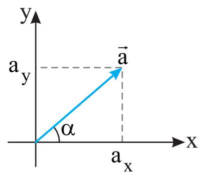
ضمیمه ۱ کاربرد ریاضی در فیزیک



در ریاضیات پایهٔ هشتم و در فیزیک پایهٔ دهم، با بردار و تجزیهٔ آن به دو بردار عمود بر هم روی محور xها و محور yها آشنا شدید و فرا گرفتید که یک بردار را مطابق شکل بر حسب مؤلفه‌هایش می‌توان به صورت زیر نوشت:

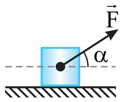
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$a_x = a\cos\alpha \,,\, a_y = a\sin\alpha$$

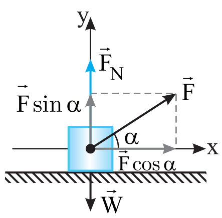
اکنون می‌خواهیم مسائل ساده‌ای در فیزیک را با این ریاضیات حل کنیم.

در قسمت‌های زیر نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

الف) جسم تحت تأثیر نیروی غیرافقی F کشیده می‌شود:

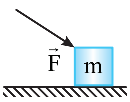


ابتدا نیروی F را در امتداد افق و راستای قائم تجزیه کرده، سپس برایند نیروها را روی محور y ها مساوی صفر قرار می‌دهیم.

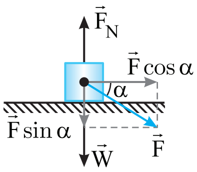


$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F_N + F\sin\alpha = W \Rightarrow F_N = mg - F\sin\alpha$$

ب) جسم تحت تأثیر نیروی غیرافقی F هُل داده می‌شود:

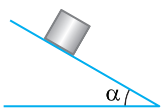


هم‌سنگ نیروی F را از مرکز جرم جسم (گرانیگاه جسم) رسم می‌کنیم.

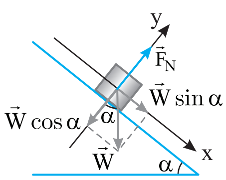


$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F_N = mg + F\sin\alpha$$

پ) جسم روی سطح شیب‌دار:

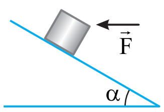


برای یافتن نیروی عمودی سطح، ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و آن‌ها را روی محور x و y مطابق شکل روبه‌رو تجزیه می‌کنیم. برایند نیروها را روی محور y ها برابر صفر قرار می‌دهیم.



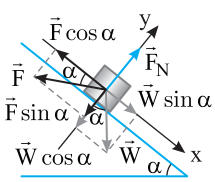
$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F_N = W\cos\alpha$$

ج) بر جسم روی سطح شیب‌دار نیروی افقی F وارد می‌شود:

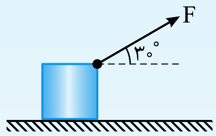


دقت کنید که ابتدا باید محور x و محور y را مشخص کرده و نیروهای وارد بر جسم که در امتداد محور y ها مؤلفه دارند رسم کنیم. محور x موازی سطح شیب‌دار و محور y عمود بر سطح شیب‌دار انتخاب می‌شود.

$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F_N = W\cos\alpha + F\sin\alpha$$



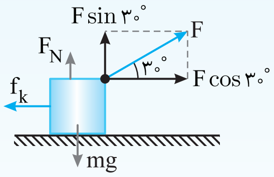
تست ۱ **در شکل روبه‌رو نیروی ثابت F جسمی به جرم $15kg$ را روی سطح افقی با سرعت ثابت روی خط راست جابه‌جا می‌کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی با سطح $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، نیروی F چند نیوتون است؟**



کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۵۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۵۰
۴) ۷۵

پاسخ نیروهای وارد بر جسم هم‌راستا نیستند، بنابراین همهٔ نیروها را به دو مؤلفهٔ افقی و قائم تجزیه می‌کنیم.



$$F_{net_y}=0$$

$$F_N+F\sin 30^\circ-mg=0$$

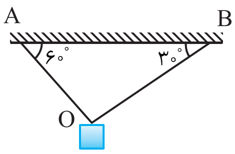
$$F_N=mg-F\sin 30^\circ \Rightarrow F_N=150-\frac{F}{2}$$

سرعت جسم در راستای افقی ثابت است $(a=0)$:

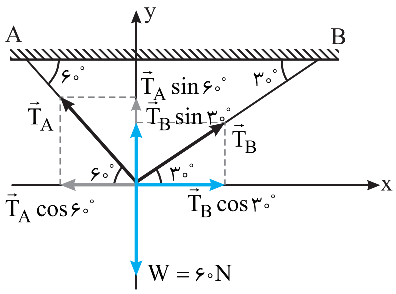
$$F_{net_x}=0\Rightarrow F\cos 30^\circ-f_k=0\Rightarrow F\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\mu_k F_N=0\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}F-\frac{\sqrt{3}}{2}(150-\frac{F}{2})=0\Rightarrow F-150+\frac{F}{2}=0\Rightarrow F=100N$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

مسأله ۱ **در شکل روبه‌رو، وزنهٔ ۶۰ نیوتونی که از دو ریسمان OA و OB با جرم ناچیز آویزان است، در تعادل است. کشش نخ‌های OA و OB را بیابید.**



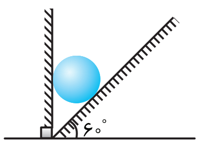
راه‌حل ابتدا نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. چون جسم در تعادل است، برایند نیروهای وارد بر آن صفر است، بنابراین مجموع مؤلفه‌ها روی هر محور مختصات صفر خواهد بود.



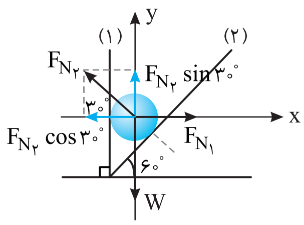
$$F_{net}=0\Rightarrow\begin{cases}F_{net,x}=0\Rightarrow T_A\cos 60^\circ=T_B\cos 30^\circ\\ F_{net,y}=0\Rightarrow W=T_A\sin 60^\circ+T_B\sin 30^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}T_A=\sqrt{3}\,T_B\\ \frac{\sqrt{3}}{2}T_A+\frac{1}{2}T_B=60\end{cases}\Rightarrow T_A=30\sqrt{3}\,N\quad,\quad T_B=30\,N$$

مسأله ۲ **یک گوی به وزن $100N$ درون ناوه‌ای قرار دارد. نیرویی که گوی بر هر سطح وارد می‌کند چند نیوتون است؟ (سطوح بدون اصطکاک هستند.)**



راه‌حل نمودار نیروهای وارد بر گوی را رسم می‌کنیم. **به یاد داشته باشیم همواره سطح بدون اصطکاک، تنها نیرویی عمودی بر سطح (F_N) را بر جسم وارد می‌کند.** از طرفی طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر همان نیرویی است که جسم بر سطح وارد می‌کند.



$$F_{net}=0\Rightarrow\begin{cases}F_{net,x}=0\Rightarrow F_{N_1}=F_{N_2}\cos 30^\circ\\ F_{net,y}=0\Rightarrow W=F_{N_2}\sin 30^\circ\Rightarrow 100=F_{N_2}\times\frac{1}{2}\Rightarrow F_{N_2}=200N\end{cases}$$

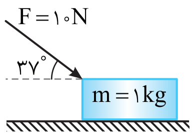
$$F_{N_1}=200\times\frac{\sqrt{3}}{2}=100\sqrt{3}\,N$$

شما این مسأله را به کمک قانون سینوس‌ها حل کنید.

ضمیمه ۱

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

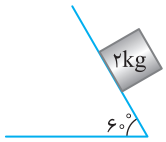
۱- در شکل روبه‌رو، نیروی عمودی سطح وارد بر جسم برابر چند نیوتون است؟



(sin ۳۷° = ۰/۶ , g = ۱۰N/kg)

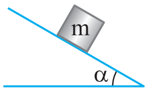
۱) ۱۲ ۲) ۱۴
۳) ۱۶ ۴) ۴

۲- نیروی عمودی تکیه‌گاه وارد شده از طرف سطح بر جسم ۲kg برابر چند نیوتون است؟



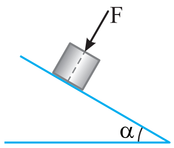
۱) ۵ ۲) ۱۰
۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۳- در شکل روبه‌رو با افزایش α نیروی عمودی سطح چگونه تغییر می‌کند؟



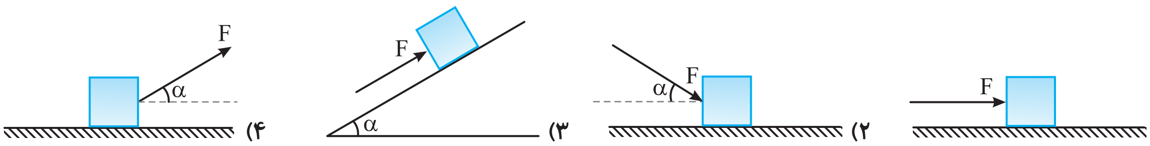
۱) تغییری نمی‌کند. ۲) افزایش می‌یابد.
۳) کاهش می‌یابد. ۴) ابتدا افزایش و سپس کاهش

