

پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۰ (داخل کشور)

اکنون \bar{x} و از روی آن σ^2 را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{3 \times 11 + 2 \times 12 + 6 \times 13 + 3 \times 14 + 2 \times 18 + 5 \times 31 + 1 \times 30}{22} = 19$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^7 f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^7 f_i} = \frac{3(11-19)^2 + 2(12-19)^2 + 6(13-19)^2}{22} + \frac{3(14-19)^2 + 2(18-19)^2 + 5(31-19)^2 + (30-19)^2}{22} = 77$$

با توجه به اینکه با افزودن یک مقدار ثابت به همه داده‌ها مقدار واریانس تغییر نمی‌کند پس با افزودن ۴ واحد به همه داده‌ها مقدار واریانس همچنان ۷۷ باقی می‌ماند.

۱۵۴۰ ۳ داده‌ها به صورت زیر هستند:



اکنون داده صدم را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} 107 \square \Rightarrow \text{حالت } 12 \\ 108 \square \Rightarrow \text{حالت } 12 \\ \vdots \\ 114 \square \Rightarrow \text{حالت } 12 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 \times 12 = 96 \text{ عدد}$$

عدد ۹۷	عدد ۹۸	عدد ۹۹	عدد ۱۰۰
۱۱۵۰۱	۱۱۵۰۲	۱۱۵۰۳	۱۱۵۰۴

سن صدمین عضو برابر ۱۵ است.

۱۵۴۱ ۵ طبق اصل ضرب، کارت اول و دوم را به $21 \times 20 = 420$ طریق از کیسه

بیرون می‌آوریم. اعداد روی کارت را به ترتیب در کنار هم قرار می‌دهیم و عدد به وجود آمده را در مجموعه A قرار می‌دهیم. تعدادی از این اعداد دو بار تکرار می‌شوند. به عنوان مثال عدد ۱۲۱ یک بار با بیرون آمدن ۱۲ به عنوان کارت اول و ۱ به عنوان کارت دوم و بار دیگر با بیرون آمدن ۱ به عنوان کارت اول و ۲۱ به عنوان کارت دوم تولید می‌شود. همه اعداد تکراری در A به صورت زیر هستند:

$$\left. \begin{array}{l} 111 \quad 211 \\ 112 \quad 212 \\ \vdots \\ 119 \quad 219 \\ 121 \quad 219 \\ 110 \quad 210 \end{array} \right\} \text{حالت‌های تکراری}$$

در نتیجه $n(A) = 420 - 19 = 401$. اکنون باید عددهایی را به دست آوریم که مضرب ۶ هستند (مجموعه B). برای مشخص کردن تعداد عددهای مضرب ۶ اعداد ۱ تا ۲۱ را به ۳ دسته افزایش می‌کنیم:

$$x = 3k \Rightarrow 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$$

$$x = 3k + 1 \Rightarrow 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$$

$$x = 3k + 2 \Rightarrow 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$$

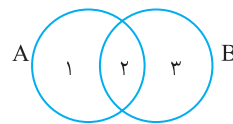
۱۵۳۶ ۱ می‌توان از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده کرد:

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د

فضای نمونه‌ای

در هفت مورد گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است، پس $n(S) = 7$. در سه مورد از این

هفت مورد r نادرست است. پس احتمال مطلوب برابر است با $\frac{3}{7}$.



۱۵۳۷ ۱ چون $U = A \cup B$ ، نمودار ون

مسئله به صورت زیر است. در این نمودار ناحیه‌ها را شماره گذاری می‌کنیم. بنابراین

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{2, 3\}$$

$$U = \{1, 2, 3\}, \quad C = \{1, 3\}$$

پس

$$A' - B = \{3\} - \{2, 3\} = \emptyset$$

$$(A' - B) \cap C = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3\} = \{1, 3\}$$

$$((A' - B) \cap C)' = \{2\}$$

طبق فرض $(A' - B) \cap C = B$. بنابراین $\{2\} = \{2, 3\}$. پس ناحیه ۳ تهی است.

در نتیجه $B = \{2\}$ و بنابراین $B \subseteq A$.

