ضمیمه ۱ کاربرد ریاضی در فیزیک

بخش اول: مفاهیم اولیه بردار

هر شخصی در درک مسائل فیزیک به ریاضیات برداری نیاز مبرم دارد. از طرفی باید با نوع کمیت فیزیکی که با آن سروکار دارد نیز آشنا باشد.

کمیت برداری

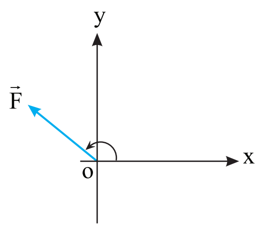
تعریف **کمیتی که علاوه بر بزرگی، دارای جهت (راستا و سو) است و از قاعده‌های جمع برداری پیروی می‌کند را کمیت برداری گویند.**

مانند مکان، جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، میدان گرانشی، میدان الکتریکی و . . . یک کمیت برداری را با نمادی مانند $\vec{F}$ نمایش می‌دهند.

بزرگی یا اندازهٔ بردار

بزرگی هر بردار یک عدد مثبت است که بیانگر اندازهٔ (مقدار) آن کمیت برداری است. هرگاه یک کمیت برداری را با یک پیکان نمایش دهیم، بزرگی کمیت برداری، متناسب با طول پیکان است. بزرگی یک بردار مانند $\vec{F}$ را با یکی از نمادهای F یا $|\vec{F}|$ نمایش می‌دهند.

جهت بردار



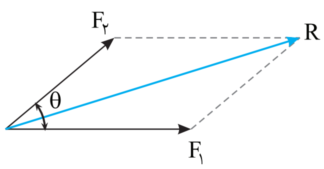
جهت هر بردار دارای دو مشخصه است: راستا و سو

هر راستای معین دارای دو سوی مخالف است. برای نمونه برداری که در امتداد شمال و جنوب است دارای دو سو، یکی رو به شمال و دیگری رو به جنوب است.

برای بیان جهت یک بردار که در صفحهٔ xoy واقع است، قرارداد زیر را به کار می‌بریم:

«جهت هر بردار، زاویه‌ای است که آن بردار با جهت مثبت محور ox، در سوی مثلثاتی (پادساعتگرد) می‌سازد.»

برایند دو بردار



بردار برایند دو بردار، قطر متوازی‌الاضلاعی است که بر دو بردار ساخته می‌شود. اگر زاویهٔ بین دو بردار را θ بنامیم، آن‌گاه:

$$R^۲ = F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲F_۱F_۲ \cos\theta$$

چنان‌چه $F_۱ = F_۲$ باشد:

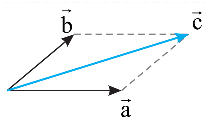
$$R^۲ = F_۱^۲ + F_۱^۲ + ۲F_۱^۲ \cos\theta \Rightarrow R^۲ = ۲F_۱^۲(۱+\cos\theta)$$

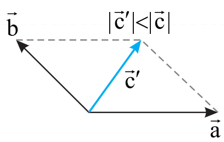
$$R^۲ = ۲F_۱^۲(۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}) \Rightarrow R = ۲F_۱\cos\frac{\theta}{۲}$$

پرسش

اگر زاویهٔ بین دو بردار افزایش یابد، بزرگی برایند آن‌ها چه تغییری می‌کند؟

پاسخ همواره کاهش می‌یابد (به شکل‌های روبه‌رو دقت کنید).





پرسش

برایند دو بردار در چه صورتی صفر می‌شود؟

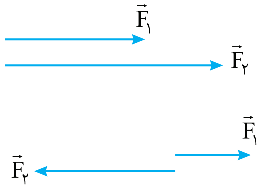
پاسخ در صورتی که بزرگی آن دو برابر و در خلاف جهت هم باشند.

نتیجه برایند دو بردار که با هم زاویه‌ای غیر از ۱۸۰ درجه بسازند، هرگز صفر نمی‌شود.

پرسش

بزرگی برایند دو بردار در چه صورتی بیشینه و در چه صورتی کمینه است؟

پاسخ بزرگی برایند دو بردار در صورتی بیشینه است که دو بردار هم‌جهت باشند و در صورتی کمینه است که دو بردار در خلاف جهت هم باشند.



$F=F_1+F_2$

$F=|F_2-F_1|$

نتیجه بزرگی برایند دو بردار بین مقدارهای روبه‌رو است: $|F_1-F_2|\le R\le F_1+F_2$

تست ۱ **بزرگی دو بردار ۴ واحد و ۳ واحد است. بزرگی برایند آن دو چند واحد می‌تواند باشد؟**

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) هر سه گزینه درست هستند.

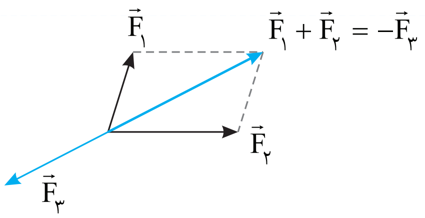
پاسخ هر سه مقدار، بین $|۴-۳|\le R\le ۳+۴$ است، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

پرسش

در چه صورتی برایند سه بردار صفر می‌شود؟

پاسخ هرگاه بزرگی هر یک از آن‌ها، برابر بزرگی برایند دو بردار دیگر و در خلاف جهت آن باشد.

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=۰\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_2=-\vec{F}_3$$

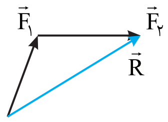


نتیجه برایند n بردار در صورتی صفر می‌شود که برایند $n-۱$ بردار دلخواه از آن‌ها هم‌اندازهٔ بردار n ام و در خلاف جهت آن باشد.

برایند بردارها به روش مثلث (روش چندضلعی)

در این روش هر بردار از انتهای بردار قبلی رسم می‌شود. بردار R که در شکل رنگی نشان داده شده، بردار برایند است.

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$$



نتیجه هرگاه برایند سه بردار صفر شود، تشکیل یک مثلث می‌دهند و بزرگی هر یک از بردارها از مجموع بزرگی دو بردار دیگر کمتر و از تفاضل بزرگی آن دو بیشتر است.

تست ۲ **متحرکی جابه‌جایی‌های $۳m$، $۴m$ و $۹m$ را انجام داده است. کدام گزینه نمی‌تواند برایند این سه بردار جابه‌جایی باشد؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸

پاسخ بیشینه بزرگی برایند سه بردار وقتی به‌دست می‌آید که آن سه بردار هم جهت باشند: $d_{max}=۹+۴+۳=۱۶$: این سه بردار تشکیل مثلث نمی‌دهند، پس کمینه بزرگی برایند آن‌ها نمی‌تواند صفر شود، بلکه کمینه بزرگی برایند این سه بردار در حالتی است که بردارهای به طول ۳ و ۴ هم‌جهت و در خلاف جهت بردار به طول ۹ باشد. $d_{min}=۹-(۴+۳)=۲$ در این‌صورت $۲\le d\le ۱۶$ است و بردار به طول ۱، در گزینهٔ (۲) نمی‌تواند برایند این سه بردار باشد.
بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

تست ۳ **کمینه و بیشینهٔ جابه‌جایی متحرکی که جابه‌جایی‌ها به اندازهٔ $۴m$، $۹m$ و $۶m$ انجام داده است چند متر می‌باشد؟**

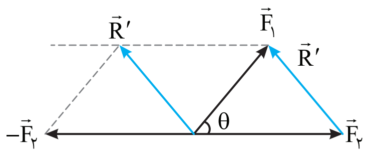
۱) ۱۹ و ۱ ۲) ۱۹ و صفر ۳) ۱ و صفر ۴) ۱۷ و ۷

پاسخ بیشینهٔ اندازهٔ برایند سه بردار وقتی است که سه بردار هم‌جهت باشند. $R_{max}=۶+۹+۴=۱۹$
کمینهٔ اندازهٔ برایند این سه بردار برابر صفر است زیرا می‌توانند تشکیل یک مثلث دهند و در شرط مثلث صدق می‌کنند. $R_{min}=۰$
بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

تفاضل دو بردار

تفاضل دو بردار در حل بسـیاری از مسـائل فیزیک کاربرد دارد. به طور مثال در به‌دست آوردن تغییر مکان برای سرعت متوسط، تغییر سرعت برای شتاب متوسط و . . . دانستن تفاضل دو بردار بسیار مهم است.
برایند یک بردار با قرینهٔ بردار دیگر را تفاضل دو بردار گویند. $\vec{R}'=\vec{F}_1-\vec{F}_2=\vec{F}_1+(-\vec{F}_2)$

با توجه به شـکل روبه‌رو، می‌توان ابتدا قرینهٔ $\vec{F}_2$ را به‌دسـت آورد و سپس برایند آن را با $\vec{F}_1$ رسم کرد و یا کافی است از انتهای $\vec{F}_2$ برداری به انتهای $\vec{F}_1$ رسم کرد. $R'^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos\theta$

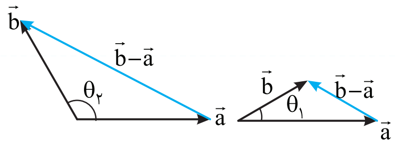


تذکر اگر $F_1=F_2$ باشد می‌توان ثابت کرد: $R'=2F\sin\dfrac{\theta}{2}$

پرسش

اگر زاویهٔ بین دو بردار افزایش یابد، بزرگی تفاضل آن‌ها چه تغییری می‌کند؟

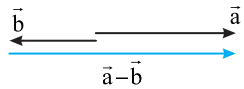
پاسخ همواره افزایش می‌یابد. (با توجه به شکل، وقتی $\theta_2>\theta_1$، تفاضل دو بردار بزرگ‌تر است.)



پرسش

بزرگی تفاضل دو بردار در چه حالتی بیشینه می‌شود؟

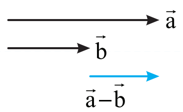
پاسخ وقتی دو بردار در خلاف جهت هم باشند. $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$



پرسش

بزرگی تفاضل دو بردار در چه حالتی کمینه می‌شود؟

پاسخ وقتی دو بردار هم‌جهت باشند. $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$

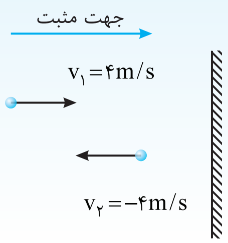


نتیجه بزرگی تفاضل دو بردار، بین مجموع بزرگی آن‌ها و تفاضل بزرگی آن‌ها است. $|F_1-F_2|\le R'\le F_1+F_2$

تست ۴ **گلوله‌ای با سرعت افقی $4\,m/s$ به مانع سختی برخورد کرده و با همان سرعت و در همان راستا باز می‌گردد. بزرگی تغییر سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟**

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۶

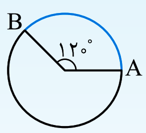
پاسخ این تسـت سـاده، مفهوم جهت بردار را کاملاً مشخص می‌کند. در شکل روبه‌رو، ابتدا یک جهت را به عنوان جهت مثبت در نظر می‌گیریم، مثلاً جهت برخورد. در این‌صورت بازگشت گلوله در جهت منفی است، بنابراین: $|\Delta\vec{v}|=|-4-4|=8\,m/s$



فراموش نکنید گزینهٔ (۱) قطعاً نادرست است. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

کاربرد تفاضل بردارها در حل مسائل فیزیک

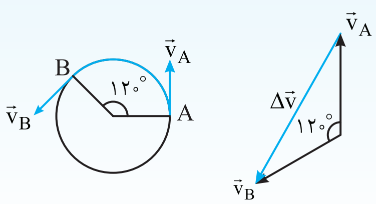
تست ۵ **متحرکی با اندازه سرعت ثابت $10\,m/s$ مطابق شکل، کمان AB را طی می‌کند. تغییر بردار سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟**



۱) صفر ۲) ۱۰
۳) $10\sqrt{3}$ ۴) ۵

پاسخ می‌دانیم بردار سـرعت در هر حرکتی در هر نقطه، بر مسیر حرکت مماس است. بردارهای سرعت در نقطهٔ A و B را رسم کرده و سپس بردارهای $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ را از یک نقطه رسم می‌کنیم.

$\Delta\vec{v}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$

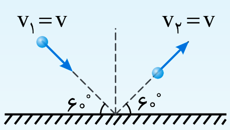


چون $v_A=v_B$ است، بزرگی تغییر بردار سرعت برابر است با:

$$\Delta v=2v\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow \Delta v=2\times 10\sin\frac{120^\circ}{2}\Rightarrow \Delta v=10\sqrt{3}\,m/s$$

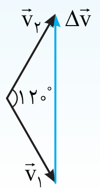
بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۶ مطابق شکل روبه‌رو، ذره‌ای با سرعت $۵m/s$ به مانع سختی برخورد کرده و با همان سرعت برمی‌گردد. تغییر سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۵
۲) $۵\sqrt{۳}$
۳) صفر
۴) $۲/۵$

پاسخ ابتدا بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_۲$ را یک نقطه رسم می‌کنیم. دقت کنید زاویهٔ بین دو بردار ۱۲۰° است.

