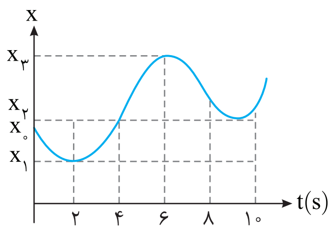
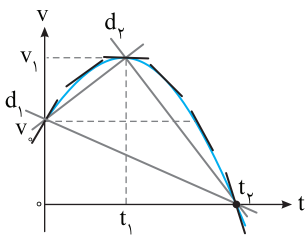
۱۳۵- گزینهٔ ۳

خط فکری: تندی متوسط یعنی مقدار مسافت طی شده تقسیم بر مدت زمان طی کردن آن مسافت، بنابراین شما باید در هر بازه زمانی مسافت طی شده را بررسی کرده تا بتوانید تندی متوسط را در بازه‌های مختلف مقایسه کنید.



با توجه به نمودار مسافت طی شده در بازهٔ ۲s تا ۴s از مسافت طی شده در بازه صفر تا ۲s بیشتر است و هم‌چنین در بازهٔ ۴s تا ۶s مسافت طی شده از بازهٔ صفر تا ۲s بیشتر است. یعنی در هر دو ثانیه (از ۲ تا ۶) مسافت طی شده بزرگ‌تر از بازهٔ صفر تا ۲s است بنابراین تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۶s از ۰ تا ۲s بیشتر می‌شود.
در مدت ۴s بین ۲s تا ۶s مسافت طی شده از مدت ۴s بین ۶s تا ۱۰s بیشتر است*و تندی در بازهٔ ۲s تا ۶s از تندی در ۶s تا ۱۰s بیشتر است. اگر بازه بین ۲s تا ۱۰s را به دو قسمت ۴s تقسیم کنیم در ۴s اول تندی از ۴s دوم بیشتر است بنابراین تندی متوسط در بازه ۲s تا ۱۰s قطعاً از ۶s تا ۱۰s بیشتر است.
اما داستان اصلی در مورد بازهٔ صفر تا ۶s و مقایسهٔ آن با ۲s تا ۱۰s است.
بازهٔ ۲s تا ۶s در هر دو مشترک است. اگر بازهٔ ۶s تا ۱۰s را به دو بازهٔ دو ثانیه‌ای ۶ تا ۸ و ۸ تا ۱۰ تقسیم کنیم در هر دو بازه مسافت طی شده با توجه به نمودار از مسافت طی شده در بازه ۰ تا ۲s بیشتر بوده بنابراین در بازه ۶s تا ۸s و ۸s تا ۱۰s تندی از بازهٔ ۰ تا ۲s بیشتر است در نتیجه به‌طور کلی تندی متوسط در بازه ۲s تا ۱۰s از تندی متوسط در بازهٔ صفر تا ۶s بیشتر است.

۱۳۶- گزینهٔ ۴



روش اول: در نمودار سرعت زمان شکل روبه‌رو، از لحظهٔ $t=۰$ تا لحظهٔ $t=t_۱$ سرعت از $v_۰$ تا $v_۱$ در حال افزایش است و گزینهٔ (۱) نادرست است.
نکته: ۱) در یک سهمی هر چه از رأس دورتر شویم مقدار شیب خط مماس بزرگ‌تر خواهد شد.
۲) در نمودار $v-t$ شیب خط مماس شتاب لحظه‌ای و شیب خط قاطع بین دو لحظه شتاب متوسط در آن بازه را می‌دهد.
۳) خط گذرنده از رأس سهمی محور تقارن آن است و در فاصله‌های یکسان از محور تقارن، شیب خط مماس بر سهمی قرینه یکدیگر است.
حال با توجه به سه نکته بالا به بررسی سه گزینه دیگر می‌پردازیم:
شیب خط مماس بر نمودار سرعت زمان برابر شتاب لحظه‌ای در آن لحظه است. لحظهٔ $t=۰$ و $t=t_۲$ نسبت به محور سهمی تقارن ندارند بنابراین اندازهٔ شیب خط مماس در این دو لحظه باهم برابر نیست و بزرگی شتاب در این دو لحظه یکسان نخواهد بود و گزینهٔ (۲) نادرست است.
در بازهٔ ۰ تا $t_۱$ شیب خط مماس مثبت و شتاب در جهت مثبت محور xها و در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ شیب خط مماس منفی و شتاب منفی و در خلاف جهت محور xها است و گزینهٔ (۳) نادرست است.
در نمودار بالا خط $d_۱$ خط قاطع بین $t=۰$ و $t_۲$ است و خط $d_۲$ خط قاطع بین $t_۱$ تا $t_۲$ است. در نمودار $v-t$ شیب خط قاطع بین دو لحظه شتاب متوسط در آن بازه است. با توجه به شکل شیب خط $d_۲$ تندتر از شیب خط $d_۱$ است پس بزرگی شتاب در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ بیشتر از بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۲$ است.

روش دوم: می‌توان با توجه به رابطهٔ شتاب متوسط $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ نیز درستی گزینهٔ (۴) را بررسی کرد:

$$\begin{cases} |a_{av}(۰ \text{ تا } t_۲)| = \left|\frac{v_{t_۲}-v_۰}{t_۲-۰}\right| \\ |a_{av}(t_۱ \text{ تا } t_۲)| = \left|\frac{v_{t_۲}-v_۱}{t_۲-t_۱}\right| \end{cases} \xrightarrow[t_۲-t_۱<t_۲-۰]{|v_{t_۲}-v_۰|<|v_{t_۲}-v_۱|} a_{av}(۰ \text{ تا } t_۲) > a_{av}(t_۱ \text{ تا } t_۲)$$

در واقع در رابطهٔ شتاب متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$، صورت کسر بزرگ‌تر و مخرج کسر کوچک‌تر است پس حاصل این کسر بیشتر است.

۱۳۷- گزینهٔ ۲

خط فکری: شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است. با توجه به این رابطه و مقدار شتاب متوسط داده شده در دو بازهٔ زمانی حل سؤال را شروع می‌کنیم:
۱) با توجه به تعریف شتاب متوسط برای هر مرحله رابطهٔ شتاب متوسط را می‌نویسیم.

$$\vec a_{av}=\frac{\Delta \vec v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow[\vec a=-۴\vec i]{t_۱=۵s \text{ تا } t_۲=۱۰s} -۴\vec i=\frac{\vec v_{۱۰}-\vec v_۵}{۱۰-۵} \Rightarrow \vec v_{۱۰}-\vec v_۵=-۲۰\vec i \quad (۱) \\ \xrightarrow[t_۲=۱۰s \text{ و } t_۳=۱۲s]{\vec a=۲\vec i} ۲\vec i=\frac{\vec v_{۱۲}-\vec v_{۱۰}}{۱۲-۱۰} \Rightarrow \vec v_{۱۲}-\vec v_{۱۰}=۴\vec i \quad (۲) \end{cases}$$

۲) برای رسیدن به بررسی بازهٔ $t_۱=۵s$ تا $t_۳=۱۲s$ سرعت $\vec{v}_{۱۰}$ مزاحم است پس رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم تا $v_{۱۰}$ از دو معادله حذف شود:

$$\begin{cases}\vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_{۵}=-۲۰\vec{i}\\ \vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۱۰}=۴\vec{i}\end{cases}\xrightarrow{+}\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۵}=-۲۰\vec{i}+۴\vec{i}\Rightarrow\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۵}=-۱۶\vec{i}$$

۳) شتاب متوسط در بازهٔ $t=۵s$ تا $t=۱۲s$ خواهد شد.

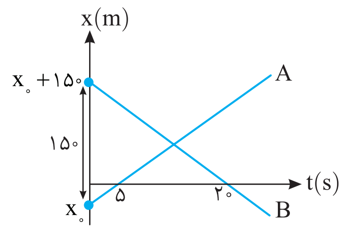
$$\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۵}}{۱۲-۵}\xrightarrow{\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۵}=-۱۶\vec{i}}\vec{a}_{av}=\frac{-۱۶\vec{i}}{۷}=\frac{-۱۶}{۷}\vec{i}$$

۱۳۸- گزینهٔ ۳

خط فکری: شـیب نمودار مکان - زمان برابر سـرعت جسـم اسـت. وقتی نمودار $x-t$ به صورت خط راست باشد شـیب نمودار ثابت بوده یعنی سرعت متحرک ثابت اسـت. فاصلهٔ دو متحرک برابر بزرگی تفاضل مکان دو متحرک در آن لحظه اسـت. سـرعت متحرک A مثبت بوده چون شـیب خط آن مثبت اسـت و شیب خط B منفی است پس سرعت این متحرک منفی است. در صورت سؤال گفته شده تندی یعنی بزرگی سرعت A دو برابر بزرگی سرعت B است: $|v_A|=۲|v_B|\xrightarrow[v_B<۰]{v_A>۰}v_A=-۲v_B$

نکته: معادلهٔ حرکت سرعت ثابت به صورت $x=vt+x_۰$ است.

سرعت متحرک مکان اولیه



روش اول: معادلهٔ حرکت هر متحرک را نوشته و از روی نمودار، داده‌های مسئله را در آن‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$x_A=v_At+x_۰\xrightarrow[x_A=۰]{t=۵s}۰=۵v_A+x_۰\Rightarrow v_A=\frac{-x_۰}{۵}\quad(۱)$$

$$x_B=v_Bt+x_۰+۱۵۰\xrightarrow[x_B=۰]{t=۲۰s}۰=۲۰v_B+x_۰+۱۵۰\Rightarrow v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}\quad(۲)$$

با توجه به سؤال $v_A=-۲v_B$ است:

$$v_A=-۲v_B\xrightarrow[v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}]{v_A=\frac{-x_۰}{۵}}\frac{-x_۰}{۵}=-۲(\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰})\Rightarrow\frac{-x_۰}{۵}=\frac{x_۰+۱۵۰}{۱۰}\Rightarrow-x_۰=\frac{x_۰+۱۵۰}{۲}\Rightarrow-۲x_۰=x_۰+۱۵۰\Rightarrow-۳x_۰=۱۵۰\Rightarrow x_۰=-۵۰m$$

حال $x_۰=-۵۰m$ را در معادله‌های (۱) و (۲) قرار می‌دهیم تا سرعت‌ها به‌دست آید:

$$v_A=\frac{-x_۰}{۵}=\frac{۵۰}{۵}=۱۰m/s\ ,\ v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}=\frac{-۱۰۰}{۲۰}=-۵m/s$$

با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=۲۰s$ متحرک B از مبدأ مکان می‌گذرد $(x_B=۰)$. معادلهٔ حرکت متحرک A را نوشته و در لحظهٔ $t=۲۰s$ مکان متحرک A را به‌دست می‌آوریم:

$$x_A=v_At+x_۰\xrightarrow[x_۰=-۵۰m]{v_A=۱۰m/s}x_A=+۱۰t-۵۰\xrightarrow{t=۲۰s}x_A=۲۰۰-۵۰=۱۵۰m$$

فاصله دو متحرک را حساب می‌کنیم:

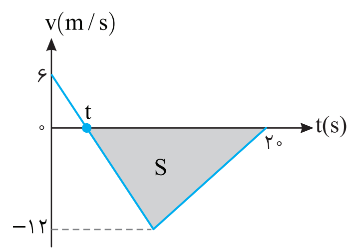
$$r=|x_A-x_B|\Rightarrow r=|۱۵۰-۰|=۱۵۰m$$

روش دوم: سرعت متحرک A برابر $۱۰m/s$ است یعنی متحرک A در هر ثانیه $۱۰m$ در جهت مثبت جابه‌جا می‌شود و سرعت متحرک B، $-۵m/s$ بوده یعنی متحرک B در هر ثانیه $۵m$ خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود یعنی در هر ثانیه جمعاً دو متحرک A و B، $۵+۱۰=۱۵m$ متر به هم نزدیک می‌شوند. در ابتدا فاصلهٔ A از B، ۱۵۰ متر است بنابراین این دو متحرک در مدت $\frac{۱۵۰}{۱۵}=۱۰s$ به هم می‌رسند و بعد از به هم رسیدن در هر ثانیه $۱۵m$ از هم دور می‌شوند در مدت $(۲۰-۱۰=۱۰s)$ فاصلهٔ آن‌ها از هم $۱۰\times۱۵=۱۵۰m$ می‌شود.

۱۳۹- گزینهٔ ۲

خط فکری: حرکت در خلاف جهت محور مربوط به لحظاتی می‌شود که سرعت متحرک منفی است.

مسـافت پیموده شـده از به‌دست آوردن مساحت محصور بین نمودار و محور زمان حاصل می‌شود. در نهایت با تقسیم این مساحت بر مدت زمان حرکت، تندی متوسط متحرک به‌دست می‌آید.

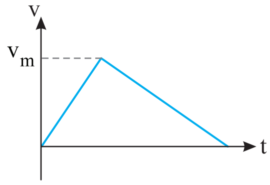


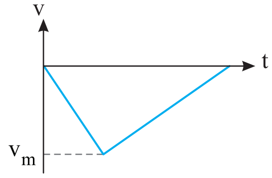
$$L=\frac{۱۲(۲۰-t)}{۲}=۶(۲۰-t)$$

$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۶(۲۰-t)}{۲۰-t}=۶m/s$$

میانبر: اگر نمودار $v-t$ متحرک به صورت یکی از شکل‌های زیر باشد، خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{v_{max}}{۲}\ ,\ s_{av}=|\frac{v_{max}}{۲}|$$





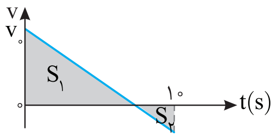
در این سؤال نیز تنها مسیر خواسته شده که چون سرعت منفی است، پس $s_{av}=|\frac{v_{max}}{۲}|=۶m/s$ می‌شود.

۱۴۰- گزینهٔ ۴

Ⓒ **خط فکری:** هرگاه تندی متوسط بزرگ‌تر از سرعت متوسط باشد، مسافت طی‌شده بزرگ‌تر از جابه‌جایی بوده و به این معنی است که متحرک در حین حرکت تغییر جهت داده است.

برای محاسبهٔ مسافت و تندی بهتر است نمودار $v-t$ کشیده شود که چون سرعت اولیه با توجه به سؤال در جهت محور xها بوده (در جهت مثبت) و تغییر جهت داشته‌ایم،

نمودار $v-t$ به صورت روبه‌رو می‌شود:



واضح است که چون سرعت اولیه مثبت است و متحرک تغییر جهت داده، شیب نمودار منفی می‌شود. حال با توجه به تعریف سرعت متوسط و تندی متوسط خواهیم داشت:

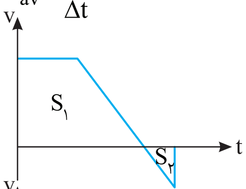
۱) در بازهٔ صفر تا ۱۰s سرعت متوسط ۷/۵ متر بر ثانیه است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta x=۷۵m$$

۲) در بازهٔ صفر تا ۱۰s تندی متوسط ۸/۵ متر بر ثانیه است:

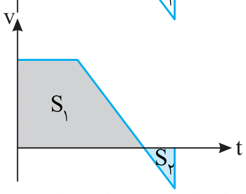
$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}\Rightarrow L=۸۵m$$

نکته: در نمودار $v-t$ مسافت و جابه‌جایی متحرک با استفاده از سطح محصور بین نمودار و محور افقی به‌دست می‌آید:



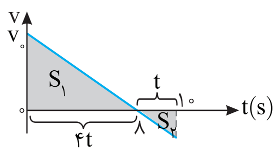
$$\Delta x=S_۱+S_۲ \quad , \quad L=|S_۱|+|S_۲|$$

۳) مسافت و جابه‌جایی را می‌توان به کمک سطح زیر نمودار به‌دست آورد:



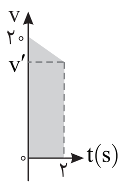
$$\begin{cases} L=S_۱+S_۲\Rightarrow ۸۵=S_۱+S_۲ \\ \Delta x=S_۱-S_۲\Rightarrow ۷۵=S_۱-S_۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow S_۱=۸۰m\,,S_۲=۵m$$

یادداشت ریاضی: یکی از ابزارهای ریاضی مفید در محاسبات سطح زیر نمودار استفاده از تشابه مثلث‌ها است که در آن، مجذور نسبت ضلع‌ها برابر با نسبت مساحت‌هاست.