۱۵۳۸ ۳ ابتدا $20!$ را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$20! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 20$$

$$= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13$$

$$\times (2 \times 7) \times (3 \times 5) \times 2^4 \times 17 \times (2 \times 3^2) \times 19 \times (2^2 \times 5)$$

$$= 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1 \times 19^1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 18 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 36$$

اکنون به دست می‌آید

می‌توان از نکته زیر مسئله را حل کرد:

نکته: تعداد عوامل عدد اول p در عدد $n!$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

۱۵۳۹ ۳ چون تعداد داده‌ها ۲۲ تا است، پس میانه (Q_p) میانگین دو داده یازدهم

و دوازدهم است. اگر $a < 13$ ، آن‌گاه داده‌های یازدهم و دوازدهم برابر ۱۳ هستند. در این

صورت میانه برابر $13 = \frac{13+13}{2}$ خواهد بود. اما مقدار میانه $13/5$ است. پس $a > 13$.

بنابراین، چارک اول (Q_1) که میانه یازده داده اول، یعنی داده ششم است برابر ۱۳ خواهد

بود: $Q_1 = 13$. چون $Q_3 - Q_1 = 17$ ، پس $Q_3 = 17 + 13 = 30$. در نتیجه $a = 30$.

در نتیجه میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه رقمی به صورت aba برابر $\frac{۸۸۸+۲۵۲}{۲}=۵۷۰$ است.

بنابر الگوریتم تقسیم، **۱۵۴۵ (۲)**

$$\left. \begin{aligned} a &= 11q + r \\ q &= r + 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 11(r+3) + r = 12r + 33 \Rightarrow 0 \leq r < 11 \Rightarrow n(S) = 11$$

اکنون به دست می‌آید $a - 9 = 12r + 24 \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow r \equiv 0 \pmod{12}$

یعنی r باید زوج باشد. در نتیجه $n(A) = 6$. در نهایت به دست می‌آید $P(A) = \frac{6}{11}$

اگر عدد $n!$ بر 36 بخش پذیر باشد، آن گاه کمترین مقدار ممکن برای n عدد 6 است. پس **۱۵۴۶ (۳)**

$$10 - m \geq 6 \Rightarrow 4 \geq m$$

یعنی بزرگ‌ترین عدد طبیعی m برابر 4 است. در نتیجه باید باقی‌مانده 4^{123} بر 15 را به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} 4^{123} &\equiv 4 \\ 4^{122} &\equiv 1 \Rightarrow 4^{122} \cdot 4 \equiv 4 \\ 4^{121} &\equiv 4 \Rightarrow 4^{121} \cdot 4 \equiv 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین}} 4^{123} \equiv 4$$

از اطلاعات مسئله نمودار درختی زیر به دست می‌آید **۱۵۴۷ (۳)**

مجموع دو تاس > 9	۵ مهرهٔ خارج شده از طرف دوم ۳ مهرهٔ خارج شده از طرف اول آبی باشد	۱۰ قرمز باشد
	۶ مهرهٔ خارج شده از طرف دوم ۶ مهرهٔ خارج شده از طرف اول قرمز باشد	۱۰ قرمز باشد
مجموع دو تاس ≤ 9	۶ مهرهٔ خارج شده از طرف ۴ مهرهٔ خارج شده از طرف دوم آبی باشد	۱۰ اول قرمز باشد
	۷ مهرهٔ خارج شده از طرف ۵ مهرهٔ خارج شده از طرف دوم قرمز باشد	۱۰ اول قرمز باشد

اکنون بنابر قانون احتمال کل به دست می‌آید

$$P = \frac{1 \times 3 \times 5 + 1 \times 6 \times 6 + 5 \times 4 \times 6 + 5 \times 5 \times 7}{6 \times 6 \times 10} = \frac{۳۴۶}{۲۷۰} = \frac{۱۷۳}{۱۳۵}$$

چون جواب‌های معادلهٔ داده شده صحیح نامنفی است، پس x_4 باید

مقسوم‌علیه عدد 10 باشد:

$$x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{12}{2} = 66$$

$$x_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{7}{2} = 21$$

$$x_4 = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x_4 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{3}{2} = 3$$

در نتیجه بنابر اصل جمع،

$$۶۶ + ۲۱ + ۶ + ۳ = ۹۶ \text{ تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی}$$

