۴$ برقرار باشد که نتیجه می‌شود $a=\frac{۵}{۲}$. توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید به کمک قاعدهٔ هوپیتال نیز به‌دست آورید:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}}=۴$$

۲۷۷۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۱)=a+b\ ,\quad \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(ax+b)=a+b$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(x[x])=\lim_{x\to ۱^-} ۰=۰$$

تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است، پس $a+b=۰$. از طرف دیگر

$$f(-۱)=-a+b\ ,\quad \lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-}(ax+b)=-a+b$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^+}(x[x])=\lim_{x\to (-۱)^+}(-x)=۱$$

تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته است، پس $-a+b=۱$. از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=۱ \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۱}{۲}$.

۲۷۷۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۲}(۲x-۵)=-۱$. بنابراین اولاً باید $\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲+ax+b)$ برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت $x^۲+ax+b$ در یک همسایگی نقطهٔ $x=۲$ مثبت باشد. پس $x^۲+ax+b$ باید برابر $(x-۲)^۲$ باشد، در نتیجه $x^۲+ax+b=x^۲-۴x+۴\Rightarrow a=-۴, b=۴$

پس $a+b=۰$.

۲۷۷۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases} g(۱)=۲ \\ g'(x)=۱+\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow g'(۱)=۱+\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $(fog)'(۱)=g'(۱)f'(g(۱))=g'(۱)f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}=۲$.

۲۷۷۸- گزینهٔ ۴ خط $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $(۲,۱)$ بر نمودار تابع y مماس است. پس $g(۲)=۱$ و $g'(۲)=۳$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $(fog)'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))=g'(۲)f'(۱)=۳\times\frac{۴}{۳}=۴$.

۲۷۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=۲$ علامت عبارت $x^۲-۲x$ منفی است، بنابراین $|x^۲-۲x|=۲x-x^۲$. در واقع تابع f به‌صورت زیر است

$$\begin{cases} x^۲-۲x & x\leq ۰ \\ ۲x-x^۲ & ۰<x<۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲+ax+b & x\geq ۲ \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x<۰ \\ ۲-۲x & ۰<x<۲ \\ x+a & x>۲ \end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس $f'_+(۲)=f'_-(۲)$. بنابراین

$$۲+a=۲-۴\Rightarrow a=-۴$$

از طرف دیگر تابع f در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است. پس

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)$$

بنابراین $۲+۲a+b=۴-۴\Rightarrow b=-۲a-۲=۶$

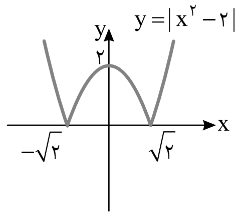
در نتیجه $a+b=۲$.

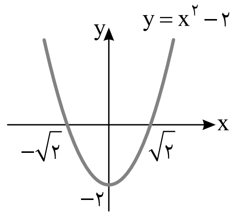
۲۷۸۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع f در $x=۰$ تعریف نشده پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. عبارت $x^۳-۲x$ در ضابطهٔ f داخل قدرمطلق قرار دارد و این عبارت در $x=۰$ و $x=\pm\sqrt{۲}$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. بنابراین تابع f در سه نقطه مشتق ندارد.

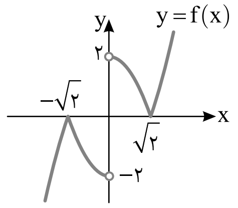
راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

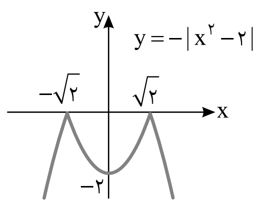
$$f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x}=\frac{|x||x^۲-۲|}{x}=\begin{cases} |x^۲-۲| & x>۰ \\ -|x^۲-۲| & x<۰ \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که در $x=۰$، $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ تابع f مشتق‌پذیر نیست.









۲۷۸۱- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,۲]$ برابر است با

$$\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۱۲-۲}{۲}=۵$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{۳}{۴}$ برابر است با $f'(\frac{۳}{۴})$:

$$f'(x)=\sqrt{۴x+۱}+\frac{۴(x+۲)}{۲\sqrt{۴x+۱}}\Rightarrow f'(\frac{۳}{۴})=۲+\frac{۱۱}{۴}=\frac{۱۹}{۴}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,۲]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۴}$ به اندازهٔ $۵-\frac{۱۹}{۴}=\frac{۱}{۴}$ بیشتر است.

۲۷۸۲- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار تابع f معلوم است که این تابع فقط در $x=۳$ اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x)=x^۴+ax^۳+bx^۲$$

$$f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲+۲bx=x(۴x^۲+۳ax+۲b)$$

علامت $f'(x)$ در $x=۰$ نباید تغییر کند و فقط در $x=۳$ باید تغییر کند.

بنابراین باید $b=۰$ و

$$f'(x)=x(۴x^۲+۳ax)=x^۲(۴x+۳a)$$

$$f'(۳)=۰\Rightarrow a=-۴$$

بنابراین

$$f(x)=x^۴-۴x^۳\Rightarrow f(-۲)=۴۸$$

۲۷۸۳- گزینهٔ ۲ فرض کنید $B_۱$ پیشامد تعلق لامپ انتخابی به جعبهٔ اول، $B_۲$ پیشامد تعلق لامپ انتخابی به جعبهٔ دوم و A پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی باشد. طبق فرمول احتمال کل،

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)$$

طبق فرض $P(B_۱)=\frac{۵}{۱۲}$ و $P(B_۲)=\frac{۷}{۱۲}$، زیرا لامپ را از بین ۵ لامپ از جعبهٔ اول و ۷ لامپ از جعبهٔ دوم انتخاب می‌کنیم. همچنین چون ۴ تا از ۲۰ لامپ جعبهٔ اول و ۳ تا از ۱۲ لامپ جعبهٔ دوم معیوب‌اند، پس $P(A|B_۱)=\frac{۴}{۲۰}$ و $P(A|B_۲)=\frac{۳}{۱۲}$. در نتیجه

$$P(A)=\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۴}{۲۰}+\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۷}{۴۸}=\frac{۱۱}{۴۸}$$

۲۷۸۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر A و B مستقل باشند، A و B' نیز مستقل‌اند. بنابراین

$$\begin{cases}P(A\cap B)=۰/۶\\P(A\cap B')=۰/۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P(A)P(B)=۰/۶\\P(A)P(B')=۰/۲\end{cases}$$

$$P(A)P(B)+P(A)P(B')=۰/۸$$

$$P(A)\underbrace{(P(B)+P(B'))}_{۱}=۰/۸\Rightarrow P(A)=۰/۸$$

$$\xrightarrow{P(A)P(B)=۰/۶}P(B)=\frac{۰/۶}{۰/۸}=\frac{۳}{۴}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$

$$۰/۸+(۱-\frac{۳}{۴})-۰/۲=۰/۸+۰/۲۵-۰/۲=۰/۸۵$$

۲۷۸۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید A پیشامد شرکت کردن امیر و B پیشامد شرکت کردن بهروز در مسابقهٔ علمی باشد. طبق فرض $P(A)=۰/۶$، $P(B)=۰/۳$ و $P(A|B)=۰/۵$. باید $P(A|B')$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

$$۰/۶=۰/۳\times۰/۵+(۱-۰/۳)P(A|B')$$

$$۰/۶=۰/۱۵+۰/۷P(A|B')\Rightarrow P(A|B')=\frac{۰/۴۵}{۰/۷}=\frac{۹}{۱۴}$$

۲۷۸۶- گزینهٔ ۲ اگر فضای نمونه‌ای آزمایش را فقط برای مهرهٔ دوم تشکیل دهیم، ۱۰ مهره عضو این فضای نمونه‌ای هستند که ۶تا از آن‌ها سفید است. بنابراین احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم ۰/۶ است.

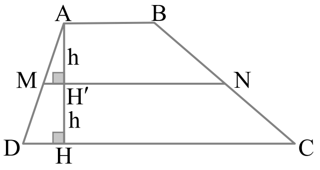
۲۷۸۷- گزینهٔ ۲ در ذوزنقهٔ $ABCD$ نقاط M و N وسط‌های دو ساق هستند، پس بنابر قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه $MN=\frac{AB+DC}{۲}$ و اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آن‌گاه $AH'=HH'=h$.

بنابر فرض سؤال،

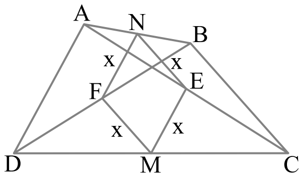
$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}h(AB+MN)}{\frac{۱}{۲}h(MN+DC)}=\frac{۳}{۵}$$

$$۵AB+۵MN=۳MN+۳DC$$

$$۵AB-۳DC=-۲(\frac{AB+DC}{۲})\Rightarrow۶AB=۲DC\Rightarrow\frac{AB}{DC}=\frac{۱}{۳}$$



۲۷۸۸- گزینهٔ ۱ فرض کنید نقاط M و N وسط‌های دو ضلع غیر مجاور چهارضلعی $ABCD$ و نقاط E و F وسط‌های دو قطر آن باشند و چهارضلعی $MENF$ لوزی به ضلع x باشد. بنابر قضیهٔ میان خط در مثلث نتیجه می‌گیریم $AD=۲ME=۲x$ و $BC=۲EN=۲x$. پس $BC=AD$. یعنی دو ضلع غیرمجاور دیگر چهارضلعی $ABCD$ برابرند.



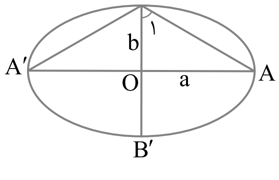
۲۷۸۹- گزینهٔ ۳ اگر AA' قطر بزرگ و BB' قطر کوچک بیضی باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ ABA' مورد سؤال است. می‌دانیم $e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}$ و بنابر فرض $e=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$.