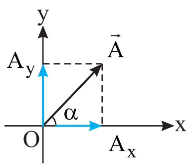


$$\Delta v = ۲v \sin\frac{\theta}{۲} \Rightarrow \Delta v = ۲\times۵\times\sin ۶۰^\circ \Rightarrow \Delta v = ۵\sqrt{۳}m/s$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

تجزیهٔ یک بردار به دو مؤلفهٔ عمود بر هم

می‌توان هر بردار دلخواه مانند $\vec{A}$ را به دو مؤلفهٔ عمود بر هم تجزیه کرد.
A_x و A_y را مؤلفه‌های (همنه‌های) بردار $\vec{A}$ می‌نامند و زاویهٔ بین بردار و محور طول‌ها (x ها) جهت بردار را نشان می‌دهد، این زاویه را با حرف α نشان داده‌ایم. روابط زیر بین A، A_x، A_y و α برقرار است:



$$A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{A_y}{A_x}$$

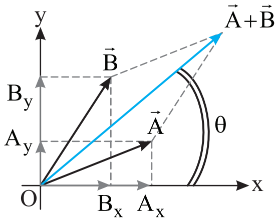
$$A_x = A\cos\alpha \quad , \quad A_y = A\sin\alpha$$

A_x و A_y عدد هستند و برای آنکه بردار $\vec{A}$ را با مؤلفه‌های آن نمایش دهند در امتداد هر یک از محورهای مختصات یک بردار با طول واحد به نام **بردار یکه** اختیار می‌کنند. بردار یکهٔ محور x ها را با $\vec{i}$، بردار یکهٔ محور y ها را با $\vec{j}$ و بردار یکهٔ محور z ها را با $\vec{k}$ نمایش می‌دهند.
در این‌صورت برای نمایش بردار در صفحهٔ xoy خواهیم داشت:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$$

برایند و تفاضل دو بردار بر حسب مؤلفه‌ها

ابتدا مؤلفه‌های دو بردار را در امتداد محور x ها و y ها به‌دست می‌آوریم. در این‌صورت می‌توان روابط زیر را نوشت:



$$\vec{A}+\vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$$

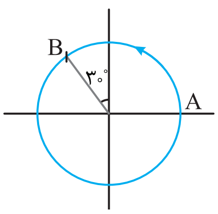
$$\vec{A}-\vec{B} = (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j}$$

$$\tan\theta = \frac{A_y + B_y + \ldots}{A_x + B_x + \ldots}$$

در این رابطه θ زاویهٔ بین بردار برایند و جهت مثبت محور طول‌ها است. در شکل بردار برایند با رنگ آبی نشان داده شده است.

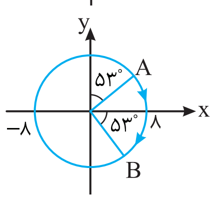
بخش اول
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- متحرکی کمان AB را طی کرده است. مسافت طی‌شده توسط متحرک چند برابر جابه‌جایی آن می‌باشد؟



۱) ۱
۲) ۳
۳) $\sqrt{۳}\pi$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$

۲- در شکل مقابل متحرک کمان A تا B را طی کرده است. بردار جابه‌جایی آن کدام گزینه است؟
(شعاع دایرهٔ مسیر ۸ متر و $\sin ۵۳^\circ = ۰/۸$ است.)



۱) $۱/۶\vec{i} + ۱۱/۲\vec{j}$
۲) $-۱/۶\vec{i} - ۱/۶\vec{j}$
۳) $-۱/۶\vec{i} - ۱۱/۲\vec{j}$
۴) $۱/۶\vec{i} + ۱/۶\vec{j}$

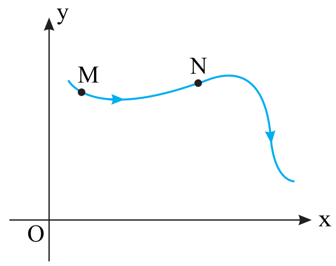
۳- متحرکی در صفحهٔ مختصات xoy، در مدت ۵ ثانیه از نقطهٔ $A(۸,۰)$ به نقطهٔ $B(۰,۸)$ می‌رود. مؤلفهٔ سرعت متوسط آن روی محور ox چند متر بر ثانیه است؟

۱) $-۱/۶\sqrt{۲}$ ۲) $-۱/۶$ ۳) $۱/۶\sqrt{۲}$ ۴) $۱/۶$

۴- متحرکی با سرعت ثابت $۸m/s$ روی خط $\sqrt{۳}y = x-۹$ حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرک در مدت $۵s$ در امتداد محور xها چند متر است؟

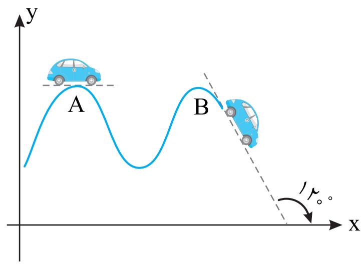
۱) $۲۰\sqrt{۳}$ ۲) $۱۰\sqrt{۳}$ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۵- در شکل روبه‌رو مسیر حرکت جسمی که در صفحهٔ افقی xoy در حرکت است، رسم شده است. کدام گزینه جهت تقریبی بردار شتاب متوسط جسم بین دو لحظهٔ گذر از نقاط M و N را درست نشان می‌دهد؟



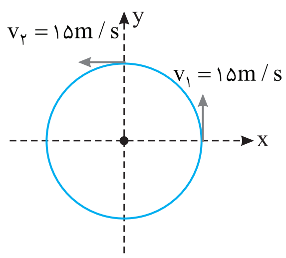
۱) $\rightarrow$
۲) $\swarrow$
۳) $\nearrow$
۴) $\downarrow$

۶- یک خودرو با سرعتی به بزرگی $۵m/s$ در مدت $۴s$، از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. شتاب متوسط آن چند متر بر مجذور ثانیه است؟



۱) ۲/۵
۲) $۵\sqrt{۳}$
۳) صفر
۴) ۱/۲۵

۷- ذره‌ای مطابق شکل، در صفحهٔ xy، روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. در لحظه‌های $t_1 = ۳s$ و $t_2 = ۸s$، بردار سرعت ذره مطابق شکل، به‌ترتیب برابر $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ می‌باشد. بردار شتاب متوسط این ذره در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، در SI کدام است؟



۱) $۳\vec{i} - ۴\vec{j}$ ۲) $۳\sqrt{۲}\,\vec{i} - ۳\vec{j}$
۳) $-۳\vec{i} - ۳\vec{j}$ ۴) $-۳\vec{i} - ۴\vec{j}$

۸- متحرکی در صفحه حرکت می‌کند و بردار مکان آن در SI به صورت $\vec{r} = ۳۰t\,\vec{i} + ۲۰t^2\vec{j}$ است. بردار سرعت متوسط آن در فاصلهٔ زمانی $t_1 = ۰$ و $t_2 = ۲s$، کدام است؟ سراسری خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱) $۳۰\,\vec{i} + ۴۰\vec{j}$ ۲) $۳۰\,\vec{i} + ۸۰\vec{j}$ ۳) $۶۰\,\vec{i} + ۴۰\vec{j}$ ۴) $۶۰\,\vec{i} + ۸۰\vec{j}$

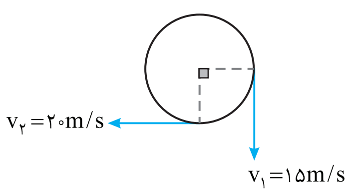
۹- بردار مکان متحرک M در لحظهٔ $t = ۰$ به صورت $\vec{r} = ۲\vec{i} - ۴\vec{j}$ و در لحظهٔ $t = ۴s$ به صورت $\vec{r}_2 = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ و بردار سرعت متوسط در این فاصله به صورت $\vec{v}_{av} = \vec{i} - ۲\vec{j}$ است. حاصل $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟ سراسری

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۰- در جابه‌جایی از مکان $\vec{r}_1 = \vec{i} + ۲\vec{j}$ به مکان $\vec{r}_2 = -۳\vec{i} + ۶\vec{j}$ (در SI) سرعت متوسط متحرک $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ است. زمان این جابه‌جایی چند ثانیه است؟ سراسری تجربی - ۸۴

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱- ذره‌ای روی دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. سرعت آن در شکل در دو لحظهٔ $t_1 = ۲s$ و $t_2 = ۶s$ به وسیلهٔ بردارهای v_1 و v_2 نشان داده شده است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک بین این دو لحظه چند متر بر مجذور ثانیه است؟

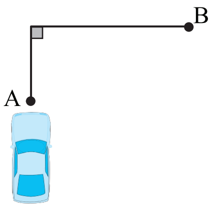


۱) ۶/۲۵ ۲) ۲/۵
۳) ۱/۲۵ ۴) ۸/۷۵

۱۲- متحرکی روی خط $y=\sqrt{۳}x$ با سرعت ثابت $۱۰۰ m/s$ حرکت می‌کند. پس از چند ثانیه، متحرک ۵۰۰ متر روی محور x ها جابه‌جا می‌شود؟

۱) $\frac{۵}{\sqrt{۳}}$ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) $\frac{۵۰}{۳}$

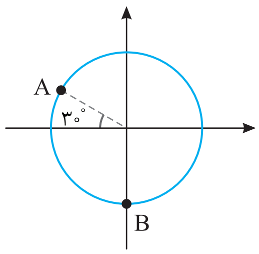
۱۳- اتومبیلی در مسیر نشان داده شده از A تا B حرکت می‌کند و اندازهٔ سرعت آن در تمام این مدت $۲۰ m/s$ است. اگر حرکت از A تا B در مدت ۴۰ ثانیه انجام شود، اندازهٔ شتاب متوسط آن در این مدت چند متر بر مجذور ثانیه است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) صفر

۱۴- اگر متحرک در مدت $۱۰ s$ در جهت ساعتگرد از A به B برود و بزرگی سرعت در طول مسیر $۳ m/s$ باشد، اندازهٔ شتاب متوسط در این مدت چند متر بر مجذور ثانیه است؟

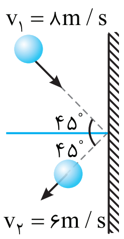


۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۱۰}$

۳) ۰/۶ ۴) $۳\sqrt{۳}$

تست‌های زیر مربوط به مفهوم تکانه است که در فصل دینامیک با آن آشنا شدید.

۱۵- در شکل روبه‌رو، گلوله‌ای به جرم $۲۰۰ g$ به مانع برخورد کرده و از آن برمی‌گردد، تغییر تکانهٔ جسم چند کیلوگرم متر بر ثانیه است؟



۱) ۰/۴
۲) ۲
۳) ۰/۶
۴) ۲/۸

۱۶- ذره‌ای به جرم m و با سرعت v بر مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. تغییر تکانهٔ آن در مدت $\frac{۱}{۳}T$ کدام است؟ (T دورهٔ چرخش ذره است.)

۱) mv ۲) ۲mv ۳) $\sqrt{۳}mv$ ۴) صفر

۱۷- ذره‌ای به جرم m با تندی ثابت v روی دایره‌ای می‌گردد. در مدت $\frac{T}{۴}$، میزان تغییر تکانه چند برابر mv است؟

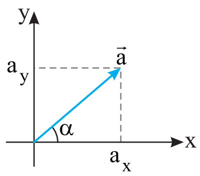
۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۱۸- ذره‌ای به جرم m، بر مسیر دایره‌ای با شعاع r و با تندی v حرکت کرده و کمان ۹۰° را طی می‌کند، تغییر نیروی مرکزگرای وارد بر ذره برابر است با:

۱) صفر ۲) $m\frac{v^۲}{r}$ ۳) $\sqrt{۲}m\frac{v^۲}{r}$ ۴) $\sqrt{۳}m\frac{v^۲}{r}$

ضمیمه ۱ کاربرد ریاضی در فیزیک

بخش دوم: کاربرد بردار در فیزیک



در ریاضیات پایهٔ هشتم و در فیزیک پایهٔ دهم، با بردار و تجزیهٔ آن به دو بردار عمود بر هم روی محور xها و محور yها آشنا شدید و فرا گرفتید که یک بردار را مطابق شکل بر حسب مؤلفه‌هایش می‌توان به صورت زیر نوشت:

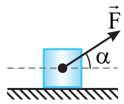
$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$$

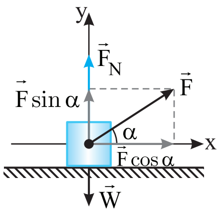
$$a_x=a\cos\alpha\ ,\ a_y=a\sin\alpha$$

اکنون می‌خواهیم مسائل ساده‌ای در فیزیک را با این ریاضیات حل کنیم.

در قسمت‌های زیر نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

الف) جسم تحت تأثیر نیروی غیرافقی F کشیده می‌شود:

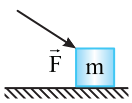




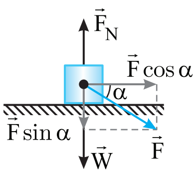
ابتدا نیروی F را در امتداد افق و راستای قائم تجزیه کرده، سپس برایند نیروها را روی محور y ها مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$F_{net\,y}=0 \Rightarrow F_N+F\sin\alpha=W \Rightarrow F_N=mg-F\sin\alpha$$

ب) جسم تحت تأثیر نیروی غیرافقی F هُل داده می‌شود:

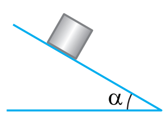


هم‌سنگ نیروی F را از مرکز جرم جسم (گرانیگاه جسم) رسم می‌کنیم.

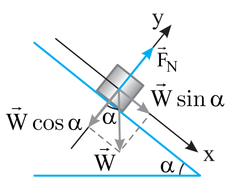


$$F_{net\,y}=0 \Rightarrow F_N=mg+F\sin\alpha$$

پ) جسم روی سطح شیب‌دار:

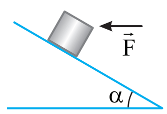


برای یافتن نیروی عمودی سطح، ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و آن‌ها را روی محور x و y مطابق شکل روبه‌رو تجزیه می‌کنیم. برایند نیروها را روی محور y ها برابر صفر قرار می‌دهیم.