برای اینکه عدد ساخته شده که از کنار هم قرار دادن دو کارت خارج شده به دست می‌آید مضرب 6 باشد باید آن عدد زوج باشد و بر 3 بخش پذیر باشد. در نتیجه کارت‌ها به صورت زیر است

$$\left. \begin{aligned} \begin{array}{|c|c|} \hline 3k & 3k \\ \hline \end{array} & \Rightarrow 6 \times 3 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 3k+1 & 3k+2 \\ \hline \end{array} & \Rightarrow 7 \times 4 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 3k+2 & 3k+1 \\ \hline \end{array} & \Rightarrow 7 \times 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مجموع} = 18 + 28 + 21 = 67$$

در این حالت هم دو عدد 114 و 216 دو بار تکرار می‌شوند. بنابراین

$$n(B) = 67 - 2 = 65$$

در نتیجه $P(B) = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{65}{401}$. (دقت کنید که در این سؤال فضای نمونه‌ای A نمایش داده شده است.)

عدهای مضرب $18 = 2 \times 3^2$ که مربع کامل هستند به فرم $(6k)^2$ هستند.

$$10^4 \leq (6k)^2 < 10^5 \Rightarrow 1000 \leq 6k < 10000 \Rightarrow 100 \leq k < 316 \Rightarrow 17 \leq k \leq 52$$

بنابراین برای k مقدار به دست می‌آید $52 - 16 = 36$.

توجه کنید که اگر عددی را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کنیم و

حاصل ضرب $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ به دست آید، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت این عدد برابر

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$$

است با

در نتیجه $(m+1)(n+1) =$ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت X

$$\text{چون } \frac{X}{40} = \frac{2^m \times 5^n}{2^3 \times 5} = 2^{m-3} \times 5^{n-1}, (m \geq 3, n \geq 1) \text{ پس}$$

$$(m-2)n = (m-2) \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت } \frac{X}{40}$$

اکنون بنابر فرض می‌نویسیم

$$(m+1)(n+1) - (m-2)n = 12 \Rightarrow m + 3n = 11$$

چون حداقل مقدار X مد نظر است، پس

$$m = 5, n = 2 \Rightarrow X = 2^5 \times 5^2 = 800$$

چون aba بر 12 بخش پذیر است، پس **۱۵۴۸ (۳)**

$$aba \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow 100a + 10b + a \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow 101a + 10b \equiv 0 \pmod{12}$$

$$\xrightarrow{101 \equiv 5} 5a + 10b \equiv 0 \pmod{12} \xrightarrow{\div 5} a + 2b \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow a \equiv -2b$$

اکنون با توجه به اینکه a رقمی زوج و غیرصفر است، می‌توان نوشت

$$b = 1 \Rightarrow a \equiv -2 \pmod{12} *$$

$$b = 2 \Rightarrow a \equiv -4 \pmod{12} \Rightarrow a = 8 \rightarrow 828$$

$$b = 3 \Rightarrow a \equiv -6 \pmod{12} \Rightarrow a = 6 \rightarrow 636$$

$$b = 4 \Rightarrow a \equiv -8 \pmod{12} \Rightarrow a = 4 \rightarrow 444$$

$$b = 5 \Rightarrow a \equiv -10 \pmod{12} \Rightarrow a = 2 \rightarrow 252 \text{ کوچک‌ترین عدد}$$

$$b = 6 \Rightarrow a \equiv -12 \pmod{12} *$$

$$b = 7 \Rightarrow a \equiv -14 \pmod{12} *$$

$$b = 8 \Rightarrow a \equiv -16 \pmod{12} \Rightarrow a = 8 \rightarrow 888 \text{ بزرگ‌ترین عدد}$$

$$b = 9 \Rightarrow a \equiv -18 \pmod{12} \Rightarrow a = 6 \rightarrow 696$$

۱۵۴۹ ۲ می‌دانیم در هر گراف همبند از مرتبه p و اندازه q ، $q \geq p-1$ پس در هر گراف همبند از مرتبه 7 ، $q \geq 7-1=6$. گراف زیر مثالی از یک گراف همبند مرتبه 7 با اندازه 6 و $\Delta=3$ است. بنابراین پاسخ عدد 6 است.



