آزمون ۷۷

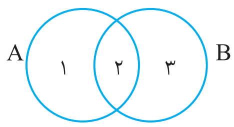
۱- گزینهٔ ۱ می‌توان از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده کرد:

p	q	r	$q\vee r$	$p\Rightarrow(q\vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د

فضای نمونه‌ای

در هفت مورد گزارهٔ $p\Rightarrow(q\vee r)$ درست است، پس $n(S)=۷$. در سه مورد از این هفت مورد r نادرست است. پس احتمال مطلوب برابر است با $\frac{۳}{۷}$.

۲- گزینهٔ ۱ چون $U=A\cup B$، نمودار ون مسئله به‌صورت زیر است. در این نمودار ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم. بنابراین



$$A=\{۱,۲\},\quad B=\{۲,۳\}$$
$$U=\{۱,۲,۳\},\ C=\{۱,۳\}$$

پس

$$A'-B=\{۳\}-\{۲,۳\}=\varnothing$$
$$(A'-B)'\cap C=\{۱,۲,۳\}\cap\{۱,۳\}=\{۱,۳\}$$
$$((A'-B)'\cap C)'=\{۲\}$$

طبق فرض $((A'-B)'\cap C)'=B$. بنابراین $\{۲,۳\}=\{۲\}$، پس ناحیهٔ ۳ تهی است. در نتیجه $B=\{۲\}$ و بنابراین $B\subseteq A$.

۳- گزینهٔ ۳ ابتدا $۲۰!$ را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$۲۰!=۱\times۲\times۳\times\cdots\times۲۰$$
$$=۲\times۳\times۲^۲\times۵\times(۲\times۳)\times۷\times۲^۳\times۳^۲\times(۲\times۵)\times۱۱\times(۲^۲\times۳)\times۱۳$$
$$\times(۲\times۷)\times(۳\times۵)\times۲^۴\times۱۷\times(۲\times۳^۲)\times۱۹\times(۲^۲\times۵)$$
$$=۲^{۱۸}\times۳^۸\times۵^۴\times۷^۲\times۱۱^۱\times۱۳^۱\times۱۷^۱\times۱۹^۱$$

اکنون به‌دست می‌آید

$$\sum_{i=۱}^{\infty}a_i=۱۸+۸+۴+۲+۱+۱+۱+۱=۳۶$$

می‌توان از نکتهٔ زیر مسئله را حل کرد:

نکته: تعداد عوامل عدد اول p در عدد $n!$ را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^۲}\right]+\left[\frac{n}{p^۳}\right]+\cdots$$

۴- گزینهٔ ۳ چون تعداد داده‌ها ۲۲ تا است، پس میانه $(Q_۲)$ میانگین دو دادهٔ یازدهم و دوازدهم است. اگر $a<۱۳$، آن‌گاه داده‌های یازدهم و دوازدهم برابر ۱۳ هستند. در این صورت میانه برابر $\frac{۱۳+۱۳}{۲}=۱۳$ خواهد بود. اما مقدار میانه ۱۳/۵ است. پس $a>۱۳$. بنابراین، چارک اول $(Q_۱)$ که میانهٔ یازده دادهٔ اول، یعنی دادهٔ ششم است برابر ۱۳ خواهد بود: $Q_۱=۱۳$.

چون $Q_۳-Q_۱=۱۷$، پس $Q_۳=۱۷+۱۳=۳۰$. در نتیجه $a=۳۰$. اکنون $\bar{x}$ و از روی آن $\sigma^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{x}=\frac{۳\times۱۱+۲\times۱۲+۶\times۱۳+۳\times۱۴+۲\times۲۸+۵\times۳۱+۱\times۳۰}{۲۲}=۱۹$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{۷}f_i(x_i-\bar{x})^۲}{\sum_{i=۱}^{۷}f_i}=\frac{۳(۱۱-۱۹)^۲+۲(۱۲-۱۹)^۲+۶(۱۳-۱۹)^۲}{۲۲}$$
$$+\frac{۳(۱۴-۱۹)^۲+۲(۲۸-۱۹)^۲+۵(۳۱-۱۹)^۲+(۳۰-۱۹)^۲}{۲۲}=۷۲$$

با توجه به اینکه با افزودن یک مقدار ثابت به همهٔ داده‌ها مقدار واریانس تغییر نمی‌کند پس با افزودن ۴ واحد به همهٔ داده‌ها مقدار واریانس همچنان ۷۲ باقی می‌ماند.