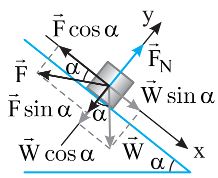


$$F_{net\,y}=0 \Rightarrow F_N=W\cos\alpha$$

ت) بر جسم روی سطح شیب‌دار نیروی افقی F وارد می‌شود:

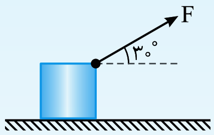


دقت کنید که ابتدا باید محور x و محور y را مشخص کرده و نیروهای وارد بر جسم که در امتداد محور y ها مؤلفه دارند رسم کنیم. محور x موازی سطح شیب‌دار و محور y عمود بر سطح شیب‌دار انتخاب می‌شود.



$$F_{net\,y}=0 \Rightarrow F_N=W\cos\alpha+F\sin\alpha$$

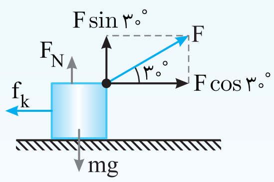
تست ۱ در شکل روبه‌رو نیروی ثابت F جسمی به جرم $15\,kg$ را روی سطح افقی با سرعت ثابت روی خط راست جابه‌جا می‌کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی با سطح $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، نیروی F چند نیوتون است؟



کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۷۵

پاسخ نیروهای وارد بر جسم هم‌راستا نیستند، بنابراین همهٔ نیروها را به دو مؤلفهٔ افقی و قائم تجزیه می‌کنیم.



$$F_{net_y}=0$$

$$F_N+F\sin 30^\circ-mg=0$$

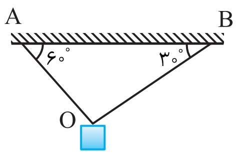
$$F_N=mg-F\sin 30^\circ \Rightarrow F_N=150-\frac{F}{2}$$

سرعت جسم در راستای افقی ثابت است $(a=0)$:

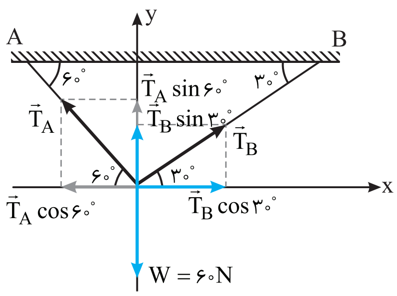
$$F_{net_x}=0\Rightarrow F\cos 30^\circ-f_k=0\Rightarrow F\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\mu_k F_N=0\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}F-\frac{\sqrt{3}}{2}(150-\frac{F}{2})=0\Rightarrow F-150+\frac{F}{2}=0\Rightarrow F=100\,N$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

مسأله ۱ در شکل روبه‌رو، وزنهٔ ۶۰ نیوتونی که از دو ریسمان OA و OB با جرم ناچیز آویزان است، در تعادل است. کشش نخ‌های OA و OB را بیابید.



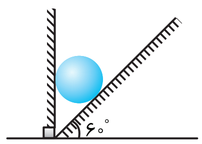
راه‌حل ابتدا نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. چون جسم در تعادل است، برایند نیروهای وارد بر آن صفر است، بنابراین مجموع مؤلفه‌ها روی هر محور مختصات صفر خواهد بود.



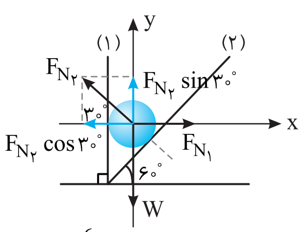
$$F_{net}=0\Rightarrow\begin{cases}F_{net,x}=0\Rightarrow T_A\cos 60^\circ=T_B\cos 30^\circ\\ F_{net,y}=0\Rightarrow W=T_A\sin 60^\circ+T_B\sin 30^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}T_A=\sqrt{3}\,T_B\\ \frac{\sqrt{3}}{2}T_A+\frac{1}{2}T_B=60\end{cases}\Rightarrow T_A=30\sqrt{3}\,N\quad,\quad T_B=30\,N$$

مسأله ۲ یک گوی به وزن $100\,N$ درون ناوه‌ای قرار دارد. نیرویی که گوی بر هر سطح وارد می‌کند چند نیوتون است؟ (سطوح بدون اصطکاک هستند.)



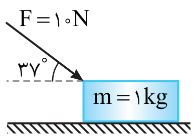
راه‌حل نمودار نیروهای وارد بر گوی را رسم می‌کنیم. **به یاد داشته باشیم همواره سطح بدون اصطکاک، تنها نیروی عمودی بر سطح (F_N) را بر جسم وارد می‌کند.** از طرفی طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر همان نیرویی است که جسم بر سطح وارد می‌کند.



$$F_{net}=0\Rightarrow\begin{cases}F_{net,x}=0\Rightarrow F_{N_1}=F_{N_2}\cos 30^\circ\\ F_{net,y}=0\Rightarrow W=F_{N_2}\sin 30^\circ\Rightarrow 100=F_{N_2}\times\frac{1}{2}\Rightarrow F_{N_2}=200\,N\end{cases}\quad,\quad F_{N_1}=200\times\frac{\sqrt{3}}{2}=100\sqrt{3}\,N$$

شما این مسأله را به کمک قانون سینوس‌ها حل کنید.

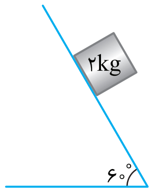
بخش دوم
پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱۹- در شکل روبه‌رو، نیروی عمودی سطح وارد بر جسم برابر چند نیوتون است؟

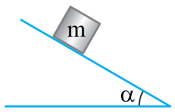
$(\sin ۳۷^\circ = ۰/۶ \,,\; g = ۱۰ N/kg)$

۱) ۱۲ ۲) ۱۴
۳) ۱۶ ۴) ۴



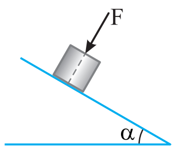
۲۰- نیروی عمودی تکیه‌گاه وارد شده از طرف سطح بر جسم ۲kg برابر چند نیوتون است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰
۳) ۱۵ ۴) ۲۰



۲۱- در شکل روبه‌رو با افزایش α نیروی عمودی سطح چگونه تغییر می‌کند؟

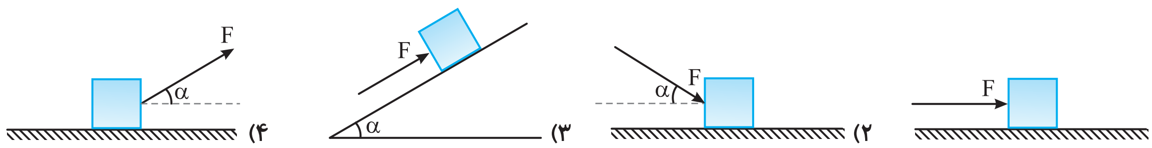
۱) تغییری نمی‌کند.
۲) افزایش می‌یابد.
۳) کاهش می‌یابد.
۴) ابتدا افزایش و سپس کاهش

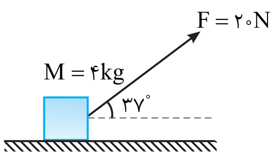


۲۲- در شکل روبه‌رو نیروی عمودی سطح برابر نیروی وزن است. F برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) mg ۲) $mg\sin\alpha$
۳) $mg(۱-\cos\alpha)$ ۴) $mg(۱-\sin\alpha)$

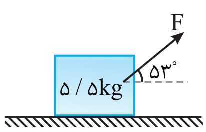
۲۳- مطابق شکل، بر جسمی در ۴ حالت، نیروی F با اندازهٔ یکسان وارد می‌شود و جسم در حرکت است هرگاه ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح در تمام حالات یکسان باشد، نیروی اصطکاک در برابر حرکت در کدام حالت بیشترین مقدار را دارد؟





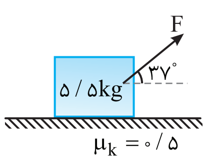
۲۴- در شکل روبه‌رو، اگر شتاب حرکت برابر $۲/۲۵ m/s^۲$ باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین وزنه و سطح افقی کدام است؟ $(g = ۱۰ N/kg \,,\, \cos ۳۷^\circ = ۰/۸)$

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۳۳
۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲



۲۵- در شکل مقابل، F را به تدریج زیاد می‌کنیم، وقتی به ۲۰ نیوتون رسید وزنه روی سطح افقی شروع به حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی چقدر است؟ $(\cos ۵۳^\circ = ۰/۶ \;,\; g = ۱۰ m/s^۲)$

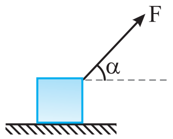
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$



۲۶- در شکل زیر جسم با سرعت ثابت در سطح افقی در حال حرکت است. اگر نیروی F دو برابر شود، نیروی اصطکاک جنبشی چند برابر می‌شود؟ $(\sin ۳۷^\circ = ۰/۶, g = ۱۰ m/s^۲)$ تجربی - ۹۵

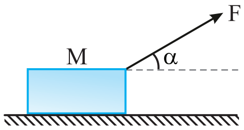
۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) ۱ ۴) ۲

۲۷- در شکل روبه‌رو، برای این‌که بتوانیم با حداقل مقدار نیروی F، جسم را روی سطح افقی به آستانهٔ حرکت در بیاوریم، زاویهٔ α چقدر باید باشد؟ $(\mu_s=\frac{۳}{۴}\ ,\ g=۱۰m/s^۲)$



۱) $\sin\alpha=\frac{۳}{۴}$
۲) $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$
۳) $\cot\alpha=\frac{۳}{۴}$
۴) $\cos\alpha=\frac{۳}{۴}$

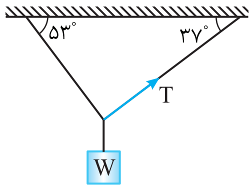
۲۸- مطابق شـکل روبه‌رو، به جسـمی به جرم M که روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد، نیروی F وارد می‌شـود. اگر راسـتای F ثابت بماند و اندازهٔ آن به تدریج افزایش یابد، کمترین مقدار F چقدر باید باشد تا وزنه از روی سطح بلند شود؟



۱) $\frac{mg}{\sin\alpha}$
۲) $\frac{mg}{\cos\alpha}$
۳) $mg\cos\alpha$
۴) $mg\sin\alpha$

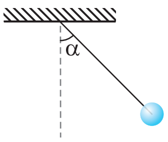
کاربرد ریاضی در فیزیک در حل مسائل تعادل

۲۹- در شکل مقابل جرم نخ‌ها ناچیز است. اگر $T=۶N$ باشد، W چند نیوتون است؟ سراسری ریاضی - ۸۹
$(\cos ۳۷^\circ=۰/۸)$



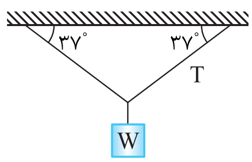
۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

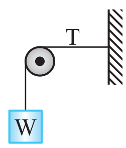
۳۰- در شـکل روبه‌رو، گلوله‌ای از یک ریسـمان آویزان و مطابق شکل در حال تعادل است. حداقل چند نیرو به آن وارد می‌شود؟ سراسری ریاضی - ۸۹

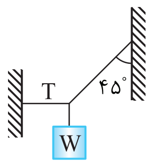


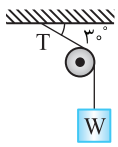
۱) ۴
۲) ۲
۳) ۳
۴) نمی‌توان گفت

۳۱- در کدام‌یک از شکل‌های زیر، نیروی کشش نخ T کوچک‌تر از نیروی وزن W است؟ (جرم نخ، قرقره و اصطکاک ناچیز است.)

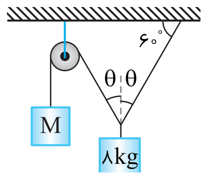
۱)


۲)


۳)


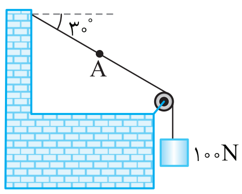
۴)


۳۲- در شکل روبه‌رو دستگاه در حال تعادل است. جرم M چند کیلوگرم است؟ $(g=۱۰N/kg)$



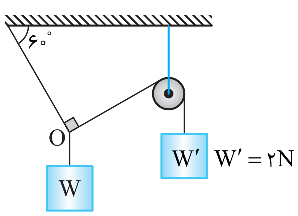
۱) ۸
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

۳۳- دسـتگاه مقابل در حال تعادل اسـت. نیروی کشش نـخ در نقطهٔ A چند نیوتون اسـت؟ (جرم نخ و اصطکاک ناچیز است.)

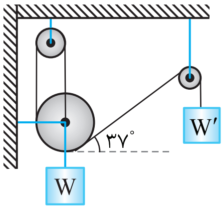


۱) ۵۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۵۰
۴) ۲۰۰

۳۴- در شـکل روبه‌رو، وزنه‌ها در حال تعادل‌اند. W چند نیوتون اسـت؟ (جرم قرقره و نخ‌ها و اصطکاک بین آن‌ها ناچیز است.) سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۸

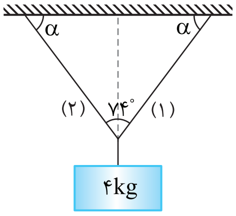


۱) ۴
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$



۳۵- در شکل روبه‌رو دستگاه در تعادل است، $\frac{W}{W'}$ کدام است؟ (جنس نخ‌ها یکسان است.)

