آزمون ۱۰۰

۱- گزینهٔ ۱ زاویهٔ بین بردار $\vec{a}=(-۱,\alpha,۱)$ و محور z در فضا برابر ۴۵° است. بنابراین

$$\cos ۴۵^\circ=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|}\xrightarrow{\vec{k}=(۰,۰,۱)}\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲+\alpha^۲}\times\sqrt{۱}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲+\alpha^۲}\Rightarrow\alpha=۰$$

بنابراین $\vec{a}=(-۱,۰,۱)$. اکنون به‌جای بردار $\vec{b}=(-\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳},۲)$ از بردار $\frac{۳}{۲}\vec{b}=(-۲,۱,۳)$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۱&۰&۱\\-۲&۱&۳\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

توجه کنید که چون $\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}=\frac{۳}{۲}(\vec{a}\times\vec{b})$، پس θ زاویهٔ بین بردار $\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}$ و محور z است، بنابراین

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b})\cdot\vec{k}}{|\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}||\vec{k}|}=\frac{(-۱,۱,-۱)\cdot(۰,۰,۱)}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۱}}=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲- گزینهٔ ۱ در شکل زیر، مثلث $TB'C'$ انتقال‌یافتهٔ مثلث ABC تحت بردار $\overrightarrow{AT}$ و مثلث TPQ ناحیهٔ محدود بین مثلث اولیه و مثلث انتقال‌یافته است. بنابر فرض تست،

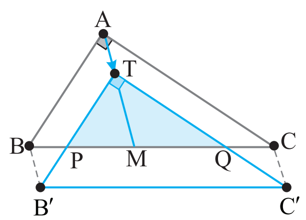
$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۱۶}\quad(۱)$$

از طرف دیگر، چون اضلاع مثلث TPQ با اضلاع مثلث ABC دوبه‌دو موازی‌اند، پس زاویه‌های این دو مثلث مساوی‌اند. در نتیجه این دو مثلث متشابه‌اند. بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث مساوی توان دوم نسبت میانه‌های نظیر آن‌ها است، پس

$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}}=(\frac{TM}{AM})^۲\xrightarrow{\text{از (۱)}}(\frac{TM}{AM})^۲=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow\frac{TM}{AM}=\frac{۱}{۴}\quad(۲)$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس $AM=\frac{BC}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$. در نتیجه از (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{TM}{۴}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow TM=۱\Rightarrow AT=AM-TM=۴-۱=۳$$



۳- گزینهٔ ۱ سطر سوم ماتریس A را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\text{سطر سوم حاصل‌ضرب دو ماتریس اول}=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\۳&۷&-۲\end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$\text{سطر سوم A}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\۳&۷&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\۷&۱&-۵\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A مساوی $۷+۱-۵=۳$ است.

۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$BA^TA=۵۲I\Rightarrow B\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\-۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&۱\\۳&۱\end{bmatrix}=۵۲I$$

$$B\begin{bmatrix}۱۴&۴\\۴&۳\end{bmatrix}=۵۲I\quad(۱)$$

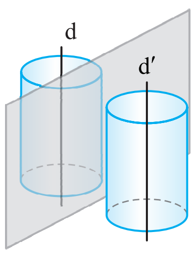
اکنون برای پیدا کردن ماتریس B، طرفین تساوی (۱) را از سمت راست در وارون ماتریس $\begin{bmatrix}۱۴&۴\\۴&۳\end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم. توجه کنید که $\begin{bmatrix}۱۴&۴\\۴&۳\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۳&-۴\\-۴&۱۴\end{bmatrix}$. بنابراین

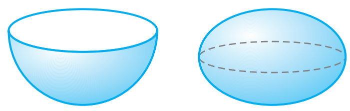
$$B=۵۲I\begin{bmatrix}۱۴&۴\\۴&۳\end{bmatrix}^{-۱}=۵۲I\times\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۳&-۴\\-۴&۱۴\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۵۲}{۲۶}\begin{bmatrix}۳&-۴\\-۴&۱۴\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۳&-۴\\-۴&۱۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&-۸\\-۸&۲۸\end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس B برابر ۲۸ است.

۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید $k>۰$. مکان هندسی نقاطی از فضا که از خط‌های موازی d و d' به فاصلهٔ k هستند، دو سطح استوانه‌ای با محورهای d و d' هستند (شکل مقابل را ببینید). صفحه‌هایی که بر این دو سطح استوانه‌ای مماس هستند، از دو خط d و d' به یک فاصله هستند که در اینجا تعداد آن‌ها حداکثر ۴ تا است. در واقع دو تا از این صفحه‌ها می‌توانند طوری بر این دو سطح استوانه‌ای مماس باشند که هر دو سطح در یک طرف این صفحه‌ها باشند و دو تا از این صفحه‌ها می‌توانند طوری بر این دو سطح استوانه‌ای مماس باشند که دو سطح در طرفین این صفحه‌ها باشند. با تغییر مقدار k، تعداد نامتناهی صفحه با این ویژگی خواهیم داشت. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است. در ضمن، چون گزینهٔ (۱) درست است، پس گزینهٔ (۲) نادرست خواهد بود. گزینه‌های (۳) و (۴) در صفحه به‌ترتیب تعریف سهمی و بیضی هستند. در فضا این مکان‌ها سهمی‌گون و بیضی‌گون هستند.





۶- گزینهٔ ۲ معادلهٔ استاندارد سهمی به‌صورت زیر است:

$$(x-۱)^{۲}-۱۲y=۶\Rightarrow(x-۱)^{۲}=۱۲y+۶\Rightarrow(x-۱)^{۲}=۱۲(y+\frac{۱}{۲})$$

پس این سهمی قائم رو به بالا با رأس $F(۱,-\frac{۱}{۲})$ است و $۴a=۱۲$، یعنی $a=۳$. بنابراین کانون این سهمی به مختصات زیر است:

$$F'=(\alpha\,,a+\beta)=(۱,۳-\frac{۱}{۲})=(۱,\frac{۵}{۲})$$

اکنون مرکز بیضی را پیدا می‌کنیم: مرکز بیضی $O=\frac{F+F'}{۲}=(۱,۱)$

بنابراین فاصلهٔ مرکز بیضی از مبدأ مختصات $=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$

۷- گزینهٔ ۳ به کمک قضیهٔ هرون، مساحت مثلث را حساب می‌کنیم. توجه کنید که

$$P=\frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲}=۲۱$$

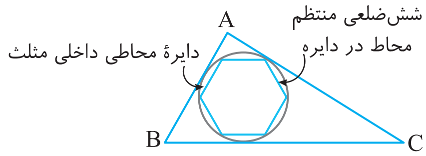
در نتیجه

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۳)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۵)}$$
$$=\sqrt{۲۱\times۸\times۷\times۶}=\sqrt{۲۱\times۸\times۷\times۳\times۲}=\sqrt{۲۱\times۲۱\times۱۶}=۲۱\times۴=۸۴$$

اکنون شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث برابر است با $r=\frac{S}{P}=\frac{۸۴}{۲۱}=۴$.

بنابراین

$$\text{اندازهٔ ضلع شش‌ضلعی منتظم محاطی}=۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۶}=۲(۴)\sin۳۰^\circ=۴$$



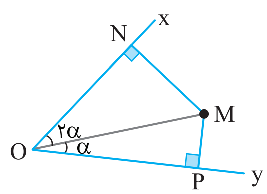
۸- گزینهٔ ۴ شکل مسئله به‌صورت زیر است. توجه کنید که

$$\left.\begin{array}{l}\triangle OMN:\sin ۲\alpha=\frac{MN}{OM}\\ \triangle OMP:\sin\alpha=\frac{MP}{OM}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}}\frac{\sin ۲\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{MN}{OM}}{\frac{MP}{OM}}$$

$$\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{MN}{MP}\Rightarrow ۲\cos\alpha=\frac{MN}{MP}$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMP، $\cos\alpha=\frac{OP}{OM}$. بنابراین