۵- گزینهٔ ۳ داده‌ها به صورت زیر هستند:

پایهٔ تحصیلی $\downarrow$ ۱۲ حالت — سن $\downarrow$ ۱۲ حالت — جنسیت $\downarrow$ ۲ حالت

اکنون دادهٔ صدم را به‌دست می‌آوریم:

۱۰۷ $\square$ $\Rightarrow$ ۱۲ حالت
۱۰۸ $\square$ $\Rightarrow$ ۱۲ حالت
$\vdots$
۱۱۴ $\square$ $\Rightarrow$ ۱۲ حالت

$\Rightarrow ۸\times۱۲=۹۶$ عدد

عدد ۱۰۰	عدد ۹۹	عدد ۹۸	عدد ۹۷
$\underbrace{۱۱۵۰۴}$	۱۱۵۰۳	۱۱۵۰۲	۱۱۵۰۱

سن صدمین عضو برابر ۱۵ است.

۶- گزینهٔ ؟ طبق اصل ضرب، کارت اول و دوم را به $۲۱\times۲۰=۴۲۰$ طریق از کیسه بیرون می‌آوریم. اعداد روی کارت را به‌ترتیب در کنار هم قرار می‌دهیم و عدد به وجود آمده را در مجموعهٔ A قرار می‌دهیم. تعدادی از این اعداد دو بار تکرار می‌شوند. به‌عنوان مثال عدد ۱۲۱ یک بار با بیرون آمدن ۱۲ به عنوان کارت اول و ۱ به عنوان کارت دوم و بار دیگر با بیرون آمدن ۱ به عنوان کارت اول و ۲۱ به عنوان کارت دوم تولید می‌شود. همهٔ اعداد تکراری در A به‌صورت زیر هستند:

۱۱۱ ۲۱۱
۱۱۲ ۲۱۲
$\vdots$ $\vdots$
۱۱۹ $\underbrace{۲۱۹}_{۹\ \text{تا}}$
$\underbrace{۱۲۱}_{۱۰\ \text{تا}}$

حالت‌های تکراری

در نتیجه $n(A)=۴۲۰-۱۹=۴۰۱$. اکنون باید عددهایی را به‌دست آوریم که مضرب ۶ هستند (مجموعهٔ B). برای مشخص کردن تعداد عددهای مضرب ۶ اعداد ۱ تا ۲۱ را به ۳ دسته افراز می‌کنیم:

$$x=۳k\Rightarrow ۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸,۲۱$$
$$x=۳k+۱\Rightarrow ۱,۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹$$
$$x=۳k+۲\Rightarrow ۲,۵,۸,۱۱,۱۴,۱۷,۲۰$$

برای اینکه عدد ساخته شده که از کنار هم قرار دادن دو کارت خارج شده به‌دست می‌آید مضرب ۶ باشد باید آن عدد زوج باشد و بر ۳ بخش‌پذیر باشد. در نتیجه کارت‌ها به‌صورت زیر است

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{3k}\ \overset{\text{زوج}}{\boxed{3k}} \Rightarrow 6\times 3 \\ \boxed{3k+1}\ \overset{\text{زوج}}{\boxed{3k+2}} \Rightarrow 7\times 4 \\ \boxed{3k+2}\ \overset{\text{زوج}}{\boxed{3k+1}} \Rightarrow 7\times 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموع} = 18+28+21=67$$

در این حالت هم دو عدد ۱۱۴ و ۲۱۶ دو بار تکرار می‌شوند. بنابراین

$$n(B)=67-2=65$$

در نتیجه $P(B)=\frac{n(B)}{n(A)}=\frac{65}{401}$. (دقت کنید که در این سؤال فضای نمونه‌ای با A نمایش داده شده است.)