۴) نسبت مساحت سطح زیر نمودار در این دو بخش به صورت $\frac{S_۱}{S_۲}=۱۶$ است، پس نسبت ضلع‌های این دو مثلث متشابه ۱ به ۴ است.

$$\frac{t}{(۱۰-t)}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴t=۱۰-t\Rightarrow t=۲ \quad , \quad S_۱=۸۰m\Rightarrow \frac{v_۰\times ۸}{۲}=۸۰\Rightarrow v_۰=۲۰m/s$$



برای به‌دست آوردن سطح زیر نمودار در ۲ ثانیه اول نیاز به داشتن سرعت در ثانیه دوم داریم. به این منظور ابتدا شتاب حرکت را با توجه به شیب نمودار $v-t$ به‌دست می‌آوریم:

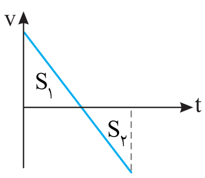
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۲۰}{۸}=-۲/۵m/s^۲$$

حال مسافت ۲s اول را حساب می‌کنیم:

$$v'=at+v_۰\Rightarrow v'=-۵+۲۰\Rightarrow v'=۱۵m/s \quad , \quad L=\frac{(۲۰+۱۵)۲}{۲}=۳۵m$$

۱۴۱- گزینهٔ ۳

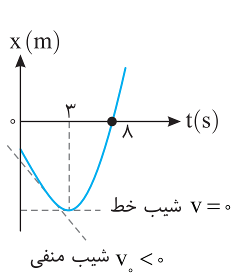
Ⓑ **نکته:** در نمودار $v-t$ سطح زیر نمودار مسافت و جابه‌جایی متحرک را مشخص می‌کند:

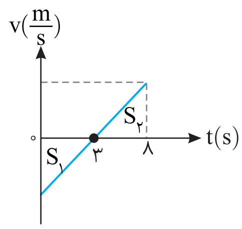


$$\Delta x=S_۱+S_۲ \;;\; S_۱>۰\,,S_۲<۰$$
$$L=S_۱+|S_۲|$$

خط فکری: برای به‌دست آوردن مسافت و تندی متوسط بهتر است نمودار $v-t$ رسم شود. در گام اول از روی نمودار $x-t$ باید نمودار $v-t$ رسم شود.

با توجه به اینکه شیب خط مماس بر منحنی $x-t$ نشان‌دهنده سرعت لحظه‌ای است، سرعت اولیهٔ متحرک منفی و سرعت در لحظهٔ $t=۳s$ برابر صفر است. از طرفی چون دهانه منحنی $x-t$ رو به بالاست، شتاب حرکت مثبت است و شیب نمودار $v-t$ مثبت خواهد بود پس:





یادداشت ریاضی: نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر با مجذور نسبت تشابه آن‌ها است.

با توجه به نمودار $v-t$ و با استفاده از تشابه مثلث‌ها نسبت مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ محاسبه می‌شود.

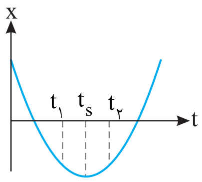
$$\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{(۸-۳)^۲}{۳^۲}=\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow S_۲=\frac{۲۵}{۹}S_۱$$

با توجه به نکته ابتدایی سؤال از روی $S_۱$ و $S_۲$ جابه‌جایی و مسافت مشخص می‌شود. دقت کنید که $S_۱$ زیر محور افقی بوده و در جابه‌جایی علامت منفی باید لحاظ شود.

$$\left.\begin{array}{l} \text{مسافت } L=S_۱+S_۲=S_۱+\frac{۲۵}{۹}S_۱=\frac{۳۴}{۹}S_۱ \\ \text{جابه‌جایی } \Delta x=S_۲-S_۱=\frac{۲۵}{۹}S_۱-S_۱=\frac{۱۶}{۹}S_۱ \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\Delta x}{L}=\frac{\frac{۱۶}{۹}S_۱}{\frac{۳۴}{۹}S_۱}=\frac{۸}{۱۷}$$

۱۴۲- گزینهٔ ۳

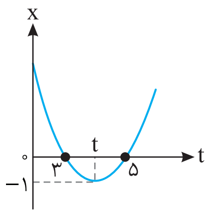
۱) در لحظه‌های $t=۳s$ و $t=۵s$ متحرک از مبدأ گذشته و در لحظه تغییر جهت (رأس سهمی $x-t$) مکان متحرک منفی بوده پس نمودار $x-t$ حرکت تقریباً به صورت مقابل است.



یادداشت ریاضی: در نمودارهای سهمی مانند نمودار $x-t$ در حرکت با شتاب ثابت، رأس نمودار محور تقارن است بنابراین:

$$t_s=\frac{t_۱+t_۲}{۲}$$

۲) با توجه به یادداشت ریاضی بالا لحظهٔ t در نمودار $x-t$ برابر است با:



$$t=\frac{۳+۵}{۲}=۴s$$

۳) با توجه به نمودار در $t=۴s$ سرعت متحرک صفر شده و در بازهٔ $t=۴s$ تا $t=۵s$ متحرک به اندازهٔ $\Delta x=۰-(-۱)=۱m$ جابه‌جا می‌شود. شتاب متحرک را با توجه به این اطلاعات حساب می‌کنیم:

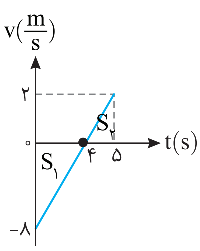
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۱t\xrightarrow[\Delta t=۱s]{v_۱=۰}۱=\frac{۱}{۲}a\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۴) شتاب متحرک $۲m/s^۲$ و در $t=۴s$ سرعت متحرک صفر شده است، با توجه به این اطلاعات سرعت اولیه و سرعت در $t=۵s$ را حساب می‌کنیم:

$$t_۲=۴s\,،t_۱=۰:\quad v_۲=at+v_۱\xrightarrow[v_۲=۰]{\Delta t=۴s}۰=۲\times۴+v_۱\Rightarrow v_۱=-۸m/s$$

$$t_۳=۵s\,،t_۲=۴s:\quad v_۳=at+v_۲\xrightarrow[v_۲=۰]{\Delta t=۱s}v_۳=۲\times۱+۰\Rightarrow v_۳=۲m/s$$

۵) برای به‌دست آوردن تندی متوسط نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم تا با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت به‌دست آید:



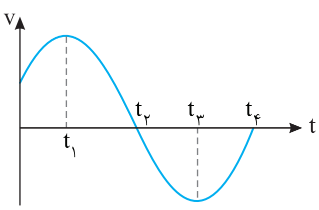
$$L=|S_۱|+|S_۲|$$

$$\Rightarrow L=\frac{۴\times۸}{۲}+\frac{۱\times۲}{۲}=۱۶+۱=۱۷m$$

۶) مسافت طی‌شده برابر است با:

$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}=\frac{۱۷}{۵}$$

۱۴۳- گزینهٔ ۱



خط فکری: در نمودار $v-t$ مطابق شکل زیر به نکات زیر دقت کنید:

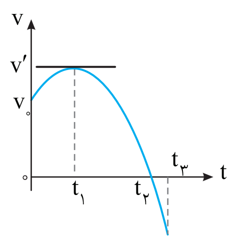
الف) در بازهٔ ۰ تا $t_۲$ سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت مثبت محور xها در حال حرکت است و در مدت $t_۲$ تا $t_۴$ سرعت منفی شده و جهت حرکت تغییر کرده و متحرک در خلاف جهت محور xها در حال حرکت است.

نکته: جهت حرکت با جهت سرعت مشخص می‌شود و اگر سرعت مثبت باشد، متحرک در جهت محور xها حرکت می‌کند و بالعکس.

ب) شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در هر لحظه برابر شتاب حرکت است. در بازهٔ ۰ تا t_1 و t_3 تا t_4 نمودار صعودی با شیب مثبت بوده و شتاب مثبت است و در بازهٔ t_1 تا t_3 نمودار نزولی بوده و شتاب منفی است.

پ) در بازهٔ ۰ تا t_1 و t_2 تا t_3 نمودار از محور زمان در حال دور شدن بوده و تندی در حال افزایش و حرکت تندشونده است و از طرف دیگر در بازهٔ t_1 تا t_2 و t_3 تا t_4 نمودار به محور زمان در حال نزدیک شدن بوده و تندی در حال کاهش و حرکت کندشونده است.

ت) در لحظهٔ t_2 سرعت صفر شده و پس از آن تغییر علامت می‌دهد، پس در این لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد و در بیشینه و کمینهٔ نمودار یعنی لحظه‌های t_1 و t_3 شیب خط مماس صفر بوده و در نتیجه شتاب صفر می‌شود و علامت شتاب تغییر می‌کند.



با توجه به این نکات به بررسی تک‌تک گزاره‌ها می‌پردازیم:

الف) در لحظهٔ t_1 شـیب خط نمودار افقی و صفر شـده پس در این لحظه تنها شـتاب صفر شـده و تغییر علامت می‌دهد اما سرعت v' بوده و تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین گزاره (الف) نادرست است.

ب) در بازهٔ t_1 تا t_2 سرعت مثبت بوده پس متحرک در جهت مثبت محور xها در حال حرکت است و گزارهٔ (ب) درست است.

پ) در بازهٔ ۰ تا t_1 نمودار از محور افقی زمان در حال دور شـدن اسـت، پس حرکت متحرک تندشـونده بوده و تندی آن از v_0 تا v' افزایش می‌یابد و گزارهٔ (پ) نادرست است.

ت) در بازهٔ ۰ تا t_1 نمودار صعودی با شـیب مثبت بوده و شـتاب آن مثبت اسـت (شـتاب در جهت محور x است) و در بازهٔ t_1 تا t_2 نمودار نزولی با شیب منفی بوده و شتاب آن منفی است (شتاب خلاف جهت محور x است) بنابراین گزارهٔ (ت) نادرست است و تنها گزارهٔ (ب) درست است.

نکته: البته می‌توانیم کمی حرفه‌ای‌تر باشیم، با توجه به گزینه‌ها گزارهٔ (ب) و (ت) دو بار در گزینه‌ها تکرار شده‌اند، پس تنها همین دو گزاره را بررسی کنیم و چون گزارهٔ (ب) درست و گزارهٔ (ت) نادرست است، پس پاسخ گزینهٔ (۱) می‌شود.

۱۴۴- گزینهٔ ۱

خط فکری: در این سؤال با نمودار $x-t$ سروکار داریم، به دو نکته زیر دقت کنید:

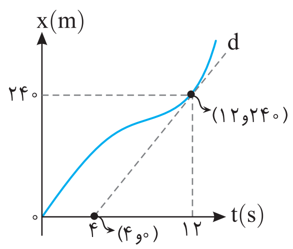
۱) سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\overset{\text{جابه‌جایی}}{\Delta x}}{\Delta t}$ یا شیب خط قاطع بین دو لحظه است و تندی متوسط برابر $s_{av}=\frac{\overset{\text{مسافت}}{l}}{\Delta t}$ است.

۲) سرعت در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان در آن لحظه و تندی برابر اندازهٔ شیب خط مماس در آن لحظه خواهد بود.

در حل سؤال ابتدا با فرض مسئله یعنی برابری تندی در لحظهٔ $t=12s$ با تندی متوسط در بازهٔ $t_1=2s$ تا $t_2=14s$ شروع می‌کنیم، سپس خواستهٔ سؤال یعنی نسبت سرعت متوسط در دو بازهٔ گفته شده را حساب می‌کنیم.

۱) تندی در لحظهٔ $t=12s$ برابر شیب خط مماس d است.

یادآوری: شیب خط برابر نسبت تغییرات محور قائم به تغییرات محور افقی است:

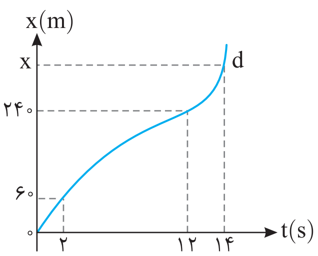


$$\text{شیب خط}=\frac{\text{تغییرات محور قائم}}{\text{تغییرات محور افقی}}=\frac{240-0}{12-4}=\frac{240}{8}=30m/s$$

شیب خط برابر تندی لحظه‌ای است، بنابراین:

$$s(t=12s)=30m/s \quad (I)$$

۲) مکان متحرک در لحظهٔ $t=14s$ داده نشـده و مطابق شـکل در بازهٔ ۲s تا ۱۴s متحرک از مکان ۶۰m به مکان x می‌رسد:



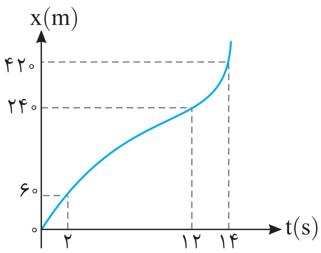
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{x-60}{12} \qquad (II)$$

با توجه به فرض مسئله تندی در لحظهٔ ۱۲s با تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۱۴s باهم برابر است پس از رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نوشت:

$$\frac{x-60}{12}=30\Rightarrow x-60=360\Rightarrow x=420m$$

یادآوری: دو ثانیه اول یعنی $t=0$ تا $t=2s$ و دو ثانیه هفتم یعنی $t=12s$ تا $t=14s$

دو ثانیه اول	دو ثانیه دوم	دو ثانیه سوم	دو ثانیه چهارم	دو ثانیه پنجم	دو ثانیه ششم	دو ثانیه هفتم
۰ تا ۲s	۲s تا ۴s	۴s تا ۶s	۶s تا ۸s	۸s تا ۱۰s	۱۰s تا ۱۲s	۱۲s تا ۱۴s



۳) در دو ثانیه اول (۰ تا ۲s) متحرک از مکان $x=۰$ تا $x=۶۰m$ جابه‌جا می‌شود و سرعت متوسط در این بازه برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۶۰-۰}{۲}=۳۰m/s$$

۴) در دو ثانیه هفتم (۱۲s تا ۱۴s) متحرک از مکان $x=۲۴۰m$ به مکان $x=۴۲۰m$ می‌رود و سرعت متوسط خواهد شد:

$$v'_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v'_{av}=\frac{۴۲۰-۲۴۰}{۲}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰m/s$$

۵) نسبت v_{av} به v'_{av} را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av}}{v'_{av}}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴۵- گزینهٔ ۳

یادآوری: شتاب متوسط برابر $\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ است.

۱) شتاب متوسط در بازهٔ ۰ تا ۱۰s برابر $-۲\vec{i}$ است:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\xrightarrow[t_۲=۱۰s]{t_۱=۰}-۲\vec{i}=\frac{\vec{v}(t=۱۰s)-\vec{v}(t=۰)}{۱۰-۰}\Rightarrow\vec{v}(t=۱۰s)-\vec{v}(t=۰)=-۲۰\vec{i}\quad(۱)$$

۲) شتاب متوسط در بازهٔ ۰ تا ۱۵s برابر $\frac{۲}{۳}\vec{i}$ است:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\xrightarrow[t_۲=۱۵s]{t_۱=۰}\frac{۲}{۳}\vec{i}=\frac{\vec{v}(t=۱۵s)-\vec{v}(t=۰)}{۱۵-۰}\Rightarrow\vec{v}(t=۱۵s)-\vec{v}(t=۰)=۱۰\vec{i}\quad(۲)$$

۳) برای به‌دست آوردن شتاب متوسط در بازهٔ ۱۰s تا ۱۵s نیاز به تغییر سرعت در این بازه یعنی $\vec{v}(t=۱۵s)-\vec{v}(t=۱۰s)$ است که این مقدار را با توجه به معادله‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\vec{v}(t=۱۰s)-\vec{v}(t=۰)=-۲۰\vec{i}\\ \vec{v}(t=۱۵s)-\vec{v}(t=۰)=۱۰\vec{i}\end{cases}\xrightarrow[\vec{v}(t=۰)\ \text{حذف شود.}]{\text{دو معادله را از هم کم می‌کنیم تا}}\vec{v}(t=۱۰s)-\vec{v}(t=۱۵s)=-۳۰\vec{i}\Rightarrow\vec{v}(t=۱۵s)-\vec{v}(t=۱۰s)=۳۰\vec{i}$$

۴) حال شتاب متوسط در بازهٔ ۱۰s تا ۱۵s را حساب می‌کنیم:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}(t=۱۵s)-\vec{v}(t=۱۰s)}{\Delta t}\Rightarrow\vec{a}_{av}=\frac{۳۰\vec{i}}{۵}=۶\vec{i}$$

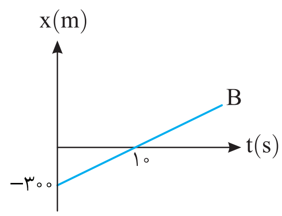
۱۴۶- گزینهٔ ۲

خط فکری: ابتدا با توجه به نمودار باید معادلهٔ حرکت دو متحرک را بنویسیم. فاصلهٔ بین دو متحرک برابر تفاضل مکان دو متحرک یعنی $|x_A-x_B|$ است.

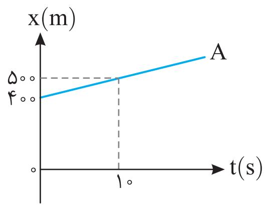
نکته: اگر نمودار $x-t$ متحرکی به صورت خط راست باشد، حرکت متحرک با سرعت ثابت بوده و معادلهٔ حرکت آن به صورت $x=vt+x_۰$ است.

یادآوری: شیب نمودار $x-t$ برابر سرعت متحرک است.