$$۲\times\frac{OP}{OM}=\frac{MN}{MP}\Rightarrow\frac{MN}{MP}=\frac{۲OP}{OM}$$



۹- گزینهٔ ۱ از نقطهٔ F عمود HH' و از نقطهٔ E عمود KK' را بر اضلاع AD و BC از مستطیل ABCD وارد می‌کنیم. در نتیجه

$$AM||BN\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle AFM\sim\triangle NFB$$

$$\frac{FH}{FH'}=\frac{AM}{NB}=\frac{۲}{۱}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{FH}{HH'}=\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{HH'=DC=۸}\frac{FH}{۸}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow FH=\frac{۱۶}{۳}$$

به‌طور مشابه،

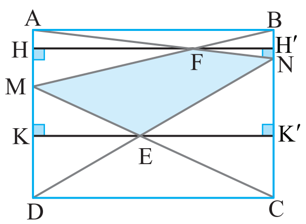
$$DM||NC\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle MED\sim\triangle CEN$$

$$\frac{EK}{EK'}=\frac{MD}{CN}=\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{EK}{KK'}=\frac{۴}{۹}$$

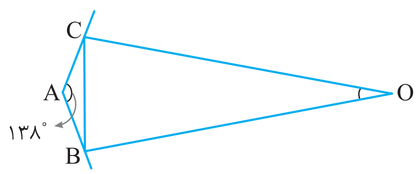
$$\xrightarrow{KK'=DC=۸}\frac{EK}{۸}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow EK=\frac{۳۲}{۹}$$

اکنون می‌توانیم مساحت چهارضلعی MENF را پیدا کنیم:

$$S_{MENF}=S_{AND}-S_{AMF}-S_{MED}$$
$$=\frac{۱}{۲}DC\times AD-\frac{۱}{۲}FH\times AM-\frac{۱}{۲}EK\times MD$$
$$=\frac{۱}{۲}(۸)(۶)-\frac{۱}{۲}(\frac{۱۶}{۳})(۲)-\frac{۱}{۲}(\frac{۳۲}{۹})(۴)$$
$$=۲۴-\frac{۱۶}{۳}-\frac{۶۴}{۹}=\frac{۲۱۶-۴۸-۶۴}{۹}=\frac{۱۰۴}{۹}$$



۱۰- گزینهٔ ۱ در شکل زیر، O نقطهٔ تلاقی نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ کوچک‌تر B و C است. بنابراین $\hat{O}=۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ-\frac{۱۳۸^\circ}{۲}=۲۱^\circ$



۱۱- گزینهٔ ۳ طول وتر ED برابر شعاع دایره است، پس $\overset{\frown}{ED}=۶۰^\circ$.

از طرف دیگر، چون $\hat{C}$ زاویه‌ای محاطی است، پس

$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{DEB}}{۲}\Rightarrow۷۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{EB}}{۲}=\frac{۶۰^\circ+\overset{\frown}{EB}}{۲}\Rightarrow\overset{\frown}{EB}=۱۴۰^\circ-۶۰^\circ=۸۰^\circ$$

چون BC قطر دایره است، پس $\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{DC}=۱۸۰^\circ$

در نتیجه $\overset{\frown}{EDC}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{BE}=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ=۱۰۰^\circ$

۱۲- گزینهٔ ۳ از فرض $\frac{AC}{BC}=\sqrt{۳}$ نتیجه می‌گیریم $AC=\sqrt{۳}BC$. اکنون با استفاده از رابطهٔ طولی در دایره می‌نویسیم:

$$AC^{۲}=CB\times DC\Rightarrow(\sqrt{۳}BC)^{۲}=CB\times DC\Rightarrow۳BC=DC$$

$$\frac{DC}{BC}=\frac{۳}{۱}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{DC-BC}{BC}=\frac{۳-۱}{۱}\Rightarrow\frac{DB}{BC}=۲$$

۱۳- گزینهٔ ۱ شعاع‌های OM و ON به‌ترتیب بر خط‌های مماس AB و BC عمود هستند. پس $\hat{M}=\hat{N}=۹۰^\circ$. چون $\hat{B}=۶۰^\circ$، پس در چهارضلعی OMBN می‌توان نوشت