۴- در شکل روبه‌رو نیروی عمودی سطح برابر نیروی وزن است. F برابر کدام گزینه می‌باشد؟

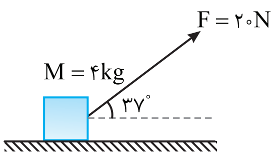


۱) mg ۲) $mg\sin\alpha$
۳) $mg(1-\cos\alpha)$ ۴) $mg(1-\sin\alpha)$

۵- مطابق شکل، بر جسمی در ۴ حالت، نیروی F با اندازهٔ یکسان وارد می‌شود و جسم در حرکت است. هرگاه ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح در تمام حالات یکسان باشد، نیروی اصطکاک در برابر حرکت در کدام حالت بیشترین مقدار را دارد؟

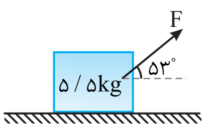


۶- در شکل روبه‌رو، اگر شتاب حرکت برابر $۲/۲۵m/s^۲$ باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین وزنه و سطح افقی کدام است؟ (g = ۱۰N/kg , cos ۳۷° = ۰/۸)



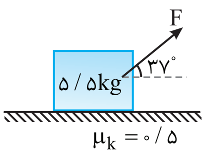
۱) ۰/۵ ۲) ۰/۳۳
۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲

۷- در شکل مقابل، F را به تدریج زیاد می‌کنیم، وقتی به ۲۰ نیوتون رسید وزنه روی سطح افقی شروع به حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی چقدر است؟ $(\cos ۵۳° = ۰/۶ \ , \ g = ۱۰m/s^۲)$



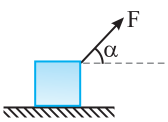
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۸- در شکل زیر جسم با سرعت ثابت در سطح افقی در حال حرکت است. اگر نیروی F دو برابر شود، نیروی اصطکاک جنبشی چند برابر می‌شود؟ $(\sin ۳۷° = ۰/۶, g = ۱۰m/s^۲)$ تجربی - ۹۵



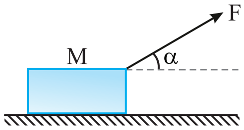
۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) ۱ ۴) ۲

۹- در شکل روبه‌رو، برای این‌که بتوانیم با حداقل مقدار نیروی F، جسم را روی سطح افقی به آستانهٔ حرکت در بیاوریم، زاویهٔ α چقدر باید باشد؟ $(\mu_s = \frac{۳}{۴} \ , \ g = ۱۰m/s^۲)$



۱) $\sin\alpha = \frac{۳}{۴}$ ۲) $\tan\alpha = \frac{۳}{۴}$ ۳) $\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$ ۴) $\cos\alpha = \frac{۳}{۴}$

۱۰- مطابق شکل روبه‌رو، به جسمی به جرم M که روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد، نیروی F وارد می‌شود. اگر راستای F ثابت بماند و اندازهٔ آن به تدریج افزایش یابد، کمترین مقدار F چقدر باید باشد تا وزنه از روی سطح بلند شود؟

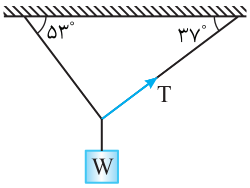


۱) $\frac{mg}{\sin\alpha}$ ۲) $\frac{mg}{\cos\alpha}$ ۳) $mg\cos\alpha$ ۴) $mg\sin\alpha$

کاربرد ریاضی در فیزیک در حل مسائل تعادل

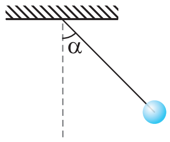
۱۱- در شکل مقابل جرم نخ‌ها ناچیز است. اگر $T=6N$ باشد، W چند نیوتون است؟ سراسری ریاضی - ۸۹

$(\cos 37^\circ = 0/8)$



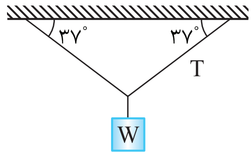
۱) ۸ ۲) ۱۰
۳) ۱۲ ۴) ۱۴

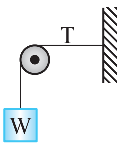
۱۲- در شکل روبه‌رو، گلوله‌ای از یک ریسمان آویزان و مطابق شکل در حال تعادل است. حداقل چند نیرو به آن وارد می‌شود؟ سراسری ریاضی - ۸۹

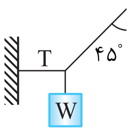


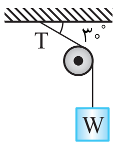
۱) ۴ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) نمی‌توان گفت

۱۳- در کدام‌یک از شکل‌های زیر، نیروی کشش نخ T کوچک‌تر از نیروی وزن W است؟ (جرم نخ، قرقره و اصطکاک ناچیز است.)

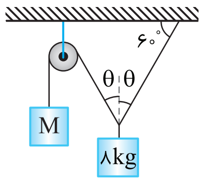
۱) 

۲) 

۳) 

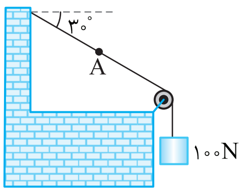
۴) 

۱۴- در شکل روبه‌رو دستگاه در حال تعادل است. جرم M چند کیلوگرم است؟ $(g=10N/kg)$



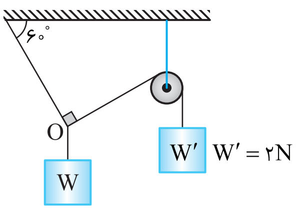
۱) ۸ ۲) $4\sqrt{3}$
۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

۱۵- دستگاه مقابل در حال تعادل است. نیروی کشش نخ در نقطهٔ A چند نیوتون است؟ (جرم نخ و اصطکاک ناچیز است.)



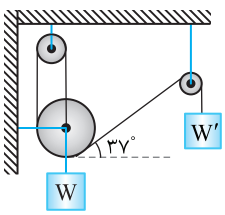
۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰
۳) ۱۵۰ ۴) ۲۰۰

۱۶- در شکل روبه‌رو، وزنه‌ها در حال تعادل‌اند. W چند نیوتون است؟ (جرم قرقره و نخ‌ها و اصطکاک بین آن‌ها ناچیز است.) سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۸



۱) ۴ ۲) $2\sqrt{3}$
۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

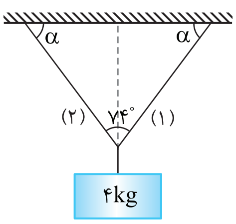
۱۷- در شکل روبه‌رو دستگاه در تعادل است، $\frac{W}{W'}$ کدام است؟ (جنس نخ‌ها یکسان است.)



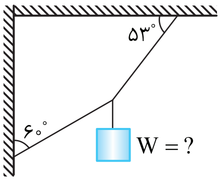
۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۲/۶ ۴) ۳

۱۸- اگر در شکل مقابل طول نخ‌های ۱ و ۲ با هم برابر باشند، نیروی کشش هر کدام چند نیوتون است؟ سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۵

$(g=10m/s^2 , \cos 37^\circ = 0/8)$

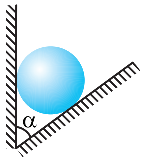


۱) ۲۰ ۲) ۲۵
۳) ۳۰ ۴) ۳۵



۱۹- در شکل روبه‌رو بیشینه نیروی کشش قابل تحمل هر نخ ۸۵N است. بیشینه وزن جسم متصل به نخ‌ها چند نیوتون می‌تواند باشد تا هیچ یک از نخ‌ها پاره نشود؟ $(\cos ۳۰^\circ \approx ۰/۸۵ \;,\; \sin ۵۳^\circ = ۰/۸)$

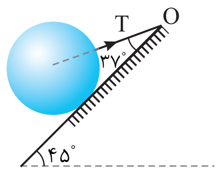
۱) ۴۰
۲) ۵۵
۳) ۳۸
۴) ۶۵



۲۰- در شکل روبه‌رو، وزن کُرهٔ همگن ۸۰ نیوتون و α برابر ۵۳ درجه است. اگر اصطکاک‌ها ناچیز باشد، نیرویی که در حالت تعادل از طرف کُره بر دیوارهٔ قائم وارد می‌شود، چند نیوتون است؟ سراسری ریاضی - ۸۴

$(\sin ۵۳^\circ = ۰/۸)$

۱) صفر
۲) ۴۸
۳) ۶۰
۴) ۸۰



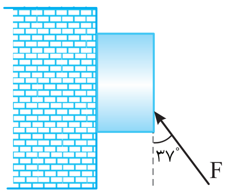
۲۱- مطابق شکل، کره‌ای همگن به جرم ۴ کیلوگرم روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی به زاویهٔ شیب ۴۵ درجه قرار دارد. نیروی کشش نخ (T) چند نیوتون است؟ سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۰