۱) با توجه به شیب خط‌ها، سرعت متحرک‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$v_B=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_B=\frac{۳۰۰}{۱۰}=۳۰m/s$$



$$v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_A=\frac{۱۰۰}{۱۰}=۱۰m/s$$

۲) معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم.

$$x_A=v_At+x_{۰A}\xrightarrow[x_{۰A}=۴۰۰m]{v_A=۱۰m/s}x_A=۱۰t+۴۰۰\quad,\quad x_B=v_Bt+x_{۰B}\xrightarrow[x_{۰B}=-۳۰۰m]{v_B=۳۰m/s}x_B=۳۰t-۳۰۰$$

۳) فاصلهٔ دو متحرک از هم ۶۰۰ متر است، بنابراین:

$$|x_A-x_B|=۶۰۰\xrightarrow[x_B=۳۰t-۳۰۰]{x_A=۱۰t+۴۰۰}|۱۰t+۴۰۰-۳۰t+۳۰۰|=۶۰۰\Rightarrow|-۲۰t+۷۰۰|=۶۰۰$$

نکته: در حل معادله‌های قدرمطلقی حواستون باشد که:

$$|x|=a\Rightarrow x=\pm a$$

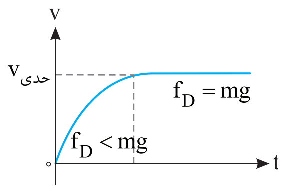
۴) حال معادله را حساب می‌کنیم:

$$|-۲۰t+۷۰۰|=۶۰۰\Rightarrow -۲۰t+۷۰۰=\pm ۶۰۰\Rightarrow \begin{cases}-۲۰t+۷۰۰=۶۰۰\Rightarrow -۲۰t=-۱۰۰\Rightarrow t_۱=۵s\\ -۲۰t+۷۰۰=-۶۰۰\Rightarrow -۲۰t=-۱۳۰۰\Rightarrow t_۲=۶۵s\end{cases}\Rightarrow \frac{t_۲}{t_۱}=\frac{۶۵}{۵}=۱۳$$

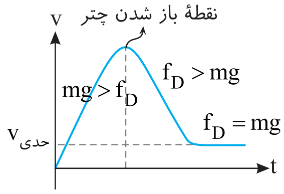
۱۴۷- گزینهٔ ۲

Ⓒ **خط فکری:** در موضوع مقاومت شاره و حرکت چترباز به دو حالت زیر دقت کنید:

الف) اگر چترباز در همان ابتدا با چتر باز پریده باشد، رفته‌رفته تندی آن افزایش یافته تا به تندی حدی برسد و پس از آن با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد:



ب) اگر چترباز بپرد و پس از مدتی چتر خود را باز کند، در لحظهٔ باز شدن چتر تندی حرکت متحرک بیشینه بوده و با باز شدن چتر تندی چترباز شروع به کم شدن می‌کند تا به تندی حدی برسد:

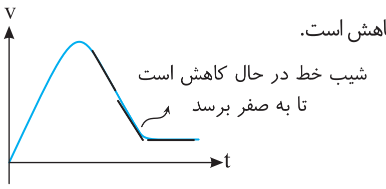


نکته: مقاومت هوا به تندی جسم بستگی دارد و با افزایش و یا کاهش تندی جسم مقاومت هوا به ترتیب افزایش و یا کاهش می‌یابد.

با توجه به سـؤال چترباز بعد از مدتی چتر خود را باز کرده یعنی حرکت چترباز مانند حالت (ب) خط فکری اسـت. بعد از باز شدن چتر تندی چترباز شروع به کاهش می‌کند بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) که در آن‌ها بیان شده تندی جسم افزایش می‌یابد نادرست بوده و تنها گزینهٔ (۲) درست است.

اما بررسی شتاب حرکت: جهت حرکت چترباز به سمت پایین است و پس از باز کردن چتر حرکت چترباز کندشونده بوده و نیروی مقاومت هوا (f_D) به سمت بالا و بزرگ‌تر از W اسـت و نیروی خالص وارد بر چترباز f_D-W، خواهد شـد. در اصل $F_{net}=ma\Rightarrow f_D-W=ma'$ اسـت و با کم شدن تندی جسم f_D کاهش می‌یابد در نتیجه شتاب کاهش می‌یابد و در تندی حدی که $f_D=mg$ می‌شود شتاب صفر است یعنی شتاب بعد از باز شدن چتر در حال کاهش است.

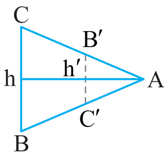
البتـه می‌توانسـتیم از روی نمودار $v-t$ و شـیب خط مماس که شـتاب را به ما می‌دهد نیز ایـن موضوع را متوجه شویم:



۱۴۸- گزینهٔ ۲

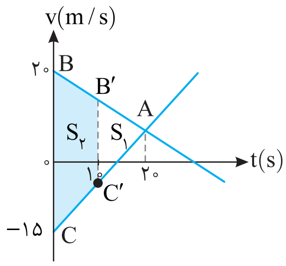
Ⓑ با یک مسئله ریاضی در مبحث تشابه مثلث‌ها سروکار داریم.

یادآوری ریاضی: در مثلث روبه‌رو نسبت مساحت ABC به مساحت $A''B'C'$ با مجذور نسبت ارتفاع Ah/Ah' برابر است.



$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\left(\frac{Ah'}{Ah}\right)^۲$$

مسئله در واقع مساحت $S_۲$ را می‌خواهد، بنابراین با توجه به یادداشت ریاضی می‌توان نوشت:



$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\left(\frac{۱۰}{۲۰}\right)^۲\Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$S_۱=\frac{۱}{۴}S_{ABC}\xrightarrow{S_{ABC}=S_۱+S_۲}S_۲=\frac{۳}{۴}S_{ABC}$$

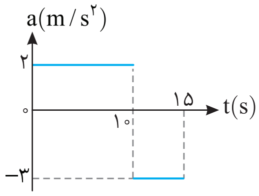
برای به‌دست آوردن مساحت مثلث ABC دقت کنید که ارتفاع آن ۲۰ و قاعدهٔ آن ۳۵=۱۵+۲۰ است. از این‌رو می‌خواهیم داشت:

$$S_۲=\frac{۳}{۴}\left(\frac{۳۵\times ۲۰}{۲}\right)\Rightarrow S_۲=۲۶۲/۵m$$

۱۴۹- گزینهٔ ۳

Ⓑ

۱) سرعت در لحظهٔ $t=۳s$، $+۱m/s$ است، بنابراین سرعت در لحظهٔ $t_۱=۷s$ خواهد شد:



$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲\times(۷-۳)+۱\Rightarrow v_۱=۹m/s$$

۲) سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را حساب می‌کنیم

$$v=at+v_۰\Rightarrow v_۲=۲\times(۱۰-۳)+۱\Rightarrow v_۲=۱۵m/s$$

$$v=at+v_۰\xrightarrow[v_۰=۱۵m/s]{a=-۳m/s^۲}$$

سرعت در لحظهٔ $t=۱۲s$ را به‌دست می‌آوریم (یادمان است که سرعت نهایی هر قسمت از مسیر، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی است.)

$$v_۳=-۳\times(۱۲-۱۰)+۱۵\Rightarrow v_۳=۹m/s$$

۳) جابه‌جایی را در بازهٔ ۷s تا ۱۰s به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_1=\frac{۱۵+۹}{۲}\times(۱۰-۷)=۳۶m$$

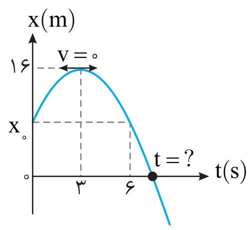
۴) جابه‌جایی در بازهٔ ۱۰s تا ۱۲s را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_1=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta x_1=\frac{۱}{۲}(-۳)(۲)^۲+۱۵\times ۲=۲۴m$$

۵) سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۳۶+۲۴}{۱۲-۷}\Rightarrow v_{av}=\frac{۶۰}{۵}=۱۲m/s$$

۱۵۰- گزینهٔ ۳



۱) حرکت با شتاب ثابت بوده و نمودار آن سهمی است. در نمودار سهمی، خط قائم گذرنده از رأس سهمی، محور تقارن آن است، بنابراین مطابق شکل در لحظه‌های $t=۰$ و $t=۶s$، مکان متحرک یکسان است.

۲) در بازهٔ صفر تا ۶s، تندی متوسط متحرک $۳m/s$ است، در این صورت مسافت طی شده در این مدت خواهد شد:

$$L=vt\Rightarrow L=۳\times۶=۱۸m$$

۳) متحرک در مدت صفر تا ۶s، ۱۸m مسافت طی کرده و مطابق نمودار ابتدا در مدت ۳s اول ۹m رفته و سپس از ۳s تا ۶s، ۹m برگشته است.

۴) از صفر تا ۳s، ۹m رفته بنابراین مکان اولیهٔ آن خواهد شد:

$$۱۶-x_۰=۹\Rightarrow x_۰=۷m$$

۵) با توجه به معادلهٔ مستقل از شتاب در بازهٔ صفر تا ۳s سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۹=\frac{۰+v_۰}{۲}\times۳\Rightarrow v_۰=\frac{۱۸}{۳}m/s=۶m/s$$

۶) شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

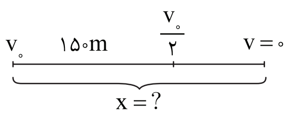
$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۳}=-۲m/s^۲$$

۷) در مدت زمانی که نمودار $x-t$ بالای محور زمان است و x مثبت است، بردار مکان مثبت خواهد بود.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow ۰=\frac{۱}{۲}(-۲)t^۲+۶t+۷\Rightarrow t^۲-۶t-۷=۰\Rightarrow t=-۱s\,,\,t=۷s$$

۱۵۱- گزینهٔ ۲

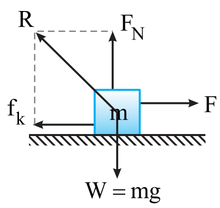
مسئله به راحتی به کمک معادلهٔ مستقل از زمان قابل حل است. یک بار برای مسافت ۱۵۰m و بار دیگر برای مسافت x معادله را نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.



$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow\begin{cases}(\frac{v_۰}{۲})^۲-v_۰=۲a(۱۵۰)\\ ۰-v_۰^۲=۲a(x)\end{cases}\Rightarrow\frac{-\frac{۳}{۴}v_۰^۲}{-v_۰^۲}=\frac{۱۵۰}{x}\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}\times۱۵۰\Rightarrow x=۲۰۰m$$

۱۵۲- گزینهٔ ۲

خط فکری: هر گاه در مسائل دینامیک، در صورت مسئله، زمان داده شود یعنی شما باید سراغ حرکت‌شناسی بروید زیرا در روابط حرکت‌شناسی، زمان وجود دارد. یعنی به کمک حرکت‌شناسی، شتاب را حساب کنید سپس به کمک قانون دوم نیوتون (البته پس از رسم نیروهای وارد بر جسم) مجهول مسئله را به‌دست بیاورید.



۱) شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم.

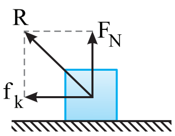
$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۳-۰}{۴}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}m/s^۲$$

۲) به کمک قانون دوم نیوتون نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۱۷۷-f_k=۳۶\times\frac{۳}{۴}\Rightarrow f_k=۱۵۰N$$

۳) جسم روی سطح افقی در حال حرکت است پس باید نیروهای قائم متوازن باشند:

$$F_N=W\Rightarrow F_N=mg\Rightarrow F_N=۳۶۰N$$



نکته: نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک از طرف سطح به جسم وارد می‌شود بنابراین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است که برهم عمودند:

$$R=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}$$

۴) نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برایند نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک است:

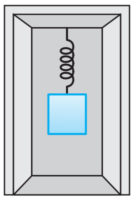
$$R=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}=\sqrt{۳۶۰^۲+۱۵۰^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۳۰^۲(۱۲^۲+۵^۲)}\Rightarrow R=۳۰\sqrt{۱۶۹}\Rightarrow R=۳۰\times۱۳\Rightarrow R=۳۹۰N$$

۱۵۳- گزینهٔ ۱

خط فکری: هر گاه در صورت مسئله کلمه ساکن و یا سرعت ثابت مشاهده کردید بلافاصله بالای آن عبارت $F_{net}=۰$ را قرار دهید. در این مسئله با این کار می‌توانید

جرم m را حساب کنید.

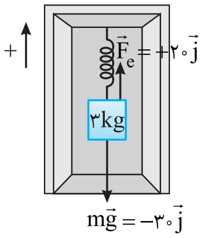
۱) وقتی آسانسور ساکن است نیروی کشسانی فنر برابر نیروی وزن جسم است.



$$W=F_e \Rightarrow mg=k\Delta x$$

$$\Rightarrow m\times 10=200\times\left(\frac{65-50}{100}\right)\Rightarrow m=3\,kg$$

۲) می‌خواهیم طول فنر $60\,cm$ شود یعنی نیروی کشسانی فنر برابر شود با:



$$F_e=k\Delta L\Rightarrow F_e=200\times\left(\frac{60-50}{100}\right)$$

$$\Rightarrow F_e=20\,N$$

۳) جهت مثبت محور yها را رو به بالا اختیار می‌کنیم.

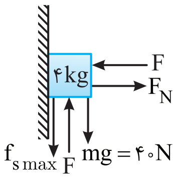
در صورت تست بیان نشده که جهت مثبت را باید رو به بالا و یا رو به پایین اختیار کنیم اما چون همواره در ریاضی جهت مثبت محور yها رو به بالاست ما نیز این مطلب را رعایت می‌کنیم. در این حالت نیروی کشسانی فنر برابر $\vec{F}_e=+20\vec{j}$ و نیروی وزن برابر $\vec{W}=m\vec{g}=-30\vec{j}$ می‌شود و بنا به قانون دوم نیوتون شتاب برابر است با:

$$\vec{F}_{net}=m\vec{a}\Rightarrow \vec{F}_e+\vec{W}=m\vec{a}\Rightarrow 20\vec{j}+(-30\vec{j})=3\vec{a}\Rightarrow \vec{a}=\frac{-10}{3}\vec{j}$$

۱۵۴- گزینهٔ ۲

خط فکری: مسئله در دو حالت بیان شده است بنابراین شما باید هر حالت را جداگانه بررسی کنید و نیروهای وارد بر جسم را در هر حالت رسم کرده و به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل کنید.

حالت (۱): در حالت اول جسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا است نیروی اصطکاک باید خلاف جهت لغزش باشد پس نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ رو به پایین است.



الف) جسم در راستای افقی ساکن است پس باید F_N و F متوازن باشد:

$$F_N=F$$

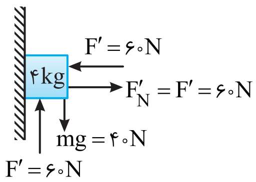
ب) اصطکاک در آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow[\mu_s=0/5]{F_N=F} f_{s\,max}=0/5F$$

پ) جسم ساکن است و نیروها در راستای قائم متوازن بوده بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

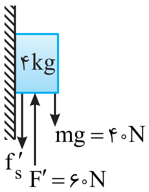
$$F_{net}=ma\Rightarrow \overbrace{mg+f_{s\,max}}^{\text{نیروهای رو به پایین}}=F\Rightarrow 40+0/5F=F\Rightarrow 40=F-0/5F\Rightarrow 40=0/5F\Rightarrow F=80\,N$$

حالت (۲): در این حالت نیرو F را $20\,N$ کاهش داده‌ایم یعنی نیروی F' برابر $80-20=60$ است، ابتدا $f'_{s\,max}$ را به‌دست می‌آوریم تا ببینیم جسم شروع به حرکت می‌کند یا نه؟



$$f'_{s\,max}=\mu_s F'\Rightarrow f'_{s\,max}=0/5\times 60=30\,N$$

نیروی $mg=40\,N$ می‌خواهد جسم را به سمت پایین بکشد و نیروی $F'=60\,N$ می‌خواهد جسم را به سمت بالا هل دهد پس در واقع نیروی $60-40=20$ نیوتون می‌خواهد جسم را بالا ببرد که این مقدار از $f'_{s\,max}$ کمتر است در نتیجه جسم در حال سکون باقی می‌ماند و به جسم ساکن نیروی اصطکاک ایستایی وارد می‌شود:



جسم ساکن است: $\underbrace{mg+f'_s}_{\text{نیروهای روبه‌پایین}}=F'\Rightarrow 40+f'_s=60\Rightarrow f'_s=20\,N$

نیروی عمودی سطح و اصطکاک در حالت اول برابر شد با: $F_N=80\,N\;,\;f_{s\,max}=\mu_s F_N=40\,N$

نیروی عمودی سطح و اصطکاک در حالت دوم برابر شد با: $F'_N=60\,N\;,\;f'_s=20\,N$

نکته: برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح برابر نیرویی است که جسم بر سطح یا سطح بر جسم وارد می‌کند.

حالت (۱)

$$R=\sqrt{f_{s\,max}^2+F_N^2}$$

$$R=\sqrt{40^2+80^2}=40\sqrt{1+2^2}$$

$$R=40\sqrt{5}\,N$$

حالت (۲)

$$R'=\sqrt{f'^2_s+F'^2_N}$$

$$R'=\sqrt{20^2+60^2}=20\sqrt{1^2+3^2}$$

$$R'=20\sqrt{10}$$

حال نسبت $\frac{R'}{R}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{R'}{R}=\frac{20\sqrt{10}}{40\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{40\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

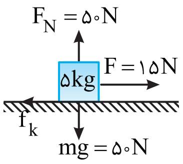
۱۵۵- گزینهٔ ?

شکل سؤال کنکور کامل نبوده و این سؤال قابل حل نیست.