۱) ۲　　۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲/۶　　۴) ۳

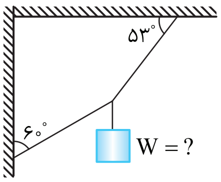


۳۶- اگر در شکل مقابل طول نخ‌های ۱ و ۲ با هم برابر باشند، نیروی کشش هر کدام چند نیوتون است؟

سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۵

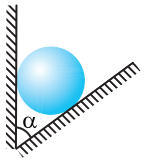
$(g=۱۰m/s^۲ , \cos ۳۷^\circ =۰/۸)$

۱) ۲۰　　۲) ۲۵
۳) ۳۰　　۴) ۳۵



۳۷- در شکل روبه‌رو بیشینه نیروی کشش قابل تحمل هر نخ ۸۵N است. بیشینه وزن جسم متصل به نخ‌ها چند نیوتون می‌تواند باشد تا هیچ یک از نخ‌ها پاره نشود؟ $(\cos ۳۰^\circ \approx ۰/۸۵ \ , \ \sin ۵۳^\circ =۰/۸)$

۱) ۴۰　　۲) ۵۵
۳) ۳۸　　۴) ۶۵

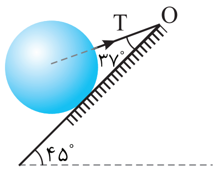


۳۸- در شکل روبه‌رو، وزن کرهٔ همگن ۸۰ نیوتون و α برابر ۵۳ درجه است. اگر اصطکاک‌ها ناچیز باشد، نیرویی که در حالت تعادل از طرف کره بر دیوارهٔ قائم وارد می‌شود، چند نیوتون است؟

سراسری ریاضی - ۸۴

$(\sin ۵۳^\circ =۰/۸)$

۱) صفر　　۲) ۴۸
۳) ۶۰　　۴) ۸۰



۳۹- مطابق شکل، کره‌ای همگن به جرم ۴ کیلوگرم روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی به زاویهٔ شیب ۴۵ درجه قرار دارد. نیروی کشش نخ (T) چند نیوتون است؟

سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۰

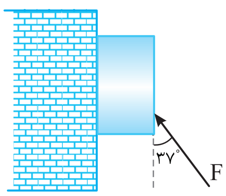
$(\sin ۳۷^\circ =۰/۶ \ , \ g=۱۰m/s^۲)$

۱) ۲۵　　۲) ۴۰
۳) $۲۵\sqrt{۲}$　　۴) $۴۰\sqrt{۲}$

۴۰- جسمی به وزن ۱۲۰ N به وسیلهٔ نیروی افقی F به دیوار قائمی که ضریب اصطکاک در آستانه حرکت آن $\frac{۱}{۴}$ است فشرده می‌شود، حداقل نیروی F برحسب نیوتون برای آن‌که جسم نلغزد برابر است با ....

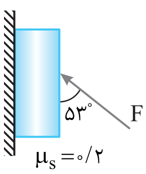
کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲/۵　　۲) ۳۰　　۳) ۱۲۰　　۴) ۴۸۰



۴۱- در شکل روبه‌رو، ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار ۰/۵ و وزن جسم ۱۱۰N است، حداقل نیروی F برای حفظ تعادل وزنه چند نیوتون است؟ $(\sin ۳۷^\circ =۰/۶)$

۱) ۱۰　　۲) ۱۱۰
۳) ۵۵　　۴) ۱۰۰



۴۲- در شکل روبه‌رو، به جسمی به وزن ۲۰N که به دیوار قائم تکیه دارد، نیروی F وارد می‌شود. بیشترین مقدار F در حالتی که جسم به حال سکون بماند، چند نیوتون است؟

سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۴

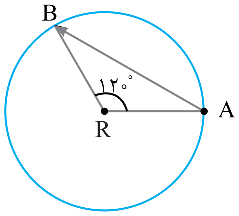
$(\cos ۵۳^\circ =۰/۶)$

۱) $\frac{۵۰۰}{۱۹}$　　۲) $\frac{۵۰۰}{۱۱}$
۳) $\frac{۲۰۰}{۱۹}$　　۴) $\frac{۲۰۰}{۱۱}$

ضمیمه ۱ کاربرد ریاضی در فیزیک

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۴ (A) با توجه به شکل، مسافت طی شده برابر طول کمان AB است که $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره یعنی $\frac{۱}{۳}۲\pi R$ می‌باشد و جابه‌جایی برابر با طول وتر AB است که برابر است با:

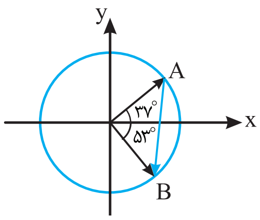


$$|\overrightarrow{AB}|=۲R\sin\frac{۱۲۰^\circ}{۲}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{۳}R$$

بنابراین:

$$\frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{جابه‌جایی}}=\frac{\frac{۲}{۳}\pi R}{\sqrt{۳}R}=\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$$

۲- گزینهٔ ۳ (B) ابتدا بردارهای مکان A و B را به‌دست می‌آوریم:

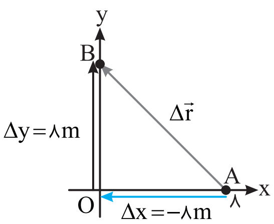


$$\vec{r}_A=۸\cos ۳۷^\circ\,\vec{i}+۸\sin ۳۷^\circ\,\vec{j}=۶/۴\vec{i}+۴/۸\vec{j}$$

$$\vec{r}_B=۸\cos ۵۳^\circ\,\vec{i}-۸\sin ۵۳^\circ\,\vec{j}=۴/۸\vec{i}-۶/۴\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=۴/۸\vec{i}-۶/۴\vec{j}-۶/۴\vec{i}-۴/۸\vec{j}=-۱/۶\vec{i}-۱۱/۲\vec{j}$$

۳- گزینهٔ ۲ (B) متحرک در امتداد محور x از نقطهٔ ۸+ به صفر رفته است، پس ۸− متر جابه‌جا شده است.



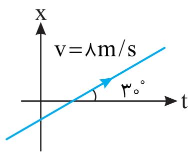
$$v_{av,x}=\frac{-۸}{۵}=-۱/۶m/s$$

دقت کنید که مسأله سرعت متوسط در امتداد محور x ها را از شما می‌خواهد.

۴- گزینهٔ ۱ (B) ابتدا معادلهٔ خط را به شکل استاندارد آن می‌نویسیم:

$$y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-۳\sqrt{۳}$$

در این معادله شیب خط $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است و خط با محور x ها زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. در این صورت تصویر



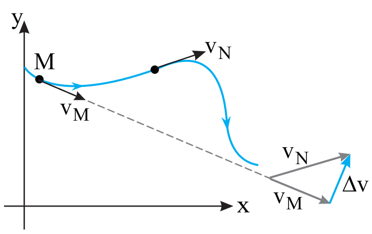
بردار سرعت روی محور x ها برابر خواهد بود با:

$$v_x=v\cos ۳۰^\circ=۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۴\sqrt{۳}m/s$$

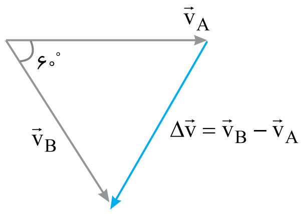
و جابه‌جایی در امتداد محور xها برابر خواهد شد با:

$$\Delta x=v_x t\Rightarrow\Delta x=۴\sqrt{۳}\times۵\Rightarrow\Delta x=۲۰\sqrt{۳}m$$

۵- گزینهٔ ۳ (A) بردار سرعت لحظه‌ای در هر لحظه بر مسیر حرکت مماس است و شتاب متوسط برابر تغییر بردار سرعت در یکای زمان بوده و بردار شتاب متوسط در جهت بردار تغییر سرعت می‌باشد.
کافی است هم‌سنگ بردارهای v_M و v_N را رسم کرده و جهت بردار تغییر سرعت را به‌دست بیاوریم تا جهت بردار شتاب متوسط به دست آید.



۶- گزینهٔ ۴ (A) بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر حرکت مماس است. هم‌سنگ بردارهای سرعت را از یک نقطه رسم کرده، تغییر بردار سرعت را به‌دست می‌آوریم:



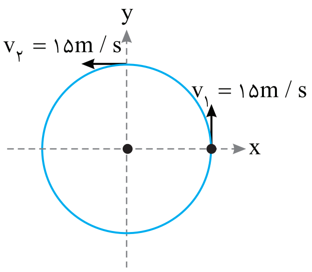
$$\Delta v=۲v\sin\frac{\theta}{۲}\Rightarrow\Delta v=۲\times۵\times\sin\frac{۶۰^\circ}{۲}\Rightarrow\Delta v=۵m/s$$

اکنون به کمک تعریف شتاب متوسط، مقدار شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow a_{av}=۱/۲۵m/s^۲$$

۷- گزینهٔ ۳ Ⓐ

با توجه به شکل بردار سرعت $\vec{v}_1=۱۵\vec{j}$ و $\vec{v}_۲=-۱۵\vec{i}$ است. از این‌رو:



$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_۲-\vec{v}_۱=-۱۵\vec{i}-۱۵\vec{j}$$

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\Rightarrow\vec{a}_{av}=\frac{-۱۵\vec{i}-۱۵\vec{j}}{۸-۳}\Rightarrow\vec{a}_{av}=-۳\vec{i}-۳\vec{j}$$

۸- گزینهٔ ۱ Ⓐ

با توجه به تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{r}_۲-\vec{r}_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{(۶۰\vec{i}+۸۰\vec{j})-(۰)}{۲-۰}=۳۰\vec{i}+۴۰\vec{j}$$

۹- گزینهٔ ۲ Ⓐ

$$\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\Rightarrow\vec{i}-۲\vec{j}=\frac{\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}-۲\vec{i}+۴\vec{j}}{۴-۰}\Rightarrow۴\vec{i}-۸\vec{j}=(\alpha-۲)\vec{i}+(\beta+۴)\vec{j}$$

دو بردار وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های آن‌ها نظیر به نظیر برابر باشند.

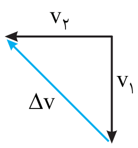
$$\begin{cases}\alpha-۲=۴\Rightarrow\alpha=۶\\-۸=\beta+۴\Rightarrow\beta=-۱۲\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{۶}{-۱۲}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۰- گزینهٔ ۳ Ⓐ

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{r}_۲-\vec{r}_۱}{t}\Rightarrow-\vec{i}+\vec{j}=\frac{-۳\vec{i}+۶\vec{j}-\vec{i}-۲\vec{j}}{t}\Rightarrow-\vec{i}+\vec{j}=\frac{-۴\vec{i}+۴\vec{j}}{t}\Rightarrow t=۴s$$

۱۱- گزینهٔ ۱ Ⓐ

بردارهای هم‌سنگ $v_۱$ و $v_۲$ را از یک نقطه رسم می‌کنیم و به کمک آن، بزرگی بردار تغییر سرعت را به‌دست می‌آوریم:



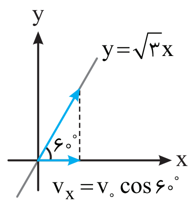
$$\Delta v=\sqrt{v_۱^۲+v_۲^۲}=\sqrt{۱۵^۲+۲۰^۲}=۲۵m/s$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۵}{۶-۲}=۶/۲۵m/s^۲$$

۱۲- گزینهٔ ۲ Ⓐ

ابتدا مؤلفهٔ سرعت را روی محور x ها به‌دست می‌آوریم:

با توجه به معادلهٔ مسیر حرکت $y=\sqrt{۳}x$، شیب خط برابر $\sqrt{۳}$ است.

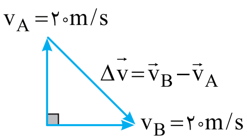


$$\tan\alpha=\sqrt{۳}\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ\Rightarrow v_x=v\cos\alpha=۱۰۰\times\frac{۱}{۲}=۵۰m$$

$$\Delta x=v_x.t\Rightarrow۵۰۰=۵۰t\Rightarrow t=۱۰s$$

۱۳- گزینهٔ ۲ Ⓐ

تغییرات سرعت را به‌دست می‌آوریم:



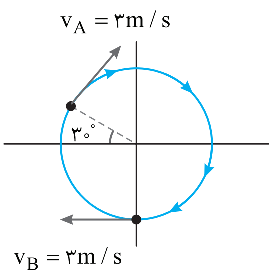
$$\Delta v=\sqrt{(۲۰)^۲+(۲۰)^۲}=۲۰\sqrt{۲}\,m$$

شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۴۰}\Rightarrow a_{av}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}m/s^۲$$

۱۴- گزینهٔ ۲ Ⓑ

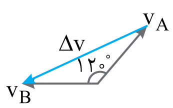
بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر حرکت مماس است. هم‌سنگ دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم، سپس بردار تغییر سرعت را به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta v=۲v\sin\frac{۱۲۰}{۲}$$

$$\Delta v=۲\times۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}m/s$$

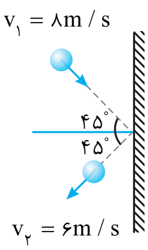
شتاب متوسط برابر است با:

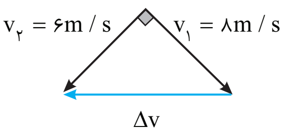


$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۱۰}m/s^۲$$

۱۵- گزینهٔ ۲ Ⓑ

هم‌سنگ دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم:





$$\Delta v=\sqrt{v_۱^۲+v_۲^۲}$$

$$\Delta v=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰m/s$$

تغییر تکانهٔ جسم برابر است با:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow\Delta P=۰/۲\times۱۰=۲kg.m/s$$