۷- گزینهٔ ۲ عددهای مضرب $18=2\times 3^2$ که مربع کامل هستند به فرم $(6k)^2$ هستند.

$$10^4 \le (6k)^2 < 10^5 \Rightarrow 100 \le 6k < 100\sqrt{10} \Rightarrow 100 \le 6k < 316$$

$$17 \le k \le 52$$

بنابراین برای k، $52-16=36$ مقدار به‌دست می‌آید.

۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر عددی را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کنیم و حاصل‌ضرب $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ به‌دست آید، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت این عدد برابر است با

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$$

در نتیجه

$$x \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت} = (m+1)(n+1)$$

چون $\frac{x}{40}=\frac{2^m\times 5^n}{2^3\times 5}=2^{m-3}\times 5^{n-1}$ ، $(m\ge 3, n\ge 1)$ پس

$$\frac{x}{40} \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت} = (m-2)n$$

اکنون بنابر فرض می‌نویسیم

$$(m+1)(n+1)-(m-2)n=12 \Rightarrow m+3n=11$$

چون حداقل مقدار x مد نظر است، پس

$$m=5, n=2 \Rightarrow x=2^5\times 5^2=800$$

۹- گزینهٔ ۳ چون $\overline{aba}$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، پس

$$\overline{aba} \overset{12}{\equiv} 0 \Rightarrow 100a+10b+a \overset{12}{\equiv} 0 \Rightarrow 101a+10b \overset{12}{\equiv} 0$$

$$\xrightarrow{101\overset{12}{\equiv}5} 5a+10b \overset{12}{\equiv} 0 \xrightarrow{\div 5} a+2b \overset{12}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -2b$$

اکنون با توجه به اینکه a رقمی زوج و غیرصفر است، می‌توان نوشت

$$b=1 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -2 \ ✗$$

$$b=2 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -4 \Rightarrow a=8 \to 828$$

$$b=3 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -6 \Rightarrow a=6 \to 636$$

$$b=4 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -8 \Rightarrow a=4 \to 444$$

$$b=5 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -10 \Rightarrow a=2 \to 252 \text{ کوچک‌ترین عدد}$$

$$b=6 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -12 \ ✗$$

$$b=7 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -14 \ ✗$$

$$b=8 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -16 \Rightarrow a=8 \to 888 \text{ بزرگ‌ترین عدد}$$

$$b=9 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -18 \overset{12}{\equiv} 6 \Rightarrow a=6 \to 696$$

در نتیجه میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه رقمی به‌صورت $\overline{aba}$ برابر $\frac{888+252}{2}=570$ است.

۱۰- گزینهٔ ۲ بنابر الگوریتم تقسیم،

$$\left.\begin{array}{l} a=11q+r \\ q=r+3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=11(r+3)+r=12r+33 \Rightarrow 0\le r<11 \Rightarrow n(S)=11$$

اکنون به‌دست می‌آید

$$a-9=12r+24 \overset{24}{\equiv} 0 \Rightarrow 12r \overset{24}{\equiv} 0 \xrightarrow{\div 12} r \overset{2}{\equiv} 0$$

یعنی r باید زوج باشد. در نتیجه $n(A)=6$. در نهایت به‌دست می‌آید $P(A)=\frac{6}{11}$

۱۱- گزینهٔ ۳ اگر عدد $n!$ بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه کمترین مقدار ممکن برای n عدد ۶ است. پس $10-m\ge 6 \Rightarrow 4\ge m$

یعنی بزرگ‌ترین عدد طبیعی m برابر ۴ است. در نتیجه باید باقی‌ماندهٔ 4^{123} بر ۱۵ را به‌دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} 4^2 \overset{15}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان } 61} (4^2)^{61} \overset{15}{\equiv} 1 \Rightarrow 4^{122} \overset{15}{\equiv} 1 \\ 4 \overset{15}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین}} 4^{123} \overset{15}{\equiv} 4$$