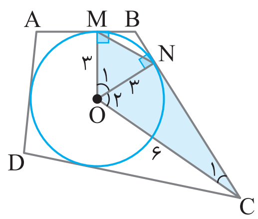
$$\hat{O}_۱+\hat{M}+\hat{B}+\hat{N}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱+۹۰^\circ+۱۲۰^\circ+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱=۶۰^\circ$$

از طرف دیگر، دو زاویهٔ مجاور $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در ذوزنقهٔ ABCD مکمل‌اند، پس $\hat{C}=۶۰^\circ$. چون OC نیمساز زاویهٔ C است، پس $\hat{C}_۱=۳۰^\circ$. در نتیجه $\hat{O}_۲=۶۰^\circ$. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ONC: \hat{C}_۱=۳۰^\circ \Rightarrow ON=\frac{۱}{۲}OC \xrightarrow{ON=۳} OC=۶$$

بنابراین

$$\begin{aligned} S_{OMNC} &= S_{OMN}+S_{ONC} \\ &= \frac{۱}{۲}OM\times ON\sin\hat{O}_۱+\frac{۱}{۲}ON\times OC\sin\hat{O}_۲ \\ &= \frac{۱}{۲}(۳)(۳)\sin ۶۰^\circ+\frac{۱}{۲}(۳)(۶)\sin ۶۰^\circ \\ &= \frac{۹}{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)+۹\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴} \end{aligned}$$



۱۴- گزینهٔ ۴ نقطهٔ تلاقی قطرهای $x+y=۱$ و $x-y=۳$ مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow O(۲,-۱) \text{ مرکز}$$

همچنین فاصلهٔ مرکز $O(۲,-۱)$ تا خط مماس $۴x+۳y+۵=۰$ برابر شعاع دایره است، یعنی

$$R=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

از طرف دیگر، طول پاره‌خط OM برابر است با

$$OM=\sqrt{(x_M-x_O)^۲+(y_M-y_O)^۲}=\sqrt{(۴-۲)^۲+(-۲+۱)^۲}=\sqrt{۵}$$

چون $OM>R$، پس نقطهٔ M بیرون دایره است. بنابراین

$$\text{نزدیک‌ترین فاصلهٔ M از دایره}=OM-R=\sqrt{۵}-۲$$

۱۵- گزینهٔ ۳ بنابر فرض سؤال $OO'=۶$، $R=۶a-۱$ و $R'=a^۲-۲$. چون دو دایره مماس داخلی هستند، پس

$$OO'=|R'-R| \Rightarrow ۶=|a^۲-۲-۶a+۱| \Rightarrow |a^۲-۶a-۱|=۶$$

بنابراین دو حالت داریم:

حالت اول: $a^۲-۶a-۱=۶ \Rightarrow a^۲-۶a-۷=۰ \Rightarrow a=-۱, a=۷$

$a=-۱$ غیرقابل قبول است، زیرا به‌ازای آن شعاع‌های R و R' منفی می‌شوند.

حالت دوم: $a^۲-۶a-۱=-۶ \Rightarrow a^۲-۶a+۵=۰ \Rightarrow a=۱, a=۵$

$a=۱$ غیرقابل قبول است، زیرا به‌ازای آن شعاع R' منفی می‌شود.

پس میانگین مقادیر ممکن برای a مساوی $\frac{۷+۵}{۲}=۶$ است.

۱۶- گزینهٔ ۲ چون بردار $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ با بردار $\vec{c}$ موازی است، پس $\vec{a}\times\vec{b}$ با $\vec{c}$ موازی است. در ضمن برای ساده‌تر شدن محاسبات به جای بردار $\vec{b}=(-\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳},۲)$ از بردار $\frac{۳}{۲}\vec{b}=(-۲,۱,۳)$ استفاده می‌کنیم.