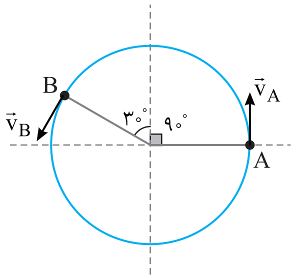
۱۶- گزینهٔ ۳ Ⓑ

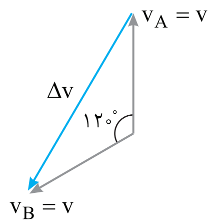
در $\frac{1}{3}T$ متحرک $\frac{1}{3}$ دایره را طی کرده است. مثلاً از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد. تغییر تکانه از A تا B برابر است با:

$$P_B - P_A = m\vec{v}_B - m\vec{v}_A \Rightarrow \Delta P = m(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

$$\Delta P = m(2v\sin\frac{120^\circ}{2})$$

$$\Delta P = m(\sqrt{3}v) \Rightarrow \Delta P = \sqrt{3}mv$$



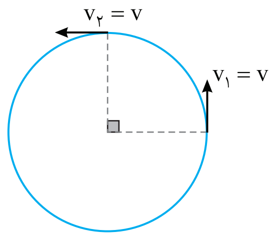


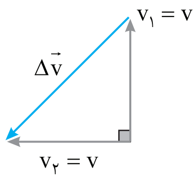
۱۷- گزینهٔ ۳ Ⓑ

متحرک در مدت $\frac{T}{4}$ به اندازهٔ ربع دایره چرخیده است. هم‌سنگ بردارهای سرعت را رسم می‌کنیم:

$$\Delta v = 2v\sin\frac{\alpha}{2} = 2v\sin\frac{90^\circ}{2} = \sqrt{2}v$$

$$\Delta P = m\Delta v \Rightarrow \Delta = \sqrt{2}mv$$





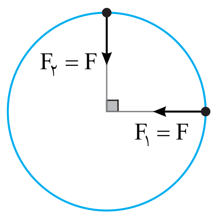
۱۸- گزینهٔ ۳ Ⓑ

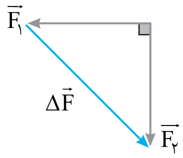
نیروی مرکزگرای وارد بر جسم همواره در امتداد شعاع و به سمت مرکز است و اگر اندازهٔ آن ثابت باشد، جهت بردار نیرو در حال تغییر و نیروی مرکزگرا یک نیروی متغیر است.

اندازهٔ نیروی مرکزگرا $F = m\frac{v^2}{r}$ است. هم‌سنگ بردارهای نیرو را از یک نقطه رسم می‌کنیم.

$$\Delta\vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 \xrightarrow{F_1 = F_2} \Delta F = F\sin\frac{\alpha}{2}$$

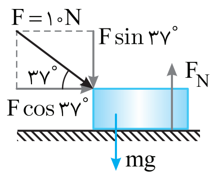
$$\Delta F = 2\frac{mv^2}{r}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}m\frac{v^2}{r}$$





۱۹- گزینهٔ ۳ Ⓐ

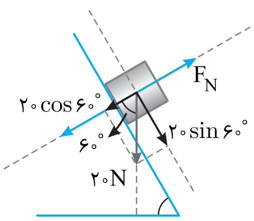
ابتدا با توجه به آنچه در دهم خواندید نیرو را تجزیه می‌کنیم:



$$F_{y_{net}} = 0 \Rightarrow F\sin 37^\circ + mg = F_N \Rightarrow F_N = 10\times 0/6 + 10 = 16N$$

۲۰- گزینهٔ ۲ Ⓐ

نیروها در راستای عمود بر سطح متوازن می‌باشد. بنابراین:



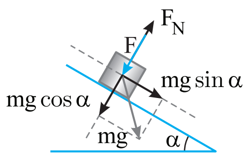
$$F_{y_{net}} = 0 \Rightarrow F_N = mg\cos 60^\circ \Rightarrow F_N = 20\cos 60^\circ \Rightarrow F_N = 10N$$

۲۱- گزینهٔ ۳ Ⓐ

روی سطح شیب‌دار نیروی عمودی تکیه‌گاه $F_N = mg\cos\alpha$ است و با افزایش α، $\cos\alpha$ کاهش می‌یابد.

۲۲- گزینهٔ ۳ Ⓑ

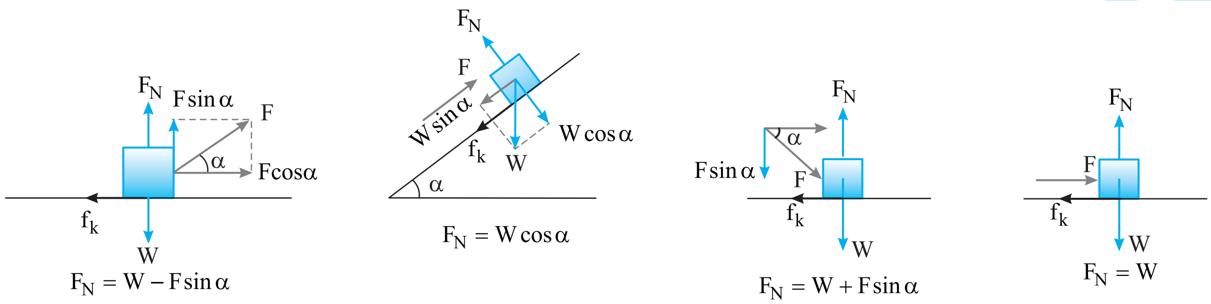
نیروها را در راستای عمود بر سطح شیب‌دار می‌نویسیم:



$$F_N = F + mg\cos\alpha \xrightarrow{F_N = mg} mg = F + mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg(1 - \cos\alpha)$$

۲۳- گزینهٔ ۲ Ⓑ

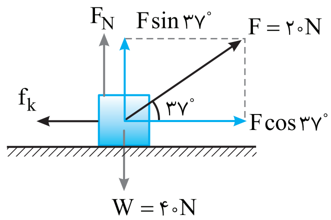
نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k = \mu_k F_N)$ است و هر چه نیروی عمودی تکیه‌گاه بیشتر باشد، اصطکاک بیشتر است.



(۴) (۳) (۲) (۱)

با توجه به شکل‌های بالا، نیروی اصطکاک در شکل گزینهٔ (۲) از بقیه بیشتر است.

۲۴- گزینهٔ ۳ B



نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

$$F_{net}=Ma$$

$$F\cos ۳۷^\circ - f_k = Ma \qquad (۱)$$

اما نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر است با:

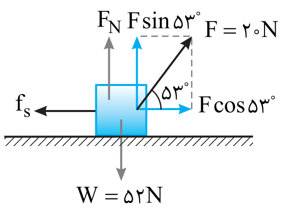
$$F_N = W - F\sin ۳۷^\circ \Rightarrow F_N = ۴۰-(۲۰\times ۰/۶)=۲۸\,N$$

و نیروی اصطکاک برابر است با:

$$f_k = \mu_k F_N = ۲۸\mu_k$$

حال به کمک رابطهٔ (۱)، ضریب اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم: $۲۰\times ۰/۸ - ۲۸\mu_k = ۴\times ۲/۲۵ \Rightarrow \mu_k = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵$

۲۵- گزینهٔ ۲ B



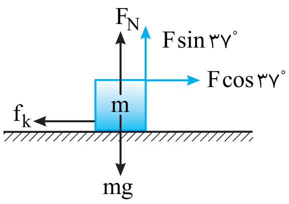
جسم وقتی که نیروی $F=۲۰N$ شده است شروع به حرکت می‌کند، بنابراین اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت $f_{s\,max}=F\cos ۵۳^\circ$ است.

$$f_{s\,max} = F\cos ۵۳^\circ$$

$$\mu_s(W - F\sin ۵۳^\circ) = F\cos ۵۳^\circ \Rightarrow \mu_s(۵۲-۲۰\times ۰/۸) = ۲۰\times ۰/۶$$

$$\mu_s = \frac{۱۲}{۳۶} \Rightarrow \mu_s = \frac{۱}{۳}$$

۲۶- گزینهٔ ۲ B



جسم در حال حرکت افقی است پس برایند نیروها در راستای قائم صفر است:

$$F_N + F\sin ۳۷^\circ = mg \Rightarrow F_N = ۵۵-۰/۶F$$

نیروی اصطکاک برابر است با:

$$f_k = \mu_k F_{N_۱} = \frac{۱}{۲}(۵۵-۰/۶F) \qquad (۱)$$

سرعت ثابت است، از این رو: $F\cos ۳۷^\circ = f_k \Rightarrow ۰/۸F = f_k \Rightarrow ۰/۸F = ۲۷/۵-۰/۳F \Rightarrow ۱/۱F = ۲۷/۵ \Rightarrow F=۲۵N \xrightarrow{(۱)} f_k = \frac{۱}{۲}(۵۵-۰/۶\times ۲۵) = ۲۰N$

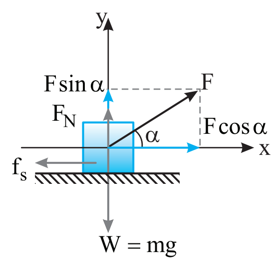
در حالت دوم نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر است با:

$$F'_N + ۲F\sin ۳۷^\circ = mg \Rightarrow F'_N = ۵۵-۱/۲F \Rightarrow F'_N = ۵۵-۱/۲\times ۲۵ \Rightarrow F'_N = ۵۵-۳۰ = ۲۵N \Rightarrow f'_k = \mu_k F'_N = \frac{۱}{۲}\times ۲۵ = ۱۲/۵N$$

پس نسبت نیروهای اصطکاک برابر است با:

$$\frac{f'_k}{f_k} = \frac{۱۲/۵}{۲۰} = \frac{۱۲۵}{۲۰۰} = \frac{۵}{۸}$$

۲۷- گزینهٔ ۲ C



نیروی F را تجزیه می‌کنیم، در آستانهٔ حرکت خواهیم داشت:

$$F\cos\alpha = f_{s\,max} \Rightarrow F\cos\alpha = \mu_s F_N \Rightarrow F\cos\alpha = \mu_s(W - F\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow F\cos\alpha = \frac{۳}{۴}W - \frac{۳}{۴}F\sin\alpha \Rightarrow F(\cos\alpha + \frac{۳}{۴}\sin\alpha) = \frac{۳}{۴}W$$

سمت راست رابطه مقدار ثابتی است بنابراین اگر بخواهیم F کمینه باشد باید عبارت $(\cos\alpha + \frac{۳}{۴}\sin\alpha)$ بیشینه باشد. در درس ریاضی در مبحث کاربرد مشتق خواهید دید برای این که بیشینه و کمینه بودن یک تابع را مشخص کنیم مشتق آن را به دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم. از این رو مشتق عبارت فوق را به دست می‌آوریم:

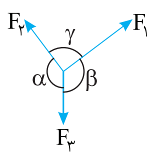
$$-\sin\alpha + \frac{۳}{۴}\cos\alpha = ۰ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۳}{۴}\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۳}{۴}$$

۲۸- گزینهٔ ۱ B

حداقل نیروی F که باعث بلند شدن جسم از سطح می‌شود هنگامی رخ می‌دهد که مؤلفهٔ قائم F نیروی وزن را خنثی کند و نیروی عمودی تکیه‌گاه صفر شود.

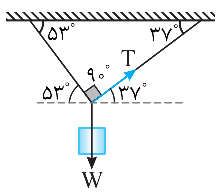
$$F\sin\alpha = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

۲۹- گزینهٔ ۲ A



قانون سینوس‌ها: هرگاه برایند ۳ نیرو صفر شود بین اندازه‌های آن‌ها و سینوس زاویهٔ بین آن‌ها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ = ۰ \Rightarrow \frac{F_۱}{\sin\alpha} = \frac{F_۲}{\sin\beta} = \frac{F_۳}{\sin\gamma}$$



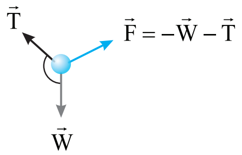
به کمک قانون سینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{T}{\sin(۹۰^\circ + ۵۳^\circ)} = \frac{W}{\sin ۹۰^\circ}$$

$$\frac{۶}{\cos ۵۳^\circ} = \frac{W}{۱} \Rightarrow \frac{۶}{۰/۶} = W \Rightarrow W = ۱۰N$$

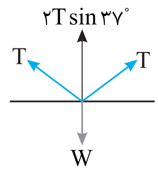
۳۰- گزینهٔ ۳ B

مطابق شکل روبه‌رو بر گلوله نیروی وزن رو به پایین و نیروی کشش نخ در امتداد نخ وارد می‌شود که با هم زاویه می‌سازند و نمی‌توانند یکدیگر را خنثی کرده و گلوله در تعادل بماند. از این رو حداقل یک نیروی دیگر مانند F لازم است تا هم‌اندازه و در خلاف جهت برایند T و W باشد تا آن‌ها را خنثی کند، بنابراین حداقل سه نیرو بر جسم وارد می‌شود.



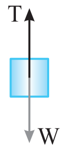
۳۱- گزینهٔ ۱ B

در شکل گزینهٔ (۱):



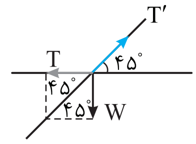
$$F_{net\,y}=۰\Rightarrow ۲T\sin ۳۷^\circ=W\Rightarrow T=\frac{W}{۱/۲}$$

در شکل گزینهٔ (۲):



$$T=W$$

در شکل گزینهٔ (۳):



$$\tan ۴۵^\circ=\frac{T}{W}\Rightarrow T=W$$

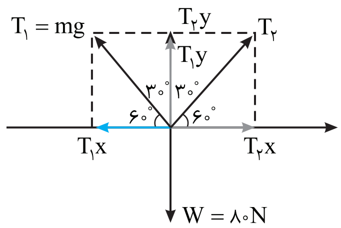
در شکل گزینهٔ (۴):

در طول نخ کشش یکسان است. $T=W$

در شکل گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴)، $T=W$ است، بنابراین کمترین مقدار کشش نخ در شکل گزینهٔ (۱) است.