۱۵۵۰ ۴ چون در ستون دوم عددهای 1 ، 2 و 3 وجود دارد، پس گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند. از طرف دیگر ستون چهارم این مربع لاتین به صورت

۵
۴
۱
۲
۳

است و چون

عدد 3 با b هم‌سطر هستند، بنابراین $b \neq 3$. در نتیجه گزینه (۱) هم نمی‌تواند درست باشد. پس گزینه (۴) درست است. این مربع لاتین به صورت زیر نوشته می‌شود.

۲	۴	۳	۵	۱
۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	۴

۱۵۵۱ ۴ و ۲ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

گزینه (۱) رأس e را احاطه نمی‌کند.

گزینه (۲) این مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

گزینه (۳) رأس‌های e و g را احاطه نمی‌کند.

گزینه (۴) این مجموعه احاطه‌گر است و با حذف هر عضو، دیگر احاطه‌گر نیست.

بنابراین مینیمال نیز هست.

پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۰ (خارج از کشور)

۱۵۵۵؟ این تست نادرست است. چون برای a مقدار منحصر به فردی به دست نمی‌آید و به ازای هر $a < 13$ میانه برابر ۱۳ است.

۱۵۵۶؟ بنابر اصل جمع تعداد کل مردها برابر است با

$$1 \times 10 + 1 \times 85 = 8585$$

$$\frac{1 \times 10 + 1 \times 85}{\text{سن افراد هم سن}} = 8585$$

برای پیدا کردن نفر ده هزارم باید $1415 = 8585 - 10000$ آمین زن را به دست آوریم. پس اولین رقم سمت چپ برابر ۲ است. با ثابت گرفتن سه رقم بعدی که مربوط به تعداد افراد هم سن است، داریم:

۸۵ حالت \Rightarrow سن افراد هم سن \Rightarrow سن
چون $1415 = 85 \times 16 + 55 = 1360 + 55$

۲۰۰۱ سن \Rightarrow حالت ۸۵
:
:
:
۲۰۱۶ سن \Rightarrow حالت ۸۵
 \Rightarrow ۱۳۶۰ نفر

بنابراین ۱۴۱۵ آمین فرد کدی به صورت 2017 دارد و چون کد $1360 + 1 = 1361$ آمین فرد 201701 است. پس کد $1360 + 55 = 1415$ آمین فرد $201755 = 201755$ است. پس سن مورد انتظار برای ده هزارمین عضو مجموعه ۵۵ سال است.

۱۵۵۷؟ ابتدا تعداد فضای نمونه‌ای را به دست می‌آوریم:

$$n(S) = 6 \times 11 + 6 \times 6 = 102$$

کارت اول عدد فرد کارت اول عدد زوج

(توجه کنید که بعد از خارج کردن کارت اول دیگر آن را در کیسه قرار نمی‌دهیم). اگر کارت اول زوج باشد و کارت دومی که خارج می‌کنیم ۴ یا ۸ باشد، عدد مطلوب مضرب ۴ است. اما توجه کنید که ۴، ۸، ۱۲ امکان‌پذیر نیست. در این حالت $6 \times 3 - 3 = 15$ عدد به دست می‌آید. اگر عدد اول فرد باشد، عدد روی تاس تنها می‌تواند ۲ باشد و در این حالت عدد تکراری نداریم. در نتیجه در این حالت هم $6 \times 2 = 12$ حالت به دست می‌آید. در نتیجه $n(A) = 15 + 12 = 27$ و احتمال مطلوب برابر است با

$$P(A) = \frac{27}{102} = \frac{9}{34}$$

۱۵۵۸؟ اعداد مضرب ۹ که مکعب کامل باشند به صورت $(3k)^3$ هستند. چون عددهای سه و چهاررقمی را می‌خواهیم، پس

$$10^2 \leq (3k)^3 < 10^4 \Rightarrow \sqrt[3]{10^2} \leq 3k < \sqrt[3]{10^4} \Rightarrow 4/41 \leq 3k < 21$$

$$1/47 \leq k < 7 \Rightarrow 2 \leq k \leq 6$$

پس $6 - 1 = 5$ عدد با این ویژگی وجود دارد.