در واقع بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با بردار $\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}$ موازی است. توجه کنید که

$$\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۱ & \alpha & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}=(۳\alpha-۲)\vec{i}-\vec{j}+(-۱+۲\alpha)\vec{k}$$

بنابر فرض سؤال قرار است بردار $\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}$ با $\vec{c}$ موازی باشد. بنابراین

$$\frac{۳\alpha-۲}{-۱}=\frac{-۱}{۱}=\frac{-۱+۲\alpha}{-۱}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} ۳\alpha-۲=۱ \Rightarrow \alpha=۱ \\ -۱+۲\alpha=۱ \Rightarrow \alpha=۱ \end{cases}$$

پس به‌ازای $\alpha=۱$ دو بردار $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ و $\vec{c}$ موازی‌اند.

۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & a \end{bmatrix}_{۲\times۲}\begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{bmatrix}_{۲\times۱}=\begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵b_۱-۲b_۲ \\ ۴b_۱+ab_۲ \end{bmatrix}_{۲\times۱}=\begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین $۵b_۱-۲b_۲=۴b_۱ \Rightarrow b_۱=۲b_۲ \quad (۱)$

چون b ماتریسی ناصفر است، پس $b_۱, b_۲\neq ۰$. اکنون می‌توان نوشت

$$۴b_۱+ab_۲=۴b_۲ \xrightarrow{\text{از }(۱)} ۸b_۲+ab_۲=۴b_۲ \xrightarrow[b_۲\neq۰]{\text{تقسیم بر } b_۲}$$

$$۸+a=۴ \Rightarrow a=-۴$$

۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۶ & ۹ & ۳ \\ ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ & & \\ & ۷ & \\ & & ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابر $۹+۷+۵=۲۱$ است.

۱۹- گزینهٔ ۴ چون $A=\begin{bmatrix} ۱ & a & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، پس $A^T=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ a & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$.

بنابراین

$$AA^T=\begin{bmatrix} ۱ & a & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ a & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^۲+۱۰ & a+۲ \\ a+۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

چون AA^T ماتریسی ۲×۲ است، $AA^TB=52I$ و $|B|$ تعریف می‌شود، پس B و I ماتریس‌هایی ۲×۲ هستند. اکنون اگر از دو طرف تساوی $AA^TB=52I$ دترمینان بگیریم، به‌دست می‌آید

$$|AA^TB|=|52I|\Rightarrow|AA^T||B|=52^2|I|$$

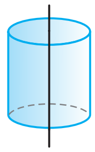
$$\begin{vmatrix} a^2+10 & a+2\\ a+2 & 3\end{vmatrix}\times 104=52^2\Rightarrow(3a^2+30-(a+2)^2)=\frac{52^2}{104}=26$$

$$3a^2+30-a^2-4-4a=26\Rightarrow 2a^2-4a=0\Rightarrow 2a(a-2)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a=2\end{cases}$$

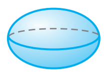
پس مجموع مقادیر ممکن برای a مساوی ۲=۲+۰ است.

۲۰- گزینهٔ ۱ خطوطی که بر d عمودند، اگر موازی باشند، در یک صفحه هستند؛ اگر متقاطع باشند، در صفحه‌هایی عمود بر خط d هستند؛ اگر متنافر باشند، هر کدام از آن‌ها در صفحه‌هایی مختلف واقع هستند. در نتیجه چون در فضا بی‌نهایت خط بر یک خط مفروض عمودند، پس خطوط عمود بر یک خط در فضا بی‌نهایت صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.

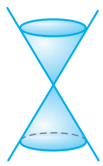
اکنون به نادرستی سایر گزینه‌ها توجه کنید:



مجموعهٔ نقاط متساوی‌الفاصله از یک خط در فضا روی سطحی استوانه‌ای قرار می‌گیرند. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.



مجموعهٔ نقاطی از فضا که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت به یک اندازه است، شکلی به نام بیضی‌گون است. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.



خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه زاویهٔ یکسان می‌سازند، سطح مخروطی است. پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲۱- گزینهٔ ۳ طرفین معادلهٔ بیضی را بر ۱۰۰ تقسیم می‌کنیم:

$$25(x-1)^2+16(y+1)^2=100\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}}=1$$

پس این بیضی یک بیضی قائم با مرکز $O'(1,-1)$ است و

$$\begin{cases}a^2=\frac{25}{4}\Rightarrow a=\frac{5}{2}\\ b^2=4\Rightarrow b=2\end{cases}$$

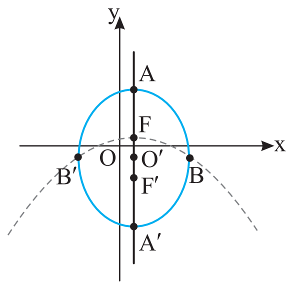
بنابراین

$$c^2=a^2-b^2=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}\Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

با توجه به شکل $O'F'=O'F=c=\frac{3}{2}$. چون $OF<OF'$، پس کانون‌ها به مختصات $F(1,\frac{1}{2})$ و $F'(1,-\frac{5}{2})$ هستند. اکنون F رأس و F' کانون سهمی مورد نظر است. با توجه به جایگاه رأس و کانون، این سهمی قائم رو به پایین است و مقدار a در سهمی مساوی $FF'=3$ است. با توجه به معادلهٔ سهمی قائم رو به پایین،

$$(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)\Rightarrow(x-1)^2=-12(y-\frac{1}{2})\Rightarrow(x-1)^2=-12y+6$$

• توجه کنید معادلهٔ بیضی در کتاب هندسهٔ ۳ نظام جدید حذف شده است.



۲۲- گزینهٔ ۱ شکل مسئله به‌صورت زیر است. سه مثلث AME، CMN و BEN به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند. فرض می‌کنیم طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع MEN برابر a باشد. توجه کنید که

$$\triangle AME:\ \hat{A}=60^\circ\Rightarrow EM=\frac{\sqrt{3}}{2}AE\xrightarrow{EM=a}AE=\frac{2a}{\sqrt{3}}\quad(1)$$

$$\hat{E}=30^\circ\Rightarrow AM=\frac{AE}{2}\xrightarrow{\text{از }(1)}AM=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

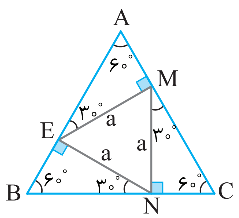
$$\xrightarrow{AM=BE}BE=\frac{a}{\sqrt{3}}\quad(2)$$

از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$AB=AE+BE=\frac{2a}{\sqrt{3}}+\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{3a}{\sqrt{3}}=a\sqrt{3}$$

چون مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC و MEN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MEN}}=\left(\frac{AB}{ME}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{a}\right)^2=3$$



۲۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اندازه‌های روی شکل معلوم می‌شود که

$$\hat{C}_1=180^\circ-115^\circ=65^\circ$$

اکنون زاویه‌ها را برحسب کمان‌ها می‌نویسیم

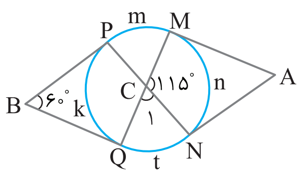
$$\hat{C}_1=\frac{m+t}{2}\xrightarrow{\hat{C}_1=65^\circ}m+t=130^\circ$$

$$\hat{B}=\frac{m+n+t-k}{2}\xrightarrow{\hat{B}=60^\circ}m+n+t-k=120^\circ\xrightarrow{m+t=130^\circ}$$

$$n-k=-10^\circ\Rightarrow k-n=10^\circ$$

بنابراین

$$M\hat{A}N=\frac{m+k+t-n}{2}\xrightarrow[k-n=10^\circ]{m+t=130^\circ}M\hat{A}N=\frac{130^\circ+10^\circ}{2}=70^\circ$$



۲۴- گزینهٔ ۴ ابتدا مساحت مثلث را به کمک قضیهٔ هرون به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که $P=\frac{۲۱+۱۷+۱۰}{۲}=۲۴$. در نتیجه