۳۲- گزینهٔ ۴ B

چون دستگاه در تعادل است کشش نخی که از روی قرقره می‌گذرد برابر $T_1=Mg$ است. از طرف $\theta=۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ$



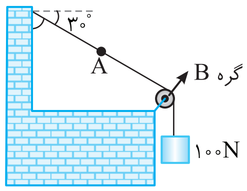
$$F_{net\,x}=۰\Rightarrow T_1\cos ۶۰^\circ=T_2\cos ۶۰^\circ\Rightarrow T_1=T_2$$

$$F_{net\,y}=۰\Rightarrow T_1\sin ۶۰^\circ+T_2\sin ۶۰^\circ=۸۰\Rightarrow ۲T_1\sin ۶۰^\circ=۸۰\Rightarrow T_1=\frac{۸۰}{\sqrt{۳}}=\frac{۸۰\sqrt{۳}}{۳}N$$

$$T_1=Mg\Rightarrow \frac{۸۰\sqrt{۳}}{۳}=۱۰M\Rightarrow M=\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}kg$$

۳۳- گزینهٔ ۲ A

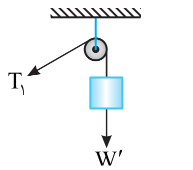
نیروی کشش نخ برابر وزن است و در طول نخ همگن با جرم ناچیز مقدار ثابتی است.



$$T=mg=۱۰۰N$$

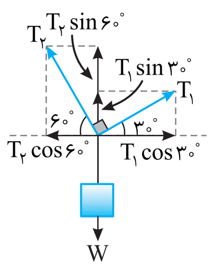
۳۴- گزینهٔ ۱ B

با توجه به اینکه وزنه‌ها در حال تعادلند، داریم:



در تعادل $W':T_1-W'=۰\Rightarrow T_1=W'\Rightarrow T_1=۲N$

هنگامی که اجسام در حال تعادلند، برایند نیروهای وارد بر آن‌ها صفر است.



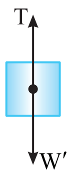
$$F_{net\,x}=۰\Rightarrow T_1\cos ۳۰^\circ-T_2\cos ۶۰^\circ=۰\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}W'-\frac{۱}{۲}T_2=۰\Rightarrow T_2=\sqrt{۳}W'$$

$$F_{net\,y}=۰\Rightarrow T_1\sin ۳۰^\circ+T_2\sin ۶۰^\circ-W=۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}W'+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۳}W'=W\Rightarrow ۲W'=W$$

$$\Rightarrow \frac{W}{W'}=۲\Rightarrow \frac{W}{۲}=۲\Rightarrow W=۴N$$

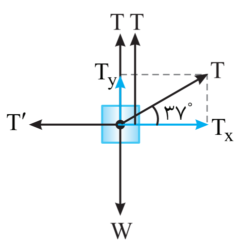
۳۵- گزینهٔ ۳ B

با توجه به شکل برای W' می‌توان نوشت:



$$W'=T$$

برای وزنهٔ W می‌توان نوشت:



$$W=T+T+T\sin ۳۷^\circ\Rightarrow W=۲/۶T$$

بنابراین:

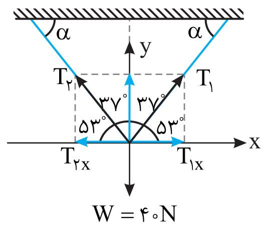
$$\frac{W}{W'}=\frac{۲/۶T}{T}=۲/۶$$

۳۶- گزینهٔ ۲ B

جسم در تعادل است. پس:

$$F_{net}=\circ\Rightarrow\begin{cases}F_{net_x}\Rightarrow T_۱\cos ۵۳^\circ=T_۲\cos ۵۳^\circ\Rightarrow T_۱=T_۲\\ F_{net_y}\Rightarrow ۲T_{۱_y}=W\Rightarrow ۲T_۱\sin ۵۳^\circ=W\end{cases}$$

$$T_۱=\frac{W}{۲\sin ۵۳^\circ}=\frac{۴\circ}{۲\times\circ/۸}=۲۵N$$



۳۷- گزینهٔ ۳ C

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. جسم در حال تعادل است:

$$F_{net_x}=\circ\Rightarrow T_{۱x}=T_{۲x}\Rightarrow T_۱\cos ۵۳^\circ=T_۲\cos ۳\circ^\circ$$

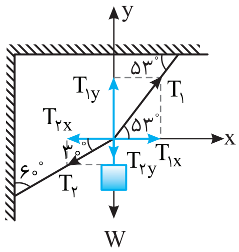
$$T_۱\times\circ/۶=T_۲\times\circ/۸۵\Rightarrow T_۲=\frac{\circ/۶}{\circ/۸۵}T_۱\Rightarrow T_۲=\frac{۶\circ}{۸۵}T_۱$$

کشش $T_۱$ بزرگ‌تر از $T_۲$ است بنابراین کشش $T_۱$ می‌تواند $۸۵N$ باشد، اگر کشش $T_۲$ برابر $۸۵N$ شود، کشش $T_۱$ از $۸۵N$ بیشتر و نخ پاره می‌شود. بنابراین:

$$T_۲=\frac{۶\circ}{۸۵}\times ۸۵\Rightarrow T_۲=۶\circ N$$

برایند نیروها روی محور yها نیز صفر است از این‌رو:

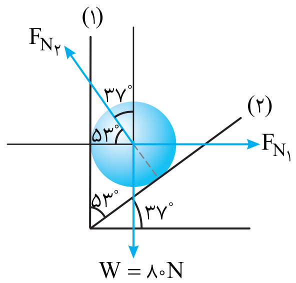
$$T_۱\sin ۵۳^\circ-W-T_۲\sin ۳\circ^\circ=\circ\Rightarrow ۸۵\times\circ/۸-۶\circ\times\frac{۱}{۲}=W\Rightarrow W=۳۸N$$



۳۸- گزینهٔ ۳ A

با توجه به شکل روبه‌رو و رسم نیروها، مسأله به کمک قانون سینوس‌ها به راحتی قابل حل است.

$$\frac{W}{\sin(۹\circ^\circ+۳۷^\circ)}=\frac{F_{N_۱}}{\sin(۹\circ^\circ+۵۳^\circ)}\Rightarrow\frac{۸\circ}{\cos ۳۷^\circ}=\frac{F_{N_۱}}{\cos ۵۳^\circ}\Rightarrow\frac{۸\circ}{\circ/۸}=\frac{F_{N_۱}}{\circ/۶}\Rightarrow F_{N_۱}=۶\circ N$$



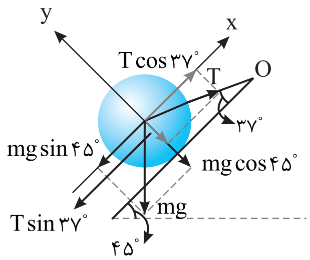
۳۹- گزینهٔ ۳ B

نیروهای وارد بر کره را رسم کرده و روی محورهای x و y مطابق شکل تجزیه می‌کنیم.

جسم در تعادل است و باید برایند نیروهای وارد برجسم صفر شود.

$$F_{net}=\circ\Rightarrow F_{net_x}=\circ\Rightarrow mg\sin ۴۵^\circ=T\cos ۳۷^\circ$$

$$۴\circ\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=T\times\circ/۸\Rightarrow T=۲۵\sqrt{۲}N$$



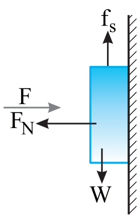
۴۰- گزینهٔ ۴ B

شکل مسأله را رسم می‌کنیم. جسم ساکن و در تعادل است. بنابراین:

$$F_{net_y}=\circ\Rightarrow W=f_s\Rightarrow f_s=۱۲\circ N$$

از طرفی نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر نیروی F است و می‌توان نوشت:

$$f_s=\mu_s F_N\xrightarrow{F_N=F}۱۲\circ=\frac{۱}{۴}\times F\Rightarrow F=۴۸\circ N$$



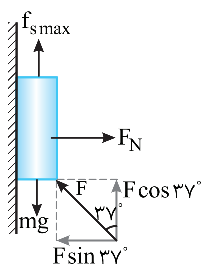
۴۱- گزینهٔ ۴ B

حداقل نیروی F وقتی است که جسم بخواهد به پایین بلغزد در این صورت اصطکاک ایستایی رو به بالا است.

$$F_{net}=\circ\Rightarrow mg=f_{s\,max}+F\cos ۳۷^\circ$$

$$\xrightarrow{F_N=F\sin ۳۷^\circ}mg=\mu_s F\sin ۳۷^\circ+F\cos ۳۷^\circ$$

$$۱۱\circ=\circ/۵\times F\times\circ/۶+F(\circ/۸)\Rightarrow F=\frac{۱۱\circ}{۱/۱}=۱\circ\circ N$$



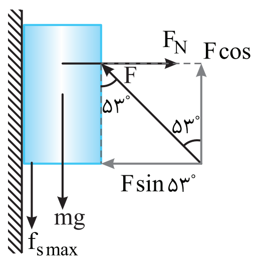
۴۲- گزینهٔ ۲ B

بیشترین مقدار F در حالتی است که جسم در آستانهٔ حرکت رو به بالا قرار گیرد. در این حالت نیروی وزن mg و نیروی اصطکاک ایستایی آستانهٔ حرکت (f_{smax}) رو به پایین‌اند. با توجه به شکل:

$$F_N=F\sin ۵۳^\circ\quad,\quad F\cos ۵۳^\circ=mg+f_{s\,max}$$

$$F\cos ۵۳^\circ=mg+\mu_s F_N\Rightarrow F\cos ۵۳^\circ=mg+\mu_s F\sin ۵۳^\circ$$

$$\circ/۶F=۲\circ+\circ/۲F\times\circ/۸\Rightarrow F=\frac{۲\circ}{\circ/۴۴}\Rightarrow F=\frac{۵\circ\circ}{۱۱}N$$



ضمیمه ۲ کاربرد مشتق در حرکت‌شناسی

در تعریف مشتق در ریاضی متوجه می‌شویم که مقدار مشتق در هر نقطه برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه است. از طرفی در فیزیک یاد گرفتیم که شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای و شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر شتاب لحظه‌ای است. از ترکیب این دو مفهوم نتایج زیر حاصل می‌شود.

۱- مشتق اول معادلهٔ مکان - زمان نسبت به زمان برابر سرعت لحظه‌ای است. $v=x'$

۲- مشتق اول معادلهٔ سرعت - زمان نسبت به زمان برابر شتاب لحظه‌ای است هم‌چنین مشتق دوم معادلهٔ مکان - زمان نسبت به زمان نیز برابر شتاب لحظه‌ای است. $a=v'=x''$

اکنون با حل دو مسأله به چگونگی استفاده از این نتایج می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که دانستن این مفاهیم در حل مسائلی که در آن‌ها معادلهٔ مکان - زمان را در اختیار داریم چه‌قدر حل مسأله را راحت‌تر می‌کند.

مسأله ۱ **معادلهٔ مکان - زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت است. در SI به صورت $x=t^۲-۴t+۳$ است، در چه لحظه‌ای متحرک تغییر جهت می‌دهد؟**

راه‌حل قبلاً برای حل این مسأله معادله داده شده را با معادلهٔ حرکت شتاب ثابت $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ مقایسه می‌کردیم اما اکنون کافی است از x مشتق بگیریم.

$$x=t^۲-۴t+۳\xrightarrow{v=x'}v=۲t-۴$$

برای لحظهٔ تغییر جهت کافی است سرعت را مساوی صفر قرار دهیم.

$$v=۰\Rightarrow ۲t-۴=۰\Rightarrow t=۲s$$

در مسألهٔ بعدی، از یک معادلهٔ درجهٔ ۳ کمک گرفته‌ایم تا نشان دهیم با داشتن معادلهٔ مکان - زمان و به‌کار بردن مشتق می‌توان همان مفاهیمی را که از قبل بلد بوده‌ایم به‌کار ببریم.

مسأله ۲ **معادلهٔ حرکت متحرکی روی خط راست در SI به صورت $x=t^۳-۳t^۲+۶$ است.**

الف) در لحظهٔ $t=۲s$ اندازهٔ مکان، سرعت و شتاب متحرک را بیابید.

ب) اندازهٔ سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $t=۱s$ تا $t=۴s$ بیابید.

پ) اندازهٔ شتاب متوسط را در $۵s$ آغازین حرکت بیابید.

ت) در چه مکان و در چه زمانی متحرک روی خط راست تغییر جهت می‌دهد؟

ث) در چه مدتی حرکت تندشونده و در چه مدتی حرکت کندشونده است؟

ج) اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را در ۳ ثانیهٔ آغازین حرکت آن بیابید.

چ) مسافت طی شده در مدت $۳s$ آغازین چند متر است؟

ح) اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را در ثانیهٔ پنجم حرکت آن بیابید.