۱۲- گزینهٔ ۳ از اطلاعات مسئله نمودار درختی زیر به‌دست می‌آید

- $\frac{1}{6}$ مجموع دو تاس >9
  - $\frac{3}{9}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف اول آبی باشد
    - $\frac{5}{10}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم قرمز باشد
  - $\frac{6}{9}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف اول قرمز باشد
    - $\frac{6}{10}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم قرمز باشد
- $\frac{5}{6}$ مجموع دو تاس ≤ 9
  - $\frac{4}{9}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم آبی باشد
    - $\frac{6}{10}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف اول قرمز باشد
  - $\frac{5}{9}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم قرمز باشد
    - $\frac{7}{10}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف اول قرمز باشد

اکنون بنابر قانون احتمال کل به‌دست می‌آید

$$P=\frac{1\times 3\times 5+1\times 6\times 6+5\times 4\times 6+5\times 5\times 7}{6\times 9\times 10}=\frac{346}{6\times 9\times 10}=\frac{173}{270}$$

۱۳- گزینهٔ ۴ چون جواب‌های معادلهٔ داده شده صحیح نامنفی است، پس $x_۴$ باید مقسوم‌علیه عدد ۱۰ باشد:

$$x_۴=۱ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۱۰$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}=\binom{۱۲}{۲}=۶۶$$

$$x_۴=۲ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۵$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

$$x_۴=۵ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۲$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}=\binom{۴}{۲}=۶$$

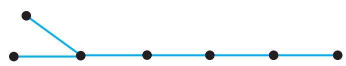
$$x_۴=۱۰ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۱$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}=\binom{۳}{۲}=۳$$

در نتیجه بنابر اصل جمع،

$$\text{تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی}=۶۶+۲۱+۶+۳=۹۶$$

۱۴- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در هر گراف همبند از مرتبهٔ p و اندازهٔ q، $q \geq p-۱$. پس در هر گراف همبند از مرتبهٔ ۷، $q \geq ۷-۱=۶$. گراف زیر مثالی از یک گراف همبند مرتبهٔ ۷ با اندازهٔ ۶ و $\Delta=۳$ است. بنابراین پاسخ عدد ۶ است.



۱۵- گزینهٔ ۴ چون در ستون دوم عددهای ۱، ۲ و ۳ وجود دارد، پس گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند. از طرف دیگر ستون چهارم این مربع لاتین به صورت $\begin{array}{|c|}\hline ۵\\ ۴\\ ۱\\ ۲\\ ۳\\ \hline\end{array}$ است و چون عدد ۳ با b هم‌سطر هستند، بنابراین $b \neq ۳$. در نتیجه گزینهٔ (۱) هم نمی‌تواند درست باشد. پس گزینهٔ (۴) درست است. این مربع لاتین به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

۲	۴	۳	۵	۱
۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	۴

۱۶- گزینهٔ ۲و۴ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱) رأس g را احاطه نمی‌کند.

گزینهٔ (۲) این مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

گزینهٔ (۳) رأس‌های e و g را احاطه نمی‌کند.

گزینهٔ (۴) این مجموعه احاطه‌گر است و با حذف هر عضو، دیگر احاطه‌گر نیست. بنابراین مینیمال نیز هست.

آزمون ۷۸

۱۷- گزینهٔ ۲ گزارهٔ $(p\vee q)\Rightarrow r$ زمانی نادرست است که $p\vee q$ درست و r نادرست باشد. $p\vee q$ زمانی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشند و این اتفاق در سه حالت رخ می‌دهد:

p	q	$p\vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د

بنابراین فضای نمونه‌ای سه حالت دارد، یعنی $n(S)=۳$. در این سه حالت (جدول را ببینید) فقط یک حالت وجود دارد که q نادرست است، یعنی $n(A)=۱$. در نتیجه $P(A)=\frac{۱}{۳}$.