$(\sin ۳۷^\circ = ۰/۶ \;,\; g = ۱۰ m/s^۲)$

۱) ۲۵
۲) ۴۰
۳) $۲۵\sqrt{۲}$
۴) $۴۰\sqrt{۲}$

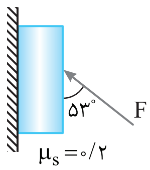
۲۲- جسمی به وزن ۱۲۰ N به وسیلهٔ نیروی افقی F به دیوار قائمی که ضریب اصطکاک در آستانه حرکت آن $\frac{۱}{۴}$ است فشرده می‌شود، حداقل نیروی F برحسب نیوتون برای آن‌که جسم نلغزد برابر است با .... کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲/۵
۲) ۳۰
۳) ۱۲۰
۴) ۴۸۰



۲۳- در شکل روبه‌رو، ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار ۰/۵ و وزن جسم ۱۱۰N است، حداقل نیروی F برای حفظ تعادل وزنه چند نیوتون است؟ $(\sin ۳۷^\circ = ۰/۶)$

۱) ۱۰
۲) ۱۱۰
۳) ۵۵
۴) ۱۰۰



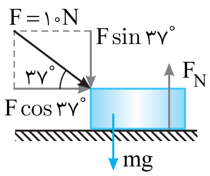
۲۴- در شکل روبه‌رو، به جسمی به وزن ۲۰N که به دیوار قائم تکیه دارد، نیروی F وارد می‌شود. بیشترین مقدار F در حالتی که جسم به حال سکون بماند، چند نیوتون است؟ سراسری خارج از کشور ریاضی- ۹۴

$(\cos ۵۳^\circ = ۰/۶)$

۱) $\frac{۵۰۰}{۱۹}$
۲) $\frac{۵۰۰}{۱۱}$
۳) $\frac{۲۰۰}{۱۹}$
۴) $\frac{۲۰۰}{۱۱}$

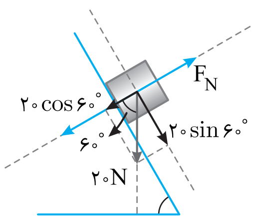
ضمیمه ۱ کاربرد ریاضی در فیزیک

پاسخ پرسش‌های چهار گزینه‌ای



۱- گزینهٔ ۳ (A) ابتدا با توجه به آنچه در دهم خواندید نیرو را تجزیه می‌کنیم:

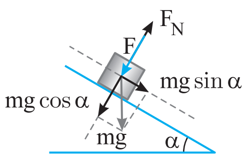
$$F_{y_{net}}=۰\Rightarrow F\sin ۳۷^\circ+mg=F_N\Rightarrow F_N=۱۰\times ۰/۶+۱۰=۱۶N$$



۲- گزینهٔ ۲ (A) نیروها در راستای عمود بر سطح متوازن می‌باشد. بنابراین:

$$F_{y_{net}}=۰\Rightarrow F_N=mg\cos ۶۰^\circ\Rightarrow F_N=۲۰\cos ۶۰^\circ\Rightarrow F_N=۱۰N$$

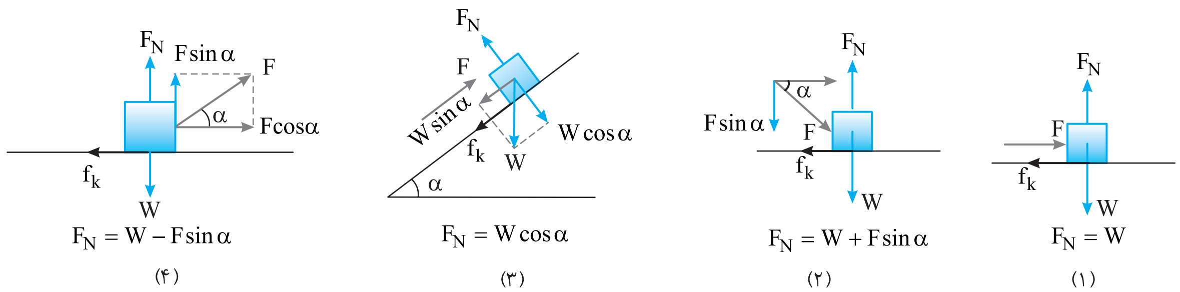
۳- گزینهٔ ۳ (A) روی سطح شیب‌دار نیروی عمودی تکیه‌گاه $F_N=mg\cos\alpha$ است و با افزایش α، $\cos\alpha$ کاهش می‌یابد.



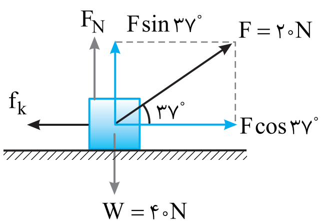
۴- گزینهٔ ۳ (B) نیروها را در راستای عمود بر سطح شیب‌دار می‌نویسیم:

$$F_N=F+mg\cos\alpha \xrightarrow{F_N=mg} mg=F+mg\cos\alpha\Rightarrow F=mg(۱-\cos\alpha)$$

۵- گزینهٔ ۲ (B) نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k=\mu_k F_N)$ است و هر چه نیروی عمودی تکیه‌گاه بیشتر باشد، اصطکاک بیشتر است.



با توجه به شکل‌های بالا، نیروی اصطکاک در شکل گزینهٔ (۲) از بقیه بیشتر است.



۶- گزینهٔ ۳ (B) نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

$$F_{net}=Ma$$

$$F\cos ۳۷^\circ-f_k=Ma \qquad (۱)$$

اما نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر است با:

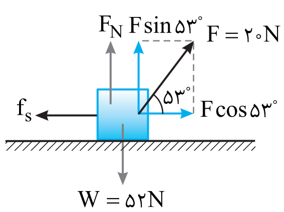
$$F_N=W-F\sin ۳۷^\circ\Rightarrow F_N=۴۰-(۲۰\times ۰/۶)=۲۸\,N$$

و نیروی اصطکاک برابر است با:

$$f_k=\mu_k F_N=۲۸\,\mu_k$$

حال به کمک رابطهٔ (۱)، ضریب اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم:

$$۲۰\times ۰/۸-۲۸\mu_k=۴\times ۲/۲۵\Rightarrow \mu_k=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

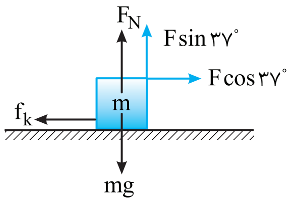


۷- گزینهٔ ۲ (B) جسم وقتی که نیروی $F=۲۰N$ شده است شروع به حرکت می‌کند. بنابراین اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت $f_{s\,max}=F\cos ۵۳^\circ$ است.

$$f_{s\,max}=F\cos ۵۳^\circ$$

$$\mu_s(W-F\sin ۵۳^\circ)=F\cos ۵۳^\circ\Rightarrow \mu_s(۵۲-۲۰\times ۰/۸)=۲۰\times ۰/۶\Rightarrow \mu_s=\frac{۱۲}{۳۶}\Rightarrow \mu_s=\frac{۱}{۳}$$

۸- گزینهٔ ۲ (B)



جسم در حال حرکت افقی است پس برایند نیروها در راستای قائم صفر است:

$$F_N + F\sin ۳۷^\circ = mg \Rightarrow F_N = ۵۵ - ۰/۶F$$

نیروی اصطکاک برابر است با:

$$f_k = \mu_k F_{N_1} = \frac{۱}{۲}(۵۵ - ۰/۶F) \qquad (۱)$$

سرعت ثابت است، از این رو:

$$F\cos ۳۷^\circ = f_k \Rightarrow ۰/۸F = f_k \Rightarrow ۰/۸F = ۲۷/۵ - ۰/۳F \Rightarrow ۱/۱F = ۲۷/۵ \Rightarrow F = ۲۵N \xrightarrow{(۱)} f_k = \frac{۱}{۲}(۵۵ - ۰/۶\times ۲۵) = ۲۰N$$

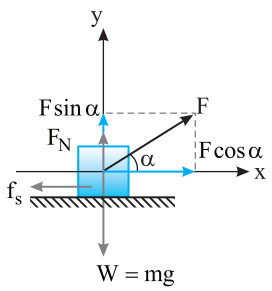
در حالت دوم نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر است با:

$$F'_N + ۲F\sin ۳۷^\circ = mg \Rightarrow F'_N = ۵۵ - ۱/۲F \Rightarrow F'_N = ۵۵ - ۱/۲\times ۲۵ \Rightarrow F'_N = ۵۵ - ۳۰ = ۲۵N \Rightarrow f'_k = \mu_k F'_N = \frac{۱}{۲}\times ۲۵ = ۱۲/۵N$$

پس نسبت نیروهای اصطکاک برابر است با:

$$\frac{f'_k}{f_k} = \frac{۱۲/۵}{۲۰} = \frac{۱۲۵}{۲۰۰} = \frac{۵}{۸}$$

۹- گزینهٔ ۲ (C)



نیروی F را تجزیه می‌کنیم، در آستانهٔ حرکت خواهیم داشت:

$$F\cos\alpha = f_{s\,max} \Rightarrow F\cos\alpha = \mu_s F_N \Rightarrow F\cos\alpha = \mu_s(W - F\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow F\cos\alpha = \frac{۳}{۴}W - \frac{۳}{۴}F\sin\alpha \Rightarrow F(\cos\alpha + \frac{۳}{۴}\sin\alpha) = \frac{۳}{۴}W$$

سمت راست رابطه مقدار ثابتی است بنابراین اگر بخواهیم F کمینه باشد باید عبارت $(\cos\alpha + \frac{۳}{۴}\sin\alpha)$ بیشینه باشد.