راه‌حل الف) مکان در لحظهٔ $t=۲s$ خواهد شد:

$$x=t^۳-۳t^۲+۶\xrightarrow{t=۲s}x=۸-۱۲+۶=۲m$$

برای یافتن سرعت لحظه‌ای از معادلهٔ حرکت مشتق می‌گیریم:

$$v=x'\Rightarrow v=۳t^۲-۶t\xrightarrow{t=۲s}v=۰$$

و برای یافتن شتاب لحظه‌ای از معادلهٔ سرعت مشتق می‌گیریم:

$$a=v'\Rightarrow a=۶t-۶\xrightarrow{t=۲s}a=۶m/s^۲$$

دقت کنید در لحظهٔ $t=۲s$ در مکان $+۲$ متری مبدأ، برای یک لحظه سرعت صفر شده است اما شتاب صفر نیست.

هرگاه در یک لحظه سرعت متحرکی صفر شود، لزومی ندارد که در آن لحظه، شتاب متحرک نیز صفر شود.

به معادلهٔ شتاب-زمان $a=۶t-۶$ نگاه کنید در لحظهٔ $t=۰$، شتاب $-۶m/s^۲$، در لحظهٔ $t=۱s$ شتاب صفر و ... است یعنی شتاب در حال تغییر است و حرکت دارای شتاب متغیر است. **پس اگر معادله حرکت تابع درجهٔ ۳ و بالاتر باشد، معرف حرکت با شتاب متغیر است.**

ب) متأسفانه بعضی از دانش‌پژوهان برای حل این قسمت زمان‌های $۱s$ و $۴s$ را در معادلهٔ سرعت قرار می‌دهند، سپس سرعت‌های به‌دست آمده را جمع کرده و بر دو تقسیم می‌کنند. در حالی که بارها بیان شده سرعت متوسط جابه‌جایی در یکای زمان است و باید در لحظات $۱s$ و $۴s$ مکان متحرک را به‌دست آوریم و با توجه به این‌که شتاب متوسط یعنی تغییر سرعت در یکای زمان، داریم:

$$\begin{cases} v_{av}=\dfrac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱} \\ t_۱=۱s\Rightarrow x_۱=۱-۳+۶=۴m \\ t_۲=۴s\Rightarrow x_۲=۶۴-۴۸+۶=۲۲m \end{cases}\Rightarrow v_{av}=\frac{۲۲-۴}{۴-۱}=۶m/s$$

پ) در حل این قسمت نیز در لحظهٔ $t=0$ و $t=5s$، به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت لحظه‌ای متحرک را به‌دست می‌آوریم و با توجه به این که شتاب متوسط یعنی تغییر سرعت در واحد زمان، داریم:

$$\begin{cases} t_1=0 \Rightarrow v_1=0 \\ t_2=5s \Rightarrow v_2=45m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} \Rightarrow a_{av}=\frac{45-0}{5-0}=9m/s^2$$

ت) متحرکی که روی محور x ها در حرکت است، برای آن‌که تغییر جهت دهد، ابتدا باید سرعتش صفر گردد.

$$v=0 \Rightarrow 3t^2-6t=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2s \end{cases}$$

لحظهٔ $t=0$ آغاز حرکت است و لحظهٔ $t=2s$ جواب مسأله است. $\quad t=2s \Rightarrow x=+2m$

تذکر: البته دربارهٔ تغییر جهت روی خط راست علاوه بر صفر شدن سرعت باید سرعت در آن لحظه تغییر علامت بدهد که در تابع درجه ۲ در دو طرف ریشه همواره تغییر علامت داریم و $t=2s$ جواب است.

ث) در حرکت تندشونده روی خط راست، سرعت متحرک در حال افزایش است، پس بردار سرعت و بردار شتاب آن هم‌جهت و هم‌علامت هستند. $(av>0)$ و در حرکت کندشونده روی خط راست، سرعت متحرک در حال کاهش است، پس بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم هستند و علامت آن‌ها مخالف هم است. $(av<0)$

با توجه به این توضیحات باید ابتدا سرعت و شتاب را تعیین علامت کنیم، از این رو از ریاضیات کمک می‌گیریم.

$$v=3t^2-6t=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2s \end{cases} \quad , \quad a=6t-6=0 \Rightarrow t=1s$$

در تابع درجه ۲، علامت، در بین دو ریشه مخالف علامت ضریب t^2 و در خارج از دو ریشه، موافق علامت ضریب t^2 است.
در تابع درجه ۱، علامت در سمت چپ ریشه مخالف علامت ضریب t و در سمت راست ریشه، موافق علامت ضریب t است. اکنون با دانسته‌های بالا جدول زیر را رسم می‌کنیم.

t	۰		۱		۲		$+\infty$
v	۰	−		−	۰	+	
a		−	۰	+		+	
av		+ تندشونده		− کندشونده	لحظهٔ تغییر جهت حرکت	+ تندشونده	

تذکر: دقت شود که علامت شتاب به تنهایی نوع حرکت را روی خط راست مشخص نمی‌کند و باید علامت سرعت و شتاب هر دو تعیین شود.

ج) برای یافتن جابه‌جایی در سه ثانیهٔ آغازین، مکان در $t=0$ و $t=3s$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} t_1=0 \Rightarrow x_1=0-0+6=6m \\ t_2=3s \Rightarrow x_2=3^3-3(3)^2+6=6m \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x_2-x_1=0$$

پس جابه‌جایی متحرک در $3s$ آغازین، صفر است.

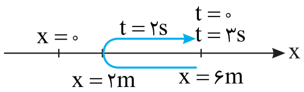
دقت شود که مکان متحرک در لحظهٔ $t=3s$، $+6$ متری مبدأ است. یعنی مفهوم مکان و جابه‌جایی یکسان نیست.

چ) اشتباه نکنید مسافت طی شده ۱۲ متر نمی‌شود. باید در حل این نوع مسائل مشخص گردد که متحرک در بازهٔ زمانی داده شده تغییر جهت داده است یا نه؟

از این رو باید مشخص گردد که در چه لحظه‌ای و در چه مکانی متحرک تغییر جهت می‌دهد. $\quad v=0 \Rightarrow 3t^2-6t=0 \Rightarrow t=2s \quad , \quad x=2m$

حال به شکل روبه‌رو دقت کنید:

در مدت $3s$ متحرک از $x=6m$ به $x=2m$ رفته و سپس به $x=6m$ برگشته است، پس در مجموع ۸ متر مسافت طی کرده است.



ح) همان‌گونه که قبلاً بیان شد، باید مکان‌های متحرک را در $t=5s$ و $t=4s$ به‌دست آورده، آن‌ها را از هم کم کرد.

$$\begin{cases} t=5s \Rightarrow x=5^3-3(5)^2+6=56m \\ t=4s \Rightarrow x=4^3-3(4)^2+6=22m \end{cases} \Rightarrow x_{(5)}=56-22=34m$$

با این مثال ساده، تفاوت مکان، تغییر مکان، مسافت طی شده، جابه‌جایی در t ثانیه و جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام بررسی شد.

ضمیمه ۲
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- متحرکی روی محور x حرکت می‌کند. اگر $x'>0$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) حرکت تندشونده است. ۲) حرکت کندشونده است.
۳) حرکت یکنواخت و در جهت مثبت محور x است. ۴) با توجه به شرایط هر کدام از سه حالت ممکن است.

۲- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=t^3-3t+1$ است. در چه مکانی برحسب متر، متحرک تغییر جهت می‌دهد؟

۱) -1 ۲) $+1$ ۳) $+2$ ۴) -2

۳- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=t^3-3t+1$ است. مسافت طی‌شده در ثانیهٔ دوم حرکت چند متر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) -1 ۴) صفر

۴- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=t^3-3t+1$ است. مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۶

۵- اگر معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست در حرکت است در SI به‌صورت $x=2t^3+3t$ باشد، مسافت طی شده در ثانیهٔ دوم چند متراست؟

۱) ۵ ۲) ۱۷ ۳) ۲۲ ۴) ۲۷

۶- معادلهٔ مکان- زمان متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=t^3-6t$ است. در کدام بازهٔ زمانی متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت است؟

۱) $0<t<2$ ۲) $t>2$ ۳) $t>\sqrt{2}$ ۴) $0<t<\sqrt{2}$

۷- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=-t^2+4t+5$ است. مسافت طی شدهٔ این متحرک در ۵ ثانیهٔ اول حرکتش چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) -5 ۴) ۱۳

۸- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=t^3+2t^2-4$ است. در کدام بازهٔ زمانی، متحرک در خلاف جهت محور x ها در حرکت است؟

۱) $0<t<\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}<t<2$ ۳) $t>0$ ۴) هیچ‌کدام

۹- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=-t^3-2t^2-4$ است. در کدام بازهٔ زمانی، حرکت کندشونده است؟

۱) $0<t<1$ ۲) $t>1$
۳) $t>0$ ۴) هرگز حرکت کندشونده نخواهد بود.

۱۰- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-4t$ است. متحرک چند بار تغییر جهت می‌دهد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=t^3-3t^2+3t-1$ است. متحرک چند بار تغییر جهت می‌دهد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲- معادلهٔ سرعت متحرکی در SI به‌صورت $v=-6t^2+6t$ است. اگر حرکت متحرک در مسیر مستقیم بوده و مکان در لحظهٔ $t=1s$ نقطهٔ $x=-2m$ باشد، معادلهٔ مکان کدام است؟ سراسری ریاضی - ۸۶

۱) $x=-12t+6$ ۲) $x=-12t+10$
۳) $x=-3t^2+3t-3$ ۴) $x=-2t^3+3t^2-3$

۱۳- معادلهٔ مکان- زمان جسمی در SI به‌صورت $x=-t^2+4t-4$ است. در فاصلهٔ زمانی بین $t_1=0$ تا $t_2=4s$، مسافت طی شده توسط جسم چند متر است؟ سراسری خارج از کشور تجربی-۸۸

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴- **معادلهٔ مکان-زمان متحرکی در SI به صورت** $x = t^{3} - 6t^{2} + 9t - 8$ **است. کدام گزینه درست است؟**

۱) در $t = 2s$ بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد.
۲) در $t = 1s$ بردار سرعت تغییر جهت می‌دهد.
۳) در $t = 4s$ حرکت تندشونده است.
۴) هر سه گزینه درست است.

۱۵- **معادلهٔ سرعت- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت** $v = 200 - 8t^{2}$ **است. کدام گزینه درست است؟** $(t \geq 0)$

سراسری خارج از کشور ریاضی-۹۱

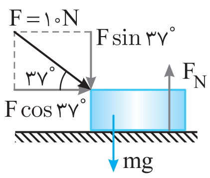
۱) بزرگی شتاب در حال کاهش است
۲) از صفر تا ۵ ثانیه حرکت تندشونده است.
۳) در لحظهٔ $t = 5s$ جهت شتاب تغییر می‌کند.
۴) حرکت ابتدا در جهت محور x، سپس خلاف جهت محور x است.

۱۶- **معادلهٔ حرکت جسمی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به صورت** $x = 3t^{2} - t^{3} + 1$ **است. در بازهٔ زمانی بین** $t = 0$ **تا** $t = 2s$، ....

۱) جهت شتاب عوض نمی‌شود.
۲) جهت حرکت جسم تغییر نمی‌کند.
۳) جهت حرکت یک بار عوض می‌شود.
۴) حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده می‌شود.

ضمیمه ۲ کاربرد مشتق در حرکت‌شناسی

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱- گزینهٔ ۴ A
مشتق مکان نسبت به زمان برابر سرعت لحظه‌ای است $v=x'$ و علامت سرعت به تنهایی دربارهٔ نوع حرکت چیزی را مشخص نمی‌کند. $x'>۰$ تنها نشان می‌دهد که متحرک در جهت مثبت محور در حال پیشروی است و ممکن است مقدار سرعت ثابت باشد و یا سرعت در حال کاهش (حرکت کندشونده) و یا در حال افزایش (حرکت تندشونده) باشد.
فراموش نکنیم که برای مشخص شدن کندشونده و تندشونده بودن حرکت باید علامت سرعت و علامت شتاب هر دو مشخص باشد. اگر بردار سرعت و شتاب هم‌علامت باشند $(av>۰)$ حرکت تندشونده و اگر بردار سرعت و شتاب هم‌علامت نباشند $(av<۰)$ حرکت کندشونده است.