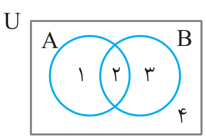
توجه: می‌توانستیم با نوشتن جدول ارزش گزاره‌ها هم مسئله را حل کنیم:

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

فضای نمونه‌ای

۱۸- گزینهٔ ۱ برای مجموعه‌ها نمودار ون رسم می‌کنیم و ناحیه‌ها را عددگذاری می‌کنیم. با توجه به این نمودار،

$$A=\{۱,۲\},\quad B=\{۲,۳\},\quad C=\{۱,۳\}$$



اکنون می‌توان نوشت

$$(A'\cap B')'\cap C'=(A\cup B)\cap C'=\{۱,۲,۳\}\cap\{۲,۴\}=\{۲\}=A\cap B$$

۱۹- گزینهٔ ۱ می‌توان ثابت کرد $k\binom{n}{k}=n\binom{n-۱}{k-۱}$:

$$n\binom{n-۱}{k-۱}=n\times\frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-۱)!(n-k)!}$$

$$=\frac{k(n!)}{k!(n-k)!}=k\binom{n}{k}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\sum_{k=۱}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=۱}^{n}n\binom{n-۱}{k-۱}=n\sum_{k=۱}^{n}\binom{n-۱}{k-۱}$$

$$=n\underbrace{\left[\binom{n-۱}{۰}+\binom{n-۱}{۱}+\cdots+\binom{n-۱}{n-۱}\right]}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ } n-۱ \text{ عضوی}}=n۲^{n-۱}$$

۲۰- گزینۀ «؟» این تست نادرست است. چون برای a مقدار منحصربه‌فردی به‌دست نمی‌آید و به ازای هر $a<13$ میانه برابر ۱۳ است.

۲۱- گزینۀ «۴» بنابر اصل جمع تعداد کل مردها برابر است با

$$1\times101\times85=8585$$

$$\underbrace{1}_{\text{جنسیت}}\times\underbrace{101}_{\text{افراد هم‌سن}}\times\underbrace{85}_{\text{سن}}=8585$$

برای پیدا کردن نفر ده هزارم باید $10000-8585=1415$ اُمین زن را به‌دست آوریم. پس اولین رقم سمت چپ برابر ۲ است. با ثابت گرفتن سه رقم بعدی که مربوط به تعداد افراد هم‌سن است، داریم:

$$2\ \underbrace{\_\,\_\,\_}_{\text{افراد هم‌سن}}\ \underbrace{\bigcirc}_{\text{سن}}\Rightarrow 85\ \text{حالت}$$

چون $1415=85\times16+55=1360+55$ و

$$\left.\begin{array}{l}2001\underbrace{\bigcirc}_{\text{سن}}\Rightarrow 85\ \text{حالت}\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\\ 2016\underbrace{\bigcirc}_{\text{سن}}\Rightarrow 85\ \text{حالت}\end{array}\right\}\Rightarrow 1360\ \text{نفر}$$

بنابراین ۱۴۱۵ اُمین فرد کدی به صورت $2017\bigcirc$ دارد و چون $1361=1360+1$ اُمین فرد $2017(01)$ است، پس کد $1415=1360+55$ اُمین فرد $201755=2017(55)$ است. پس سن مورد انتظار برای ده هزارمین عضو مجموعه ۵۵ سال است.

۲۲- گزینۀ «۱» ابتدا تعداد فضای نمونه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$n(S)=\underset{\text{کارت اول عدد زوج}}{\underset{\downarrow}{6}}\times11+\underset{\text{کارت اول عدد فرد}}{\underset{\downarrow}{6}}\times6=102$$

(توجه کنید که بعد از خارج کردن کارت اول دیگر آن را در کیسه قرار نمی‌دهیم). اگر کارت اول زوج باشد و کارت دومی که خارج می‌کنیم ۴، ۸ یا ۱۲ باشد، عدد مطلوب مضرب ۴ است. اما توجه کنید که ۴۴، ۸۸ و ۱۲۱۲ امکان‌پذیر نیست. در این حالت $6\times3-3=15$ عدد به‌دست می‌آید. اگر عدد اول فرد باشد، عدد روی تاس تنها می‌تواند ۲ و ۶ باشد و در این حالت عدد تکراری نداریم. در نتیجه در این حالت هم $6\times2=12$ حالت به‌دست می‌آید.
در نتیجه $n(A)=15+12=27$ و احتمال مطلوب برابر است با

$$P(A)=\frac{27}{102}=\frac{9}{34}$$

۲۳- گزینۀ «۲» اعداد مضرب ۹ که مکعب کامل باشند به‌صورت $(3k)^3$ هستند. چون عددهای سه و چهاررقمی را می‌خواهیم، پس

$$10^2\le(3k)^3<10^4\Rightarrow\sqrt[3]{10^2}\le3k<\sqrt[3]{10^4}\Rightarrow4/41\le3k<21$$

$$1/47\le k<7\Rightarrow2\le k\le6$$

پس $6-1=5$ عدد با این ویژگی وجود دارد.