در درس ریاضی در مبحث کاربرد مشتق خواهید دید برای آن که بیشینه و کمینه بودن یک تابع را مشخص کنیم مشتق آن را به‌دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم. از این رو مشتق عبارت فوق را به‌دست می‌آوریم:

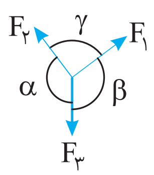
$$-\sin\alpha + \frac{۳}{۴}\cos\alpha = ۰ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۳}{۴}\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۳}{۴}$$

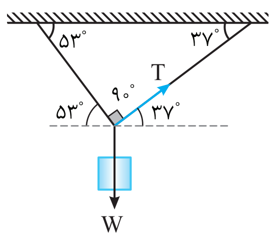
۱۰- گزینهٔ ۱ (B)

حداقل نیروی F که باعث بلند شدن جسم از سطح می‌شود هنگامی رخ می‌دهد که مؤلفهٔ قائم F نیروی وزن را خنثی کند و نیروی عمودی تکیه‌گاه صفر شود.

$$F\sin\alpha = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

۱۱- گزینهٔ ۲ (A)





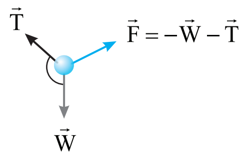
قانون سینوس‌ها: هرگاه برایند ۳ نیرو صفر شود بین اندازه‌های آن‌ها و سینوس زاویهٔ بین آن‌ها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ = ۰ \Rightarrow \frac{F_۱}{\sin\alpha} = \frac{F_۲}{\sin\beta} = \frac{F_۳}{\sin\gamma}$$

به کمک قانون سینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{T}{\sin(۹۰^\circ + ۵۳^\circ)} = \frac{W}{\sin ۹۰^\circ} \Rightarrow \frac{۶}{\cos ۵۳^\circ} = \frac{W}{۱} \Rightarrow \frac{۶}{۰/۶} = W \Rightarrow W = ۱۰N$$

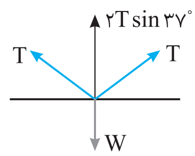
۱۲- گزینهٔ ۳ (B)



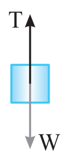
مطابق شکل روبه‌رو بر گلوله نیروی وزن رو به پایین و نیروی کشش نخ در امتداد نخ وارد می‌شود که با هم زاویه می‌سازند و نمی‌توانند یکدیگر را خنثی کرده و گلوله در تعادل بماند. از این رو حداقل یک نیروی دیگر مانند F لازم است تا هم‌اندازه و در خلاف جهت برایند T و W باشد تا آن‌ها را خنثی کند، بنابراین حداقل سه نیرو بر جسم وارد می‌شود.

۱۳- گزینهٔ ۱ (B)

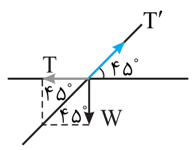
گزینهٔ (۱): $F_{net\,y} = ۰ \Rightarrow ۲T\sin ۳۷^\circ = W \Rightarrow T = \frac{W}{۱/۲}$



، گزینهٔ (۲): $T = W$



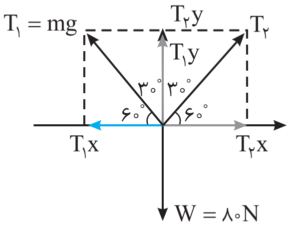
گزینهٔ (۳): $\tan ۴۵^\circ = \frac{T}{W} \Rightarrow T = W$



، گزینهٔ (۴): در طول نخ کشش یکسان است. $T = W$

در شکل گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴)، $T = W$ است، بنابراین کمترین مقدار کشش نخ در شکل گزینهٔ (۱) است.

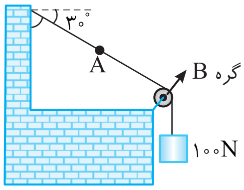
۱۴- گزینهٔ ۴ چون دستگاه در تعادل است کشش نخی که از روی قرقره می‌گذرد برابر $T_۱=Mg$ است. از طرفی $\theta=۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ$



$$\begin{cases} F_{net_x}=۰\Rightarrow T_۱\cos۶۰^\circ=T_۲\cos۶۰^\circ\Rightarrow T_۱=T_۲ \\ F_{net_y}=۰\Rightarrow T_۱\sin۶۰^\circ+T_۲\sin۶۰^\circ=۸۰ \end{cases}\Rightarrow ۲T_۱\sin۶۰^\circ=۸۰\Rightarrow T_۱=\frac{۸۰}{\sqrt{۳}}=\frac{۸۰\sqrt{۳}}{۳}N$$

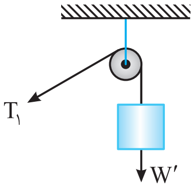
$$T_۱=Mg\Rightarrow\frac{۸۰\sqrt{۳}}{۳}=۱۰M\Rightarrow M=\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}kg$$

۱۵- گزینهٔ ۲ نیروی کشش نخ برابر وزن است و در طول نخ همگن با جرم ناچیز مقدار ثابتی است.



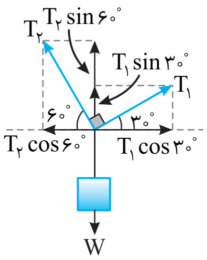
$$T=mg=۱۰۰N$$

۱۶- گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که وزنه‌ها در حال تعادلند، داریم:



در تعادل $W':T_۱-W'=۰\Rightarrow T_۱=W'\Rightarrow T_۱=۲N$

هنگامی‌که اجسام در حال تعادلند، برایند نیروهای وارد بر آن‌ها صفر است.

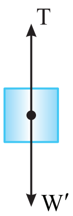


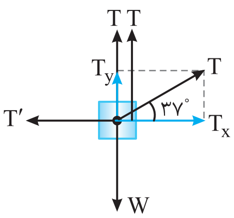
$$F_{net_x}=۰\Rightarrow T_۱\cos۳۰^\circ-T_۲\cos۶۰^\circ=۰\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}W'-\frac{۱}{۲}T_۲=۰\Rightarrow T_۲=\sqrt{۳}W'$$

$$F_{net_y}=۰\Rightarrow T_۱\sin۳۰^\circ+T_۲\sin۶۰^\circ-W=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}W'+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۳}W'=W\Rightarrow ۲W'=W$$

$$\Rightarrow\frac{W}{W'}=۲\Rightarrow\frac{W}{۲}=۲\Rightarrow W=۴N$$

۱۷- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل برای W' می‌توان نوشت:



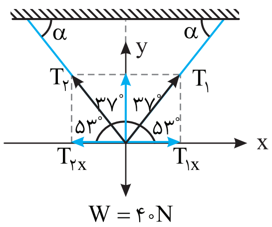


$$W'=T$$

برای وزنهٔ W می‌توان نوشت:

$$W=T+T+T\sin۳۷^\circ\Rightarrow W=۲/۶T \quad , \quad \frac{W}{W'}=\frac{۲/۶T}{T}=۲/۶$$

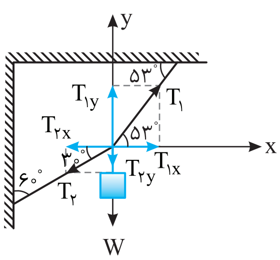
۱۸- گزینهٔ ۲ جسم در تعادل است. پس:



$$F_{net}=۰\Rightarrow\begin{cases} F_{net_x}\Rightarrow T_۱\cos۵۳^\circ=T_۲\cos۵۳^\circ\Rightarrow T_۱=T_۲ \\ F_{net_y}\Rightarrow ۲T_{۱_y}=W\Rightarrow ۲T_۱\sin۵۳^\circ=W \end{cases}$$

$$T_۱=\frac{W}{۲\sin۵۳^\circ}=\frac{۴۰}{۲\times۰/۸}=۲۵N$$

۱۹- گزینهٔ ۳ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. جسم در حال تعادل است:



$$F_{net_x}=۰\Rightarrow T_{۱x}=T_{۲x}\Rightarrow T_۱\cos۵۳^\circ=T_۲\cos۳۰^\circ$$

$$T_۱\times۰/۶=T_۲\times۰/۸۵\Rightarrow T_۲=\frac{۰/۶}{۰/۸۵}T_۱\Rightarrow T_۲=\frac{۶۰}{۸۵}T_۱$$