۱۵۶- گزینهٔ ۴

خط فکری: حرکت مکعبی چوبی شامل یک قسمت تندشونده قبل از پاره‌شدن نخ و یک قسمت کندشونده بعد از پاره شدن نخ است. در نتیجه شتاب هر قسمت را به‌دست آورده و مسافت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

۱) ابتدا برایند نیروها در $2s$ اول را حساب کرده و شتاب حرکت در این بازه را به‌دست می‌آوریم:



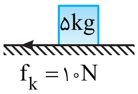
$$f_k = \mu_k F_N \Rightarrow f_k = 0.2 \times 50 = 10N$$

$$F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow 15 - 10 = 5a \Rightarrow a = 1m/s^2$$

۲) با استفاده از رابطهٔ سرعت - زمان و جابه‌جایی - زمان، سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 2s$ و مسافت طی‌شده در این $2s$ را حساب می‌کنیم.

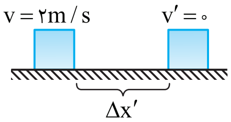
$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0 = 0]{a=1, t=2s} v = 2m/s \quad , \quad \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2m$$

۳) بعد از پاره شدن نخ به جسم تنها نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شود:



$$F'_{net} = ma' \Rightarrow -10 = 5a' \Rightarrow a' = -2m/s^2$$

۴) با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی در این بازه را حساب می‌کنیم:

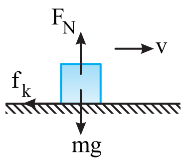


$$v'^2 - v^2 = 2a'\Delta x' \Rightarrow 0 - 4 = -4\Delta x' \Rightarrow \Delta x' = 1m$$

۵) جابه‌جایی کل برابر است با:

$$\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x + \Delta x' \Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = 2 + 1 = 3m$$

میانبر: اگر جسمی روی سطحی پرتاب شود و در راستای حرکت تنها نیروی اصطکاک جنبشی به آن وارد شود، خواهیم داشت:



$$F_{net} = ma \Rightarrow -f_k = ma \Rightarrow -\mu_k F_N = ma$$

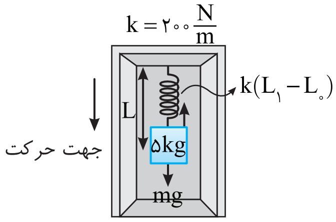
نیروی عمودی سطح برابر mg است:

$$-\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g$$

۱۵۷- گزینهٔ ۲

خط فکری: در سؤالاتی مانند مسائل آسانسور که نیروهای وارد بر جسم هم‌راستای هستند، می‌توان قانون دوم نیوتون را به صورت زیر نوشت:

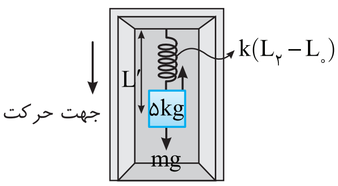
$$F_{net} = ma \Rightarrow \text{نیرو در جهت حرکت} - \text{نیرو در خلاف جهت حرکت} = ma \begin{cases} a > 0 : \text{تندشونده} \\ a < 0 : \text{کندشونده} \end{cases}$$



حالت اول: آسانسور در حال پایین رفتن بوده و mg نیرو در جهت حرکت است. حرکت تندشونده بوده و شتاب $+2m/s^2$ گرفته می‌شود.

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - k(L_1 - L_0) = ma \Rightarrow 50 - 200(L_1 - L_0) = 5 \times 2$$

$$\Rightarrow 200(L_1 - L_0) = 40 \Rightarrow L_1 - L_0 = 0.2m = 20cm \quad (I)$$



حالت دوم: آسانسور به سمت پایین در حال حرکت بوده و mg نیرو در جهت است. حرکت کندشونده بوده و شتاب را $-1m/s^2$ در نظر می‌گیریم.

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - k(L_2 - L_0) = ma \Rightarrow 50 - 200(L_2 - L_0) = 5 \times (-1)$$

$$\Rightarrow 200(L_2 - L_0) = 55 \Rightarrow L_2 - L_0 = \frac{55}{200}m = 27.5cm \quad (II)$$

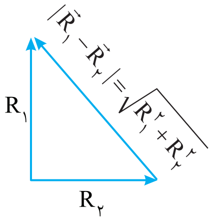
با استفاده از دو معادله (I) و (II) اختلاف L_1 و L_2 به‌دست می‌آید:

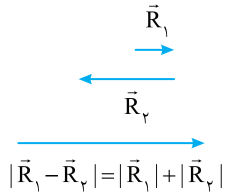
$$\begin{cases} L_1 - L_0 = 20cm \\ L_2 - L_0 = 27.5cm \end{cases} \Rightarrow L_2 - L_1 = 7.5cm$$

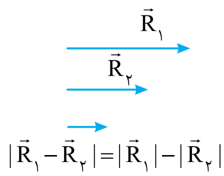
۱۵۸- گزینهٔ ۱

یادداشت ریاضی: برای تفاضل دو بردار سه حالت خاص زیر را به خاطر داشته باشید:

دو بردار هم‌جهت | دو بردار خلاف جهت هم | دو بردار عمود بر هم



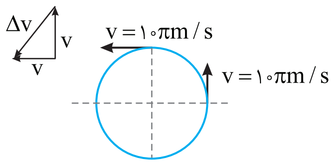




۱) ابتدا دورهٔ حرکت دایره‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$v=r\times\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۱۰\pi=۲۰\times\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۴s$$

۲) بنابراین در هر ثانیه متحرک $\frac{۱}{۴}$ دوره را طی می‌کند و با توجه به اینکه سرعت در هر لحظه مماس بر مسیر حرکت است، سرعت‌ها در ابتدا و انتهای بازه زمانی ۱s بر هم عمود هستند و Δv با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید:



$$|\Delta v|=\sqrt{v^۲+v^۲}=v\sqrt{۲}\Rightarrow \Delta v=۱۰\sqrt{۲}\pi$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۰\sqrt{۲}\pi}{۱}=۱۰\sqrt{۲}\pi$$

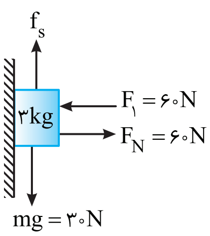
۳) شتاب مرکزگرا برابر است با:

$$a_c=\frac{v^۲}{r}\Rightarrow a_c=\frac{۱۰۰\pi^۲}{۲۰}=۵\pi^۲$$

۴) نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{a_{av}}{a_c}=\frac{۱۰\sqrt{۲}\pi}{۵\pi^۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$$

۱۵۹- گزینهٔ ۳

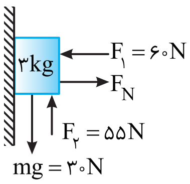


خط فکری: ابتدا با نیروی $F_۱$ جسم ساکن است، در این حالت به جسم نیروی $mg=۳۰N$ رو به پایین وارد می‌شود، اما جسم تکان نمی‌خورد یعنی برای نیروهای مساوی یا کوچک‌تر از ۳۰N جسم به حرکت در نمی‌آید.

جسم ساکن است: $f_s=mg\Rightarrow f_s=۳۰N$,

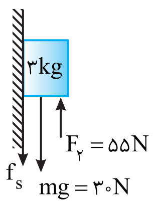
جسم در راستای افقی حرکت ندارد: $F_۱=F_N\Rightarrow F_N=۶۰N$

هم بر نیروی وزن و هم بر نیروی اصطکاک غلبه شده است.



مطابق شکل به جسم دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ وارد می‌شود:

در راستای افقی جسم حرکت نمی‌کند: $F_۱=F_N\Rightarrow F_N=۶۰N$



دو نیروی $F_۲=۵۵N$ به سمت بالا و $mg=۳۰N$ به سمت پایین به جسم وارد می‌شود. در واقع به جسم نیروی خالص $۵۵-۳۰=۲۵N$ به سمت بالا وارد می‌شود که چون از ۳۰N کمتر است با توجه به خط فکری جسم همچنان ساکن می‌ماند و به آن نیروی اصطکاک ایستایی به سمت پایین وارد می‌شود، چون نیروی $F_۲$ به سمت بالا بزرگ‌تر از نیروی mg به سمت پایین است:

جسم ساکن است: $f_s+mg=F_۲\Rightarrow f_s+۳۰=۵۵\Rightarrow f_s=۲۵N$

نکته: از طرف سطح دو نیروی عمودی سطح و اصطکاک، عمود بر هم به جسم وارد می‌شود بنابراین نیرویی که سطح وارد می‌کند برایند این دو نیروی عمود برهم است:

$$R=\sqrt{f^۲+F_N^۲}$$

نیروی وارد از طرف سطح را حساب می‌کنیم:

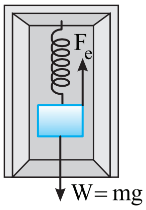
$$R=\sqrt{f_s^۲+F_N^۲}\xrightarrow[F_N=۶۰N]{f_s=۲۵N}R=\sqrt{(۲۵)^۲+(۶۰)^۲}=۵\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}=۵\sqrt{۲۵+۱۴۴}\Rightarrow R=۵\sqrt{۱۶۹}\xrightarrow{\sqrt{۱۶۹}=۱۳}R=۶۵N$$

میانبر: خوب است دو عدد فیثاغورسی را بلد باشیم:

$(۳,۴,۵),(۵,۱۲,۱۳)$

دو نیروی عمود بر هم در این سؤال $۵\times۵=۲۵$ نیوتون و $۵\times۱۲=۶۰$ است پس برایند آن‌ها $۵\times۱۳=۶۵$ نیوتون است.

۱۶۰- گزینهٔ ۴

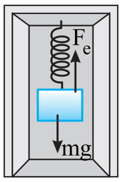


۱) مطابق شکل روبه‌رو، در یک شکل ساده نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

نکته: در استفاده از قانون دوم نیوتون به نکات زیر دقت کنید:

$$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}a>۰:\text{حرکت تندشونده}\\ a<۰:\text{حرکت کندشونده}\end{cases}$$

$$F_{net}=\text{نیرو در جهت حرکت}-\text{نیرو خلاف جهت حرکت}$$



۲) آسانسور در حال حرکت به سمت بالا و در حال ترمز بوده $(a=-۲m/s^۲)$ است، با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net}=ma\xrightarrow[a=-۲m/s^۲]{F_{net}=\text{نیرو در جهت حرکت}-\text{نیرو خلاف جهت حرکت}}$$

$$F_e-mg=ma\xrightarrow[m=۰/۸kg]{mg=۸N}F_e-۸=۰/۸\times(-۲)\Rightarrow F_e-۸=-۱/۶\Rightarrow F_e=۶/۴N$$

یادآوری: نیروی فنر برابر $F_e=k\Delta x$ است:

$$F_e=k\Delta x$$

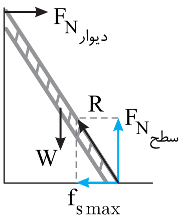
نکته: در رابطهٔ $F_e=k\Delta x$ اگر یکای ثابت فنر N/m باشد، تغییر طول فنر نیز برحسب m قرار می‌گیرد و اگر ثابت فنر برحسب N/cm داده شده می‌توان یکای تغییر طول فنر را نیز cm قرار داد.

$$۶/۴=۲\times\Delta x\Rightarrow\Delta x=۳/۲cm$$

نیروی وزن (mg) فنر را به سمت پایین می‌کشد و بزرگی شتاب حرکت $۲m/s^۲$ بوده و از $g=۱۰m/s^۲$ کمتر است پس فنر کشیده خواهد شد:

$$x_۲-x_۱=۳/۲\xrightarrow{x_۱=۲۰cm}x_۲-۲۰=۳/۲\Rightarrow x_۲=۲۳/۲cm$$

۱۶۱- گزینهٔ ۱

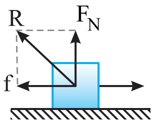


نکته: هر گاه بر جسمی نیرو وارد شود و جسم در آستانهٔ سُر خوردن باشد، یعنی اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح بیشینه $(f_{s_{max}}=\mu_s F_N)$ است.

باید شکل مسئله را رسم کنید و نیروهای وارد بر نردبان را بکشید.

یادآوری: نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است.

$$R=\sqrt{F_N^۲+f^۲}$$



۱) نردبان ساکن است، از این‌رو نیروهایی که در امتداد قائم هستند، یعنی نیروی وزن (W) و نیروی عمودی سطح (F_N) متوازن بوده بنابراین:

$$F_N=W=mg\xrightarrow{m=۱۶kg}F_N=۱۶\times۱۰=۱۶۰N$$

۲) نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$R=\sqrt{F_N^۲+f_{s_{max}}^۲}\Rightarrow۲۰۰^۲=۱۶۰^۲+f_{s_{max}}^۲\Rightarrow f_{s_{max}}^۲=۲۰۰^۲-۱۶۰^۲=(۲۰۰+۱۶۰)(۲۰۰-۱۶۰)=۳۶۰\times۴۰$$

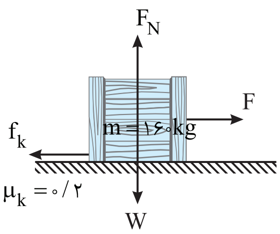
$$f_{s_{max}}^۲=۳۶\times۴۰۰\Rightarrow f_{s_{max}}=۶\times۲۰=۱۲۰N$$

۳) ضریب اصطکاک ایستایی خواهد شد:

$$f_{s_{max}}=\mu_s mg\Rightarrow۱۲۰=\mu_s\times۱۶\times۱۰\Rightarrow\mu_s=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

۱۶۲- گزینهٔ ۲

شکل مسئله را مدل‌سازی می‌کنیم و نیروهای وارد بر صندوق را رسم می‌کنیم.



۱) جسم در امتداد قائم حرکتی ندارد، بنابراین نیروهای F_N و W متوازن هستند.

$$F_N=W\xrightarrow{W=mg}F_N=۱۶۰\times۱۰\Rightarrow F_N=۱۶۰۰N$$

۲) اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی را در این حالت به‌دست می‌آوریم:

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۲\times۱۶۰۰\Rightarrow f_k=۳۲۰N$$

۳) به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی F را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\xrightarrow{a=۰/۲۵m/s^۲}F-۳۲۰=۱۶۰\times۰/۲۵\Rightarrow F-۳۲۰=۴۰\Rightarrow F=۳۶۰N$$

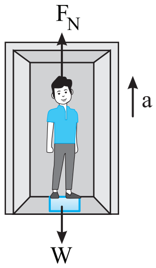
۴) قرار است که با برداشتن مقداری از محتویات صندوق شتاب حرکت دو برابر یعنی $۲\times۰/۲۵=۰/۵m/s^۲$ شود. البته باید دقت کنید که با کاهش محتویات صندوق، نیروی اصطکاک نیز تغییر می‌کند، بنابراین خواهیم داشت:

$$F'_{net}=m'a'\Rightarrow F-f'_k=m'a'\xrightarrow{f'_k=\mu_k m'g}۳۲۰-۰/۲m'\times۱۰=m'\times۰/۵\Rightarrow۳۲۰=۲/۵m'\Rightarrow m'=۱۲۸kg$$

۵) جرم محتویات خارج شده از صندوق برابر است با:

$\Delta m=۱۶۰-۱۲۸=۳۲kg$

۱۶۳- گزینهٔ ۳



نکته: عددی که نیروسنج نشان می‌دهد، همان نیروی عمودی سطح F_N است.

حالت اول: نیروهای وارد بر شخص را رسم می‌کنیم.

۱) نیروی وزن ۲) نیروی عمودی سطح

آسانسور از حال سکون رو به بالا شروع به حرکت می‌کند. بنابراین $F_N > W$ بوده و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_N-mg=ma \xrightarrow{m=۶۰kg}$$
$$F_N-۶۰۰=۶۰a \Rightarrow F_N=۶۰۰+۶۰a \qquad (I)$$

حالت دوم: آسانسور از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت می‌کند، در نتیجه $W>F'_N$ است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F'_{net}=ma' \xrightarrow{a'=۲a} mg-F'_N=m(۲a) \Rightarrow F'_N=۶۰۰-۱۲۰a(II)$$

با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$F_N-F'_N=۲۷۰ \xrightarrow{(I),(II)} ۶۰۰+۶۰a-(۶۰۰-۱۲۰a)=۲۷۰ \Rightarrow ۱۸۰a=۲۷۰ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}m/s^۲$$

میانبر: هرگاه آسانسور با شتاب a و a' به ترتیب از حال سکون رو به بالا و رو به پایین شروع به حرکت کند، اختلاف عددی که ترازو نشان می‌دهد برابر است با:

$$F_N-F'_N=m(|a|+|a'|)$$

۱۶۴- گزینهٔ ۴

یادآوری: نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره، نیروی گرانش زمین وارد بر ماهواره است.

$$F=G\frac{mM_e}{r^۲} \Rightarrow m\frac{v^۲}{r}=G\frac{mM_e}{r^۲} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

در این رابطه r شعاع حرکت ماهواره به گرد زمین است که مقدار آن برابر مجموع شعاع زمین (R_e) و فاصله ماهواره از سطح زمین (h) است. $r=R_e+h$

بنابراین تندی حرکت ماهواره با جذر شعاع مدار ماهواره نسبت وارون دارد. $\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{r}{r'}}$

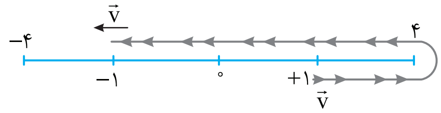
رابطهٔ انرژی جنبشی را برای ماهوارهٔ A و ماهوارهٔ B نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases} K_A=\frac{۱}{۲}mv_A^۲ \\ K_B=\frac{۱}{۲}(۲m)v_B^۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{K_A}{K_B}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^۲=\frac{۱}{۲}\left(\frac{r_B}{r_A}\right) \xrightarrow{r_A=R_e+\frac{R_e}{۲}=\frac{۳}{۲}R_e,\ r_B=R_e+\frac{R_e}{۴}=\frac{۵}{۴}R_e} \frac{K_A}{K_B}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\frac{۵}{۴}R_e}{\frac{۳}{۲}R_e}\right) \Rightarrow \frac{K_A}{K_B}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۶۵- گزینهٔ ۳

نکته: هرگاه در یک حرکت هماهنگ ساده مکان و سرعت نوسانگر قرینه شود کوتاه‌ترین زمانی که این اتفاق می‌افتد برابر $\frac{T}{۲}$ است.