۱۵۵۹؟ ابتدا عدد x را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$x = 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n$$

عدد $15x$ هم به صورت زیر است:

$$15x = 2^{m+n} \times 3^{m+1} \times 5^{n+1}$$

اکنون بنابر فرض مسئله می‌توان نوشت

$$35 + (m+n+1)(m+1)(n+1) = (m+n+1)(m+2)(n+2)$$

۱۵۵۲؟ گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ زمانی نادرست است که $p \vee q$ درست و r نادرست باشد. $p \vee q$ زمانی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشند و این اتفاق در سه حالت رخ می‌دهد:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د

بنابراین فضای نمونه‌ای سه حالت دارد، یعنی $n(S) = 3$. در این سه حالت (جدول را ببینید) فقط یک حالت وجود دارد که q نادرست است، یعنی $n(A) = 1$. در نتیجه

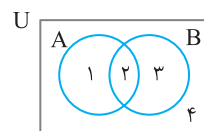
$$P(A) = \frac{1}{3}$$

توجه: می‌توانستیم با نوشتن جدول ارزش گزاره‌ها هم مسئله را حل کنیم:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

فضای نمونه‌ای

۱۵۵۳؟ برای مجموعه‌ها نمودار ون رسم می‌کنیم و ناحیه‌ها را عددگذاری می‌کنیم. با توجه به این نمودار، $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$



اکنون می‌توان نوشت

$$(A' \cap B') \cap C' = (A \cup B) \cap C' = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\} = \{2\} = A \cap B$$

۱۵۵۴؟ می‌توان ثابت کرد: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{k(n!)}{k!(n-k)!} = k \binom{n}{k}$$

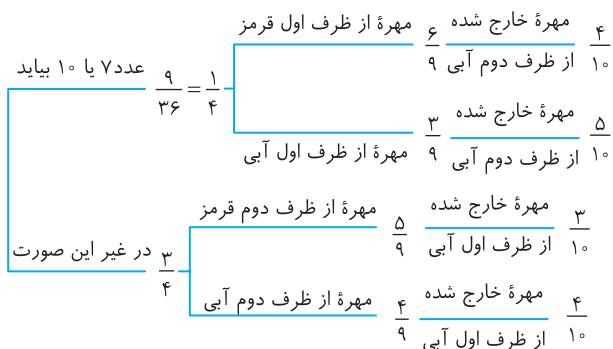
اکنون می‌توان نوشت

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1} \right] = n 2^{n-1}$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n-1$ عضوی

۱۵۶۳ ۲ از نمودار درختی زیر استفاده می‌کنیم:



اکنون بنابر قانون احتمال کل به‌دست می‌آید

$$P = \frac{1 \times 6 \times 4 + 1 \times 3 \times 5 + 3 \times 5 \times 3 + 3 \times 4 \times 4}{4 \times 9 \times 10} = \frac{24 + 15 + 45 + 48}{4 \times 9 \times 10} = \frac{132}{360} = \frac{11}{30}$$

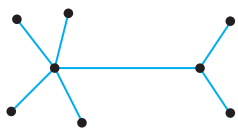
۱۵۶۴ ۴ ابتدا تعداد جواب‌های طبیعی هریک از دو معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{8}{2} = 28$$

$$x_4 + x_5 = 7 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{6}{1} = 6$$

اکنون بنابر اصل ضرب، تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه معادلات برابر است با

$$28 \times 6 = 168$$



۱۵۶۵ ۱ توجه کنید که درخت یک

گراف همبند فاقد دور است و با شرایط داده شده گراف را به‌صورت مقابل رسم می‌کنیم. در این گراف هیچ رأس درجه ۲ وجود ندارد.

۱۵۶۶ ۱ مربع لاتین داده شده را به‌صورت زیر کامل می‌کنیم:

	۲	۴	۳	۵	۱
b=۵	۳	۱	۴	۲	
	۴	۲	۵	۱	۳
	۳	۱	۴	۲	۵
	۱	۵	۲	۳	a=۴

۱۵۶۷ ۲ با انتخاب مجموعه {۱۴, ۱۵, ۱۶} یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم

به‌دست می‌آید و عدد احاطه‌گری برابر ۳ است.