کشش $T_۱$ بزرگ‌تر از $T_۲$ است بنابراین کشش $T_۱$ می‌تواند $۸۵N$ باشد، اگر کشش $T_۲$ برابر $۸۵N$ شود، کشش $T_۱$ از $۸۵N$ بیشتر و نخ پاره می‌شود. بنابراین:

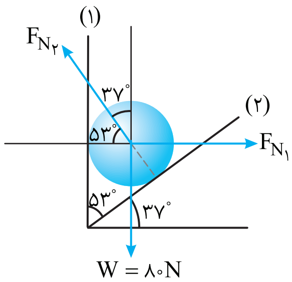
$$T_۲=\frac{۶۰}{۸۵}\times۸۵\Rightarrow T_۲=۶۰N$$

برایند نیروها روی محور yها نیز صفر است از این‌رو:

$$T_۱\sin۵۳^\circ-W-T_۲\sin۳۰^\circ=۰\Rightarrow۸۵\times۰/۸-۶۰\times\frac{۱}{۲}=W\Rightarrow W=۳۸N$$

۲۰- گزینهٔ ۳ A

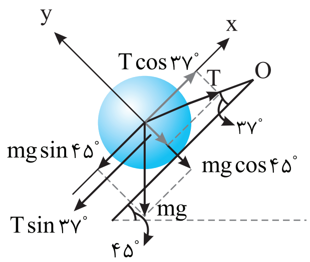
با توجه به شکل روبه‌رو و رسم نیروها، مسأله به کمک قانون سینوس‌ها به راحتی قابل حل است.



$$\frac{W}{\sin(۹۰^\circ+۳۷^\circ)}=\frac{F_{N_۱}}{\sin(۹۰^\circ+۵۳^\circ)}\Rightarrow\frac{۸۰}{\cos ۳۷^\circ}=\frac{F_{N_۱}}{\cos ۵۳^\circ}\Rightarrow\frac{۸۰}{۰/۸}=\frac{F_{N_۱}}{۰/۶}\Rightarrow F_{N_۱}=۶۰N$$

۲۱- گزینهٔ ۳ B

نیروهای وارد بر کره را رسم کرده و روی محورهای x و y مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. جسم در تعادل است و باید برایند نیروهای وارد برجسم صفر شود.

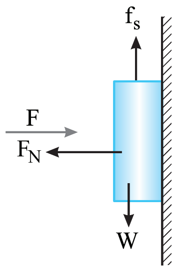


$$F_{net}=۰\Rightarrow F_{net_x}=۰\Rightarrow mg\sin ۴۵^\circ=T\cos ۳۷^\circ$$

$$۴۰\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=T\times ۰/۸\Rightarrow T=۲۵\sqrt{۲}N$$

۲۲- گزینهٔ ۴ B

شکل مسأله را رسم می‌کنیم. جسم ساکن و در تعادل است. بنابراین:



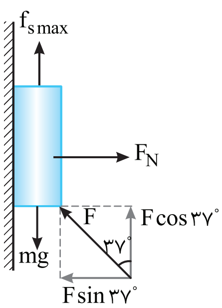
$$F_{net_y}=۰\Rightarrow W=f_s\Rightarrow f_s=۱۲۰N$$

از طرف نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر نیروی F است و می‌توان نوشت:

$$f_s=\mu_s F_N\xrightarrow{F_N=F}۱۲۰=\frac{۱}{۴}\times F\Rightarrow F=۴۸۰N$$

۲۳- گزینهٔ ۴ B

حداقل نیروی F وقتی است که جسم بخواهد به پایین بلغزد در این صورت اصطکاک ایستایی رو به بالا است.



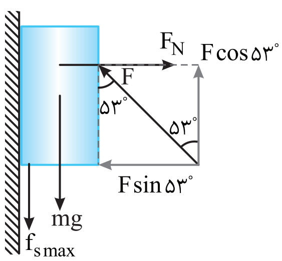
$$F_{net}=۰\Rightarrow mg=f_{s\,max}+F\cos ۳۷^\circ$$

$$\xrightarrow{F_N=F\sin ۳۷^\circ} mg=\mu_s F\sin ۳۷^\circ+F\cos ۳۷^\circ$$

$$۱۱۰=۰/۵\times F\times ۰/۶+F(۰/۸)\Rightarrow F=\frac{۱۱۰}{۱/۱}=۱۰۰N$$

۲۴- گزینهٔ ۲ B

بیشترین مقدار F در حالتی است که جسم در آستانهٔ حرکت رو به بالا قرار گیرد. در این حالت نیروی وزن mg و نیروی اصطکاک ایستایی آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ رو به پایین‌اند. با توجه به شکل:



$$F_N=F\sin ۵۳^\circ \quad , \quad F\cos ۵۳^\circ=mg+f_{s\,max}$$

$$F\cos ۵۳^\circ=mg+\mu_s F_N\Rightarrow F\cos ۵۳^\circ=mg+\mu_s F\sin ۵۳^\circ$$

$$۰/۶F=۲۰+۰/۲F\times ۰/۸\Rightarrow F=\frac{۲۰}{۰/۴۴}\Rightarrow F=\frac{۵۰۰}{۱۱}N$$

ضمیمه ۲ کاربرد مشتق در حرکت‌شناسی

در تعریف مشتق در ریاضی متوجه می‌شویم که مقدار مشتق در هر نقطه برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه است. از طرفی در فیزیک یاد گرفتیم که شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان برابر سرعت لحظه‌ای و شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان برابر شتاب لحظه‌ای است. از ترکیب این دو مفهوم نتایج زیر حاصل می‌شود.

۱– مشتق اول معادلهٔ مکان – زمان نسبت به زمان برابر سرعت لحظه‌ای است. $v=x'$

۲– مشتق اول معادلهٔ سرعت – زمان نسبت به زمان برابر شتاب لحظه‌ای است هم‌چنین مشتق دوم معادلهٔ مکان – زمان نسبت به زمان نیز برابر شتاب لحظه‌ای است. $a=v'=x''$

اکنون با حل دو مسأله به چگونگی استفاده از این نتایج می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که دانستن این مفاهیم در حل مسائلی که در آن‌ها معادلهٔ مکان – زمان را در اختیار داریم چه‌قدر حل مسأله را راحت‌تر می‌کند.

مسأله ۱ **معادلهٔ مکان – زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت است. در SI به صورت $x=t^2-4t+3$ است، در چه لحظه‌ای متحرک تغییر جهت می‌دهد؟**

راه‌حل قبلاً برای حل این مسأله معادله داده شده را با معادلهٔ حرکت شتاب ثابت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ مقایسه می‌کردیم اما اکنون کافی است از x مشتق بگیریم.

$$x=t^2-4t+3 \xrightarrow{v=x'} v=2t-4$$

برای لحظهٔ تغییر جهت کافی است سرعت را مساوی صفر قرار دهیم.

$$v=0 \Rightarrow 2t-4=0 \Rightarrow t=2s$$

در مسألهٔ بعدی، از یک معادلهٔ درجه ۳ کمک گرفته‌ایم تا نشان دهیم با داشتن معادلهٔ مکان – زمان و به‌کار بردن مشتق می‌توان همان مفاهیمی را که از قبل بلد بوده‌ایم به‌کار ببریم.

مسأله ۲ **معادلهٔ حرکت متحرکی روی خط راست در SI به صورت $x=t^3-3t^2+6$ است.**

الف) در لحظهٔ $t=2s$ اندازهٔ مکان، سرعت و شتاب متحرک را بیابید.

ب) اندازهٔ سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $t=1s$ تا $t=4s$ بیابید.

پ) اندازهٔ شتاب متوسط را در 5s آغازین حرکت بیابید.

ت) در چه مکان و در چه زمانی متحرک روی خط راست تغییر جهت می‌دهد؟

ث) در چه مدتی حرکت تندشونده و در چه مدتی حرکت کندشونده است؟

ج) اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را در ۳ ثانیهٔ آغازین حرکت آن بیابید.

چ) مسافت طی شده در مدت 3s آغازین چند متر است؟

ح) اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را در ثانیهٔ پنجم حرکت آن بیابید.

راه‌حل الف) مکان در لحظهٔ $t=2s$ خواهد شد:

$$x=t^3-3t^2+6 \xrightarrow{t=2s} x=8-12+6=2m$$

برای یافتن سرعت لحظه‌ای از معادلهٔ حرکت مشتق می‌گیریم:

$$v=x' \Rightarrow v=3t^2-6t \xrightarrow{t=2s} v=0$$

و برای یافتن شتاب لحظه‌ای از معادلهٔ سرعت مشتق می‌گیریم:

$$a=v' \Rightarrow a=6t-6 \xrightarrow{t=2s} a=6m/s^2$$

دقت کنید در لحظهٔ $t=2s$ در مکان ۲+ متری مبدأ، برای یک لحظه سرعت صفر شده است اما شتاب صفر نیست.

هرگاه در یک لحظه سرعت متحرکی صفر شود، لزومی ندارد که در آن لحظه، شتاب متحرک نیز صفر شود.