خط فکری: مسیر حرکت زیر از مکان $x_۱=+۱cm$ در جهت مثبت محور تا رسیدن برای اولین بار به مکان $x_۲=-۱cm$ مشخص می‌کند که هم مکان و هم سرعت نوسانگر قرینه شده است. بنابراین این بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{۲}$ است. اکنون با دانستن این مطلب مسئله قابل حل است.



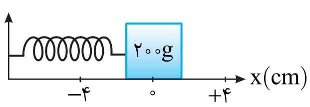
۱) با توجه به سؤال $\frac{T}{۲}$ برابر ۲s است:

$$\frac{T}{۲}=۲s \Rightarrow T=۴s$$

۲) بسامد زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \omega=\frac{۲\pi}{۴} \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{۲}\frac{rad}{s}$$

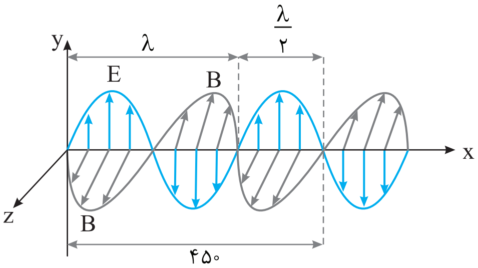
۳) انرژی مکانیکی نوسانگر برابر خواهد شد با:



$$E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲ \xrightarrow[A=۴cm=۴\times۱۰^{-۲}m]{m=۲۰۰g=۰/۲kg} E=\frac{۱}{۲}\times۰/۲\times(۴\times۱۰^{-۲})^۲\times\left(\frac{\pi}{۲}\right)^۲$$
$$\xrightarrow{\pi^۲=۱۰} E=۰/۱\times۱۶\times۱۰^{-۴}\times\frac{۱۰}{۴} \Rightarrow E=۴\times۱۰^{-۴}J$$

نکته: هر ژول برابر ۱۰۰۰ میلی‌ژول است: $E=۴\times۱۰^{-۴}J=۴\times۱۰^{-۱}mJ=۰/۴mJ$

۱۶۶- گزینهٔ ۱



۱) با توجه به نمودار می‌توان طول موج را حساب کرد. $۳\frac{\lambda}{۲}=۴۵۰\Rightarrow\lambda=۳۰۰nm$

۲) دوره را حساب می‌کنیم. $\lambda=vT\xrightarrow{v=c}T=\frac{\lambda}{c}\Rightarrow T=\frac{۳۰۰\times۱۰^{-۹}}{۳\times۱۰^{۸}}\Rightarrow T=۱۰^{-۱۵}s$

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۳) بسامد نوسان خواهد شد: $f=\frac{۱}{T}\Rightarrow f=۱۰^{۱۵}Hz$

گزینهٔ (۲) نادرست است.

۴) تندی حرکت موج الکترومغناطیسی در خلأ ثابت و برابر $۳\times۱۰^{۸}m/s$ است: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۱s]{v=۳\times۱۰^{۸}m/s}\Delta x=۳\times۱۰^{۸}m$

بنابراین موج الکترومغناطیسی در مدت یک ثانیه، $۳\times۱۰^{۸}m$ طی می‌کند که برابر با ۳×۱۰^{۱۷} است بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

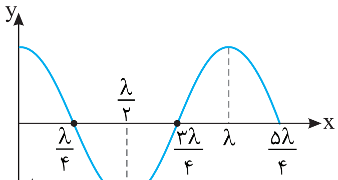
نکته: طول موج‌های بین $۴۰۰nm$ (بنفش) تا $۷۰۰nm$ (قرمز) در محدودهٔ نور مرئی قرار دارند.

۵) طول موج این موج $۳۰۰nm$ است در حالی که محدوده تقریبی طول موج‌های مرئی بین $۴۰۰nm$ (بنفش) تا $۷۰۰nm$ (قرمز) است بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

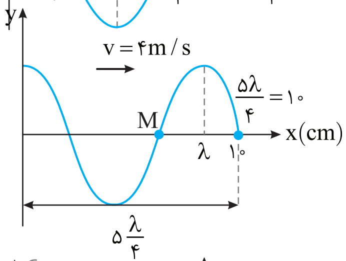
۱۶۷- گزینهٔ ۲

خط فکری: در سؤالاتی مانند این سؤال که با تصویر موج یا به اصطلاح نقش موج سروکار داریم از محور قائم دامنهٔ موج و از محور افقی طول موج را به‌دست می‌آوریم.

دقت کنید در یک موج ذرات محیط دارای حرکت نوسانی‌اند پس برای بررسی حرکت ذرات محیط باید از رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$ دورهٔ نوسان را حساب کنید.



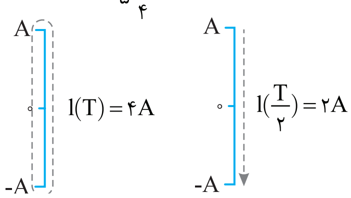
نکته: برای به‌دست آوردن طول موج در یک نقش موج به شکل روبه‌رو دقت کنید:



۱) با توجه به شکل $\frac{۵\lambda}{۴}$ برابر $۱۰cm$ شده است، پس طول موج خواهد شد: $۵\frac{\lambda}{۴}=۱۰\Rightarrow\lambda=۸cm$

۲) با استفاده از رابطهٔ $\lambda=vT$ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\lambda=vT\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۰۸}{۴}\Rightarrow T=۰/۰۲s$

۳) بازهٔ $۰/۲۵s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۲۵}{۰/۰۲}\Rightarrow\Delta t=۱۲/۵T\Rightarrow\Delta t=۱۲T+\frac{T}{۲}$



نکته: در هر دوره مسافتی که ذره M در حرکت هماهنگ ساده طی می‌کند برابر $۴A$ و در نصف دوره برابر $۲A$ است.

۴) بنابراین در مدت $۱۲T+\frac{T}{۲}$ مسافت طی شده خواهد شد: $l=۱۲(۴A)+۲A\Rightarrow l=۵۰A$

یادآوری: تندی متوسط برابر است با: $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$

۵) تندی متوسط ذرهٔ M در این مدت برابر $۶m/s$ است از این‌رو خواهیم داشت. $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow۶=\frac{۵۰A}{۰/۲۵}\Rightarrow A=۰/۰۳m\Rightarrow A=۳cm$

۱۶۸- گزینهٔ ۲

۱) با توجه به معادله حرکت، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم: $x=۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۲}t\ ,\ \omega=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow T=۴s$

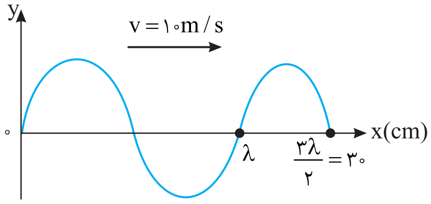
۲) بازهٔ زمانی برابر است با: $\Delta t=t_۲-t_۱=\frac{۲۵}{۱۲}-\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=۲s\xrightarrow{T=۴s}\Delta t=\frac{T}{۲}$

نکته: همواره مسافت طی شده در مدت زمان T برابر با $۴A$ و در مدت زمان $\frac{T}{۲}$ برابر با $۲A$ است.

۳) با توجه به نکته در مدت نصف دوره مسافتی که نوسانگر طی می‌کند $۲A$ یعنی $۰/۰۴$ متر است. $s_{av}=\frac{L}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۰/۰۴}{۲}=۰/۰۲m/s=۲cm/s$

۱۶۹- گزینهٔ ۳

خط فکری: معمولاً در مسائل موج و نوسان لازم است نسبت $\frac{\Delta t}{T}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور مراحل زیر را طی می‌کنیم:



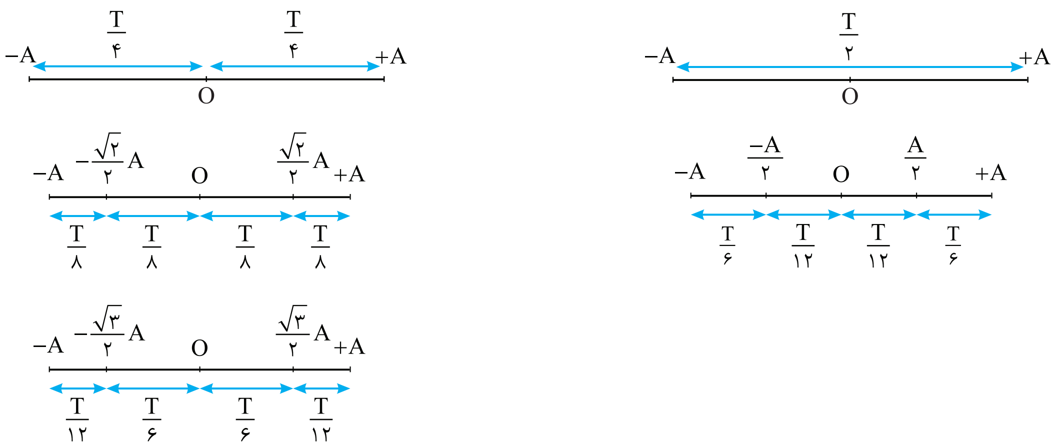
۱) با توجه به نمودار طول موج را حساب می‌کنیم: $\frac{۳\lambda}{۲}=۳۰\Rightarrow\lambda=۲۰cm=۰/۲m$

۲) حال دورهٔ موج را حساب می‌کنیم: $v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow ۱۰=\frac{۰/۲}{T}\Rightarrow T=۰/۰۲s=\frac{۲}{۱۰۰}s$

۳) بازهٔ زمانی داده شده را بر حسب دوره به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\Delta t=\frac{۹}{۴۰۰}\\ T=\frac{۲}{۱۰۰}\end{cases}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow\Delta t=\frac{۹}{۸}T=T+\frac{T}{۸}$$

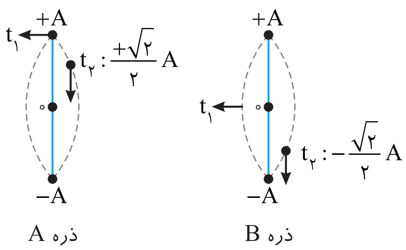
نکته: برای بررسی نوسان ذره‌های موج در هر لحظه لازم است بازه‌های زمانی زیر را به خاطر بسپارید:



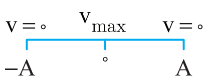
۴) حال حرکت ذره‌های A و B را بررسی می‌کنیم.

ذرات A و B روی ریسمان در حال نوسان‌اند.

نوسان A: ذرهٔ A ابتدا در دامنهٔ مثبت قرار دارد پس از یک دوره (T) مجدد به همان مکان می‌رسد و $\frac{T}{۸}$ ثانیه بعد به مکان $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ می‌رسد. ذرهٔ B ابتدا در $x=۰$ قرار دارد و با توجه به جهت انتشار موج، ذرهٔ قبلی B پایین‌تر از آن قرار داد و این ذره ابتدا به سمت پایین شروع به نوسان کرده و پس از T مجدد به همان مکان می‌رسد و در مدت $\frac{T}{۸}$ به مکان $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ می‌رسد:



نکته: برای یک نوسانگر تندی در دامنه‌ها صفر و در $x=۰$ بیشینه است:



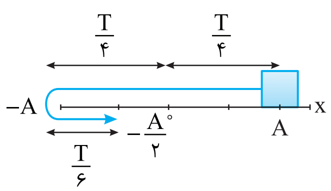
۵) مکان ذره‌های A و B در $x=۰$ و $x=A$ نیست پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست است.

۶) ذرهٔ A در حال حرکت به سمت $x=۰$ است، پس ذرهٔ A در حال حرکت به سمت مکانی است که تندی در آن بیشینه می‌شود و حرکت این ذره تندشونده است. ذرهٔ B در حال حرکت به سمت $x=-A$ است، پس ذرهٔ B در حال حرکت به سمت مکانی است که تندی آن صفر می‌شود، پس حرکت این ذره کندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

۱۷۰- گزینهٔ ۲

خط فکری: از روی محور افقی (t) نمودار $x-t$ باید دورهٔ نوسان را به‌دست آورد و با توجه به محور قائم دامنه و مکان نوسانگر مشخص خواهد شد. در گام اول دوره را حساب کرده و در گام دوم با توجه به رابطهٔ $E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲$ انرژی مکانیکی را حساب می‌کنیم.

در لحظهٔ $t_۱=\frac{۲}{۱۵}$ برای دومین بار مکان نوسانگر به $-۲cm$ یا $-\frac{A}{۲}$ رسیده است:



$$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۶}=\frac{۸T}{۱۲}=\frac{۲T}{۳}$$

$$\Delta t=t_۱=\frac{۲}{۱۵}s\Rightarrow\frac{۲T}{۳}=\frac{۲}{۱۵}\Rightarrow T=\frac{۱}{۵}s$$

با داشتن T و محاسبهٔ ω انرژی مکانیکی را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow[\omega=\frac{2\pi}{T}=10\pi]{m=50g,A=4cm}E=\frac{1}{2}\times(50\times10^{-3})(16\times10^{-4})(100\times\pi^2)\xrightarrow{\pi^2=10}E=\frac{1}{2}(80\times10^{-3})=40\times10^{-3}J\Rightarrow E=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}J$$

۱۷۱- گزینهٔ ۱

نکته: اختلاف تراز شدت دو صوت برابر لگاریتم نسبت شدت آن دو صوت می‌شود:

$$\beta_A-\beta_B=10\log\frac{I_A}{I_0}-10\log\frac{I_B}{I_0}\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\Delta\beta=10\log\frac{\frac{I_A}{I_0}}{\frac{I_B}{I_0}}\Rightarrow\Delta\beta=10\log\frac{I_A}{I_B}$$

با توجه به نسبت خواسته شده، لازم است دو تراز شدت صوت داده شده را از هم کم کنیم، تا لگاریتم $\frac{I_2}{I_1}$ را به‌دست آوریم:

$$\Delta\beta=\beta_2-\beta_1\Rightarrow10\log\frac{I_2}{I_1}-10\log\frac{I_1}{I_0}=92-28=64\Rightarrow10(\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}})=64\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=6/4$$

نکته: $\log10^n$ برابر n است و $\log a-\log b$ برابر $\log\frac{a}{b}$ است.

می‌توان عدد ۶/۴ به‌دست آمده را به صورت $7-2(0/3)$ نوشت و به جای ۷، $\log10^7$ و به جای ۰/۳ از $\log2$ استفاده کرد:

$$\log\frac{I_2}{I_1}=7-2(0/3)\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=\log10^7-2\log2\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=\log\frac{10^7}{4}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=0/25\times10^7=2/5\times10^6$$

۱۷۲- گزینهٔ ۲

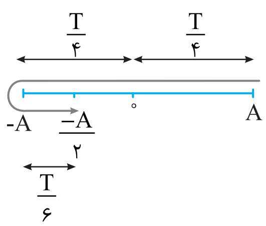
در ابتدای این تست به شما می‌گوییم که این تست با اطلاعات کتاب درسی قابل حل نیست. زیرا در کتاب درسی به صراحت بیان شده که نباید براساس رابطهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر $(U=\frac{1}{2}kx^2)$ مسئله‌ای طرح شود.

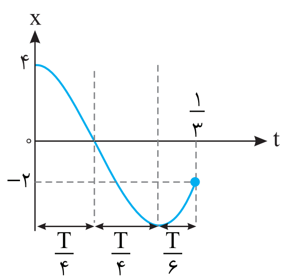
خط فکری: در نمودار $x-t$ حرکت هماهنگ ساده از محور افقی دوره و از محور قائم دامنهٔ حرکت به‌دست می‌آید.

یادآوری: باید بازه‌های زمانی شناخته شده مربوط به جابه‌جایی‌های معروف را به‌خاطر بسپارید.