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۴(۲۴-۲۱)(۲۴-۱۷)(۲۴-۱۰)}$$

$$=\sqrt{۲۴\times۳\times۷\times۱۴}=\sqrt{۳\times۸\times۳\times۷\times۲\times۷}=\sqrt{۲۱^۲\times۱۶}=۲۱\times۴=۸۴$$

چون $\frac{۱}{۲}\times۸\times۲۱=۸۴$، پس ارتفاع $AH=۸$ وارد بر ضلع به طول ۲۱ است. با فرض $BC=۲۱$، $AB=۱۰$ و $AC=۱۷$ شکل مسئله به‌صورت زیر است. اکنون چون M و N وسط‌های ضلع‌ها هستند، پس

$$MN=\frac{BC}{۲}=\frac{۲۱}{۲}$$

از طرف دیگر، چون $MN||BC$، پس چهارضلعی MNPH ذوزنقه است. بنابراین ارتفاع AH بر MN نیز عمود است. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ABH: MH'||BH \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{BM}=\frac{AH'}{HH'} \xrightarrow{AM=BM}$$

$$AH'=HH'=\frac{۱}{۲}AH\Rightarrow HH'=۴$$

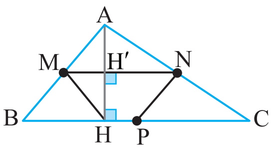
$$\triangle ABH: BH^۲=AB^۲-AH^۲=۱۰^۲-۸^۲=۳۶\Rightarrow BH=۶$$

پس

$$PH=BP-BH=\frac{BC}{۲}-BH=\frac{۲۱}{۲}-۶=\frac{۹}{۲}$$

در نتیجه مساحت ذوزنقهٔ MNPH برابر است با

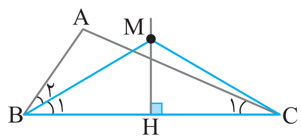
$$S_{MNPH}=\frac{۱}{۲}HH'(MN+PH)=\frac{۱}{۲}(۴)(\frac{۲۱}{۲}+\frac{۹}{۲})=۲\times۱۵=۳۰$$



۲۵- گزینهٔ ۳ در شکل زیر، نیمساز زاویهٔ B عمودمنصف ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کرده است. از M به C وصل می‌کنیم. چون M روی عمودمنصف BC است پس، $MB=MC\Rightarrow\hat{B}_۱=M\hat{C}B$

چون زاویهٔ $C_۱$ قسمتی از زاویهٔ MCB است، پس

$$M\hat{C}B>\hat{C}_۱\xrightarrow{M\hat{C}B=\hat{B}_۱}\hat{B}_۱>\hat{C}_۱\xrightarrow{\hat{B}_۱=\frac{\hat{B}}{۲}}\frac{\hat{B}}{۲}>\hat{C}_۱\Rightarrow\hat{B}>۲\hat{C}_۱$$

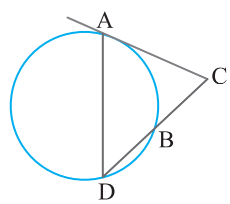


۲۶- گزینهٔ ۴ با استفاده از رابطهٔ طولی در دایره می‌نویسیم

$$CA^۲=CB\times CD\Rightarrow CA^۲=CB(CB+BD)\xrightarrow{DB=BC}$$

$$CA^۲=CB(CB+CB)\Rightarrow CA^۲=۲CB^۲\Rightarrow CA=\sqrt{۲}CB$$

$$\frac{CA}{CB}=\sqrt{۲}$$



۲۷- گزینهٔ ۲ از نقطهٔ O به نقطهٔ A وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OAC قائم‌الزاویه است. بنابراین

$$\triangle OAC: \hat{C}=۳۰^\circ\Rightarrow OA=\frac{۱}{۲}OC\xrightarrow{OA=۶}OC=۱۲$$

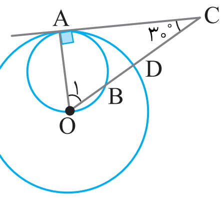
$$\hat{O}_۱=۶۰^\circ\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OC\xrightarrow{OC=۱۲}AC=۶\sqrt{۳}$$