به معادلهٔ شتاب–زمان $a=6t-6$ نگاه کنید در لحظهٔ $t=0$، شتاب $-6m/s^2$، در لحظهٔ $t=1s$ شتاب صفر و ... است یعنی شتاب در حال تغییر است و حرکت دارای شتاب متغیر است. **پس اگر معادله حرکت تابع درجهٔ ۳ و بالاتر باشد، معرف حرکت با شتاب متغیر است.**

ب) متأسفانه بعضی از دانش‌پژوهان برای حل این قسمت زمان‌های 1s و 4s را در معادلهٔ سرعت قرار می‌دهند، سپس سرعت‌های به‌دست آمده را جمع کرده و بر دو تقسیم می‌کنند. در حالی که بارها بیان شده سرعت متوسط جابه‌جایی در یکای زمان است و باید در لحظات 1s و 4s مکان متحرک را به‌دست آوریم و با توجه به این‌که شتاب متوسط یعنی تغییر سرعت در یکای زمان، داریم:

$$\begin{cases} v_{av}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1} \\ t_1=1s \Rightarrow x_1=1-3+6=4m \\ t_2=4s \Rightarrow x_2=64-48+6=22m \end{cases} \Rightarrow v_{av}=\frac{22-4}{4-1}=6m/s$$

پ) در حل این قسمت نیز در لحظهٔ $t=۰$ و $t=۵s$ ، به کمک معادلهٔ سرعت- زمان، سرعت لحظه‌ای متحرک را به‌دست می‌آوریم و با توجه به این که شتاب متوسط یعنی تغییر سرعت در واحد زمان، داریم:

$$\begin{cases} t_۱=۰\Rightarrow v_۱=۰ \\ t_۲=۵s\Rightarrow v_۲=۴۵\,m/s \end{cases}\Rightarrow a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{۴۵-۰}{۵-۰}=۹\,m/s^۲$$

ت) متحرکی که روی محور x ها در حرکت است، برای آن‌که تغییر جهت دهد، ابتدا باید سرعتش صفر گردد.

$$v=۰\Rightarrow ۳t^۲-۶t=۰\Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ t=۲s \end{cases}$$

لحظهٔ $t=۰$ آغاز حرکت است و لحظهٔ $t=۲s$ جواب مسأله است. $t=۲s\Rightarrow x=+۲m$

تذکر: البته دربارهٔ تغییر جهت روی خط راست علاوه بر صفر شدن سرعت باید سرعت در آن لحظه تغییر علامت بدهد که در تابع درجه ۲ در دو طرف ریشه همواره تغییر علامت داریم و $t=۲s$ جواب است.

ث) در حرکت تندشونده روی خط راست، سرعت متحرک در حال افزایش است، پس بردار سرعت و بردار شتاب آن هم‌جهت و هم‌علامت هستند. $(av>۰)$ و در حرکت کندشونده روی خط راست، سرعت متحرک در حال کاهش است، پس بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم هستند و علامت آن‌ها مخالف هم است. $(av<۰)$

با توجه به این توضیحات باید ابتدا سرعت و شتاب را تعیین علامت کنیم، از این رو از ریاضیات کمک می‌گیریم.

$$v=۳t^۲-۶t=۰\Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ t=۲s \end{cases} \quad , \quad a=۶t-۶=۰\Rightarrow t=۱s$$

در تابع درجه ۲، علامت، در بین دو ریشه مخالف علامت ضریب $t^۲$ و در خارج از دو ریشه، موافق علامت ضریب $t^۲$ است.
در تابع درجه ۱، علامت در سمت چپ ریشه مخالف علامت ضریب t و در سمت راست ریشه، موافق علامت ضریب t است. اکنون با دانسته‌های بالا جدول زیر را رسم می‌کنیم.

t	۰		۱		۲		+∞
v	۰	−		−	۰	+	
a		−	۰	+		+	
av		+		−	لحظهٔ تغییر جهت حرکت	+	
		تندشونده		کندشونده		تندشونده	

تذکر: دقت شود که علامت شتاب به تنهایی نوع حرکت را روی خط راست مشخص نمی‌کند و باید علامت سرعت و شتاب هر دو تعیین شود.

ج) برای یافتن جابه‌جایی در سه ثانیهٔ آغازین، مکان در $t=۰$ و $t=۳s$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} t_۱=۰\Rightarrow x_۱=۰-۰+۶=۶m \\ t_۲=۳s\Rightarrow x_۲=۳^۳-۳(۳)^۲+۶=۶m \end{cases}\Rightarrow \Delta x=x_۲-x_۱=۰$$

پس جابه‌جایی متحرک در ۳s آغازین، صفر است.

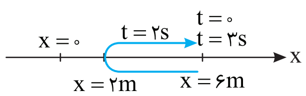
دقت شود که مکان متحرک در لحظهٔ $t=۳s$ ، ۶+ متری مبدأ است. یعنی مفهوم مکان و جابه‌جایی یکسان نیست.

چ) اشتباه نکنید مسافت طی شده ۱۲ متر نمی‌شود. باید در حل این نوع مسائل مشخص گردد که متحرک در بازهٔ زمانی داده شده تغییر جهت داده است یا نه؟

از این رو باید مشخص گردد که در چه لحظه‌ای و در چه مکانی متحرک تغییر جهت می‌دهد. $v=۰\Rightarrow ۳t^۲-۶t=۰\Rightarrow t=۲s \quad , \quad x=۲m$

حال به شکل روبه‌رو دقت کنید:

در مدت ۳s متحرک از $x=۶m$ به $x=۲m$ رفته و سپس به $x=۶m$ برگشته است، پس در مجموع ۸ متر مسافت طی کرده است.



ح) همان‌گونه که قبلاً بیان شد، باید مکان‌های متحرک را در $t=۵s$ و $t=۴s$ به‌دست آورده، آن‌ها را از هم کم کرد.

$$\begin{cases} t=۵s\Rightarrow x=۵^۳-۳(۵)^۲+۶=۵۶m \\ t=۴s\Rightarrow x=۴^۳-۳(۴)^۲+۶=۲۲m \end{cases}\Rightarrow x_{(۵)}=۵۶-۲۲=۳۴m$$

با این مثال ساده، تفاوت مکان، تغییر مکان، مسافت طی شده، جابه‌جایی در t ثانیه و جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام بررسی شد.

ضمیمه ۲
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- متحرکی روی محور x حرکت می‌کند. اگر $x' > 0$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) حرکت تندشونده است. ۲) حرکت کندشونده است.

۳) حرکت یکنواخت و در جهت مثبت محور x است. ۴) با توجه به شرایط هر کدام از سه حالت ممکن است.

۲- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = t^3 - 3t + 1$ است. در چه مکانی برحسب متر، متحرک تغییر جهت می‌دهد؟

۱) -1 ۲) $+1$ ۳) $+2$ ۴) -2

۳- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = t^3 - 3t + 1$ است. مسافت طی‌شده در ثانیهٔ دوم حرکت چند متر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) -1 ۴) صفر

۴- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = t^3 - 3t + 1$ است. مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۶

۵- اگر معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست در حرکت است در SI به‌صورت $x = 2t^3 + 3t$ باشد، مسافت طی شده در ثانیهٔ دوم چند متراست؟

۱) ۵ ۲) ۱۷ ۳) ۲۲ ۴) ۲۷

۶- معادلهٔ مکان- زمان متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x = t^3 - 6t$ است. در کدام بازهٔ زمانی متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت است؟

۱) $0 < t < 2$ ۲) $t > 2$ ۳) $t > \sqrt{2}$ ۴) $0 < t < \sqrt{2}$

۷- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x = -t^2 + 4t + 5$ است. مسافت طی شدهٔ این متحرک در ۵ ثانیهٔ اول حرکتش چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) -5 ۴) ۱۳

۸- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x = t^3 + 2t^2 - 4$ است. در کدام بازهٔ زمانی، متحرک در خلاف جهت محور x ها در حرکت است؟

۱) $0 < t < \frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4}{3} < t < 2$ ۳) $t > 0$ ۴) هیچ‌کدام

۹- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می کند در SI به‌صورت $x = -t^3 - 2t^2 - 4$ است. در کدام بازهٔ زمانی، حرکت کندشونده است؟

۱) $0 < t < 1$ ۲) $t > 1$

۳) $t > 0$ ۴) هرگز حرکت کندشونده نخواهد بود.