پس

$$\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=۱-\frac{b^۲}{a^۲}\Rightarrow\frac{b^۲}{a^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB می‌نویسیم

$$\tan\hat{B}_۱=\frac{a}{b}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\sqrt{۳}\Rightarrow\hat{B}_۱=۶۰^\circ\Rightarrow A\hat{B}A'=۲\times۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$$



۲۷۹۰- گزینهٔ ۲ داده‌ها را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

۱۰/۶,۱۰/۶,۱۱/۲,۱۱/۵,۱۱/۹,۱۲/۳,۱۲/۷,۱۲/۸,۱۳/۵,۳۰/۲

چون تعداد داده‌ها ۱۰تا است، پس میانه برابر میانگین داده‌های پنجم و ششم، چارک اول برابر دادهٔ سوم و چارک سوم برابر دادهٔ هشتم است. بنابراین

$$Q_۲=\frac{۱۱/۹+۱۲/۳}{۲}=۱۲/۱,Q_۱=۱۱/۲,Q_۳=۱۲/۸$$

$$\frac{Q_۱+Q_۳-۲Q_۲}{Q_۳-Q_۱}=\frac{۱۱/۲+۱۲/۸-۲\times۱۲/۱}{۱۲/۸-۱۱/۲}=\frac{-۰/۲}{۱/۶}=-۰/۱۲۵$$

۲۷۹۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}=\frac{(۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳})(۵+\sqrt{۶})}{(۵-\sqrt{۶})(۵+\sqrt{۶})}=\frac{۱۰\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}+۱۵\sqrt{۳}+۹\sqrt{۲}}{۲۵-۶}$$

$$=\frac{۱۹\sqrt{۲}+۱۹\sqrt{۳}}{۱۹}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر،

$$۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}=\frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۳-۱}=\sqrt{۳}+۱$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-(\sqrt{۳}+۱)=\sqrt{۲}-۱$$

۲۷۹۲- گزینهٔ ۳ اعداد مربع کامل به‌صورت زیر هستند:

$$۱^۲,۲^۲,۳^۲\ ,\ldots\ ,۸^۲,۹^۲,\ldots$$

بنابراین آخرین عدد دستهٔ هشتم عدد $۸^۲$ و آخرین عدد دستهٔ نهم عدد $۹^۲$ است. همچنین اولین عدد دستهٔ نهم $۸^۲+۱$ است. پس واسطهٔ حسابی بین $۸^۲+۱$ و $۹^۲$ را باید حساب کنیم که برابر است با

$$\frac{۸^۲+۱+۹^۲}{۲}=۷۳$$

۲۷۹۳- گزینهٔ ۲ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر است، پس بر $x-۱$ و $x+۱$ هم بخش‌پذیر است. یعنی $P(-۱)=P(۱)=۰$. از طرف دیگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ برابر $Q(۲)$ است. بنابراین

$$Q(x)=P(x-۱)+P(۱-x)\Rightarrow Q(۲)=P(۱)+P(-۱)=۰$$

توجه در صورت سؤال نوشته شده است «حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$» که معلوم نیست چیه! ولی احتمالاً منظور همین «باقی‌مانده» بوده است.

۲۷۹۴- گزینهٔ ۱ مجموع جواب‌ها و حاصل‌ضرب جواب‌ها در معادلهٔ $۳x^۲+(۲m-۱)x+۲-m=۰$ به‌ترتیب برابر $\frac{۱-۲m}{۳}$ و $\frac{۲-m}{۳}$ هستند، پس

$$\frac{۱-۲m}{۳}=\frac{۳}{۲-m}\Rightarrow(۱-۲m)(۲-m)=۹\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷=۰$$

$$(m+۱)(۲m-۷)=۰\Rightarrow m=-۱\,,m=\frac{۷}{۲}$$

به‌ازای $m=-۱$ معادله به‌صورت $۳x^۲-۳x+۳=۰$ در می‌آید که جواب ندارد، پس فقط $m=\frac{۷}{۲}$ قابل قبول است.

۲۷۹۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳\Rightarrow-۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}-۲<۱\Rightarrow-۱<\frac{-۳x+۳}{۲x-۱}<۱$$

$$\left|\frac{-۳x+۳}{۲x-۱}\right|<۱\Rightarrow|۳x-۳|<|۲x-۱|$$

بنابراین نامعادله به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$(۳x-۳)^۲<(۲x-۱)^۲\Rightarrow(۳x-۳)^۲-(۲x-۱)^۲<۰$$

$$(۳x-۳+۲x-۱)(۳x-۳-۲x+۱)<۰$$

$$(۵x-۴)(x-۲)<۰\Rightarrow\frac{۴}{۵}<x<۲\Rightarrow x\in(۰/۸\,,۲)$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که عدد ۱ در نامعادله صدق می‌کند، زیرا $۱<\frac{۱+۱}{۲-۱}<۳$

همچنین عدد $\frac{۳}{۲}$ در نامعادله صدق می‌کند

$$۱<\frac{\frac{۳}{۲}+۱}{۲(\frac{۳}{۲})-۱}<۳\Leftrightarrow ۱<\frac{۵}{۴}<۳$$

این اعداد فقط عضو بازهٔ گزینهٔ (۴) هستند.

راه‌حل سوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳\Rightarrow\frac{x+۱-۶x+۳}{۲x-۱}<۰\Rightarrow\frac{-۵x+۴}{۲x-۱}<۰\Rightarrow x\in(-\infty,\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۴}{۵},+\infty)$$

$$\frac{x+۱}{۲x-۱}>۱\Rightarrow\frac{x+۱-۲x+۱}{۲x-۱}>۰\Rightarrow\frac{-x+۲}{۲x-۱}>۰\Rightarrow x\in(\frac{۱}{۲},۲)$$

از اشتراک دو مجموعهٔ جواب به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$x\in(\frac{۴}{۵},۲)=(۰/۸\,,۲)$$

۲۷۹۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** مختصات نقاط را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم:

$$y=ax^۲+bx+c$$

$$\begin{cases}x=۰\\y=۵\end{cases}\Rightarrow ۰+۰+c=۵\Rightarrow c=۵\,,\quad\begin{cases}x=۱\\y=۱۱\end{cases}\Rightarrow a+b+c=۱۱\Rightarrow a+b=۶$$

$$\begin{cases}x=-۲\\y=۵\end{cases}\Rightarrow ۴a-۲b+c=۵\Rightarrow ۴a-۲b=۰\Rightarrow b=۲a$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=۶\\b=۲a\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=۲$ و $b=۴$. پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=۲x^۲+۴x+۵$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

راه‌حل دوم چون سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ از نقاط $(۰,۵)$، $(-۲,۵)$ و $(۱,۱۱)$ می‌گذرد، پس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c-۵$ از نقاط $(۰,۰)$، $(-۲,۰)$ و $(۱,۶)$ می‌گذرد و معادلهٔ سهمی‌ای که از این نقاط می‌گذرد به صورت $y=a(x-۰)(x+۲)=a(x^۲+۲x)$ است. این سهمی از نقطهٔ $(۱,۶)$ می‌گذرد. پس

$$۶=a(۱+۲)\Rightarrow a=۲$$

بنابراین معادلهٔ سهمی اولیه به‌صورت $y=۲x^۲+۴x+۵$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

راه‌حل سوم چون عرض نقاط $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ یکسان است، پس طول رأس این سهمی برابر -۱ است. بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل کلی $y=m(x+۱)^۲+n$ است. این سهمی از نقاط $(۰,۵)$ و $(۱,۱۱)$ می‌گذرد. پس

$$(۰,۵)\in\text{سهمی}\Rightarrow m+n=۵$$

$$(۱,۱۱)\in\text{سهمی}\Rightarrow ۴m+n=۱۱$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}m+n=۵\\۴m+n=۱۱\end{cases}$ به‌دست می‌آید $m=۲$ و $n=۲$. در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت $y=۲(x+۱)^۲+۳$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

۲۷۹۷- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دوازده واحد به راست ببریم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را دو واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}+۲$ حاصل می‌شود. نقطهٔ برخورد نمودار توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱۲}+۲$ مد نظر است که طول آن از حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{x}=\sqrt{x-۱۲}+۲\Rightarrow\sqrt{x}-۲=\sqrt{x-۱۲}\Rightarrow x+۴-۴\sqrt{x}=x-۱۲$$

$$۱۶=۴\sqrt{x}\Rightarrow ۴=\sqrt{x}\Rightarrow x=۱۶$$

پس نقطهٔ مورد نظر $A(۱۶,۴)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۱۷}$$

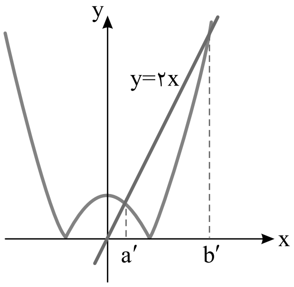
توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حل هندسی معادلات در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۷۹۸- گزینهٔ ۱ نمودار تابع‌های $f(x)=|۲x^۲-۴|=۲|x^۲-۲|$ و $g(x)=۲x$ به‌صورت زیر است. واضح است که در بازهٔ (a',b') نمودار تابع f زیر نمودار تابع g قرار دارد. پس کافی است نقاط a' و b' را معلوم کنیم که جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هستند:

$$۲|x^۲-۲|=۲x\Rightarrow|x^۲-۲|=x$$

$$x\geq۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۲=x\\x^۲-۲=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=۲\ ,\ x=-۱\ (\text{غ.ق.ق.})\\x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x=-۲\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی است که $a=a'=۱$ و $b=b'=۲$ و در نتیجه $b-a=۱$.



توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حل هندسی معادلات و نامعادلات در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۷۹۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید $D_f=D_g=\mathbb{R}$، بنابراین $D_{gof}=\mathbb{R}$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(f(x))=-f^۲(x)+۴f(x)=۴-(f(x)-۲)^۲$$
$$=۴-(۲x-[۲x]-۲)^۲$$

اکنون توجه کنید که

$$۰\leq۲x-[۲x]<۱\Rightarrow-۲\leq۲x-[۲x]-۲<-۱$$

$$۱<(۲x-[۲x]-۲)^۲\leq۴\Rightarrow-۴\leq-(۲x-[۲x]-۲)^۲<-۱$$

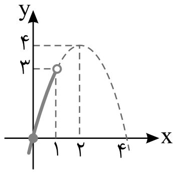
$$۰\leq۴-(۲x-[۲x]-۲)^۲<۳\Rightarrow۰\leq(gof)(x)<۳$$

بنابراین برد تابع gof بازهٔ $[۰,۳)$ است.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$۰\leq۲x-[۲x]<۱\Rightarrow۰\leq f(x)<۱$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(t)=-t^۲+۴t,\quad ۰\leq t<۱$$



بنابراین نمودار تابع g به صورت مقابل است و در نتیجه $۰\leq g(t)<۳$، یعنی

$$R_{gof}=[۰,۳)$$

۲۸۰۰- گزینهٔ ۳ چون $g(x)=f^{-۱}(x)$، پس

$$g(۶)+g(۱۲)=f^{-۱}(۶)+f^{-۱}(۱۲)$$

از طرف دیگر، $f(x)=x+\sqrt{x}$، $f(۴)=۴+۲=۶$ و $f(۹)=۹+۳=۱۲$. بنابراین $f^{-۱}(۶)=۴$ و $f^{-۱}(۱۲)=۹$ و در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر ۱۳ است.