با ساده کردن این برابری به‌دست می‌آید

$$(m+n)^2 + 4(m+n) - 32 = 0 \Rightarrow m+n = -8, m+n = 4$$

چون x عددی صحیح است، $m+n = -8$ قابل قبول نیست. بنابراین $m+n = 4$.
در نتیجه

$$x_{\min} = 2^4 \times 3^4 = 1296 \Rightarrow m=4, n=0 \Rightarrow \text{کوچک‌ترین مقدار } x$$

$$x_{\max} = 2^4 \times 5^4 = 62500 \Rightarrow m=0, n=4 \Rightarrow \text{بزرگ‌ترین مقدار } x$$

در نهایت به‌دست می‌آید

$$x_{\max} - x_{\min} = 62500 - 1296 = 61204$$

۱۵۶۰ ۲ می‌دانیم $10^5 \equiv 1, 10^4 \equiv 1, 10^3 \equiv 1, 10^2 \equiv 1, 10 \equiv 1, 1 \equiv 1$.

چون $abaaba = a \times 10^5 + b \times 10^4 + a \times 10^3 + a \times 10^2 + b \times 10 + a$ بنا بر این عدد $abaaba$ همواره بر ۱۱ بخش‌پذیر است:

$$\overline{abaaba} \equiv -a + b - a + a - b + a \equiv 0$$

همچنین $10^5 \equiv 0, 10^4 \equiv 0, 10^3 \equiv 0, 10^2 \equiv 4, 10 \equiv 2$. پس بخش‌پذیری آن بر ۸ را بررسی می‌کنیم:

$$\overline{abaaba} \equiv 4a + 2b + a \equiv 5a + 2b \equiv 0 \Rightarrow 2b \equiv -5a + 8a \Rightarrow 2b \equiv 3a$$

a زوج است، بنابراین

$$a=2 \Rightarrow b \equiv 3 \Rightarrow b=3, 7 \Rightarrow 232232, 272272$$

$$a=4 \Rightarrow b \equiv 2 \Rightarrow b=2, 6 \Rightarrow 424424, 464464$$

$$a=6 \Rightarrow b \equiv 1 \Rightarrow b=1, 5, 9 \Rightarrow 616616, 656656, 696696$$

$$a=8 \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow b=0, 4, 8 \Rightarrow 808808, 848848, 888888$$

پس تعداد عددهای مورد نظر برابر ۱۰ است.

۱۵۶۱ ۳ بنابر الگوریتم تقسیم

$$a = 13q + r, \quad 0 \leq r < 13, \quad q + r = 17$$

$$a = 13(17-r) + r = 221 - 12r \quad q = 17 - r$$

بنابر فرض،

$$a - 8 \equiv 21 \Rightarrow 221 - 12r - 8 \equiv 21 \Rightarrow 12r \equiv 192 \Rightarrow r \equiv 16 \Rightarrow r \equiv 1$$

به ازای $r=1, 4, 7, 10$ این رابطه برقرار است. پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{4}{13}$ است.

۱۵۶۲ ۴ کوچک‌ترین مقدار m که به ازای آن $m!$ بر 30 بخش‌پذیر است عدد

۵ است. پس باید باقی‌مانده 5^{332} را بر 31 به‌دست آوریم. بنابر قضیه فرما اگر p

عددی اول باشد و $(a, p) = 1$. آن‌گاه $a^{p-1} \equiv 1$. در نتیجه

$$\left. \begin{aligned} 5^{30} &\equiv 1 \Rightarrow (5^{30})^{11} \equiv 1 \Rightarrow 5^{330} \equiv 1 \\ &\Rightarrow 5^{332} \equiv 25 \\ 5^2 &\equiv 25 \end{aligned} \right\}$$

توجه کنید که می‌توان باقی‌مانده 5^{332} بر 31 را بدون قضیه فرما هم به‌دست آورد:

$$5^3 \equiv 1 \Rightarrow (5^3)^{110} \equiv 1 \Rightarrow 5^{330} \equiv 1 \Rightarrow 5^2 \times 5^{330} \equiv 25 \Rightarrow 5^{332} \equiv 25$$