۲- گزینهٔ ۱ A
متحرکی که روی خط راست (محور x ها) در حرکت است، برای تغییر جهت ابتدا باید سرعتش صفر شود. از این‌رو ابتدا معادلهٔ سرعت-زمان را به کمک مشتق‌گیری از معادلهٔ مکان-زمان به دست آورده، لحظهٔ صفر شدن سرعت و تغییر جهت را حساب می‌کنیم:

$$v=x' \Rightarrow v=۳t^۲-۳ \xrightarrow{v=۰} ۳t^۲-۳=۰ \Rightarrow t^۲=۱ \Rightarrow t=۱s$$

$$x=t^۳-۳t+۱ \Rightarrow x=۱-۳+۱ \Rightarrow x=-۱m$$

۳- گزینهٔ ۲ A
بازهٔ زمانی ثانیهٔ دوم یعنی از $t=۱s$ تا $t=۲s$. ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا در این بازه سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟

$$v=x' \Rightarrow v=۳t^۲-۳ \xrightarrow{v=۰} ۳t^۲-۳=۰ \Rightarrow t=۱s$$

بنابراین در بازهٔ مورد نظر تغییر جهت رخ نمی‌دهد و مسافت طی شده با جابه‌جایی متحرک یکسان است:

$$\begin{cases} t_۱=۱s \Rightarrow x_۱=۱-۳+۱=-۱m \\ t_۲=۲s \Rightarrow x_۲=۸-۳\times۲+۱=+۳m \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x_۲-x_۱ \Rightarrow \Delta x=۳-(-۱)=۴m$$

۴- گزینهٔ ۴ B
بازهٔ زمانی دو ثانیهٔ اول یعنی از $t=۰$ تا $t=۲s$. ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا در این بازه، سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟

$$v=x' \Rightarrow v=۳t^۲-۳ \xrightarrow{v=۰} ۳t^۲-۳=۰ \Rightarrow t=۱s$$

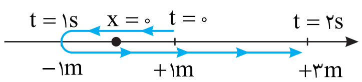
$$x=(۱)^۳-۳\times(۱)^۲+۱ \Rightarrow x=-۱m$$

بنابراین متحرک در لحظهٔ $t=۱s$ و مکان $x=-۱m$ تغییر جهت داده است.
اکنون مکان متحرک در ابتدا و انتهای بازهٔ مورد نظر را به‌دست می‌آوریم:

$$t=۰ \Rightarrow x=+۱m$$

$$t=۲s \Rightarrow x=۸-۶+۱=+۳m$$

پس متحرک از مکان $+۱m$ به مکان $-۱m$ رفته و سپس به مکان $x=+۳m$ برگشته است و مسافت طی‌شده برابر است با: $۲+۴=۶m$



۵- گزینهٔ ۲ A
مسافت طی‌شده در ثانیهٔ دوم، یعنی مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $t=۱s$ تا $t=۲s$. بنابراین در معادلهٔ حرکت $t_۱=۱s$ و $t_۲=۲s$ را قرار می‌دهیم و مکان‌های حاصل را از هم کم می‌کنیم:

$$x=۲t^۳+۳t: \begin{cases} t=۱s \Rightarrow x_۱=۵m \\ t=۲s \Rightarrow x_۲=۲۲m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_{(۲)}=۲۲-۵=۱۷m$$

دقت کنید اگر معادلهٔ سرعت-زمان این متحرک را به‌دست آوریم سرعت صفر نمی‌شود و متحرک در هیچ لحظه‌ای پس از $t=۰$ تغییر جهت نمی‌دهد و مسافت طی‌شده همان جابه‌جایی است.

$$v=x' \Rightarrow v=۶t^۲+۳ \Rightarrow v\neq۰$$

۶- گزینهٔ ۴ A
ابتدا معادلهٔ سرعت-زمان را به‌دست می‌آوریم. در مدتی که متحرک دارای سرعت منفی می‌باشد، متحرک در حال حرکت در جهت منفی محور است.

$$v=x' \Rightarrow v=۳t^۲-۶ \Rightarrow ۳t^۲-۶=۰ \Rightarrow t^۲=۲ \Rightarrow t=\sqrt{۲}s$$

اکنون سرعت را تعیین علامت می‌کنیم؛ با توجه به جدول روبه‌رو، متحرک در بازهٔ $t=۰$ تا $t=\sqrt{۲}s$ در جهت منفی محور در حال حرکت است.

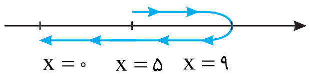
t	۰		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
v		−	۰	+	

تغییر جهت

۷- گزینهٔ ۴ B
راه‌حل اول: مسافت طی شده یعنی طول کل مسیری که متحرک در ۵ ثانیه طی می‌کند. پس باید بررسی کرد که متحرک متوقف می‌شود و جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد یا خیر؟ برای این منظور ابتدا معادلهٔ سرعت - زمان را به‌دست می‌آوریم: $v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow v=-2t+4\xrightarrow{v=0}-2t+4=0\Rightarrow t=2s$

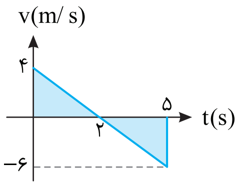
پس در لحظهٔ $t=2s$ سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد. حال مکان تغییر جهت را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$x=-t^2+4t+5\xrightarrow{t=2s}x=-4+8+5=9m$$



در لحظهٔ $t=0$ متحرک در مکان $+5m$، در لحظهٔ $t=2s$ در مکان $+9m$ و در لحظهٔ $t=5s$ در مکان $x=0$ است. پس در کل، مسافت طی شده برابر است با: $4+9=13m$

راه‌حل دوم: می‌توانیم نمودار سرعت - زمان $v=-2t+4$ را در مدت $5s$ رسم کرده و قدرمطلق سطح‌های محصور بین نمودار و محور زمان را جمع کنیم.



$$\text{مسافت طی شده}=\left|\frac{4\times 2}{2}\right|+\left|\frac{-6\times 3}{2}\right|=13m$$

۸- گزینهٔ ۴ A
ابتدا معادلهٔ سرعت - زمان را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم. در بازهٔ زمانی که سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x ها در حرکت است و در بازهٔ زمانی که سرعت مثبت است، متحرک در جهت مثبت محور در حرکت است.

$$v=x'\Rightarrow v=3t^2+4t=0\Rightarrow t=0 \quad , \quad t=-\frac{4}{3}s \text{ غ ق ق}$$

در تمام مدت حرکت متحرک پس از لحظهٔ $t=0$، همواره سرعت مثبت و همواره حرکت در جهت مثبت محور x ها است.

۹- گزینهٔ ۴ A
در حرکت کندشونده، سرعت متحرک در حال کاهش است و بردار شتاب و بردار سرعت در خلاف جهت هم هستند. معادلهٔ سرعت - زمان و معادلهٔ شتاب - زمان را به‌دست آورده و آن‌ها را تعیین‌علامت می‌کنیم:

$$v=x'\Rightarrow v=-3t^2-4t\xrightarrow{v=0}\begin{cases}t=0\\ t=-\frac{4}{3}s \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

$$a=v\Rightarrow a=-6t-4\xrightarrow{a=0}t=-\frac{2}{3}s \text{ غ ق ق}$$

t	۰ +∞
v	−
a	−
av	+

با توجه به جدول تعیین‌علامت، هرگز حرکت این متحرک کندشونده نخواهد بود.

۱۰- گزینهٔ ۲ A
متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر شده و سرعت تغییر علامت بدهد.
معادلهٔ سرعت - زمان را به‌دست آورده، سرعت را مساوی صفر قرار می‌دهیم. $v=x'\Rightarrow v=t^2+3t-4$

$$v=0\Rightarrow t^2+3t-4=0\Rightarrow (t-1)(t+4)=0\Rightarrow\begin{cases}t=1s\\ t=-4s \text{ غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

در لحظهٔ $t=1s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد.

۱۱- گزینهٔ ۱ A
متحرک لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر شده و سرعت تغییر علامت بدهد.

$$v=x'\Rightarrow v=3t^2-6t+3\xrightarrow{v=0}3(t^2-2t+1)=0\Rightarrow 3(t-1)^2=0\Rightarrow t=1s$$

با آن‌که در لحظهٔ $t=1s$ سرعت صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد و سرعت $3(t-1)^2$ همواره مثبت است بنابراین متحرک در هیچ لحظه‌ای تغییر جهت نمی‌دهد.

۱۲- گزینهٔ ۴ A
می‌دانیم سرعت لحظه‌ای، مشتق مکان نسبت به زمان است، بنابراین باید از خود بپرسیم از چه عبارتی مشتق بگیریم تا $-6t^2$ به‌دست آید که قطعاً $-2t^3$ به ذهن ما می‌رسد و با گرفتن مشتق از $3t^2$ عبارت $6t$ به‌دست می‌آید، از این‌رو معادلهٔ مکان - زمان متحرک خواهد شد: $x=-2t^3+3t^2+x_0$

با توجه به فرض پرسش در $t=1s$، $x=-2m$ می‌باشد: $-2=2\times(1)^3+3\times(1)^2+x_0\Rightarrow x_0=-3m$

$$x=-2t^3+3t^2-3$$

البته بدون حل نیز می‌توان گزینهٔ (۴) را انتخاب کرد، زیرا معادلهٔ سرعت - زمان تابع درجهٔ ۲ است و قطعاً معادلهٔ مکان - زمان تابع درجهٔ ۳ است.

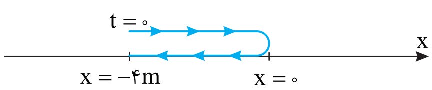
۱۳- گزینهٔ ۴ A
هرگاه در یک پرسش، که معادلهٔ مکان - زمان در آن مشخص است در مورد مسافت طی‌شده سؤال شود، ابتدا باید مشخص گردد که در بازهٔ زمانی مورد نظر، متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟ برای این منظور باید تعیین کرد در چه لحظه‌ای و در چه مکانی سرعت صفر می‌شود.

$$v=x'\Rightarrow v=-2t+4\xrightarrow{v=0}-2t+4=0\Rightarrow t=2s$$

$$x=-(2)^2+4\times 2-4=0$$

حال مکان متحرک را در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی به‌دست می‌آوریم: $t_1=0\Rightarrow x_1=-4m$

$$t_2=4s\Rightarrow x_2=-16+16-4=-4m$$



با توجه به شکل مسافت طی‌شده برابر است با: $d=4+4=8m$

۱۴- گزینۀ ۴ ابتدا معادلۀ سرعت- زمان و معادلۀ شتاب- زمان را به کمک مشتق‌گیری به دست می‌آوریم.

$v=x' \Rightarrow v=۳t^{۲}-۱۲t+۹$

$a=v' \Rightarrow a=۶t-۱۲$

برای تغییر جهت بردار شتاب باید ابتدا شتاب صفر شود و سپس تغییر علامت دهد. از این‌رو شتاب را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$a=۰ \Rightarrow ۶t-۱۲=۰ \Rightarrow t=۲s$

معادلۀ شتاب تابع درجه یک است که در دو طرف ریشه‌اش تغییر علامت می‌دهد بنابراین در $t=۲s$ بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد. گزینۀ (۱) درست است.

برای بررسی تغییر جهت بردار سرعت، معادلۀ سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$۳t^{۲}-۱۲t+۹=۰ \Rightarrow t^{۲}-۴t+۳=۰ \Rightarrow (t-۱)(t-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱s \\ t=۳s \end{cases}$$

در معادلۀ درجه ۲ در دو طرف ریشه تغییر علامت وجود دارد پس سرعت در لحظه‌های $t=۱s$ و $t=۳s$ تغییر علامت می‌دهد و گزینۀ (۲) درست است.

در لحظۀ $t=۴s$ سرعت و شتاب را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} v=۳(۴)^{۲}-۱۲(۴)+۹ \Rightarrow v=۴۸-۴۸+۹=۹>۰ \\ a=۶(۴)-۱۲=۱۲>۰ \end{array}\right\} \Rightarrow av>۰ \quad \text{حرکت تندشونده}$$

بنابراین گزینۀ (۳) نیز درست است.

۱۵- گزینۀ ۴ ابتدا معادلۀ شتاب-زمان را با مشتق‌گیری از معادلۀ سرعت- زمان به دست می‌آوریم.

$a=v' \Rightarrow a=-۱۶t$

کاملاً مشخص است که با گذشت زمان، بزرگی شتاب در حال افزایش است و گزینۀ (۱) نادرست است، همچنین گزینۀ (۳).

سرعت را تعیین علامت می‌کنیم.

$v=۰ \Rightarrow ۲۰۰-۸t^{۲}=۰ \Rightarrow t^{۲}=۲۵ \Rightarrow t=۵s, t=-۵s$ غ.ق.ق

علامت تابع بین دو ریشه مخالف علامت ضریب $t^{۲}$ بوده و مطابق جدول روبه‌رو در بازۀ صفر تا $+۵s$ سرعت مثبت اما شتاب $(a=-۱۶t)$ منفی بوده و حرکت کندشونده است بنابراین گزینۀ (۲) نادرست است. همچنین در بازۀ صفر تا $+۵s$ علامت سرعت مثبت بوده و حرکت در جهت محور xها است و برای $t>۵s$ علامت سرعت منفی شده و در خلاف جهت محورxها بوده بنابراین گزینۀ (۴) درست است.

t	$-\infty$		-۵		۰		$+۵$		$+\infty$
v		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
a		غ.ق.ق				$-$		$-$	

۱۶- گزینۀ ۲ معادلۀ سرعت- زمان و معادلۀ شتاب-زمان را به کمک مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم.

$$v=x' \Rightarrow v=۶t-۳t^{۲} \xrightarrow{a=\frac{dv}{dt}} a=۶-۶t$$

ریشۀ معادلۀ شتاب- زمان را به دست می‌آوریم زیرا در لحظه‌ای که شتاب صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد جهت بردار شتاب عوض می‌شود.

$a=۰ \Rightarrow ۶-۶t=۰ \Rightarrow t=۱s$

تابع درجه یک بوده و علامت آن در دو طرف ریشه تغییر می‌کند، پس جهت بردار شتاب در لحظۀ $t=۱s$ عوض می‌شود و گزینۀ (۱) نادرست است.

ریشۀ معادلۀ سرعت- زمان را به دست می‌آوریم.

t	$-\infty$	۰		۱		۲		$+\infty$
v		۰	$+$		$+$	۰	$-$	
a	غ.ق.ق		$+$	۰	$-$		$-$	
av			$+$ تندشونده		$-$ کندشونده		$+$ تندشونده	

$$v=۰ \Rightarrow ۶t-۳t^{۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ t=۲s \end{cases}$$

پس در بازۀ صفر تا $۲s$ علامت سرعت عوض نمی‌شود و جهت حرکت جسم تغییر نمی‌کند بنابراین گزینۀ (۲) درست و گزینۀ (۳) نادرست است. هر چند که حل مسأله تمام شده، گزینۀ (۴) را نیز بررسی می‌کنیم. هر دو معادلۀ سرعت و شتاب را تعیین علامت می‌کنیم با توجه به جدول گزینۀ (۴) نادرست است.