۲۸۰۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(a,-a)$ که $a>۰$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع کند. در این صورت $f^{-۱}(a)=-a$ و در نتیجه $f(-a)=a$. بنابراین

$$-a-\frac{۲}{-a}=a\Rightarrow۲a=\frac{۲}{a}\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=۱$$

راه‌حل دوم ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{۲}{x},\quad x<۰\Rightarrow y=\frac{x^۲-۲}{x}\Rightarrow xy=x^۲-۲\Rightarrow x^۲-yx-۲=۰$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{y+\sqrt{y^۲+۸}}{۲}>۰\ (\text{غ. ق. ق.})\\x=\dfrac{y-\sqrt{y^۲+۸}}{۲}\end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{x-\sqrt{x^۲+۸}}{۲}$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-\sqrt{x^۲+۸}}{۲}=-x\Rightarrow\sqrt{x^۲+۸}=۳x\quad(x>۰)$$

$$x^۲+۸=۹x^۲\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=۱,\ x=-۱\ (\text{غ.ق.ق.})$$

۲۸۰۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\log_۴۳=\frac{۸}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\log_۲۳=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\log_۲۳=\frac{۸}{۵}$$

بنابراین

$$\log_{۱۲}۶=\frac{\log_۲۶}{\log_۲۱۲}=\frac{\log_۲۳+\log_۲۲}{\log_۲۳+۲\log_۲۲}=\frac{\frac{۸}{۵}+۱}{\frac{۸}{۵}+۲}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_۴۳=۰/۸=\frac{۴}{۵}\Rightarrow۴^{\frac{۴}{۵}}=۳\Rightarrow۴^۴=۳^۵\Rightarrow۲^۸=۳^۵$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{۱۲}۶=\log_{۱۲}۳+\log_{۱۲}۲=\log_{۲^۲\times۳}۳+\log_{۲^۲\times۳}۲$$
$$=۴\log_{(۲^۸\times۳^۴)}۳+۵\log_{(۲^{۱۰}\times۳^۵)}۲=۴\log_{(۳^۵\times۳^۴)}۳+۵\log_{(۲^{۱۰}\times۲^۸)}۲$$
$$=۴\log_{۳^۹}۳+۵\log_{۲^{۱۸}}۲=\frac{۴}{۹}\log_۳۳+\frac{۵}{۱۸}\log_۲۲=\frac{۴}{۹}+\frac{۵}{۱۸}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

۲۸۰۳- گزینهٔ ۲ از نمودار تابع f معلوم است که $f(-\frac{۱}{۳})=۰$ و $f(۰)=-۲$. بنابراین

$$f(x)=-۴+۲^{ax+b}\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=-۴+۲^{b}=-۲\\ f(-\frac{۱}{۳})=-۴+۲^{-\frac{a}{۳}+b}=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}۲^{b}=۲\Rightarrow b=۱\\ ۲^{-\frac{a}{۳}+۱}=۴\Rightarrow-\frac{a}{۳}+۱=۲\Rightarrow a=-۳\end{cases}$$

پس $f(x)=-۴+۲^{-۳x+۱}\Rightarrow f(-\frac{۵}{۳})=-۴+۲^{۶}=۶۰$

۲۸۰۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $f^{-۱}(۲)=a>۰$. در این صورت $f(a)=۲$ و در نتیجه

$$\frac{۲^{a}+(\frac{۱}{۲})^{a}}{۲}=۲\Rightarrow ۲^{a}+\frac{۱}{۲^{a}}=۴$$

با فرض $b=۲^{a}>۰$ معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$b+\frac{۱}{b}=۴\Rightarrow b^{۲}-۴b+۱=۰\Rightarrow b=۲+\sqrt{۳},\ b=۲-\sqrt{۳}\ (\text{غ.ق.})$$

(اگر $b=۲-\sqrt{۳}$، آن‌گاه $a=\log_{۲}(۲-\sqrt{۳})<۰$ که با توجه به دامنهٔ داده شده قابل قبول نیست.) پس

$$۲^{a}=۲+\sqrt{۳}\Rightarrow a=\log_{۲}(۲+\sqrt{۳})$$

راه‌حل دوم تابع وارون تابع $f(x)=\frac{۲^{x}+(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}$ با دامنهٔ $[۰,+\infty)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲^{x}+(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}\Rightarrow ۲y=۲^{x}+\frac{۱}{۲^{x}}$$

اگر فرض کنیم $t=۲^{x}>۰$، آن‌گاه

$$۲y=t+\frac{۱}{t}\Rightarrow t^{۲}-۲yt+۱=۰\Rightarrow t=y\pm\sqrt{y^{۲}-۱}\Rightarrow ۲^{x}=y\pm\sqrt{y^{۲}-۱}$$

چون $x\geq ۰$، پس فقط $y+\sqrt{y^{۲}-۱}$ قابل قبول است. بنابراین

$$x=\log_{۲}(y+\sqrt{y^{۲}-۱})\Rightarrow f^{-۱}(x)=\log_{۲}(x+\sqrt{x^{۲}-۱})$$

در نتیجه $f^{-۱}(۲)=\log_{۲}(۲+\sqrt{۳})$.

۲۸۰۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan ۳۰۰^{\circ}=\tan(۳۶۰^{\circ}-۶۰^{\circ})=-\tan ۶۰^{\circ}=-\sqrt{۳}$$

$$\cos ۲۱۰^{\circ}=\cos(۱۸۰^{\circ}+۳۰^{\circ})=-\cos ۳۰^{\circ}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۴۸۰^{\circ}=\tan(۴۵۰^{\circ}+۳۰^{\circ})=\tan(۵\times۹۰^{\circ}+۳۰^{\circ})=-\cot ۳۰^{\circ}=-\sqrt{۳}$$

$$\sin ۸۴۰^{\circ}=\sin(۸۱۰^{\circ}+۳۰^{\circ})=\sin(۹\times۹۰^{\circ}+۳۰^{\circ})=\cos ۳۰^{\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین

$$\tan ۳۰۰^{\circ}\cos ۲۱۰^{\circ}+\tan ۴۸۰^{\circ}\sin ۸۴۰^{\circ}$$
$$=(-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$

۲۸۰۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=a+b\cos x$$

پس ماکزیمم تابع برابر $a+|b|$ است که با توجه به شکل برابر ۳ است. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{۷\pi}{۳},۰)$ عبور می‌کند. پس

$$a+b\cos\frac{۷\pi}{۳}=۰\Rightarrow a+b\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{۳}=۰$$

$$a+\frac{b}{۲}=۰\Rightarrow a=-\frac{b}{۲}$$

بنابراین $a+|b|=۳\Rightarrow-\frac{b}{۲}+|b|=۳$

با توجه به نمودار تابع واضح است که b مقداری منفی است، پس

$$-\frac{b}{۲}-b=۳\Rightarrow b=-۲$$

۲۸۰۷- گزینهٔ ۴ حداکثر مقدار و حداقل مقدار تابع $y=a\sin(bx)+c$ به‌ترتیب برابر $|a|+c$ و $-|a|+c$ است که روی شکل برابر ۱ و ۳- نشان داده شده است. پس

$$\begin{cases}|a|+c=۱\\ -|a|+c=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-۱\\ |a|=۲\end{cases}$$

از طرف دیگر، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است که روی شکل برابر $\frac{۹\pi}{۲}-(-\frac{۳\pi}{۲})=۶\pi$ نشان داده شده است. پس

$$\frac{۲\pi}{|b|}=۶\pi\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۳}$$

پس

$$|\frac{a}{b}|=\frac{۲}{\frac{۱}{۳}}=۶\Rightarrow\frac{a}{b}=\pm۶$$

ولی چون نمودار رسم شده در یک همسایگی راست صفر نزولی است، a و b باید غیرهم‌علامت باشند، پس $\frac{a}{b}=-۶$.

۲۸۰۸- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$$

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-x-\frac{\pi}{۴})$$

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴}-x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}-x\\ ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\\ x=(۲k+۱)\pi\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

چون شرط $x\neq k\pi$ قرار داده شده است، پس $x=(۲k+۱)\pi$ قابل قبول نیست.

۲۸۰۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=-۲$ تابع $y=[x]$ با تابع $y=-۳$ برابر است. بنابراین

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{-۳+۳}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^-}۰=۰$$

۲۸۱۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x^n-۱۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{۴x^n}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\begin{cases}n=۱\\ a=\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

بنابراین **راه‌حل اول**

$$\lim_{x\to۳}f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}=\frac{۱}{۱۲}\lim_{x\to۳}\frac{۲x-۳\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{x-۳}$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\lim_{x\to۳}\left(\frac{۸x^۳-۲۷(x^۲-۱)}{x-۳}\times\frac{۱}{۴x^۲+۶x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+۹\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}\right)$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\lim_{x\to۳}\frac{(x-۳)(۸x^۲-۳x-۹)}{x-۳}$$

$$\times\lim_{x\to۳}\frac{۱}{۴x^۲+۶x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+۹\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\lim_{x\to۳}(۸x^۲-۳x-۹)\times\frac{۱}{۳۶+۳۶+۳۶}$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\times(۷۲-۹-۹)\times\frac{۱}{۳۶\times۳}=\frac{۱}{۲۴}$$

راه‌حل دوم به کمک قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۳}f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}}{۴}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۲\times۳}{۳\times۴}}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حد تابع رادیکالی در بی‌نهایت در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۸۱۱- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$f'_-(-۲)=f'_+(-۲),\quad f(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵-۲x} & x\leq-۲\\ -\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c & x>-۲\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{\sqrt{۵-۲x}} & x\leq-۲\\ -x+b & x>-۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_-(-۲)=-\frac{۱}{\sqrt{۵+۴}}=-\frac{۱}{۳}\\ f'_+(-۲)=-(-۲)+b=b+۲\end{cases}\Rightarrow b+۲=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=-\frac{۷}{۳}$$

$$\begin{cases}f(-۲)=\sqrt{۵+۴}=۳\\ \lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(-\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c)=-۲-۲b+c=c+\frac{۸}{۳}\end{cases}$$

$$c+\frac{۸}{۳}=۳\Rightarrow c=\frac{۱}{۳}$$

۲۸۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳=\frac{x^۲+۲x}{(x^۲-x)^۳}=\frac{x(x+۲)}{x^۳(x-۱)^۳}=\frac{x+۲}{x^۲(x-۱)^۳}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{x^۲(x-۱)^۳-(۲x(x-۱)^۳+۳(x-۱)^۲x^۲)(x+۲)}{(x^۲(x-۱)^۳)^۲}$$