۱) با توجه به نمودار مدت زمانی که طول می‌کشد متحرک برای دومین بار به $-2cm$ یعنی $-\frac{A}{2}$ برسد، $\frac{1}{3}$ ثانیه است:

مسیر را رسم می‌کنیم، بازه‌های شناخته شده را روی آن می‌نویسیم.





$$\Delta t=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{6}=\frac{1}{3}\quad,\quad\frac{4T}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$

بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega=4\pi\frac{rad}{s}$$

معادلهٔ حرکت نوسانی را می‌نویسیم:

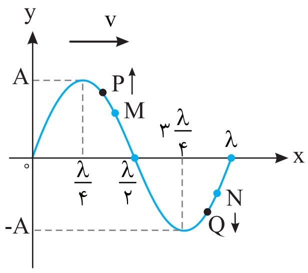
$$x=A\cos\omega t \xrightarrow{A=۴cm=۰/۰۴m} x=۰/۰۴\cos ۴\pi t \xrightarrow{t=\frac{۳}{۱۶}s} x=۰/۰۴\cos ۴\pi\times\frac{۳}{۱۶} \Rightarrow x=۰/۰۴\cos\frac{۳\pi}{۴}=-۰/۰۲\sqrt{۲}m$$

از اینجا به بعد شما باید از کتاب درسی خارج شوید و از رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}kx^۲$ استفاده کنید.

$$\frac{U}{E}=\frac{\text{انرژی پتانسیل کشسانی}}{\text{انرژی مکانیکی}}=\frac{\frac{۱}{۲}kx^۲}{\frac{۱}{۲}kA^۲}\Rightarrow\frac{U}{E}=\frac{x^۲}{A^۲}\xrightarrow[A=۰/۰۴m]{x=-۰/۰۲\sqrt{۲}m}\frac{U}{E}=\frac{(-۰/۰۲\sqrt{۲})^۲}{(۰/۰۴)^۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow U=\frac{۱}{۲}E$$

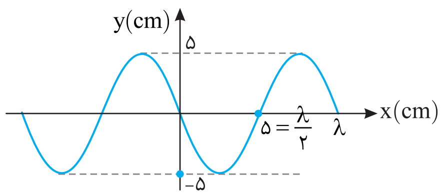
با توجه به تعریف انرژی مکانیکی خواهیم داشت: $E=U+K\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}E+K\Rightarrow K=\frac{۱}{۲}E$. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۱۷۳- گزینهٔ ۳



خط فکری: در نمودار $y-x$ یک موج که تصویر آن است، از محور افقی طول موج و از محور قائم دامنهٔ حرکت به‌دست می‌آید:

جهت حرکت هر ذره از محیط با توجه به نقطهٔ قبل به‌دست می‌آید، به‌طور مثال وقتی موج به سمت راست حرکت می‌کند ذره P که قبل از M است بالاتر از M قرار دارد یعنی ذرهٔ M رو به بالا در حال حرکت است. ذره قبل از N یعنی ذرهٔ Q پایین‌تر از N بوده و نقطهٔ N در حال حرکت به سمت پایین است.

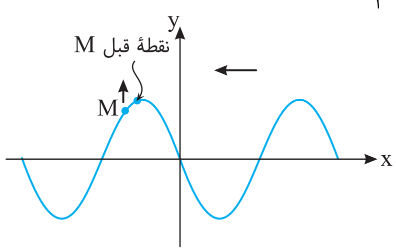


۱) با توجه به محور افقی طول موج را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\lambda}{۲}=۵\Rightarrow\lambda=۱۰cm$

با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$ ، دورهٔ نوسان ذرات موج و بسامد نوسان ذرات موج به‌دست می‌آید:

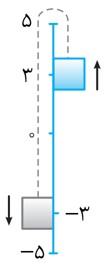
$$\lambda=vT\Rightarrow ۱۰cm=۲۰\frac{cm}{s}\times T\Rightarrow T=\frac{۱}{۲}s$$

نکته: در مدت T ذرات محیط یک نوسان کامل انجام داده و به مکان قبلی و در همان جهت نوسان قبلی باز می‌گردند و در مدت $\frac{T}{۲}$ مکان و جهت نوسان ذرات محیط قرینه می‌شوند.



۲) با توجه به مکان M و جهت انتشار موج نقطهٔ قبل M بالاتر از آن قرار دارد بنابراین در لحظهٔ $t_۱$ مکان نوسانگر $x=۳cm$ بوده و به سمت بالا در حال حرکت است.

۳) در مدت $\Delta t=t_۲-t_۱=\frac{۱}{۴}s$ باید دید نوسانگر چه مقدار جابه‌جا شده است. دقت کنید که $\frac{۱}{۴}s$ نصف دوره $(T=\frac{۱}{۲}s)$ نوسان است. بنابراین مطابق شکل روبه‌رو مکان و جهت نوسانگر در این مدت قرینه می‌شود و جابه‌جایی آن خواهد شد:



$$\Delta x=x_۲-x_۱\Rightarrow\Delta x=-۳-۳=-۶cm$$

$$\Delta t=\frac{۱}{۴}s$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

یادآوری: سرعت متوسط برابر است با:

۴) بزرگی سرعت متوسط ذرهٔ M را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۶cm}{\frac{۱}{۴}s}\Rightarrow v_{av}=-۲۴\frac{cm}{s}\xrightarrow{\text{بزرگی سرعت متوسط خواسته شده}\ |v_{av}|}|v_{av}|=۲۴cm/s$$

۱۷۴- گزینهٔ ۱

خط فکری: در سؤالاتی که تراز شدت صوت در چند نقطه داده می‌شود به نکات زیر دقت کنید:

الف) شدت صوت برابر $I=\frac{P}{A}$ است که در این رابطهٔ $A=۴\pi r^۲$ و r فاصله از چشمهٔ صوت و P توان چشمهٔ صوت است.

ب) اگر چشمهٔ صوت یکسان و فاصله‌ها در حال تغییر باشند، توان چشمه P در هر نقطه ثابت اما A با توجه به فاصله از چشمه در حال تغییر است.

پ) تراز شدت صوت برابر $\beta = 10\log\frac{I}{I_0}$ است و اختلاف تراز شدت صوت در دو نقطهٔ دلخواه (۱) و (۲) برابر است:

شدت صوت در نقطه خواسته شده
تراز شدت صوت برحسب دسی بل
تراز شدت صوت مبنا

$$\Delta\beta=\beta_2-\beta_1 \Rightarrow \Delta\beta=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}=10\left(\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0}\right)\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\Delta\beta=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

ت) نسبت شدت صوت در دو نقطه برابر است با:

دامنه چشمه موج — بسامد چشمه موج

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{P_2}{P_1}\times\frac{A_1}{A_2}\xrightarrow[A=4\pi r^2]{P\propto f^2,\ P\propto A^2}\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\times\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\times\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

مساحت سطح جبهه صوت

که اگر چشمه ثابت باشد: $\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

جمع‌بندی از نکات لگاریتم که در این بخش به آن نیاز داریم:

$\log 10^a = a\log 10 = a$ $\qquad \log a=\log b \Rightarrow a=b$ $\qquad \log b^a = b\log a$ $\qquad \log a-\log b=\log\frac{a}{b}$ $\qquad \log a+\log b=\log ab$

۱) اختلاف تراز شدت صوت در دو نقطهٔ A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\beta=\beta_A-\beta_B\xrightarrow[\beta_B=10\log\frac{I_B}{I_0}=\frac{5}{6}\beta_A]{\beta_A=10\log\frac{I_A}{I_0}=\beta}\beta_A-\frac{5}{6}\beta_A=10\left(\log\frac{I_A}{I_0}-\log\frac{I_B}{I_0}\right)\Rightarrow\frac{\beta_A}{6}=10\log\frac{I_A}{I_B}$$

۲) چشمه ثابت است و شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد یعنی $\frac{I_A}{I_B}$ برابر $\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2$ است:

$$\frac{\beta_A}{6}=10\log\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2\xrightarrow{r_B=2r_A}\frac{\beta_A}{6}=10\log(2)^2\xrightarrow{\log a^b=b\log a}\frac{\beta_A}{6}=20\log 2\xrightarrow{\log 2=0/3}\frac{\beta_A}{6}=6\Rightarrow\beta_A=36\,d\beta$$

۳) حال اختلاف تراز شدت صوت بین A و C را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta_A-\beta_C=10\log\frac{I_A}{I_0}-10\log\frac{I_C}{I_0}\Rightarrow 36-\beta_C=10\left(\log\frac{I_A}{I_C}\right)\xrightarrow[16=2^4]{\frac{I_A}{I_C}=\left(\frac{r_C}{r_A}\right)^2=16}36-\beta_C=10\log 2^4\xrightarrow{\log a^b=b\log a}36-\beta_C=40\log 2$$
$$\xrightarrow{\log 2=0/3}36-\beta_C=12\Rightarrow\beta_C=24\,d\beta$$

۱۷۵- گزینهٔ ۲

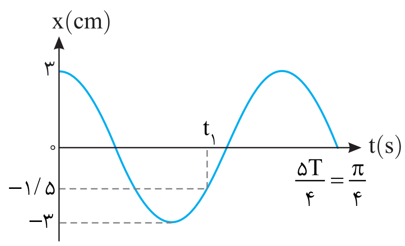
قبل از حل مسئله، به یادآوری‌های زیر دقت کنید.

یادآوری:

۱) بنا به قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر نوسانگر برابر $F=ma$ است.

۲) در حرکت هماهنگ ساده رابطهٔ بین شتاب و مکان به صورت زیر است:

$$|a|=\omega^2\xrightarrow{F=ma}|F|=m\omega^2|x|$$



اولین کاری که باید بکنیم، به‌دست آوردن دوره حرکت به کمک نمودار است.

$$5\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow T=\frac{\pi}{5}\,s$$

بسامد زاویه‌ای نوسانگر خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}\Rightarrow\omega=10\,rad/s$$

نیروی وارد بر نوسانگر در لحظهٔ $t=t_1$ خواهد شد:

$$|F|=m\omega^2|x|\xrightarrow[m=0/2kg]{|x|=1/5\times10^{-2}m}|F|=0/2\times(10)^2\times1/5\times10^{-2}\Rightarrow|F|=0/3N$$

۱۷۶- گزینهٔ ۳

نکته: مسافتی که نوسانگر در مدت یک دوره طی می‌کند چهار برابر دامنه $(4A)$ و مسافتی که در مدت نیم دوره $\left(\frac{T}{2}\right)$ طی می‌کند دو برابر دامنه $(2A)$ است.

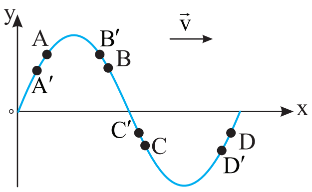
ابتدا باید دورهٔ حرکت وزنه را حساب کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=0/2kg,\,k=200N/m}T=2\pi\sqrt{\frac{0/2}{200}}\xrightarrow{\pi=\sqrt{10}}T=2\times\frac{1}{10}\Rightarrow T=0/2s$$

مدت زمانی که بیان شده $0/1s$ است و این $0/1s$ نصف دوره است و در مدت نیم دوره مسافت طی شده دو برابر دامنه یعنی $L=2\times4=8cm$ است.

۱۷۷- گزینهٔ ۲

نکته: هرگاه نقش موج رسم شده باشد، برای اظهار نظر کردن در مورد حرکت هر ذره از محیط، ابتدا به جهت پیشروی موج $(\vec{v})$ نگاه می‌کنیم، سپس حرکت نقطهٔ قبلی را بررسی می‌کنیم. اگر نقطهٔ قبلی پایین‌تر باشد، ذره در حال حرکت به سمت پایین و اگر نقطهٔ قبلی بالاتر باشد ذره در حال حرکت به سمت بالاست.



نکته: اگر ذره به سمت محور x حرکت کند حرکت آن تندشونده و اگر در حال دور شدن از محور x باشد حرکت آن کندشونده است و در نقاط بیشینه و کمینه تندی ذره صفر می‌شود.

نقطهٔ A : نقطهٔ قبل $(A')A$ پایین‌تر از A است، بنابراین A در حال حرکت رو به پایین بوده و حرکت آن تندشونده است.

نقطهٔ B : نقطهٔ قبل $(B')B$ بالاتر از B است، بنابراین B در حال حرکت رو به بالا بوده و حرکت آن کندشونده بوده و سرعت آن در حال صفر شدن است.

نقطهٔ C : نقطهٔ قبل $(C')C$ بالاتر از C بوده و C در حال حرکت رو به بالا و نزدیک شدن به محور x بوده و تندی آن در حال افزایش است.

نقطهٔ D : نقطهٔ قبل $(D')D$ پایین‌تر از D بوده و D در حال حرکت رو به پایین و دور شدن از محور افقی x بوده و حرکت آن کندشونده و سرعت آن در حال صفر شدن است، اما فاصلهٔ آن از نقطهٔ بیشینه بیشتر از فاصلهٔ نقطهٔ B از نقطهٔ بیشینه است. بنابراین تندی نقطهٔ B زودتر از بقیه صفر می‌شود.

۱۷۸- گزینهٔ ۱

در گام اول به کمک تعریف تراز شدت صوت، شدت صوت در مکان مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow[I_0=10^{-12}W/m^2]{\beta=96dB}96=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 9/6=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به سراغ ریاضی می‌رویم و عدد ۹/۶ را به صورت $9+0/6$ می‌نویسیم. به جای عدد ۹، $\log 10^9$ و به جای عدد ۰/۶، $2\log 2$ را قرار می‌دهیم. از این‌رو می‌نویسیم:

$$\log 10^9+2\log 2=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

یادآوری ریاضی: $\log a^n=n\log a\ ,\ \log a+\log b=\log ab$

به توجه به یادآوری ریاضی خواهیم داشت:

$$\log 10^9+\log 2^2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow\log 2^2\times10^9=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 4\times10^9=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=4\times10^{-3}W/m^2$$

یادآوری: شدت صوت برابر مقدار انرژی است که در مدت $1s$ از سطحی به مساحت $1m^2$ می‌گذرد. $I=\frac{E}{A.t}$

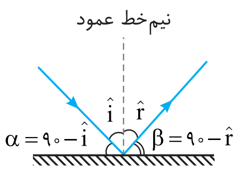
با توجه به تعریف شدت صوت، مقدار انرژی گذرنده از سطحی به مساحت $1mm^2$ خواهد شد:

$$E=IA.t\xrightarrow[t=60s]{A=10^{-6}m^2}E=4\times10^{-3}\times10^{-6}\times60\Rightarrow E=0/24\times10^{-6}\Rightarrow E=0/24\mu J$$

۱۷۹- گزینهٔ ۳

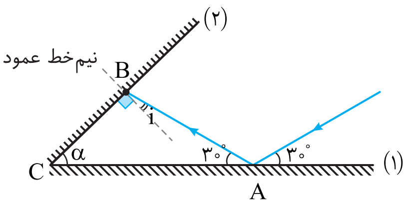
خط فکری: در حل این سؤال باید در گام اول پرتوهای تابش و بازتاب بر سطح آینه (۱) و سپس پرتو تابش و بازتاب دوم از سطح آینه (۲) را رسم کنیم. به فرض مسئله دقت کنید که گفته شده پرتو دوم بازتابی از سطح آینه (۱) موازی آینه (۲) خواهد شد.

نکته: با توجه به قانون بازتاب عمومی داریم:



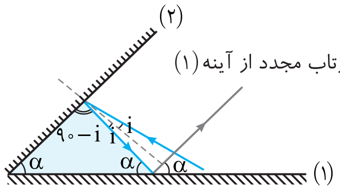
$\hat{i}=\hat{r},\ \alpha=\beta$

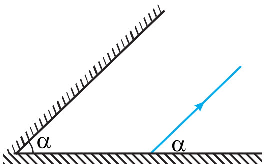
۱) بازتاب پرتو از آینه (۲) را رسم می‌کنیم و نیم‌خط عمود آن را مشخص می‌کنیم، مجموع زوایای داخلی مثلث ABC برابر $180°$ است:



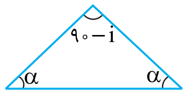
$$30+(90+\hat{i})+\alpha=180°\Rightarrow\hat{i}=180°-90°-30°-\hat{\alpha}\Rightarrow\hat{i}=60°-\hat{\alpha}\ \ (I)$$

۲) پرتو بازتاب شده از آینه (۲) مجدد به آینه (۱) برخورد کرده و با توجه به سؤال و پرتو بازتاب مجدد از آینه (۱) موازی با آینه (۲) است. طبق خطوط موازی و مورب، آینهٔ (۲) و بازتاب مجدد موازی‌اند و آینهٔ (۱) مورب است بنابراین:





۳) در مثلث رنگی زاویهٔ دو آینه α و زاویه‌ای که پرتو تابش با سطح آینه می‌سازد نیز با توجه به موازی مورب بالا α درجه است و مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است، بنابراین:



$$\hat{\alpha}+\hat{\alpha}+(90-\hat{i})=180^\circ \xrightarrow[i=60-\alpha]{\text{طبق معادلهٔ (۱)}} 2\alpha+(90-(60-\alpha))=180^\circ \Rightarrow 3\alpha+30=180^\circ \Rightarrow \alpha=50^\circ$$

۱۸۰- گزینهٔ ۴

نکته: در یک تار مرتعش دو انتها بسته بسامد هماهنگ nام برابر است با:

$$f_n=\frac{nv}{2L}$$

هماهنگ اول و دوم یک تار دو انتها بسته برابر است با:

$$f_n=\frac{nv}{2L}\Rightarrow\begin{cases}f_1=\frac{v}{2L}\\ f_2=\frac{2v}{2L}\end{cases}\Rightarrow f_1+f_2=\frac{3v}{2L}\Rightarrow\frac{3v}{2\times 0/4}=375\Rightarrow v=100\,m/s$$

تندی موج در تار از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{FL}{m}}$ به‌دست می‌آید:

$$100=\sqrt{\frac{F\times 0/4}{10^{-2}}}\Rightarrow 10^4=\frac{F\times 0/4}{10^{-2}}\Rightarrow F=\frac{100}{0/4}=250\,N$$

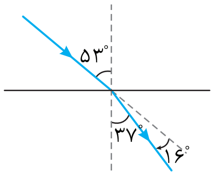
۱۸۱- گزینهٔ ۱

نکته: روابط شکست موج در هنگام ورود غیرعمودی از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر را می‌توان به صورت روبه‌رو خلاصه کرد:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2}$$

باید توجه داشت هنگام عبور موج از یک محیط به محیط دیگر، بسامد موج تغییر نمی‌کند.