۲۴- گزینۀ «۴» ابتدا عدد x را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$x=2^{m+n}\times3^m\times5^n$$

عدد $15x$ هم به صورت زیر است:

$$15x=2^{m+n}\times3^{m+1}\times5^{n+1}$$

اکنون بنابر فرض مسئله می‌توان نوشت

$$35+(m+n+1)(m+1)(n+1)=(m+n+1)(m+2)(n+2)$$

با ساده کردن این برابری به‌دست می‌آید

$$(m+n)^2+4(m+n)-32=0\Rightarrow m+n=-8\ ,\ m+n=4$$

چون x عددی صحیح است، $m+n=-8$ قابل قبول نیست. بنابراین $m+n=4$. در نتیجه

$$\text{کوچک‌ترین مقدار x}\Rightarrow m=4\,,\,n=0\Rightarrow x_{min}=2^4\times3^4$$

$$\text{بزرگ‌ترین مقدار x}\Rightarrow m=0\,,\,n=4\Rightarrow x_{max}=2^4\times5^4$$

در نهایت به‌دست می‌آید

$$x_{max}-x_{min}=2^4(5^4-3^4)=16\times544=8704$$

۲۵- گزینۀ «؟» می‌دانیم $10\overset{11}{\equiv}-1$، $10^2\overset{11}{\equiv}1$، $10^3\overset{11}{\equiv}-1$، $10^4\overset{11}{\equiv}1$ و $10^5\overset{11}{\equiv}-1$.

چون $\overline{abaaba}=a\times10^5+b\times10^4+a\times10^3+a\times10^2+b\times10+a$، بنابراین عدد $\overline{abaaba}$ همواره بر ۱۱ بخش‌پذیر است:

$$\overline{abaaba}\overset{11}{\equiv}-a+b-a+a-b+a\overset{11}{\equiv}0$$

همچنین $10\overset{8}{\equiv}2$، $10^2\overset{8}{\equiv}4$، $10^3\overset{8}{\equiv}0$ و $10^4\overset{8}{\equiv}0$، $10^5\overset{8}{\equiv}0$، پس بخش‌پذیری آن بر ۸ را بررسی می‌کنیم:

$$\overline{abaaba}\overset{8}{\equiv}4a+2b+a\overset{8}{\equiv}5a+2b\overset{8}{\equiv}0\Rightarrow2b\overset{8}{\equiv}-5a+8a\Rightarrow2b\overset{8}{\equiv}3a$$

a زوج است، بنابراین

$$a=2\Rightarrow b\overset{4}{\equiv}3\Rightarrow b=3,7\Rightarrow232232\,,\,272272$$

$$a=4\Rightarrow b\overset{4}{\equiv}2\Rightarrow b=2,6\Rightarrow424424\,,\,464464$$

$$a=6\Rightarrow b\overset{4}{\equiv}1\Rightarrow b=1,5,9\Rightarrow616616,656656,696696$$

$$a=8\Rightarrow b\overset{4}{\equiv}0\Rightarrow b=0,4,8\Rightarrow808808\,,\,848848\,,\,888888$$

پس تعداد عددهای مورد نظر برابر ۱۰ است.

۲۶- گزینۀ «۳» بنابر الگوریتم تقسیم

$$a=13q+r,\quad 0\le r<13,\quad q+r=17$$

قرار می‌دهیم $q=17-r$: $a=13(17-r)+r=221-12r$

بنابر فرض،

$$a-8\overset{36}{\equiv}21\Rightarrow221-12r-8\overset{36}{\equiv}21\Rightarrow12r\overset{36}{\equiv}192\Rightarrow r\overset{3}{\equiv}16\Rightarrow r\overset{3}{\equiv}1$$

به ازای $r=1,4,7,10$ این رابطه برقرار است. پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{4}{13}$ است.