اکنون با استفاده از رابطه طولی در دایرهٔ کوچک‌تر می‌نویسیم

$$CA^۲=CB\times CO\Rightarrow(۶\sqrt{۳})^۲=CB\times۱۲\Rightarrow۱۰۸=۱۲CB\Rightarrow BC=۹$$

از طرف دیگر، $CD=OC-OD=۱۲-۶=۶$. بنابراین

$$BD=BC-CD=۹-۶=۳$$



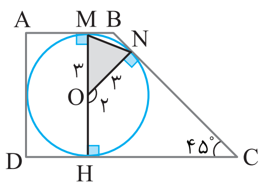
۲۸- گزینهٔ ۳ شعاع OM بر خط مماس AB عمود است. چون $AB||DC$، پس امتداد شعاع OM بر DC عمود است. همین‌طور، شعاع ON بر خط مماس BC عمود است. بنابراین در چهارضلعی ONCH می‌توان نوشت

$$\hat{O}_۲+\hat{N}+\hat{C}+\hat{H}=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۲+۹۰^\circ+۴۵^\circ+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\hat{O}_۲=۱۳۵^\circ\xrightarrow{\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ}\hat{O}_۱=۴۵^\circ$$

در نتیجه

$$S_{OMN}=\frac{۱}{۲}OM\times ON\sin\hat{O}_۱=\frac{۱}{۲}(۳)(۳)\sin۴۵^\circ=\frac{۹}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$



۲۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** مختصات پیکان‌های $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(-۲,۲,۱)$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-۱,-۱,۲)$$

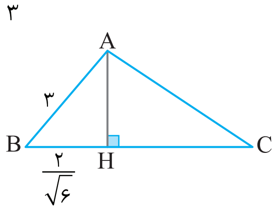
چون پیکان $\overrightarrow{BH}$ تصویر پیکان $\overrightarrow{BA}$ روی پیکان $\overrightarrow{BC}$ است، پس

$$|\overrightarrow{BH}|=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|۲-۲+۲|}{\sqrt{۱+۱+۴}}=\frac{۲}{\sqrt{۶}}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$. بنابراین

$$\triangle ABH: AH^۲=AB^۲-BH^۲\Rightarrow AH^۲=۹-\frac{۴}{۶}=۹-\frac{۲}{۳}=\frac{۲۵}{۳}$$

$$AH=\frac{۵}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$



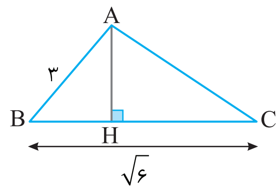
راه‌حل دوم مساحت مثلث ABC را به کمک ضرب خارجی پیدا می‌کنیم

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۲ & ۲ & ۱\\ -۱ & -۱ & ۲\end{vmatrix}=۵\vec{i}+۳\vec{j}+۴\vec{k}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{۱+۱+۴}=\sqrt{۶}$. بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}AH\times\sqrt{۶}\Rightarrow AH=\frac{۵\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$



۳۰- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم شعاع دایرهٔ بزرگ R باشد. قطر AB عمودمنصف قطر DC است. پس

$$\left.\begin{matrix}OD=OC\\ON=ON'\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}ND=CN'\xrightarrow{DN=۱۰}CN'=۱۰$$

در نتیجه $ON=ON'=R-۱۰$. بنابراین از رابطهٔ طولی در دایرهٔ کوچک‌تر به‌دست می‌آید

$$ON\times ON'=OM\times OB\xrightarrow{OM=R-۱۶}$$

$$(R-۱۰)(R-۱۰)=(R-۱۶)(R)$$

$$R^۲+۱۰۰-۲۰R=R^۲-۱۶R\Rightarrow ۴R=۱۰۰\Rightarrow R=۲۵$$

اکنون می‌توان نوشت

$$MB=OB+OM=R+R-۱۶=۲R-۱۶=۵۰-۱۶=۳۴$$

چون MB قطر دایرهٔ کوچک‌تر است، پس $\text{شعاع دایرهٔ کوچک‌تر}=\frac{MB}{۲}=۱۷$