۱۰- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 4t$ است. متحرک چند بار تغییر جهت می‌دهد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$ است. متحرک چند بار تغییر جهت می‌دهد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲- معادلهٔ سرعت متحرکی در SI به‌صورت $v = -6t^2 + 6t$ است. اگر حرکت متحرک در مسیر مستقیم بوده و مکان در لحظهٔ $t = 1s$ نقطهٔ $x = -2m$ باشد، معادلهٔ مکان کدام است؟ سراسری ریاضی - ۸۶

۱) $x = -12t + 6$ ۲) $x = -12t + 10$

۳) $x = -3t^2 + 3t - 3$ ۴) $x = -2t^3 + 3t^2 - 3$

۱۳- معادلهٔ مکان- زمان جسمی در SI به‌صورت $x = -t^2 + 4t - 4$ است. در فاصلهٔ زمانی بین $t_1 = 0$ تا $t_2 = 4s$، مسافت طی شده توسط جسم چند متر است؟ سراسری خارج از کشور تجربی-۸۸

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴- معادلهٔ مکان-زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^3 - 6t^2 + 9t - 8$ است. کدام گزینه درست است؟

۱) در $t = 2s$ بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد.
۲) در $t = 1s$ بردار سرعت تغییر جهت می‌دهد.
۳) در $t = 4s$ حرکت تندشونده است.
۴) هر سه گزینه درست است.

۱۵- معادلهٔ سرعت- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = 200 - 8t^2$ است. کدام گزینه درست است؟ $(t \geq 0)$

سراسری خارج از کشور ریاضی-۹۱

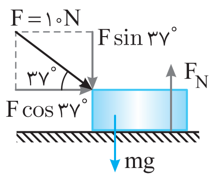
۱) بزرگی شتاب در حال کاهش است
۲) از صفر تا ۵ ثانیه حرکت تندشونده است.
۳) در لحظهٔ $t = 5s$ جهت شتاب تغییر می‌کند.
۴) حرکت ابتدا در جهت محور x، سپس خلاف جهت محور x است.

۱۶- معادلهٔ حرکت جسمی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x = 3t^2 - t^3 + 1$ است. در بازهٔ زمانی بین $t = 0$ تا $t = 2s$، ....

۱) جهت شتاب عوض نمی‌شود.
۲) جهت حرکت جسم تغییر نمی‌کند.
۳) جهت حرکت یک بار عوض می‌شود.
۴) حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده می‌شود.

ضمیمه ۲ کاربرد مشتق در حرکت‌شناسی

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱- گزینه ۴ A مشـتق مکان نسبت به زمان برابر سرعت لحظه‌ای است $v=x'$ و علامت سرعت به تنهایی دربارهٔ نوع حرکت چیزی را مشخص نمی‌کند. $x'>۰$ تنها نشان می‌دهد که متحرک در جهت مثبت محور در حال پیشـروی اسـت و ممکن است مقدار سرعت ثابت باشد و یا سـرعت در حال کاهش (حرکت کندشونده) و یا در حال افزایش (حرکت تندشونده) باشد.

فراموش نکنیم که برای مشخص شدن کندشونده و تندشونده بودن حرکت باید علامت سرعت و علامت شتاب هر دو مشـخص باشـد. اگر بردار سـرعت و شتاب هم‌علامت باشند $(av>۰)$ حرکت تندشـونده و اگر بردار سرعت و شتاب هم‌علامت نباشند $(av<۰)$ حرکت کندشونده است.

۲- گزینه ۱ A متحرکی که روی خط راسـت (محور x ها) در حرکت اسـت، برای تغییر جهت ابتدا باید سـرعتش صفر شود. از این‌رو ابتدا معادلهٔ سرعت-زمان را به کمک مشتق‌گیری از معادلهٔ مکان-زمان به دست آورده، لحظهٔ صفر شدن سرعت و تغییر جهت را حساب می‌کنیم:

$$v=x'\Rightarrow v=۳t^۲-۳\xrightarrow{v=۰}۳t^۲-۳=۰\Rightarrow t^۲=۱\Rightarrow t=۱s$$

$$x=t^۳-۳t+۱\Rightarrow x=۱-۳+۱\Rightarrow x=-۱m$$

۳- گزینه ۲ A بازهٔ زمانی ثانیهٔ دوم یعنی از $t=۱s$ تا $t=۲s$. ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا در این بازه سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟

$$v=x'\Rightarrow v=۳t^۲-۳\xrightarrow{v=۰}۳t^۲-۳=۰\Rightarrow t=۱s$$

بنابراین در بازهٔ مورد نظر تغییر جهت رخ نمی‌دهد و مسافت طی شده با جابه‌جایی متحرک یکسان است:

$$\begin{cases}t_۱=۱s\Rightarrow x_۱=۱-۳+۱=-۱m\\ t_۲=۲s\Rightarrow x_۲=۸-۳\times۲+۱=+۳m\end{cases}\Rightarrow\Delta x=x_۲-x_۱\Rightarrow\Delta x=۳-(-۱)=۴m$$

۴- گزینه ۴ B بازهٔ زمانی دو ثانیهٔ اول یعنی از $t=۰$ تا $t=۲s$. ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا در این بازه، سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟

$$v=x'\Rightarrow v=۳t^۲-۳\xrightarrow{v=۰}۳t^۲-۳=۰\Rightarrow t=۱s$$

$$x=(۱)^۳-۳\times(۱)^۲+۱\Rightarrow x=-۱m$$

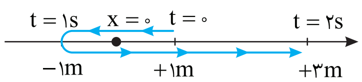
بنابراین متحرک در لحظهٔ $t=۱s$ و مکان $x=-۱m$ تغییر جهت داده است.

اکنون مکان متحرک در ابتدا و انتهای بازهٔ مورد نظر را به‌دست می‌آوریم:

$$t=۰\Rightarrow x=+۱m$$

$$t=۲s\Rightarrow x=۸-۶+۱=+۳m$$

پس متحرک از مکان $+۱m$ به مکان $-۱m$ رفته و سـپس به مکان $x=+۳m$ برگشـته اسـت و مسافت طی‌شده برابر است با: $۲+۴=۶m$



۵- گزینه ۲ A مسـافت طی‌شـده در ثانیهٔ دوم، یعنی مسـافت طی‌شـده در بـازهٔ زمانی $t=۱s$ تـا $t=۲s$. بنابراین در معادلهٔ حرکـت $t_۱=۱s$ و $t_۲=۲s$ را قرار می‌دهیم و مکان‌های حاصل را از هم کم می‌کنیم:

$$x=۲t^۳+۳t:\begin{cases}t=۱s\Rightarrow x_۱=۵m\\ t=۲s\Rightarrow x_۲=۲۲m\end{cases}\Rightarrow\Delta x_{(۲)}=۲۲-۵=۱۷m$$

دقت کنید اگر معادلهٔ سرعت-زمان این متحرک را به‌دست آوریم سرعت صفر نمی‌شود و متحرک در هیچ لحظه‌ای پس از $t=۰$ تغییر جهت نمی‌دهد و مسافت طی‌شده همان جابه‌جایی است.

$$v=x'\Rightarrow v=۶t^۲+۳\Rightarrow v\neq۰$$

۶- گزینه ۴ A ابتدا معادلهٔ سرعت-زمان را به‌دست می‌آوریم. در مدتی که متحرک دارای سرعت منفی می‌باشد، متحرک در حال حرکت در جهت منفی محور است.

$$v=x'\Rightarrow v=۳t^۲-۶\Rightarrow۳t^۲-۶=۰\Rightarrow t^۲=۲\Rightarrow t=\sqrt{۲}s$$

اکنون سرعت را تعیین علامت می‌کنیم؛ با توجه به جدول روبه‌رو، متحرک در بازهٔ $t=۰$ تا $t=\sqrt{۲}s$ در جهت منفی محور در حال حرکت است.

t	۰		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
v		−	۰	+	

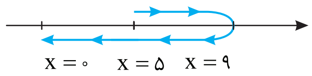
تغییر جهت

۷- گزینهٔ ۴ B **راه‌حل اول:** مسافت طی شده یعنی طول کل مسیری که متحرک در ۵ ثانیه طی می‌کند. پس باید بررسی کرد که متحرک متوقف می‌شود و جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد یا خیر؟ برای این منظور ابتدا معادلهٔ سرعت- زمان را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow v=-۲t+۴\xrightarrow{v=۰}-۲t+۴=۰\Rightarrow t=۲s$$

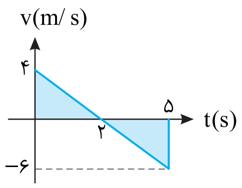
پس در لحظهٔ $t=۲s$ سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد. حال مکان تغییر جهت را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$x=-t^۲+۴t+۵\xrightarrow{t=۲s}x=-۴+۸+۵=۹m$$



در لحظهٔ $t=۰$ متحرک در مکان $+۵m$، در لحظهٔ $t=۲s$ در مکان $+۹m$ و در لحظهٔ $t=۵s$ در مکان $x=۰$ است. پس در کل، مسافت طی شده برابر است با: $۴+۹=۱۳m$

راه‌حل دوم: می‌توانیم نمودار سرعت- زمان $v=-۲t+۴$ را در مدت $۵s$ رسم کرده و قدرمطلق سطح‌های محصور بین نمودار و محور زمان را جمع کنیم.



$$\text{مسافت طی شده}=\left|\frac{۴\times۲}{۲}\right|+\left|\frac{-۶\times۳}{۲}\right|=۱۳m$$

۸- گزینهٔ ۴ A ابتدا معادلهٔ سرعت- زمان را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم. در بازهٔ زمانی که سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x ها در حرکت است و در بازهٔ زمانی که سرعت مثبت است، متحرک در جهت مثبت محور در حرکت است.

$$v=x'\Rightarrow v=۳t^۲+۴t=۰\Rightarrow t=۰\quad,\quad t=-\frac{۴}{۳}s\ \text{غ ق ق}$$

در تمام مدت حرکت متحرک پس از لحظهٔ $t=۰$، همواره سرعت مثبت و همواره حرکت در جهت مثبت محور x ها است.