در نتیجه

$$f'(۲)=\frac{۴\times۱^۳-(۴(۱)^۳+۳(۱)^۲\times۴)(۴)}{(۴(۱)^۳)^۲}=-\frac{۱۵}{۴}$$

۲۸۱۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt{۴x-x^۲}\Rightarrow f'(x)=۱+\frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^۲}}=\frac{\sqrt{۴x-x^۲}+۲-x}{\sqrt{۴x-x^۲}}$$

واضح است که $x=۰$ و $x=۴$ نقاط بحرانی تابع‌اند ولی چون تابع f در یک همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود، پس این نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند. بنابراین باید معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به‌دست آید:

$$\sqrt{۴x-x^۲}+۲-x=۰\Rightarrow\sqrt{۴x-x^۲}=x-۲,\quad x>۲$$

$$۴x-x^۲=x^۲-۴x+۴\Rightarrow۲x^۲-۸x+۴=۰$$

$$x^۲-۴x+۲=۰\Rightarrow x=۲+\sqrt{۲}\,,\,x=۲-\sqrt{۲}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین نقطهٔ $A(۲+\sqrt{۲}\,,\,۲+۲\sqrt{۲})$ نقطهٔ اکسترمم (ماکزیمم) نسبی تابع f است که فاصلهٔ آن از نیمساز ناحیهٔ اول برابر است با

$$\frac{|۲+۲\sqrt{۲}-(۲+\sqrt{۲})|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۱$$

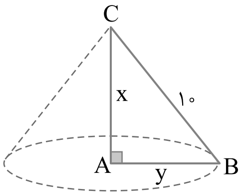
۲۸۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x^۲+y^۲=۱۰$. پس $y^۲=۱۰-x^۲$. اگر مثلث را حول ضلع AC دوران دهیم، مخروطی به‌دست می‌آید که شعاع قاعدهٔ آن برابر y و ارتفاع آن برابر x است، پس حجم حاصل برابر $V=\frac{\pi}{۳}y^۲x$ خواهد بود. بنابراین می‌خواهیم حداکثر مقدار تابع $V(x)=\frac{\pi}{۳}x(۱۰-x^۲)$ حاصل شود.

$$V(x)=\frac{\pi}{۳}(۱۰x-x^۳)\Rightarrow V'(x)=\frac{\pi}{۳}(۱۰-۳x^۲)$$

$$V'(x)=۰\Rightarrow x=\sqrt{\frac{۱۰}{۳}}\Rightarrow y^۲=۱۰-\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow y=\sqrt{۲}\sqrt{\frac{۱۰}{۳}}$$

بنابراین

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{۲}\sqrt{\frac{۱۰}{۳}}}{\sqrt{\frac{۱۰}{۳}}}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}$$



۲۸۱۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید فرد A و فرد B نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند. تعداد حالت‌های مورد نظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\underset{\substack{\text{دعوت شود A}\\ \text{دعوت نشود B و}}}{\binom{۷}{۴}}+\underset{\substack{\text{دعوت شود B}\\ \text{دعوت نشود A و}}}{\binom{۷}{۴}}+\underset{\substack{\text{هیچ کدام B و A}\\ \text{دعوت نشوند}}}{\binom{۷}{۵}}=۲\times۳۵+۲۱=۹۱$$

راه‌حل دوم تعداد حالت‌هایی که دو فرد A و B با هم به مهمانی دعوت می‌شوند، برابر $\binom{۷}{۳}$ است و تعداد کل حالت‌های دعوت ۵ نفر از ۹ نفر برابر $\binom{۹}{۵}$ است، پس تعداد حالت‌هایی که دو نفر A و B با هم به مهمانی دعوت نشوند، برابر است با

$$\binom{۹}{۵}-\binom{۷}{۳}=۱۲۶-۳۵=۹۱$$

۲۸۱۶- گزینهٔ ۳ تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۸ کتاب در کنار یکدیگر برابر !۸ است و تعداد حالت‌هایی که ۳ کتاب انگلیسی کنار هم و ۵ کتاب فارسی کنار هم قرار می‌گیرند، برابر $۲\times۵!\times۳!$ است. پس احتمال پیشامد مطلوب برابر است با $\frac{۲\times۵!\times۳!}{۸!}=\frac{۱}{۲۸}$.

۲۸۱۷- گزینهٔ ۲ ابتدا ۱۰ واحد از داده‌ها کم می‌کنیم، سپس میانگین و انحراف معیار داده‌های جدید را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که میانگین داده‌های اصلی ۱۰ واحد بیشتر از میانگین داده‌های جدید خواهد بود ولی انحراف معیار تغییری نخواهد کرد.

$$۰,۰,۰,۰,۰,۱,۱,۱,۱,۴,۴,۴,۴,۴,۴,۴$$

$$\overline{x}=\frac{۴\times۱+۷\times۴}{۱۶}=۲$$

$$\sigma^۲=\frac{۵(۰-۲)^۲+۴(۱-۲)^۲+۷(۴-۲)^۲}{۱۶}=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow\sigma=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

بنابراین میانگین داده‌های اصلی برابر ۱۲ و انحراف معیار آن‌ها برابر $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ است و در نتیجه ضریب تغییرات آن‌ها برابر است با

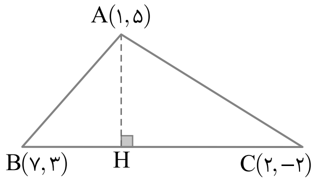
$$cv=\frac{\sigma}{\overline{x}}=\frac{\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}}{۱۲}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲۴}\simeq۰/۱۵$$

۲۸۱۸- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ خط BC را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{۳-(-۲)}{۷-۲}=۱$$

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-۳=۱\times(x-۷)$$

پس معادلهٔ خط BC به‌صورت $x-y-۴=۰$ است. طول ارتفاع AH برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC است که برابر است با $\frac{|۱-۵-۴|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}$.



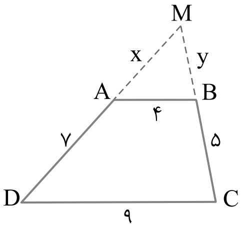
۲۸۱۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** مطابق شکل زیر و با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس می‌توان نوشت

$$\triangle MDC: AB||DC\Rightarrow\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{x}{x+۷}=\frac{y}{y+۵}=\frac{۴}{۹}$$

بنابراین

$$۹x=۴x+۲۸\Rightarrow x=\frac{۲۸}{۵},\quad ۹y=۴y+۲۰\Rightarrow y=۴$$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با $x+y+۴=\frac{۲۸}{۵}+۴+۴=۱۳/۶$.



راه‌حل دوم چون $AB||DC$ ، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، مثلث‌های MAB و MDC متشابه‌اند. پس نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست.

$$\frac{(MAB)\ \text{محیط}}{(MDC)\ \text{محیط}}=\frac{AB}{DC}=\frac{۴}{۹}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل در}}$$

$$\frac{(MAB)\ \text{محیط}}{(MDC)\ \text{محیط}-(MAB)\ \text{محیط}}=\frac{۴}{۹-۴}\Rightarrow\frac{(MAB)\ \text{محیط}}{AD+DC+BC-AB}=\frac{۴}{۵}$$

$$(MAB)\ \text{محیط}=\frac{۴}{۵}(۷+۹+۵-۴)=\frac{۴}{۵}\times۱۷=۱۳/۶$$

توجه برخلاف ادعای سؤال، چهارضلعی ABCD یک ذوزنقه است. در واقع، اگر ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه $AB=DC$ و $AD=BC$ که چنین نیست!

۲۸۲۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $BC=\sqrt{۳+۴}=\sqrt{۷}$. اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

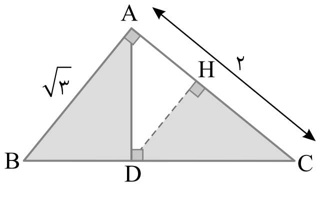
$$BD\times BC=AB^۲\Rightarrow BD\sqrt{۷}=\sqrt{۳}^۲\Rightarrow BD=\frac{۳}{\sqrt{۷}}$$

در نتیجه

$$DC=BC-BD=\sqrt{۷}-\frac{۳}{\sqrt{۷}}=\frac{۴}{\sqrt{۷}}$$

اکنون توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABD و CDH متشابه هستند (ز ز) و نسبت مساحت آن‌ها برابر مربع نسبت اندازهٔ اضلاع آن‌هاست:

$$\frac{S_{CDH}}{S_{ABD}}=(\frac{CD}{AB})^۲=(\frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}})^۲=\frac{\frac{۱۶}{۷}}{۳}=\frac{۱۶}{۲۱}$$



۲۸۲۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}\times\frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}-۹-۴+\sqrt{۳}}{۱۶-۳}$$

$$=\frac{۱۳\sqrt{۳}-۱۳}{۱۳}=\sqrt{۳}-۱$$

همچنین

$$(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}+(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\sqrt{۳}-۱+۲+\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}+۱$$

۲۸۲۲- گزینهٔ ۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنبالهٔ حسابی را به ترتیب a، $a+۴d$ و $a+۱۳d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند، پس

$$a(a+۱۳d)=(a+۴d)^۲\Rightarrow a^۲+۱۳ad=a^۲+۸ad+۱۶d^۲$$

$$۵ad=۱۶d^۲\Rightarrow a=\frac{۱۶}{۵}d$$

(توجه کنید که $d\neq ۰$. چون در غیر این صورت، $q=۱$ که در گزینه‌ها وجود ندارد.)

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با

$$r=\frac{a+۴d}{a}=\frac{\frac{۱۶}{۵}d+۴d}{\frac{۱۶}{۵}d}=\frac{۳۶d}{۱۶d}=\frac{۹}{۴}$$

۲۸۲۳- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$ به ترتیب ۳ و ۱ است، پس $P(۴)=۳$ و $P(-۲)=۱$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $A(x)=P(x^۲)+۴P(-x)$ بر $x-۲$ برابر $A(۲)$ است و برابر است با

$$A(۲)=P(۴)+۴P(-۲)=۳+۴\times۱=۷$$

۲۸۲۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون معادله دو جواب مثبت دارد، پس شرایط $\Delta>۰$، $\frac{c}{a}>۰$ و $-\frac{b}{a}>۰$ برقرار هستند. در اینجا $a=۲$، $b=m$ و $c=m+۶$. پس

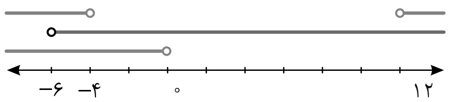
$$\Delta=b^۲-۴ac=m^۲-۴\times۲(m+۶)>۰\Rightarrow m^۲-۸m-۴۸>۰$$

$$(m-۱۲)(m+۴)>۰\Rightarrow m>۱۲ \text{ یا } m<-۴ \qquad (۱)$$

$$\frac{c}{a}>۰\Rightarrow\frac{m+۶}{۲}>۰\Rightarrow m>-۶ \qquad (۲)$$

$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow-\frac{m}{۲}>۰\Rightarrow m<۰ \qquad (۳)$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک مجموعهٔ جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) به صورت $m\in(-۶,-۴)$ است.