با ورود نور از هوا به هر محیط دیگری پرتو به خط عبور نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین پرتو موج 16° به نیم‌خط عمود نزدیک می‌شود:



$53^\circ-16^\circ=37^\circ$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\sin 37^\circ}{\sin 53^\circ}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

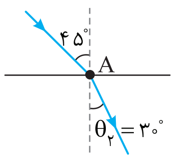
طول موج $\frac{1}{8}\mu m$ کاهش یافته است.

$$\lambda_1-\lambda_2=\frac{1}{8}\times 10^{-6}\xrightarrow{\lambda_2=\frac{3}{4}\lambda_1}\frac{1}{4}\lambda_1=\frac{1}{8}\times 10^{-6}\Rightarrow\lambda_1=0/5\times 10^{-6}\,m\quad,\quad \lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow f=\frac{3\times 10^8}{0/5\times 10^{-6}}=6\times 10^{14}\,Hz$$

۱۸۲- گزینهٔ ۳

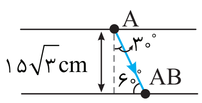
خط فکری: با توجه به رابطهٔ سرعت در حرکت با سرعت ثابت داریم: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ بنابراین برای محاسبه Δt به $\Delta x=AB$ و سرعت حرکت نور نیاز داریم:

۱) ابتدا زاویهٔ شکست محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta_2}=\frac{\sqrt{2}}{1}\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$

۲) حال طول AB را به‌دست می‌آوریم:



$$\sin 60^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{L_{AB}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{L_{AB}}\Rightarrow L_{AB}=30\,cm=0/3\,m$$

۳) سرعت در محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم:

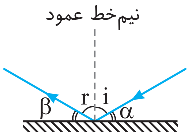
$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{v_2}{3\times 10^8}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow v_2=\frac{3}{\sqrt{2}}\times 10^8\Rightarrow v_2=1/5\sqrt{2}\times 10^8\,m/s$$

۴) حال زمان مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم:

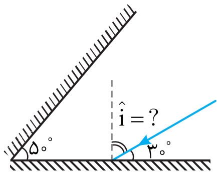
$$v=\frac{L_{AB}}{t_{AB}}\Rightarrow t_{AB}=\frac{L_{AB}}{v_2}\Rightarrow t_{AB}=\frac{0/3}{1/5\sqrt{2}\times 10^8}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times 10^{-9}s=\sqrt{2}\,ns$$

۱۸۳- گزینهٔ ۳

نکته: با توجه به قانون بازتاب عمومی، زاویه‌ای که پرتو تابش با نیم‌خط عمود (زاویه تابش) با زاویه‌ای که پرتو بازتاب با نیم‌خط عمود (زاویه بازتاب) می‌سازد باهم برابر است:

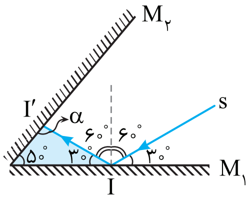


$$\begin{cases} \hat{i}=\hat{r} \\ \hat{\alpha}+\hat{i}=90^\circ \\ \hat{r}+\hat{\beta}=90^\circ \end{cases}$$



۱) با توجه به پرتو تابش زاویهٔ تابش را به‌دست می‌آوریم، سپس با توجه به اینکه زاویهٔ تابش و بازتاب باهم برابر است، زاویهٔ بازتاب و پرتو بازتاب را می‌کشیم:

$$30^\circ+\hat{i}=90^\circ \Rightarrow \hat{i}=60^\circ$$

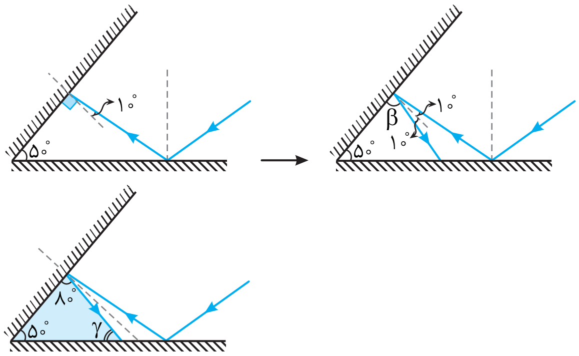


۲) زاویهٔ بازتاب 60° است:

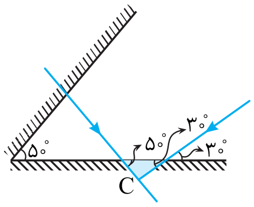
در مثلث رنگی: $30^\circ+50^\circ+\hat{\alpha}=180^\circ \Rightarrow \hat{\alpha}=100^\circ$ C

۳) برای پرتو II' خط عمود را می‌کشیم، پس زاویهٔ تابش به سطح M_2، 10° است و زاویهٔ بازتاب نیز 10° است:

$$\hat{\beta}+10^\circ=90^\circ \Rightarrow \hat{\beta}=80^\circ$$



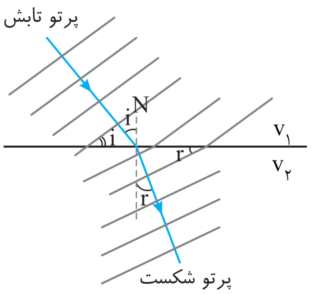
در مثلث رنگی: $50^\circ+80^\circ+\hat{\gamma}=180^\circ \Rightarrow \hat{\gamma}=50^\circ$



۴) حال امتداد دو پرتو SI و بازتاب از سطح دوم را باهم قطع می‌دهیم تا زاویهٔ بین دو پرتو را به‌دست بیاوریم. برای خلوت شدن شکل تنها پرتو SI و بازتاب از سطح M_2 را کشیدیم:

در مثلث رنگی: $50^\circ+30^\circ+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{C}=100^\circ$

۱۸۴- گزینهٔ ۳

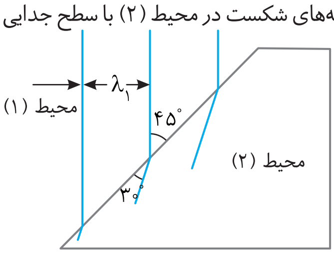


نیم‌نگاه: زاویهٔ بین جبهه‌های موج با سطح جدایی دو محیط برابر زاویه بین پرتو و نیم‌خط عمود بر نقطه تابش است.

قانون شکست عمومی:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}$$

با توجه به شکل زاویهٔ بین جبهه‌های تابش با سطح 45° است، بنابراین زاویهٔ تابش $\theta_1=45^\circ$ است، همچنین زاویهٔ بین جبهه‌های شکست در محیط (۲) با سطح جدایی 30° بوده یعنی زاویهٔ شکست $\theta_2=30^\circ$ است، از این‌رو با توجه به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:



$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2}=\sqrt{2}$$

۱۸۵- گزینهٔ ۴

نکته: هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر بسامد تغییر نمی‌کند.

موج از قسمت نازک طناب به قسمت ضخیم آن می‌رود و تندی انتشار موج با توجه به رابطهٔ تندی انتشار موج عرضی در طناب کاهش می‌یابد.

$$v=\frac{2}{\uparrow D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}\Rightarrow v'<v$$

با توجه به ثابت بودن بسامد و تعریف طول موج خواهیم داشت: $\lambda=\frac{\downarrow v}{f_{\text{ثابت}}}\Rightarrow \lambda'<\lambda$. بنابراین طول موج کاهش می‌یابد.

۱۸۶- گزینهٔ ۱

یادآوری: بسامدهای تشدیدی یک تار با دو انتهای بسته از رابطهٔ $f=n\frac{v}{2L}$ به‌دست می‌آید که در آن v تندی انتشار موج در تار، L طول تار و n شمارهٔ مُد آن است.

نکته: اختلاف دو بسامد متوالی تشدید یک تار دو انتها بسته برابر بسامد صوت (مُد) اصلی تار است.

$$f_{n+1}-f_n=f_1$$

۱) بسامد صوت اصلی تار خواهد شد:

$$f_1=225-150=75\text{Hz}$$

۲) تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم:

$$f_1=\frac{v}{2L}\xrightarrow{L=0/5m}75=\frac{v}{2\times 0/5}\Rightarrow v=75\text{m/s}$$

۱۸۷- گزینهٔ ۲

نکته: کمترین انرژی هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز n به تراز $n-1$ برود و بیشترین انرژی هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز n به تراز ۱ برود.

انرژی فوتون در هر تراز $E_n=\frac{-E_R}{n^2}$ است و انرژی فوتون گسیل شده در انتقال از تراز n به n' برابر است با:

$$\underbrace{hf}_{\text{انرژی فوتون}}=E_n-E_{n'}$$

کمترین انرژی فوتون گسیل‌شده در گذار الکترون از $n=5$ به $n'=4$ است.

$$E_n-E_{n'}=hf\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}-\frac{E_R}{5^2}-(-\frac{E_R}{4^2})=hf\Rightarrow\frac{-13/6}{25}+\frac{13/6}{16}=4\times10^{-15}f\Rightarrow\frac{(25-16)\times13/6}{25\times16}=4\times10^{-15}f$$

$$f=\frac{9\times3/4}{25\times16}\times10^{15}=0/0765\times10^{15}\Rightarrow f=76/5\text{THz}$$

۱۸۸- گزینهٔ ۲

خط فکری: طول موج‌های گسیلی اتم هیدروژن از معادلهٔ ریدبرگ به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{\lambda}=\underbrace{R}_{\text{ثابت ریدبرگ}}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$$

به n' های مختلف نام‌های متفاوتی داده شده است وقتی $n'=1$ باشد رشتهٔ طول موج‌ها را رشتهٔ لیمان می‌گویند بنابراین در این مسئله معادلهٔ ریدبرگ به‌صورت مقابل است.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2})$$

از طرفی شمارهٔ خط طیفی به این گونه است که در رشتهٔ لیمان اولین خط طیفی یعنی گذار از $n=2$ به $n'=1$، دومین خط طیفی یعنی گذار از $n=3$ به $n'=1$ و ...

برای یافتن شمارهٔ خط طیفی شما باید ابتدا طول موج گسیل شده را حساب کنید.

طول موج گسیلی را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{3\times10^8}{\frac{8}{3}\times10^{15}}\Rightarrow\lambda=\frac{9}{8}\times10^{-7}\text{m}\Rightarrow\lambda=\frac{900}{8}\text{nm}$$

به کمک رابطهٔ ریدبرگ - بالمر خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\xrightarrow[R=0/01\text{nm}^{-1}]{n'=1}\frac{8}{900}=\frac{1}{100}(\frac{1}{1}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow n^2=9\Rightarrow n=3$$

بنابراین این طول موج مربوط به دومین خط طیفی لیمان است.

۱۸۹- گزینهٔ ۲

خط فکری: با داشتن تابع کار فلز و محاسبهٔ اختلاف انرژی فوتون‌های ورودی با تابع کار، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها به‌دست می‌آید. در نهایت با استفاده از رابطهٔ انرژی جنبشی، تندی فوتوالکترون‌ها محاسبه می‌شود.

۱) ابتدا تابع کار را حساب می‌کنیم، دقت کنید چون ثابت پلانک (h) بر حسب eV.s داده شده پس تابع کار بر حسب الکترون‌ولت به‌دست می‌آید:

$$W_0=hf_0\Rightarrow W_0=4\times10^{-15}\times\frac{5}{8}\times10^{15}=2/5\text{eV}$$

نکته: برای تبدیل الکترون ولت به ژول از کسر تبدیل $\frac{1/6\times10^{-19}\text{J}}{1\text{eV}}$ استفاده می‌کنیم.

$$W_0=2/5\times(1/6\times10^{-19})=4\times10^{-19}\text{J}$$

۲) انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را حساب می‌کنیم:

$$K_{max}=hf-W_0 \Rightarrow K_{max}=4/125\times10^{-19}-4\times10^{-19} \Rightarrow K_{max}=0/125\times10^{-19}\,J$$

۳) حال با توجه به انرژی جنبشی، تندی را حساب می‌کنیم:

$$K_{max}=\frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow \frac{125}{1000}\times10^{-19}=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times v_{max}^2 \Rightarrow v_{max}^2=\frac{25}{9}\times10^{10} \Rightarrow v_{max}=\frac{5}{3}\times10^{5} \Rightarrow v_{max}=\frac{10^6}{6}\,m/s$$

۱۹۰- گزینهٔ ۴

یادآوری: * موفقیت‌های مدل اتمی بور:

۱) تبیین پایداری اتم

۲) توجیه طیف گسیلی و جذبی گاز هیدروژن اتمی و اتم‌های هیدروژن گونه

۳) محاسبه انرژی یونش اتم هیدروژن بر مبنای گسسته بودن ترازهای انرژی الکترون در اتم

* نارسایی‌های مدل اتمی بور:

۱) این مدل برای چرخش بیش از یک الکترون به دور هسته به کار نمی‌رود.

۲) عدم توجیه متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی

بنابراین با توجه به یادآوری بالا گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۹۱- گزینهٔ ۲

خط فکری: بلندترین طول موج گسیلی (کم‌انرژی‌ترین پرتو) رشتهٔ n'، از $n'+1$ به n' خواهد بود.

کوتاه‌ترین طول موج گسیلی (پرانرژی‌ترین پرتو) رشتهٔ n'، از ∞ به n' خواهد بود.

بلندترین طول موج گسیلی مربوط به گذار از $n=3$ به $n'=2$ است:

$$\frac{1}{\lambda_{max}}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{max}}=R(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}) \Rightarrow \lambda_{max}=\frac{36}{5R}=\frac{3600}{5}=720\,nm$$

کوتاه‌ترین طول موج گسیلی مربوط به گذار از $n=\infty$ به $n'=2$ است.

$$\frac{1}{\lambda_{min}}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{min}}=R(\frac{1}{4}-0) \Rightarrow \lambda_{min}=\frac{4}{R}=400\,nm$$

اختلاف طول موج‌های خواسته شده برابر است با:

$$\Delta\lambda=720-400=320\,nm$$

۱۹۲- گزینهٔ ۱

نکته: تراز $n=1$ را حالت پایه و ترازهای بالاتر را حالت برانگیخته می‌نامند، پس تراز mام در واقع $m-1$ امین حالت برانگیخته است، به‌طول مثال $n=3$، ۲امین حالت برانگیخته است.

اولین حالت برانگیختگی یعنی $n=2$ و حالت پایه یعنی $n=1$. بنابراین طبق رابطه اختلاف ترازهای انرژی خواهیم داشت:

$$\Delta E=E_U-E_L \Rightarrow \Delta E=(\frac{-E_R}{n_U^2})-(\frac{-E_R}{n_L^2}) \Rightarrow \Delta E=(\frac{-13/6}{4})-(\frac{-13/6}{1})=10/2\,eV$$

حال این انرژی را به ژول تبدیل می‌کنیم:

$$\Delta E=10/2\,eV\times\frac{1/6\times10^{-19}}{1eV}=16/32\times10^{-19}\,J \Rightarrow \Delta E=1/632\times10^{-18}\,J$$

۱۹۳- گزینهٔ ۱

خط فکری: در ابتدا شما باید بررسی کنید که سومین خط طیفی یک رشته از طول موج‌های اتم هیدروژن کدام است. اگر فرض شود که الکترون از ترازهای بالاتر به تراز n' برود در این صورت اولین خط طیفی اتم هیدروژن در این رشته از $n'+1$ به n' و دومین طیف خطی اتم هیدروژن در این رشته از $n'+2$ به n' و سومین خط طیف این رشته از $n'+3$ به n' است یعنی به‌طور کلی اگر شمارهٔ خط طیفی m باشد، طول موج گسیلی مربوط به گذار الکترون از تراز $n'+m$ به n' است.

با توجه به اینکه ثابت ریدبرگ (R) داده شده سؤال را از رابطهٔ $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$ حل می‌کنیم.