۹- گزینهٔ ۴ A در حرکت کندشونده، سرعت متحرک در حال کاهش است و بردار شتاب و بردار سرعت در خلاف جهت هم هستند. معادلهٔ سرعت- زمان و معادلهٔ شتاب- زمان را به‌دست آورده و آن‌ها را تعیین‌علامت می‌کنیم:

$$v=x'\Rightarrow v=-۳t^۲-۴t\xrightarrow{v=۰}\begin{cases}t=۰\\ t=-\frac{۴}{۳}s\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$a=v\Rightarrow a=-۶t-۴\xrightarrow{a=۰}t=-\frac{۲}{۳}s\ \text{غ ق ق}$$

t	۰ +∞
v	−
a	−
av	+

با توجه به جدول تعیین‌علامت، هرگز حرکت این متحرک کندشونده نخواهد بود.

۱۰- گزینهٔ ۲ A متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر شده و سرعت تغییر علامت بدهد. معادلهٔ سرعت- زمان را به‌دست آورده، سرعت را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$v=x'\Rightarrow v=t^۲+۳t-۴$$

$$v=۰\Rightarrow t^۲+۳t-۴=۰\Rightarrow(t-۱)(t+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۱s\\ t=-۴s\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

در لحظهٔ $t=۱s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد.

۱۱- گزینهٔ ۱ A متحرک لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر شده و سرعت تغییر علامت بدهد.

$$v=x'\Rightarrow v=۳t^۲-۶t+۳\xrightarrow{v=۰}۳(t^۲-۲t+۱)=۰\Rightarrow۳(t-۱)^۲=۰\Rightarrow t=۱s$$

با آن‌که در لحظهٔ $t=۱s$ سرعت صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد و سرعت $۳(t-۱)^۲$ همواره مثبت است بنابراین متحرک در هیچ لحظه‌ای تغییر جهت نمی‌دهد.

۱۲- گزینهٔ ۴ A می‌دانیم سرعت لحظه‌ای، مشتق مکان نسبت به زمان است، بنابراین باید از خود بپرسیم از چه عبارتی مشتق بگیریم تا $-۶t^۲$ به‌دست آید که قطعاً $-۲t^۳$ به ذهن ما می‌رسد و با گرفتن مشتق از $۳t^۲$ عبارت $۶t$ به‌دست می‌آید، از این‌رو معادلهٔ مکان- زمان متحرک خواهد شد: $x=-۲t^۳+۳t^۲+x_۰$

با توجه به فرض پرسش در $t=۱s$، $x=-۲m$ می‌باشد:

$$-۲=۲\times(۱)^۳+۳\times(۱)^۲+x_۰\Rightarrow x_۰=-۳m$$

$$x=-۲t^۳+۳t^۲-۳$$

البته بدون حل نیز می‌توان گزینهٔ (۴) را انتخاب کرد، زیرا معادلهٔ سرعت- زمان تابع درجهٔ ۲ است و قطعاً معادلهٔ مکان- زمان تابع درجهٔ ۳ است.

۱۳- گزینهٔ ۴ A هرگاه در یک پرسش، که معادلهٔ مکان- زمان در آن مشخص است در مورد مسافت طی‌شده سؤال شود، ابتدا باید مشخص گردد که در بازهٔ زمانی مورد نظر، متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟ برای این منظور باید تعیین کرد در چه لحظه‌ای و در چه مکانی سرعت صفر می‌شود.

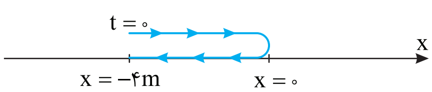
$$v=x'\Rightarrow v=-۲t+۴\xrightarrow{v=۰}-۲t+۴=۰\Rightarrow t=۲s$$

$$x=-(۲)^۲+۴\times۲-۴=۰$$

حال مکان متحرک را در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی به‌دست می‌آوریم:

$$t_۱=۰\Rightarrow x_۱=-۴m$$

$$t_۲=۴s\Rightarrow x_۲=-۱۶+۱۶-۴=-۴m$$



با توجه به شکل مسافت طی‌شده برابر است با:

$$d=۴+۴=۸m$$

۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ سرعت- زمان و معادلهٔ شتاب- زمان را به کمک مشتق‌گیری به دست می‌آوریم.

$$v=x'\Rightarrow v=3t^2-12t+9$$
$$a=v'\Rightarrow a=6t-12$$
$$a=0\Rightarrow 6t-12=0\Rightarrow t=2s$$

برای تغییر جهت بردار شتاب باید ابتدا شتاب صفر شود و سپس تغییر علامت دهد. از این‌رو شتاب را برابر صفر قرار می‌دهیم.
معادلهٔ شتاب تابع درجه یک است که در دو طرف ریشه‌اش تغییر علامت می‌دهد بنابراین در $t=2s$ بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد. گزینهٔ (۱) درست است.
برای بررسی تغییر جهت بردار سرعت، معادلهٔ سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$3t^2-12t+9=0\Rightarrow t^2-4t+3=0\Rightarrow (t-1)(t-3)=0\Rightarrow \begin{cases} t=1s \\ t=3s \end{cases}$$

در معادلهٔ درجه ۲ در دو طرف ریشه تغییر علامت وجود دارد پس سرعت در لحظه‌های $t=1s$ و $t=3s$ تغییر علامت می‌دهد و گزینهٔ (۲) درست است.
در لحظهٔ $t=4s$ سرعت و شتاب را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} v=3(4)^2-12(4)+9\Rightarrow v=48-48+9=9>0 \\ a=6(4)-12=12>0 \end{array}\right\}\Rightarrow av>0 \quad \text{حرکت تندشونده}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) نیز درست است.

۱۵- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ شتاب-زمان را با مشتق‌گیری از معادلهٔ سرعت- زمان به دست می‌آوریم.

$$a=v'\Rightarrow a=-16t$$

کاملاً مشخص است که با گذشت زمان، بزرگی شتاب در حال افزایش است و گزینهٔ (۱) نادرست است، همچنین گزینهٔ (۳).
سرعت را تعیین علامت می‌کنیم.

$$v=0\Rightarrow 200-8t^2=0\Rightarrow t^2=25\Rightarrow t=5s,\ t=-5s \quad \text{غ.ق.ق.}$$

علامت تابع بین دو ریشه مخالف علامت ضریب t^2 بوده و مطابق جدول روبه‌رو در بازهٔ صفر تا $+5s$ سرعت مثبت اما شتاب $(a=-16t)$ منفی بوده و حرکت کندشونده است بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. همچنین در بازهٔ صفر تا $+5s$ علامت سرعت مثبت بوده و حرکت در جهت محور xها است و برای $t>5s$ علامت سرعت منفی شده و در خلاف جهت محورxها بوده بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

t	$-\infty$	-5		0		$+5$		$+\infty$
v	−	۰	+		+	۰	−	
a	غ.ق.ق				−		−	

۱۶- گزینهٔ ۲ معادلهٔ سرعت- زمان و معادلهٔ شتاب-زمان را به کمک مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم.

$$v=x'\Rightarrow v=6t-3t^2\xrightarrow{a=\frac{dv}{dt}}a=6-6t$$

ریشهٔ معادلهٔ شتاب- زمان را به دست می‌آوریم زیرا در لحظه‌ای که شتاب صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد جهت بردار شتاب عوض می‌شود.

$$a=0\Rightarrow 6-6t=0\Rightarrow t=1s$$

تابع درجه یک بوده و علامت آن در دو طرف ریشه تغییر می‌کند، پس جهت بردار شتاب در لحظهٔ $t=1s$ عوض می‌شود و گزینهٔ (۱) نادرست است.
ریشهٔ معادلهٔ سرعت- زمان را به دست می‌آوریم.

t	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
v		۰	+		+	۰	−	
a	غ.ق.ق		+	۰	−		−	
av			+ تندشونده		− کندشونده		+ تندشونده	

$$v=0\Rightarrow 6t-3t^2=0\Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2s \end{cases}$$

پس در بازهٔ صفر تا $2s$ علامت سرعت عوض نمی‌شود و جهت حرکت جسم تغییر نمی‌کند بنابراین گزینهٔ (۲) درست و گزینهٔ (۳) نادرست است. هر چند که حل مسأله تمام شده، گزینهٔ (۴) را نیز بررسی می‌کنیم. هر دو معادلهٔ سرعت و شتاب را با تعیین علامت می‌کنیم با توجه به جدول گزینهٔ (۴) نادرست است.