راه‌حل دوم توجه کنید که به ازای $m=-۵$ معادله به صورت $۲x^۲-۵x+۱=۰$ در می‌آید که به وضوح دو جواب مثبت دارد چون $\Delta=۱۷>۰$، $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}>۰$ و $-\frac{b}{a}=\frac{۵}{۲}>۰$. پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب نیستند. از طرف دیگر به ازای $m=-۱$ معادله به صورت $۲x^۲-x+۵=۰$ در می‌آید که جواب ندارد، زیرا $\Delta=-۳۹<۰$. پس گزینهٔ (۳) هم جواب نیست و گزینهٔ (۴) جواب است.

۲۸۲۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۲x-۱}{x+۱}<۳\Rightarrow\frac{۲x-۱-۳x-۳}{x+۱}<۰\Rightarrow\frac{x+۴}{x+۱}>۰$$

$$x\in(-\infty,-۴)\cup(-۱,+\infty) \qquad (۱)$$

$$\frac{۲x-۱}{x+۱}>-۱\Rightarrow\frac{۲x-۱+x+۱}{x+۱}>۰\Rightarrow\frac{۳x}{x+۱}>۰$$

$$x\in(-\infty,-۱)\cup(۰,+\infty) \qquad (۲)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$x\in(-\infty,-۴)\cup(۰,+\infty)=\mathbb{R}-[-۴,۰]$$

راه‌حل دوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-۱<\frac{۲x-۱}{x+۱}<۳\Rightarrow-۲<\frac{۲x-۱}{x+۱}-۱<۲\Rightarrow-۲<\frac{x-۲}{x+۱}<۲$$

$$\left|\frac{x-۲}{x+۱}\right|<۲\Rightarrow|x-۲|<۲|x+۱|\Rightarrow x^۲-۴x+۴<۴x^۲+۸x+۴$$

$$x^۲+۴x>۰\Rightarrow x\in(-\infty,-۴)\cup(۰,+\infty)$$

راه‌حل سوم واضح است که $x=۰$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ (۴) جواب نیست. از طرف دیگر، $x=-۵$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب درست نیستند، بنابراین گزینهٔ (۳) جواب است.

۲۸۲۶- گزینهٔ ۲ چون رأس سهمی نقطهٔ $(-۱,۹)$ است، پس معادلهٔ آن به صورت $y=a(x+۱)^۲+۹$ است. این سهمی از نقطهٔ $(۳,۱)$ می‌گذرد، پس

$$۱=a(۳+۱)^۲+۹\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-\frac{۱}{۲}(x+۱)^۲+۹$ است که از نقطهٔ $(۵,-۹)$ می‌گذرد:

$$-\frac{۱}{۲}(۵+۱)^۲+۹=-۱۸+۹=-۹$$

۲۸۲۷- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^۲-۲x\,,(x>۱)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-x^۲+۲x$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را شانزده واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-x^۲+۲x+۱۶$ به‌دست می‌آید. نقطهٔ برخورد نمودار تابع اخیر و نمودار تابع اولیه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x^۲-۲x=-x^۲+۲x+۱۶\Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰$$

$$(x-۴)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۴, x=-۲ \ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴,۸)$ از مبدأ مختصات را پیدا کنیم که برابر است با

$$OA=\sqrt{۴^۲+۸^۲}=۴\sqrt{۵}$$

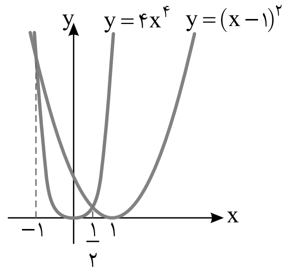
۲۸۲۸- گزینهٔ ۲ در نقاطی که طول آن‌ها عضو مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(x-۱)^۲>۴x^۴$ باشد، نمودار تابع $y=(x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار تابع $y=۴x^۴$ قرار دارد:

$$۴x^۴<(x-۱)^۲\Rightarrow(۲x)^۲-(x-۱)^۲<۰$$

$$(۲x^۲+x-۱)(۲x^۲-x+۱)<۰$$

عبارت $۲x^۲-x+۱$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta=۱-۸<۰$. بنابراین باید نامعادلهٔ $۲x^۲+x-۱<۰$ را حل کنیم: $(x+۱)(۲x-۱)<۰\Rightarrow-۱<x<\frac{۱}{۲}$

در بـازهٔ $(-۱,\frac{۱}{۲})$ چنیـن اتفاقـی می‌افتـد. در نتیجه بیشـترین مقـدار $b-a$ برابر $\frac{۱}{۲}-(-۱)=\frac{۳}{۲}$ اسـت. توجه کنید که نمودار تابع‌های $y=(x-۱)^۲$ و $y=۴x^۴$ به صورت زیر است:

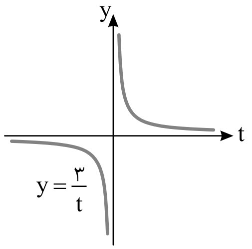


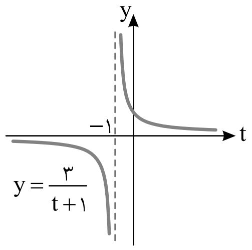
۲۸۲۹- گزینهٔ ③ ابتدا توجه کنید که

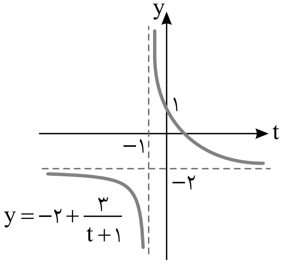
$$۰\leq x-[x]<۱\Rightarrow -۱<[x]-x\leq ۰\Rightarrow -۱<f(x)\leq ۰$$

بنابراین تابع gof با تابع $y=\frac{۱-۲t}{t+۱}$ که دامنهٔ آن بازهٔ $(-۱,۰]$ است، برابر است. برد این تابع را به‌دست می‌آوریم:

راه‌حل اول نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود: $y=\frac{۱-۲t}{t+۱}=-۲+\frac{۳}{t+۱}$







واضح است که برد تابع gof بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.

راه‌حل دوم به کمک نابرابری‌ها برد تابع را به‌دست می‌آوریم: $y=-۲+\frac{۳}{t+۱}$

$$-۱<t\leq ۰\Rightarrow ۰<t+۱\leq ۱\Rightarrow \frac{۱}{t+۱}\geq ۱\Rightarrow \frac{۳}{t+۱}\geq ۳\Rightarrow -۲+\frac{۳}{t+۱}\geq ۱\Rightarrow y\geq ۱$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[۱,+\infty)$ اسـت. توجـه کنید که به ازای هر $y\geq ۱$ مقداری مانند t وجود دارد که $y=-۲+\frac{۳}{t+۱}$. این مقدار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y+۲=\frac{۳}{t+۱}\Rightarrow t+۱=\frac{۳}{y+۲}\Rightarrow t=-۱+\frac{۳}{y+۲}$$

راه‌حل سـوم تابع $g(t)=\frac{۱-۲t}{t+۱}$ روی بازهٔ $(-۱,۰]$ پیوسـته و نزولی اسـت. بنابراین برد آن برابر است با

$$[g(۰),\lim_{t\to(-۱)^+}g(t))=[۱,+\infty)$$

۲۸۳۰- گزینهٔ ③ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=x+۲\sqrt{x}=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱$$

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱\Rightarrow(\sqrt{x}+۱)^۲=y+۱\quad(y\geq -۱)$$

$$\sqrt{x}+۱=\sqrt{y+۱}\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y+۱}-۱$$

$$x=(\sqrt{y+۱}-۱)^۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲\quad(x\geq -۱)$$

$$g(۳)+g(۱۵)=f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=x+۲\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}f(۱)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۱\\ f(۹)=۱۵\Rightarrow f^{-۱}(۱۵)=۹\end{cases}$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow g(۳)+g(۱۵)=f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

۲۸۳۱- گزینهٔ ④ **راه‌حل اول** ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{۱}{۲x},\quad x>۰$$

$$y=\frac{۲x^۲-۱}{۲x}\Rightarrow ۲xy=۲x^۲-۱\Rightarrow ۲x^۲-۲yx-۱=۰$$

$$\begin{cases}x=\frac{۲y+\sqrt{۴y^۲+۸}}{۴}\\ x=\frac{۲y-\sqrt{۴y^۲+۸}}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{y+\sqrt{y^۲+۲}}{۲}\\ x=\frac{y-\sqrt{y^۲+۲}}{۲}<۰\quad(\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+\sqrt{x^۲+۲}}{۲}$$

طـول نقطهٔ برخـورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با نیمسـاز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x+\sqrt{x^۲+۲}}{۲}=-x\Rightarrow\sqrt{x^۲+۲}=-۳x\quad(x<۰)$$

$$x^۲+۲=۹x^۲\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ (\text{غ.ق.ق}),\ x=-\frac{۱}{۲}$$

راه‌حـل دوم فرض کنید نقطهٔ $(a,-a)$ نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با خط $y=-x$ (نیمساز ناحیهٔ دوم) باشد $(a<۰)$. بنابراین

$$f^{-۱}(a)=-a\Rightarrow f(-a)=a\Rightarrow -a-\frac{۱}{-۲a}=a$$

$$۲a=\frac{۱}{۲a}\Rightarrow ۴a^۲=۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۲۸۳۲- گزینهٔ ② **راه‌حـل اول** ابتـدا توجه کنید کـه $\log_۳ ۲=\frac{۵}{۸}$، پس $\log_۲ ۳=\frac{۸}{۵}$. بنابراین

$$\log_{۱۸} ۸=\frac{\log_۲ ۸}{\log_۲ ۱۸}=\frac{۳\log_۲ ۲}{\log_۲ ۹+\log_۲ ۲}=\frac{۳}{۲\log_۲ ۳+۱}=\frac{۳}{۲\times\frac{۸}{۵}+۱}=\frac{۵}{۷}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_{۳} ۲=\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۳^{\frac{۵}{۸}}=۲\Rightarrow ۳^{۵}=۲^{۸}\Rightarrow ۳^{۱۰}=۲^{۱۶}$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{۱۸} ۸=\log_{۳^{۲}\times۲} ۲^{۳}=۳\log_{۳^{۲}\times۲} ۲=۳\times۵\log_{۳^{۱۰}\times۲^{۵}} ۲$$

$$=۱۵\log_{۲^{۱۶}\times۲^{۵}} ۲=۱۵\log_{۲^{۲۱}} ۲=\frac{۱۵}{۲۱}\log_{۲} ۲=\frac{۵}{۷}$$