۱) سومین خط طیف اتمی هیدروژن در رشتهٔ n' برابر گذار از $n'+3$ به n' است، بنابراین:

$$\text{معادلهٔ ریدبرگ}: \frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}) \xrightarrow{n=n'+3} \frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2})$$

۲) با توجه به بسامد، طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{v}{f} \xrightarrow[f=2/5\times10^{14}Hz]{v=c=3\times10^8 m/s} \lambda=\frac{3\times10^8}{2/5\times10^{14}} \Rightarrow \lambda=\frac{6}{5}\times10^{-6}\,m$$

۳) در معادلهٔ ریدبرگ چون یکای R برحسب $\frac{1}{nm}$ داده شده پس باید یکای λ نیز برحسب nm گذاشته شود.

$$\lambda=\frac{6}{5}\times10^{-6}\,m \xrightarrow{1m=10^9 nm} \lambda=\frac{6}{5}\times10^{-6}\times10^{9}\,nm \Rightarrow \lambda=1200\,nm$$

نکته: طول موج‌های بین $400\,nm$ تا $700\,nm$ در بازهٔ نورهای مرئی‌اند و نورهایی با طول موج کمتر از $400\,nm$ فرابنفش و نورهایی با طول موج بیشتر از $700\,nm$ در گسترهٔ طول موج‌های فروسرخ‌اند.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}) \Rightarrow \frac{1}{1200}=\frac{1}{100}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}) \Rightarrow \frac{1}{12}=\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}$$

نکته: رشتهٔ بالمر در ناحیهٔ فرابنفش و مرئی قرار دارد و چون $\lambda = 1200\,nm$ در ناحیهٔ فروسرخ است پس این طول موج برای رشتهٔ بالمر نیست.

برای حل معادلهٔ بالا به جای حل معادله بهتر است گزینه‌ها را در معادله قرار دهیم یعنی به جای n' اعداد داده شده در هر گزینه را قرار دهیم.

گزینهٔ (۱):

$$\frac{1}{12} = \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+3)^2}\right) \xrightarrow{n'=3} \frac{1}{12} = \frac{1}{9} - \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{3}{36} \checkmark$$

بنابراین $n'=3$ و رشتهٔ آن پاشن است.

گزینهٔ (۲):

$$\frac{1}{12} = \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+3)^2}\right) \xrightarrow{n'=4} \frac{1}{12} = \frac{1}{16} - \frac{1}{49} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{33}{784} \times$$

گزینهٔ (۳):

$$\frac{1}{12} = \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+3)^2}\right) \xrightarrow{n'=5} \frac{1}{12} = \frac{1}{25} - \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{39}{1600} \times$$

۱۹۴- گزینهٔ ۴

خط فکری: چون در پرانتز انرژی ریدبرگ داده شـده اسـت، پس باید مسـئله را با اسـتفاده از رابطهٔ $E_U - E_L = hf$ حل کرد. همچنین باید دو رابطهٔ زیر از مدل اتمی بور را به خاطر داشته باشیم:

یک ریدبرگ

$$E_n = \frac{-E_R}{n^2} \qquad r = n^2 a_0$$

شمارهٔ تراز — شمارهٔ مدار — شعاع مدار ۱

۱) ابتدا با توجه به رابطهٔ $E_U - E_L = hf$ حل سؤال را آغاز می‌کنیم و شماره مدار r و r' را به‌دست می‌آوریم.

$$E_U - E_L = hf \xrightarrow[hf=2/55\,eV]{E_U=\frac{-E_R}{n_U^2},\, E_L=\frac{-E_R}{n_L^2}} \frac{-13/6}{n_U^2} - \frac{-13/6}{n_L^2} = 2/55 \Rightarrow \frac{-1}{n_U^2} - \left(-\frac{1}{n_L^2}\right) = \frac{2/55}{13/6} \Rightarrow \frac{-1}{n_U^2} + \frac{1}{n_L^2} = \frac{3}{16} \Rightarrow n_U = 4,\, n_L = 2$$

بنابراین شماره مدار r، ۴ و شماره مدار r'، ۲ است.

در این سؤال هم با توجه به معادله n_U و n_L را حدس زدیم.

۲) شعاع هر مدار را برحسب شعاع بور (a_0) حساب کرده و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$r_L = n_L^2 a_0 \xrightarrow{r_L = r'} r' = 4a_0$$
$$r_U = n_U^2 a_0 \xrightarrow{r_U = r} r = 16a_0$$
$$\xrightarrow{(-)} \Delta r = 12a_0 \Rightarrow \frac{\Delta r}{a_0} = 12$$

۱۹۵- گزینهٔ ۴

۱) انرژی فوتون از رابطهٔ $E = hf$ به‌دست می‌آید که در آن f بسامد فوتون و h ثابت پلانک است. با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$E_A = 2/5 E_B \Rightarrow hf_A = 2/5 hf_B \Rightarrow f_A = 2/5 f_B$$

۲) با توجه به فرض مسئله اختلاف بسامد فوتون‌های A و B برابر $9\times10^{14}\,Hz$ است، از طرفی $f_A > f_B$ است، بنابراین باید بنویسیم:

$$f_A - f_B = 9\times10^{14}\,Hz \xrightarrow{(I)} 2/5 f_B - f_B = 9\times10^{14} \Rightarrow 1/5 f_B = 9\times10^{14} \Rightarrow f_B = 6\times10^{14}\,Hz \xrightarrow{f_A = 2/5 f_B} f_A = 2/5\times6\times10^{14} = 15\times10^{14}\,Hz$$

۳) طول موج فوتون A خواهد شد:

$$\lambda_A = \frac{c}{f_A} \Rightarrow \lambda_A = \frac{3\times10^8}{15\times10^{14}} \Rightarrow \lambda_A = 2\times10^{-7}\,m \Rightarrow \lambda_A = 0/2\,\mu m$$

۱۹۶- گزینهٔ ۳

یادآوری: بنا به نظریهٔ اینشتین انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در اثر فوتوالکتریک برابر $K_m = hf - W_0$ است.

۱) بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در حالت اول $6/4\times10^{-19}\,J$ است که آن را بر حسب eV بیان می‌کنیم.

$$K_M = \frac{6/4\times10^{-19}}{1/6\times10^{-19}} \Rightarrow K_M = 4\,eV$$

۲) در حالت دوم که طول موج نور فرودی بر فلز دو برابر شده (2λ)، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها، ۷۵٪ کاهش یافته بنابراین:

$$K'_m = K_m - \frac{75}{100}K_m = \frac{25}{100}K_m \Rightarrow K'_m = \frac{1}{4}\times4\,eV \Rightarrow K'_m = 1\,eV$$

۳) رابطه فوتوالکتریک را برای هر دو حالت می‌نویسیم:

$$K_m=\frac{hc}{\lambda}-W_\circ \begin{cases} \text{حالت اول}: ۴=\frac{hc}{\lambda}-W_\circ \\ \text{حالت دوم}: ۱=\frac{hc}{۲\lambda}-W_\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴+W_\circ=\frac{hc}{\lambda} \\ ۱+W_\circ=\frac{hc}{۲\lambda} \end{cases}$$

۴) دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم تا λ حذف شده و تنها مجهول $W_\circ$ باشد:

$$\frac{۴+W_\circ}{۱+W_\circ}=\frac{\frac{hc}{\lambda}}{\frac{hc}{۲\lambda}} \Rightarrow \frac{۴+W_\circ}{۱+W_\circ}=۲ \Rightarrow ۴+W_\circ=۲+۲W_\circ \Rightarrow W_\circ=۲eV$$

۵) با توجه به فرض مسئله و اینکه تندی نور در خلأ $c=۳\times۱۰^۸ m/s$ است، خواهیم خواهیم داشت:

$$hc=۱۲۰۰eVnm \Rightarrow h=\frac{۱۲۰۰}{c}=\frac{۱۲۰۰}{۳\times۱۰^۸\times\underbrace{۱۰^۹}_{\text{تبدیل به نانومتر}}} \Rightarrow h=۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s$$

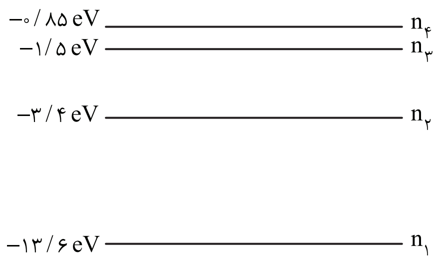
۶) اکنون بسامد آستانه را می‌توان حساب کرد.

$$W_\circ=hf_\circ \Rightarrow ۲=۴\times۱۰^{-۱۵}f_\circ \Rightarrow f_\circ=۰/۵\times۱۰^{+۱۵}Hz$$

$$f_\circ=۵\times۱۰^{۱۴}Hz\times\underbrace{\frac{۱THz}{۱۰^{۱۲}Hz}}_{\text{ضریب تبدیل}} \Rightarrow f_\circ=۵۰۰THz$$

۱۹۷- گزینهٔ ۱

یادآوری: در گذار الکترون از تراز بالاتر به تراز پایین‌تر، الکترون فوتونی گسیل می‌کند که انرژی این فوتون برابر اختلاف انرژی دو تراز است.



۱) انرژی فوتون گسیلی را حساب می‌کنیم.

$$E=hf \Rightarrow E=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۴/۷۵\times۱۰^{۱۴} \Rightarrow E=۱/۹eV$$

۲) به اعداد روی ترازها دقت کنید. اختلاف پتانسیل تراز $n_۳$ و تراز $n_۲$ برابر است با:

$$E_۳-E_۲=-۱/۵-(-۳/۴) \Rightarrow ۱/۹eV$$

در نتیجه گذار الکترون از تراز $n_۳$ به تراز $n_۲$ بوده است.

۱۹۸- گزینهٔ ۲

یادآوری: در مدل اتمی بور، انرژی الکترون در اتم هیدروژن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$E=-\frac{E_R}{n^۲}$$

شماره مداری که در آن انرژی الکترون $-۰/۸۵eV$ و $-۰/۵۴۴eV$ است را به کمک رابطهٔ بالا به‌دست می‌آوریم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{E_K=-۰/۸۵eV} -۰/۸۵=\frac{-۱۳/۶}{K^۲} \Rightarrow K=۴ \\ \xrightarrow{E_L=-۰/۵۴۴eV} -۰/۵۴۴=\frac{-۱۳/۶}{L^۲} \Rightarrow L=۵ \end{cases}$$

۱۹۹- گزینهٔ ۴

نکته: پرتوهای α ذرات باردار مثبت از جنس هستهٔ اتم هلیم $({}^۴_۲He)$ هستند و با گسیل هر ذرهٔ α، ۲ واحد از عدد اتمی و ۴ واحد از عدد جرمی کم می‌شود. ذرهٔ β^- از جنس الکترون است و گسیل بتای منفی سبب می‌گردد که عدد اتمی یک واحد افزایش یابد و عدد جرمی بدون تغییر بماند.

۱) معادلهٔ این واکنش هسته‌ای را می‌نویسیم.

$${}^{۲۳۷}_{۹۳}Np \rightarrow {}^A_Z X+\underbrace{۳{}^۴_۲He}_{\text{ذرهٔ آلفا}}+\underbrace{{}^{\circ}_{-۱}e}_{\text{ذره بتای منفی}}$$

۲) باید مجموع عدد جرمی (تعداد نوکلئون‌ها) در دو طرف واکنش و هم‌چنین مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش هسته‌ای یکسان باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$۲۳۷=A+(۳\times۴)+۰ \Rightarrow A=۲۲۵ \quad , \quad ۹۳=Z+(۳\times۲)+(-۱) \Rightarrow Z=۸۸$$

نکته: عدد جرمی برابر مجموع تعداد پرتون‌ها و نوترون‌های هسته است.

تعداد نوترون‌ها خواهد شد:

$$A=Z+N \Rightarrow ۲۲۵=۸۸+N \Rightarrow N=۱۳۷$$

۲۰۰- گزینهٔ ۱

نکته: واپاشی β:

- این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست.
- دو نوع واپاشی β با نام‌های β^- و β^+ رخ می‌دهند.
- در واپاشی β^-، الکترون گسیل‌شده حاصل تبدیل نوترون درون هسته به پروتون و الکترون است.
- در نتیجه عدد جرمی ثابت مانده و عدد اتمی به اضافه (۱) می‌شود. این الکترون نه در هسته و نه در مدار اتم وجود نداشته است.
- در واپاشی β^+، ذره‌های هم‌جرم با الکترون اما با بار مثبت از هسته گسیل می‌شود که پوزیترون نام دارد.
- در واپاشی β^+، یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.
- اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل پرتوگاما، به حالت پایه می‌رسند.

در واپاشی β^-، الکترون گسیل شده حاصل تبدیل یک نوترون به پروتون است و گزارهٔ (الف) درست است.

در واپاشی β^+، ذرهٔ گسیل‌شده دارای جرمی یکسان با الکترون، اما باری مثبت است و گزارهٔ (ب) درست است.

هسته‌های برانگیخته برای رسیدن به پایداری پرتو گاما می‌تابانند پس گزارهٔ (پ) نادرست است.

در واپاشی β^+، پروتون به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود و گزارهٔ (ت) نادرست است.

۲۰۱- گزینهٔ ۳

یادآوری: برای به‌دست آوردن درصد هسته‌های پرتوزا باقی‌مانده می‌توان از رابطه $\frac{N}{N_۰}=(\frac{۱}{۲})^n \times ۱۰۰$ استفاده کرد که در آن $n=\frac{t}{T_{\frac{۱}{۲}}}$ است.

نیمه‌عمر کربن ۵۷۳۰ سال است، بنابراین پس از ۲۲۹۲۰ سال، ۴ نیمه‌عمر گذشته است.

$$n=\frac{۲۲۹۲۰}{۵۷۳۰}=۴$$

حال با توجه به رابطهٔ گفته شده در یادآوری درصد خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{N}{N_۰}=(\frac{۱}{۲})^۴ \times ۱۰۰=۶/۲۵\%$$ درصدباقی‌مانده

راه‌دوم: پس از هر نیمه‌عمر مقدار باقیماندهٔ یک عنصر نصف می‌شود:

$$N \xrightarrow{\text{یک نیمه‌عمر}} \frac{N}{۲} \xrightarrow{\text{دو نیمه‌عمر}} \frac{N}{۴} \xrightarrow{\text{سه‌نیمه‌عمر}} \frac{N}{۸} \xrightarrow{\text{چهارنیمه‌عمر}} \frac{N}{۱۶}$$

٪۵۰ ٪۲۵ ۱۲/۵٪ ۶/۲۵٪

۲۰۲- گزینهٔ ۴

نکته: در واپاشی β^- که از جنس الکترون است یک نوترون واپاشیده شده و یک پروتون و یک الکترون (β^-) تولید می‌شود $({}^{۱}_{۰}H \to {}^{۱}_{۱}H + {}^{۰}_{-۱}e^-)$. به همین دلیل عدد جرمی تغییر نمی‌کند. اما به تعداد پروتون‌ها یکی اضافه شده و عدد اتمی یک واحد افزایش می‌یابد و خواهیم داشت:

$${}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z+۱}Y + {}^{۰}_{-۱}e^-$$

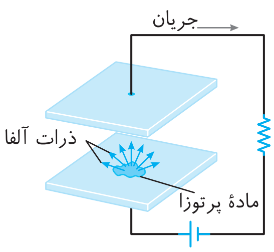
سدیم ${}^{۲۴}_{۱۱}Na$ دارای ۱۱ پروتون و ۱۳=۱۱−۲۴ نوترون است. با گسیل β^-، از نوترون‌ها یکی کم می‌شود ۱۲=۱−۱۳ و بر تعداد پروتون‌ها یکی اضافه می‌شود.
۱۲=۱+۱۱

۲۰۳- گزینهٔ ۴

ذرهٔ α دارای دو پروتـون و دو نوترون بوده در واقع α، هسـته اتـم هلیم بوده و دارای بار مثبت است. این ذره سنگین و دارای برد کوتاه است. بنابراین گزاره (الف) نادرست است.

در تمام فرایندهای واپاشـی پرتوزا مشـاهده شـده اسـت که تعداد نوکلئون‌ها (مجموع پروتون‌ها و نوترون‌ها) در طی فرایند واپاشی هسته پایسته است یعنی تعداد نوکلئون‌ها، پیش از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند مساوی است. بنابراین گزاره (ب) درست است.

یکی از کاربردهای گستردهٔ واپاشی α، در آشکارسازهای دود است و گزارهٔ (پ) درست است.



واپاشی α در هسته‌های سنگین مانند اورانیوم صورت می‌گیرد و گزارهٔ (ت) نادرست است. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

۲۰۴- گزینهٔ ۴

یادآوری: در واپاشی بتای منفی، یک نوترون در هسته واپاشی شده و یک پروتون و یک الکترون (β^-) ایجاد می‌شود.

$$\underset{\text{نوترون}}{{}^{1}_{0}n} \rightarrow \underset{\text{پروتون}}{{}^{1}_{1}P} + \underset{\text{بتای منفی}}{{}^{0}_{-1}e}$$

۱) تعداد نوترون‌های هسته ${}^{۲۳۴}_{۹۰}Th$ برابر است با:

$$A=Z+N \Rightarrow ۲۳۴=۹۰+N \Rightarrow N=۱۴۴$$

۲) با واپاشی بتای منفی، تعداد نوترون‌های هسته یک واحد کاهش می‌یابد $N'=۱۴۴-۱=۱۴۳$ و بر تعداد پروتون‌های هسته یک واحد افزوده می‌شود.

$$Z'=Z+۱=۹۰+۱=۹۱$$

۳) نسبت عدد اتمی و عدد نوترونی هستهٔ دختر خواهد شد:

$$\frac{Z'}{N'}=\frac{۹۱}{۱۴۳}$$