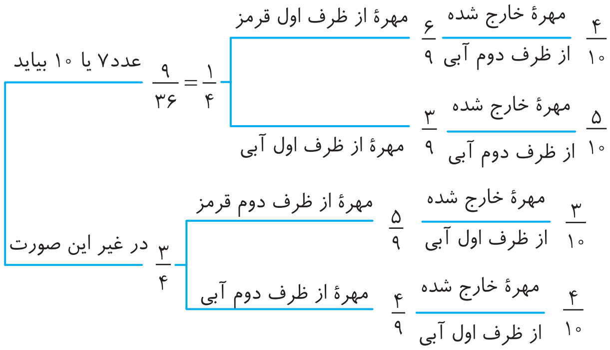
۲۷- گزینۀ «۴» کوچک‌ترین مقدار m که به ازای آن $m!$ بر ۳۰ بخش‌پذیر است عدد ۵ است. پس باید باقی‌ماندۀ 5^{332} را بر ۳۱ به‌دست آوریم. بنابر قضیۀ فرما اگر p عددی اول باشد و $(a,p)=1$، آن‌گاه $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$. در نتیجه

$$\left.\begin{array}{l}5^{30}\overset{31}{\equiv}1\Rightarrow(5^{30})^{11}\overset{31}{\equiv}1\Rightarrow5^{330}\overset{31}{\equiv}1\\ 5^2\overset{31}{\equiv}25\end{array}\right\}\Rightarrow5^{332}\overset{31}{\equiv}25$$

توجه کنید که می‌توان باقی‌ماندۀ 5^{332} بر ۳۱ را بدون قضیۀ فرما هم به‌دست آورد:

$$5^3\overset{31}{\equiv}1\Rightarrow(5^3)^{110}\overset{31}{\equiv}1\Rightarrow5^{330}\overset{31}{\equiv}1\Rightarrow5^2\times5^{330}\overset{31}{\equiv}25\Rightarrow5^{332}\overset{31}{\equiv}25$$

۲۸- گزینهٔ ۲ از نمودار درختی زیر استفاده می‌کنیم:



اکنون بنابر قانون احتمال کل به‌دست می‌آید

$$P=\frac{۱\times۶\times۴+۱\times۳\times۵+۳\times۵\times۳+۳\times۴\times۴}{۴\times۹\times۱۰}=\frac{۲۴+۱۵+۴۵+۴۸}{۴\times۹\times۱۰}$$

$$=\frac{۱۳۲}{۴\times۹\times۱۰}=\frac{۱۱}{۳۰}$$

۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا تعداد جواب‌های طبیعی هریک از دو معادله را به‌دست می‌آوریم:

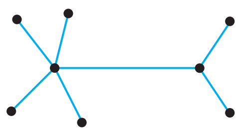
$$x_۱+x_۲+x_۳=۹\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{۸}{۲}=۲۸$$

$$x_۴+x_۵=۷\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{۶}{۱}=۶$$

اکنون بنابر اصل ضرب، تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه معادلات برابر است با

$$۲۸\times۶=۱۶۸$$

۳۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که درخت یک گراف همبند فاقد دور است و با شرایط داده شده گراف را به‌صورت مقابل رسم می‌کنیم. در این گراف هیچ رأس درجهٔ ۲ وجود ندارد.



۳۱- گزینهٔ ۱ مربع لاتین داده شده را به‌صورت زیر کامل می‌کنیم:

۱	۵	۳	۴	۲
۲	۴	۱	۳	$b=۵$
۳	۱	۵	۲	۴
۵	۲	۴	۱	۳
$a=۴$	۳	۲	۵	۱

۳۲- گزینهٔ ۲ با انتخاب مجموعهٔ $\{۱۴,۱۵,۱۶\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به‌دست می‌آید و عدد احاطه‌گری برابر ۳ است.