۲۸۳۳- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع واضح است که $f(۰)=-۶$ و $f(\frac{۱}{۲})=۰$. بنابراین

$$f(x)=-۹+(\frac{۱}{۳})^{ax+b}$$

$$\begin{cases} f(۰)=-۹+(\frac{۱}{۳})^{b}=-۶ \\ f(\frac{۱}{۲})=-۹+(\frac{۱}{۳})^{\frac{۱}{۲}a+b}=۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۳^{-b}=۳\Rightarrow b=-۱ \\ ۳^{-\frac{a}{۲}+۱}=۹\Rightarrow-\frac{a}{۲}+۱=۲\Rightarrow a=-۲ \end{cases}$$

پس

$$f(x)=-۹+(\frac{۱}{۳})^{-۲x-۱}\Rightarrow f(۲)=-۹+(\frac{۱}{۳})^{-۵}=۲۳۴$$

۲۸۳۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع وارون تابع $f(x)=\frac{۲^{x}-(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲^{x}-(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}\Rightarrow ۲y=۲^{x}-\frac{۱}{۲^{x}}$$

اگر فرض کنیم $t=۲^{x}>۰$، آن‌گاه

$$۲y=t-\frac{۱}{t}\Rightarrow t^{۲}-۲yt-۱=۰\Rightarrow\begin{cases} t=y+\sqrt{y^{۲}+۱} \\ t=y-\sqrt{y^{۲}+۱}<۰ \quad (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases}$$

$$۲^{x}=y+\sqrt{y^{۲}+۱}\Rightarrow x=\log_{۲}(y+\sqrt{y^{۲}+۱})$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\log_{۲}(x+\sqrt{x^{۲}+۱})\Rightarrow f^{-۱}(۲)=\log_{۲}(۲+\sqrt{۵})$$

راه‌حل دوم فرض کنید $f^{-۱}(۲)=a$. پس $f(a)=۲$ و در نتیجه

$$\frac{۲^{a}-(\frac{۱}{۲})^{a}}{۲}=۲\Rightarrow ۲^{a}-\frac{۱}{۲^{a}}=۴\Rightarrow(۲^{a})^{۲}-۴\times۲^{a}-۱=۰$$

اگر فرض کنیم $۲^{a}=b>۰$، آن‌گاه

$$b^{۲}-۴b-۱=۰\Rightarrow b=۲+\sqrt{۵}, b=۲-\sqrt{۵}<۰ \ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین

$$۲^{a}=۲+\sqrt{۵}\Rightarrow a=\log_{۲}(۲+\sqrt{۵})$$

۲۸۳۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan ۲۸۵^{\circ}=\tan(۲۷۰^{\circ}+۱۵^{\circ})=-\cot ۱۵^{\circ}$$

$$\tan(-۱۶۵^{\circ})=\tan(-۱۸۰^{\circ}+۱۵^{\circ})=\tan ۱۵^{\circ}$$

$$\sin ۱۰۹۵^{\circ}=\sin(۱۰۸۰^{\circ}+۱۵^{\circ})=\sin(۶\times۱۸۰^{\circ}+۱۵^{\circ})=\sin ۱۵^{\circ}$$

$$\cos ۲۵۵^{\circ}=\cos(۲۷۰^{\circ}-۱۵^{\circ})=-\sin ۱۵^{\circ}$$

بنابراین

$$\tan ۲۸۵^{\circ}\tan(-۱۶۵^{\circ})-\sin ۱۰۹۵^{\circ}\cos ۲۵۵^{\circ}$$

$$=(-\cot ۱۵^{\circ})(\tan ۱۵^{\circ})-(\sin ۱۵^{\circ})(-\sin ۱۵^{\circ})$$

$$=-۱+\sin^{۲} ۱۵^{\circ}=-\cos^{۲} ۱۵^{\circ}$$

۲۸۳۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ از نقطهٔ $(\frac{\pi}{۲},۰)$ می‌گذرد و حداکثر مقدار آن برابر $\frac{۳}{۲}$ است. پس

$$f(\frac{\pi}{۲})=۰\Rightarrow a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{۳}=۰\Rightarrow a+\frac{b}{۲}=۰$$

$$a=-\frac{b}{۲}\Rightarrow a+|b|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow-\frac{b}{۲}+|b|=\frac{۳}{۲}$$

همچنین با توجه به وضعیت نمودار واضح است که b باید منفی باشد. پس

$$-\frac{b}{۲}-b=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=-۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۲۸۳۷- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار واضح است که کمترین مقدار تابع برابر -۳ است، پس $-|a|+c=-۳$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{\pi}{۶},۱)$ عبور می‌کند، پس $a\sin(\frac{b\pi}{۶})+c=۱$. همچنین دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳}$ است. پس $\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}$ و در نتیجه $|b|=۳$. با توجه به نمودار معلوم است که a و b باید هم‌علامت باشند، پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر a و b مثبت باشند، آن‌گاه $b=۳$ و در نتیجه

$$\begin{cases} -a+c=-۳ \\ a\sin\frac{\pi}{۲}+c=۱ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -a+c=-۳ \\ a+c=۱ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=۲ \\ c=-۱ \end{cases}$$

حالت دوم اگر a و b منفی باشند، آن‌گاه $b=-۳$ و در نتیجه

$$\begin{cases} a+c=-۳ \\ a\sin(\frac{-\pi}{۲})+c=۱ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+c=-۳ \\ -a+c=۱ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=-۲ \\ c=-۱ \end{cases}$$

۲۸۳۸- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۴\sin ۳x\cos ۳x=۱\Rightarrow ۲\sin ۶x=۱\Rightarrow\sin ۶x=\sin\frac{\pi}{۶}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} ۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ ۶x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶} \\ x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳۶} \end{cases}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲})$ به‌ازای $k=۰$ و $k=۱$ حاصل می‌شوند:

$$x=\frac{\pi}{۳۶}, x=\frac{۵\pi}{۳۶}, x=\frac{۱۳\pi}{۳۶}, x=\frac{۱۷\pi}{۳۶}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ چهار جواب دارد.

۲۸۳۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x\neq\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه

$$\frac{۲\sin^{۲} x-\sin x-۱}{\cos^{۲} x}=\frac{(\sin x-۱)(۲\sin x+۱)}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}=\frac{-۲\sin x-۱}{۱+\sin x}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-۲\sin x-۱}{۱+\sin x}=\frac{-۲-۱}{۱+۱}=-\frac{۳}{۲}$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد، باید

$$f(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۲۸۴۰- گزینهٔ ۲ چـون حد تابـع f در بی‌نهایت برابر ۲ شـده اسـت، پس درجهٔ چندجمله‌ای صورت کسـر $f(x)$ با درجـهٔ چندجمله‌ای مخرج آن برابر است. اکنون دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول $a=۰$ و $n=۲$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۲-۶x^۲+۱}{۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{-۲x^۲}{۷x^۲}=-\frac{۲}{۷}$$

بنابراین حالت اول قابل قبول نیست.

حالت دوم $n=۳$ و $a\neq ۰$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{ax^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۳}{ax^۳}=\frac{۴}{a}=۲\Rightarrow a=۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{۲x^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{(۲x-۱)(۲x^۲-۲x-۱)}{(۲x-۱)(x^۲+۴x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲-۲x-۱}{x^۲+۴x+۲}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱۷}{۴}}=-\frac{۶}{۱۷}$$

۲۸۴۱- گزینهٔ ۴ سؤال با این ادبیات دارای بی‌شمار جواب است. کافی است معادلهٔ دو خط را که از نقطهٔ $A(۲,m)$ می‌گذرند، بنویسیم که هر کدام بر نمودار یکی از تابع‌های داده شده مماس باشند. بی‌شمار نقطهٔ مانند A می‌توان پیدا کرد و بی‌شـمار مقدار برای a و b وجود دارد. ولی احتمالاً منظور طراح سـؤال این بوده که نمودار دو تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^۲+bx$ از نقطهٔ $(۲,m)$ بگذرند و یک خط در این نقطه بر هر دو نمودار مماس باشد. در این صورت

$$f(۲)=g(۲)\Rightarrow ۴=۴a+۲b\Rightarrow ۴a=۴-۲b$$

$$f'(۲)=g'(۲)\Rightarrow -۳=۴a+b\Rightarrow ۴a=-۳-b$$

بنابراین $۴-۲b=-۳-b\Rightarrow b=۷$

توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}$$

$$g(x)=ax^۲+bx\Rightarrow g'(x)=۲ax+b$$

۲۸۴۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sqrt[۳]{(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵})^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵})'}{۳\sqrt[۳]{\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}}}$$

از طرف دیگر،

$$y=\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\Rightarrow y'=\frac{(۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲)}{(۳x+۵)^۲}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲((۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲))}{۳(۳x+۵)^۲\sqrt[۳]{\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}}}$$

$$f'(-۲)=\frac{۲((۲+۴)(-۶+۵)-۳(-۴-۴))}{۳(-۶+۵)^۲\sqrt[۳]{\frac{-۴-۴}{-۶+۵}}}=۶$$

۲۸۴۳- گزینهٔ ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x-۳}{x^۲+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$=\frac{-۲(x^۲-۴x-۱)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰\Rightarrow x=۲+\sqrt{۵}, x=۲-\sqrt{۵}$$

اکنون به جدول تعیین علامت $f'(x)$ توجه کنید:

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
			min		max		

بنابراین $x=۲+\sqrt{۵}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسـبی تابع f اسـت. مقدار ماکزیمم نسبی تابع f برابر است با

$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۲(۲+\sqrt{۵})-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}=\frac{۴+۵+۴\sqrt{۵}+۴+۲\sqrt{۵}-۳}{۴+۵+۴\sqrt{۵}+۱}$$

$$=\frac{۶\sqrt{۵}+۱۰}{۴\sqrt{۵}+۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}+۵}{۲\sqrt{۵}+۵}\times\frac{۲\sqrt{۵}-۵}{۲\sqrt{۵}-۵}$$

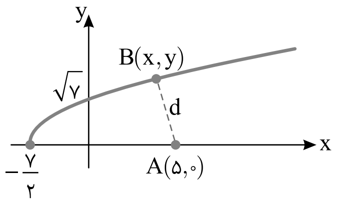
$$=\frac{۳۰-۱۵\sqrt{۵}+۱۰\sqrt{۵}-۲۵}{۲۰-۲۵}=\frac{۵-۵\sqrt{۵}}{-۵}=\sqrt{۵}-۱$$

۲۸۴۴- گزینهٔ ۱ مطابق شـکل زیر فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ B روی نمودار تابع $y=\sqrt{۲x+۷}$ برابر است با

$$d=\sqrt{(x-۵)^۲+(y-۰)^۲}=\sqrt{(x-۵)^۲+(\sqrt{۲x+۷}-۰)^۲}$$

$$=\sqrt{x^۲-۱۰x+۲۵+۲x+۷}=\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}$$

کمترین مقدار عبارت $x^۲-۸x+۳۲$ به‌ازای $x=۴$ به‌دسـت می‌آید که برابر ۱۶ است. پس کمترین مقدار d برابر ۴ است.



۲۸۴۵- گزینهٔ ۴ اگر افراد را به صورت جایگاه‌هایی فرض کنیم که می‌خواهیم کتاب‌ها را در آن‌ها قرار دهیم، توزیع کتاب‌ها به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

$\boxed{۳}\boxed{۱}\boxed{۱}$ یا $\boxed{۲}\boxed{۲}\boxed{۱}$

- اگر به یک نفر سه کتاب برسد، تعداد حالت‌ها به صورت زیر است:

یکی از سـه نفر را به ۳ حالت انتخاب می‌کنیم و سـه تا از پنج کتاب را به $\binom{۵}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم و کتاب‌ها را به او می‌دهیم. سپس دو کتاب باقی‌مانده به دو حالـت بین دو نفر دیگر توزیع کنیـم. پس در این صورت تعداد حالت‌ها برابر $۳\binom{۵}{۳}\times۲=۶۰$ است.

- اگر به دو نفر دو کتاب برسد، تعداد حالت‌ها به صورت زیر است:

یک نفر از سه نفر را انتخاب می‌کنیم و یک کتاب از پنج کتاب را انتخاب می‌کنیم و به او می‌دهیم که این کار به ۳×۵ حالت انجام‌پذیر است. سپس یک نفر از دو نفر دیگر را انتخاب می‌کنیم و دو کتاب از چهار کتاب را انتخاب می‌کنیم و به او می‌دهیم که این کار به $۲\binom{۴}{۲}=۱۲$ حالت انجام‌پذیر است ولی همهٔ حالت‌های ممکن دو بار شمرده می‌شوند. مثلاً اگر شخص (۱) انتخاب شود و کتاب‌های A و B را دریافت کند، کتاب‌های C و D به شخص (۲) می‌رسند و اگر شخص (۲) انتخاب شود و کتاب‌های C و D را دریافت کند، کتاب‌های A و B به شخص (۱) می‌رسد که این دو حالت یکسان هستند. پس تعداد حالت‌های غیر تکراری برابر ۶ است. (توجه کنید که دو کتاب باقی‌مانده به یک حالت به نفر آخر داده می‌شوند). در این صورت تعداد کل حالت‌ها برابر $۶\times۱۵=۹۰$ است. بنابراین کل حالت‌های ممکن برابر $۶۰+۹۰=۱۵۰$ است.

۲۸۴۶- گزینهٔ ۳ تعداد کل حالت‌هایی ۱۰ نفر در یک صف می‌ایستند، برابر $۱۰!$ است که در $۲\times۹!$ حالت آن دو نفر خاص کنار هم ایستاده‌اند. پس احتمال کنار هم ایستادن این دو نفر برابر است با $\frac{۲\times۹!}{۱۰!}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$. بنابراین احتمال اینکه این دو نفر کنار هم نباشند، برابر $\frac{۴}{۵}$ است.

۲۸۴۷- گزینهٔ ۲ اگر ۸ واحد از تمام داده‌ها کم کنیم، داده‌های جدید به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{array}{ccccccc} ۵, & ۷, & ۸, & ۸, & ۸, & ۱۰, & ۱۰ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -۳ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ \end{array}$$

میانگین داده‌های جدید برابر است با

$$\frac{(-۳)+(-۱)+۰+۰+۰+۲+۲}{۷}=۰$$

پس میانگین داده‌های اصلی برابر ۸ است. اکنون واریانس داده‌های جدید را حساب می‌کنیم که با واریانس داده‌های اصلی برابر است:

$$\sigma^۲=\frac{(-۳-۰)^۲+(-۱-۰)^۲+(۰-۰)^۲+(۰-۰)^۲+(۰-۰)^۲+(۲-۰)^۲+(۲-۰)^۲}{۷}$$

$$=\frac{۹+۱+۴+۴}{۷}=\frac{۱۸}{۷}$$

پس ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با

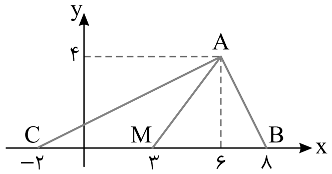
$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{\frac{۱۸}{۷}}}{۸}=\frac{۳}{۸}\sqrt{\frac{۲}{۷}}\simeq\frac{۳}{۸}\times۰/۵۳۴=۰/۲۰$$

۲۸۴۸- گزینهٔ ۲ ابتدا رئوس مثلث را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} y=۰ \\ ۲y-x=۲ \end{cases}\Rightarrow x=-۲,\quad \begin{cases} y=۰ \\ y+۲x=۱۶ \end{cases}\Rightarrow x=۸$$

$$\begin{cases} ۲y-x=۲ \\ y+۲x=۱۶ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=۶ \\ y=۴ \end{cases}$$

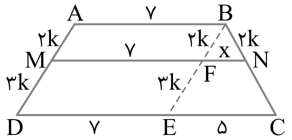
پس مثلث مورد نظر به صورت زیر است و اندازهٔ میانهٔ AM را می‌خواهیم. چونM نقطهٔ $(۳,۰)$ است،پس $AM=\sqrt{(۶-۳)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$



۲۸۴۹- گزینهٔ ۳ از نقطهٔ B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا MN و DC را به ترتیب در F و E قطع کند (شکل مقابل را ببینید). چهارضلعی‌های ABFM، MFED و ABED متوازی‌الاضلاع هستند. اندازهٔ اضلاع بر این اساس روی شکل نشان داده شده‌اند. در مثلث BEC طبق تعمیم قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

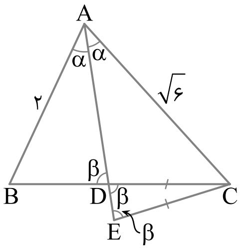
$$FN||EC\Rightarrow\frac{FN}{EC}=\frac{BF}{BE}\Rightarrow\frac{x}{۵}=\frac{۲k}{۲k+۳k}\Rightarrow x=۲$$

بنابراین $MN=۷+۲=۹$.

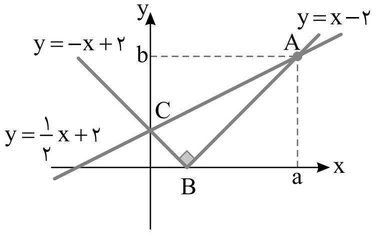


۲۸۵۰- گزینهٔ ۲ مطابق شکل مقابل مثلث‌های ABD و ACE دو زاویهٔ برابر به اندازه‌های α و β دارند. پس این دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{\sqrt{۶}}$. از طرف دیگر نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌هاست. پس

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}}=(\frac{۲}{\sqrt{۶}})^۲=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$



۲۸۵۱- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۴x+۴}=|x-۲|$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}x+۲$ به‌صورت زیر است. مطابق شکل داده شده مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مد نظر است.



$$x-۲=\frac{۱}{۲}x+۲\Rightarrow x=۸\Rightarrow a=۸\Rightarrow b=۸-۲=۶$$

بنابراین رئوس مثلث نقاط $A(۸,۶)$، $B(۲,۰)$ و $C(۰,۲)$ هستند. پس

$$AB=\sqrt{(۸-۲)^۲+(۶-۰)^۲}=۶\sqrt{۲},\quad BC=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times BC=\frac{۱}{۲}\times۶\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۲}=۱۲$$

۲۸۵۲- گزینهٔ ۱ فرض کنید $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)=a$ ، بنابراین

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۲۰))=a\Rightarrow g(a)=f^{-۱}(۲۰)\Rightarrow f(g(a))=۲۰$$

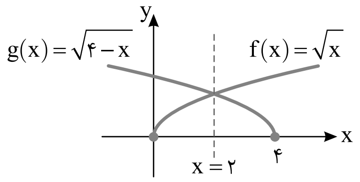
واضح است که $f(۱۶)=۲۰$ ، زیرا

$$f(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow f(۱۶)=۱۶+\sqrt{۱۶}=۱۶+۴=۲۰$$

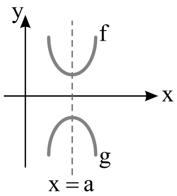
پس $f^{-۱}(۲۰)=۱۶$. بنابراین

$$g(a)=۱۶\Rightarrow\frac{۹a+۶}{۱-a}=۱۶\Rightarrow ۹a+۶=۱۶-۱۶a\Rightarrow a=\frac{۲}{۵}$$

۲۸۵۳- گزینهٔ ۳ اگر قرینهٔ نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور y را رسم کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار جدید را چهار واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x-۴)}$ به‌دست می‌آید. بنابراین نمودار دو تابع اولیه و نهایی به‌صورت زیر است. با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع g قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=۲$ است.



توجه ادبیات سؤال ایراد دارد چون پرسیده شده است: «منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟» این سؤال یعنی نمودار توابع f و g هر دو نسبت به خط $x=a$ متقارن هستند و مقدار a چند است؟ (شکل زیر را ببینید) در حالی‌که مقصود طراح این بوده است که قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=a$ نمودار تابع g می‌شود و a چند است؟ از طرف دیگر سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است. چیزی که سؤال پرسیده مثلاً این طوری می‌شود:



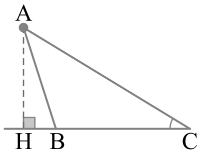
۲۸۵۴- گزینهٔ ۴ ابتدا $\cot\hat{C}$ را با معلوم بودن $\sin\hat{C}$ به‌دست می‌آوریم:

$$۱+\cot^۲\hat{C}=\frac{۱}{\sin^۲\hat{C}}\Rightarrow ۱+\cot^۲\hat{C}=\frac{۱۶۹}{۲۵}$$

$$\cot^۲\hat{C}=\frac{۱۴۴}{۲۵}\Rightarrow\cot\hat{C}=\frac{۱۲}{۵}$$

بنابراین در مثلث AHC می‌توان نوشت:

$$\cot\hat{C}=\frac{CH}{AH}\Rightarrow\frac{۱۲}{۵}=\frac{۹}{AH}\Rightarrow AH=۳/۷۵$$



۲۸۵۵- گزینهٔ ۳ تعداد اعداد واقع در نوزده دستهٔ اول برابر است با:

$$۱+۲+\cdots+۱۹=\frac{۱۹\times۲۰}{۲}=۱۹۰$$

بنابراین عدد اول دستهٔ بیستم ۱۹۱ و عدد آخر آن ۲۱۰ است. مجموع این اعداد برابر است با

$$(۱+\cdots+۲۱۰)-(۱+\cdots+۱۹۰)=\frac{۲۱۰\times۲۱۱}{۲}-\frac{۱۹۰\times۱۹۱}{۲}$$
$$=۲۲۱۵۵-۱۸۱۴۵=۴۰۱۰$$

۲۸۵۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{(۲x+۵)-۷\sqrt{x}}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}=\lim_{x\to۱}\left(\frac{(۲x+۵)^۲-۴۹x}{۴x^۲-(۳x+۱)}\times\frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{(۲x+۵)+۷\sqrt{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{۴x^۲-۲۹x+۲۵}{۴x^۲-۳x-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{(۲x+۵)+۷\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(۴x-۲۵)}{(x-۱)(۴x+۱)}\times\frac{۲+۲}{۲+۵+۷}$$
$$=\frac{۴}{۱۴}\lim_{x\to۱}\frac{۴x-۲۵}{۴x+۱}=\frac{۲}{۷}\times\left(-\frac{۲۱}{۵}\right)=-۱/۲$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲x+۵-۷\sqrt{x}}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}=\lim_{x\to۱}\frac{۲-\frac{۷}{۲\sqrt{x}}}{۲-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}}=\frac{۲-\frac{۷}{۲}}{۲-\frac{۳}{۲\times۲}}=-۱/۲$$

۲۸۵۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f به‌صورت زیر است:

$$|x-۱|<۱\Rightarrow-۱<x-۱<۱\Rightarrow ۰<x<۲$$

$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & ۰<x<۲\\ x^۲+ax+b & x\leq۰ \text{ یا } x\geq۲\end{cases}$$

چون تابع f در نقاط $x=۰$ و $x=۲$ پیوسته است، پس

$$f(۰)=\lim_{x\to۰^-}f(x)=\lim_{x\to۰^+}f(x)$$

$$b=\lim_{x\to۰^-}(x^۲+ax+b)=\lim_{x\to۰^+}((x-۱)[x])\Rightarrow b=۰$$

$$f(۲)=\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^-}f(x)$$

$$۴+۲a+b=\lim_{x\to۲^+}(x^۲+ax+b)=\lim_{x\to۲^-}((x-۱)[x])$$

$$۴+۲a=(۲-۱)\times۱\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۲۸۵۸- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۵,۶]$ برابر است با

$$\frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}=\frac{۳-۴}{۱}=-۱$$

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطهٔ x برابر $f'(x)$ است.

$$f(x)=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۲x+۴}{۲\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}$$

بنابراین

$$\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=-۱\quad(*)\Rightarrow ۲۱-x^۲+۴x=(x-۲)^۲$$
$$۲۱-x^۲+۴x=x^۲+۴-۴x\Rightarrow ۲x^۲-۸x-۱۷=۰$$
$$x=۲+\frac{۵\sqrt{۲}}{۲},\quad x=۲-\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\text{(غ.ق.ق.)}$$

توجه کنید که طبق معادلهٔ $(*)$ مقدار x باید بیشتر از ۲ باشد.

۲۸۵۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}=۵\sqrt{x}-\frac{۴}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(۴)=۵\times۲-\frac{۴}{۲}=۸$$

$$f'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{x}}+\frac{۲}{x\sqrt{x}}\Rightarrow m=f'(۴)=\frac{۵}{۴}+\frac{۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۴,۸)$ با شیب $\frac{۳}{۲}$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$y-۸=\frac{۳}{۲}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۲$$

اگر قرار دهیم $x=۰$ ، عرض نقطهٔ تقاطع با محور y برابر ۲ به‌دست می‌آید.

۲۸۶۰- گزینهٔ ۱ چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است. پس $P(\frac{۱}{۲})=۰$. بنابراین $P(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲})^۴+a(\frac{۱}{۲})^۳+۲(\frac{۱}{۲})^۲-۳(\frac{۱}{۲})=۰\Rightarrow a=۷$

$$P(x)=۲x^۴+۷x^۳+۲x^۲-۳x$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر است با

$$P(-۲)=۲(-۲)^۴+۷(-۲)^۳+۲(-۲)^۲-۳(-۲)=-۱۰$$

۲۸۶۱- گزینهٔ ۴ طول نقاط تقاطع نمودار تابع‌های $f(x)=|x-۲|+|x+۱|$ و $g(x)=x+۷$ از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید. پس

$$f(x)=g(x)\Rightarrow|x-۲|+|x+۱|=x+۷$$

$$x\geq۲\Rightarrow x-۲+x+۱=x+۷\Rightarrow x=۸$$

$$-۱\leq x\leq۲\Rightarrow -x+۲+x+۱=x+۷\Rightarrow x=-۴\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$x\leq-۱\Rightarrow -x+۲-x-۱=x+۷\Rightarrow x=-۲$$

بنابراین $A(۸,۱۵)$ و $B(-۲,۵)$ نقاط تقاطع هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $AB=\sqrt{(۸+۲)^۲+(۱۵-۵)^۲}=۱۰\sqrt{۲}$

۲۸۶۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=a$ ، پس

$$f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=a\Rightarrow f(a)=g^{-۱}(-۹)\ ,\ a\geq۲$$

$$a^۲-۴a+۹=g^{-۱}(-۹)\Rightarrow g(a^۲-۴a+۹)=-۹\Rightarrow\frac{۳-(a^۲-۴a+۹)}{۲}=-۹$$

$$a^۲-۴a-۱۲=۰\Rightarrow(a-۶)(a+۲)=۰\Rightarrow a=۶\ ,\ a=-۲\ (\text{غ.ق.ق})$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$y=f(x)=x^۲-۴x+۹\Rightarrow y=(x-۲)^۲+۵\Rightarrow y-۵=(x-۲)^۲$$

$$|x-۲|=\sqrt{y-۵}\xrightarrow{x\geq۲}x-۲=\sqrt{y-۵}$$

$$x=۲+\sqrt{y-۵}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x-۵}$$

از طرف دیگر،

$$y=g(x)=\frac{۳-x}{۲}\Rightarrow۲y=۳-x\Rightarrow x=۳-۲y\Rightarrow g^{-۱}(x)=۳-۲x$$

بنابراین

$$(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=f^{-۱}(۳-۲(-۹))$$

$$f^{-۱}(۲۱)=۲+\sqrt{۲۱-۵}=۶$$

۲۸۶۳- گزینهٔ ۲ اگر بخواهیم قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم، ابتدا باید آن را نسبت به محور x سپس نسبت به محور y قرینه کنیم (یا ابتدا نسبت به محور y سپس نسبت به محور x قرینه کنیم). ضابطهٔ این تابع به صورت $y=-f(-x)$ خواهد بود. اگر این نمودار را چهار واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=-f(-x)+۴$ رسم می‌شود. طول نقاط تلاقی نمودار تابع‌های f و g از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow(x-۱)^۲=-(-x-۱)^۲+۴$$

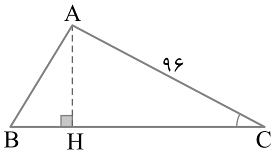
$$x^۲-۲x+۱=-x^۲-۲x-۱+۴\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

۲۸۶۴- گزینهٔ ۳ ابتدا از $۱+\cot^۲\hat{C}=\frac{۱}{\sin^۲\hat{C}}$ مقدار $\sin\hat{C}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲=\frac{۱}{\sin^۲\hat{C}}\Rightarrow\sin^۲\hat{C}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\sin\hat{C}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین

$$\triangle AHC:\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{AH}{۹۶}\Rightarrow AH=۶۴$$



۲۸۶۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تعداد اعداد نوشته شده در چهل دستهٔ اول برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+۴۰=\frac{۴۰}{۲}(۱+۴۰)=۸۲۰$

بنابراین آخرین عدد واقع در دستهٔ چهلم همان هشتصدوبیستمین عدد طبیعی فرد است که برابر است با $۲\times۸۲۰-۱=۱۶۳۹$.

۲۸۶۶- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۲,۲]$ در نظر گرفته شده است، بنابراین تابع در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ حد ندارد و پیوسته نیست. در نقاط غیرصحیح بازهٔ $(-۲,۲)$ ، توابع $y=[x]$ و $y=\sin\pi x$ پیوسته‌اند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ نیز پیوسته است. در نقاط صحیح این بازه (یعنی $x=۰$ ، $x=۱$ و $x=-۱$) تابع $y=[x]$ ناپیوسته است ولی چون تابع $y=\sin\pi x$ پیوسته است و مقدار آن برابر صفر است، تابع f پیوسته خواهد بود. بنابراین تابع f فقط در دو نقطهٔ $x=۲$ و $x=-۲$ ناپیوسته است.

۲۸۶۷- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع‌های $f(x)=x\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲+ax+b$ در نقطهٔ مشترک $x=۴$ بر یک خط مماس باشند، آن‌گاه

$$\begin{cases}f(۴)=g(۴)\Rightarrow۸=۱۶+۴a+b\Rightarrow b=-۸-۴a\\ f'(۴)=g'(۴)\Rightarrow۳=۸+a\Rightarrow a=-۵\Rightarrow b=۱۲\end{cases}$$

توجه کنید که

$$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۳}{۲}\times۲=۳$$

$$g(x)=x^۲+ax+b\Rightarrow g'(x)=۲x+a\Rightarrow g'(۴)=۸+a$$

۲۸۶۸- گزینهٔ ۱ ابتدا $f'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۰\leq x<۴\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^۲+۶x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۵}{۴}$$

اکنون توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=۵$ ، تساوی $[\frac{x}{۴}]=۱$ برقرار است. پس در این همسایگی می‌توان نوشت

$$f(x)=x^۲-۹x\Rightarrow f'(x)=۲x-۹\Rightarrow f'(۵)=۱۰-۹=۱$$

بنابراین $f'(۲)-f'(۵)=\frac{۱}{۴}$.