پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۱

۲۹۲۹ (۲) توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}\times\sqrt{۱+\sqrt{۷}}=\sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}}\times\sqrt[۴]{(۱+\sqrt{۷})^۲}$$
$$=\sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}\times(۱+\sqrt{۷})^۲}=\sqrt[۴]{\frac{۱+۷+۲\sqrt{۷}}{۴+\sqrt{۷}}}=\sqrt[۴]{\frac{۸+۲\sqrt{۷}}{۴+\sqrt{۷}}}$$
$$=\sqrt[۴]{\frac{۲(۴+\sqrt{۷})}{۴+\sqrt{۷}}}=\sqrt[۴]{۲}$$

۲۹۳۰ (۴) **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $a_n=An+B$ ، در این صورت

$$\begin{cases}a_۵=۸\\a_{۱۰}=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۵A+B=۸\\۱۰A+B=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{۳}{۵}\\B=۱۱\end{cases}$$

بنابراین $a_n=-\frac{۳}{۵}n+۱۱\Rightarrow a_{۱۶}=-\frac{۳}{۵}\times۱۶+۱۱=۱/۴$

راه‌حل دوم فرض کنید جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت d باشد. در این صورت

$$\begin{cases}a_۵=۸\\a_{۱۰}=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_۱+۴d=۸\\a_۱+۹d=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-\frac{۳}{۵}\\a_۱=\frac{۵۲}{۵}\end{cases}$$

بنابراین $a_{۱۶}=a_۱+۱۵d=\frac{۵۲}{۵}+۱۵(-\frac{۳}{۵})=\frac{۷}{۵}=۱/۴$

۲۹۳۱ (۱) باید $a>۰$ ، $\Delta>۰$ ، $\frac{c}{a}\geq۰$ و $-\frac{b}{a}>۰$.

$$a>۰\,,\quad \frac{c}{a}\geq۰\Rightarrow\frac{۰}{a}\geq۰\ ✓$$
$$\Delta>۰\Rightarrow(۳+۲a)^۲>۰\Rightarrow a\neq-\frac{۳}{۲}$$
$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow-\frac{۳+۲a}{a}>۰\xrightarrow{a>۰}۳+۲a<۰\Rightarrow a<-\frac{۳}{۲}$$

چون اشتراک $a>۰$ و $a<-\frac{۳}{۲}$ تهی است، پس به‌ازای هیچ مقداری از a شرایط مسئله برقرار نیست.

۲۹۳۲ (۴) ابتدا نامعادلهٔ $\frac{۴-۲x}{۳x+۱}\geq۰$ را به کمک تعیین علامت حل می‌کنیم:

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		۲		$+\infty$
$\frac{۴-۲x}{۳x+۱}$		−		+	۰	−	

بنابراین $-\frac{۱}{۳}<x\leq۲$. اکنون توجه کنید که $-۱<۳x\leq۶$. پس $[۳x]$ می‌تواند عددهای ۱−، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد که تعداد آن‌ها هشت تاست.

۲۹۳۳ (۳) چون f و g تابع‌هایی ثابت‌اند، پس

$$f(x)=b-۳ax\Rightarrow-۳a=۰\Rightarrow a=۰\Rightarrow f(x)=b$$
$$g(x)=c-(۳b-۳)x\Rightarrow-(۳b-۳)=۰\Rightarrow b=۱\Rightarrow g(x)=c$$

از طرف دیگر،

$$(f+g)(x)=۵\Rightarrow f(x)+g(x)=۵\Rightarrow b+c=۵\Rightarrow ۱+c=۵\Rightarrow c=۴$$

بنابراین $bc=۴$.

۲۹۳۴ (۴) توجه کنید که

$$g(x)=f(x+۲)=۴(x+۲)-(x+۲)^۲=-x^۲+۴$$

بنابراین $f(x)=g(x)\Rightarrow ۴x-x^۲=-x^۲+۴\Rightarrow ۴x=۴\Rightarrow x=۱$

در نتیجه عرض نقطهٔ برخورد برابر است با $f(۱)=۴\times۱-۱^۲=۳$. پس نقطهٔ برخورد نمودارهای دو تابع $(۱,۳)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{۱^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۰}$$

۲۹۳۵ (۳) توجه کنید که $x_۱+x_۲=\frac{a}{۳}$, $x_۱x_۲=\frac{۴}{۳}$, $x_۱=۳x_۲$

بنابراین $x_۱x_۲=\frac{۴}{۳}\Rightarrow(۳x_۲)x_۲=\frac{۴}{۳}\Rightarrow x_۲^۲=\frac{۴}{۹}\Rightarrow x_۲=\pm\frac{۲}{۳}$

اگر $x_۲=\frac{۲}{۳}$ ، آن‌گاه $x_۱=۳x_۲=۳(\frac{۲}{۳})=۲\Rightarrow x_۱+x_۲=\frac{۸}{۳}\Rightarrow\frac{۸}{۳}=\frac{a}{۳}\Rightarrow a=۸$

اگر $x_۲=-\frac{۲}{۳}$ ، آن‌گاه

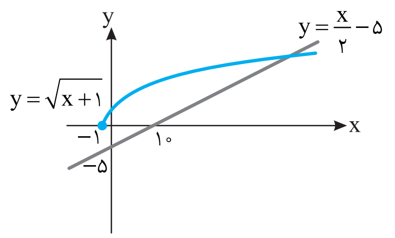
$$x_۱=۳x_۲=۳(-\frac{۲}{۳})=-۲\Rightarrow x_۱+x_۲=-\frac{۸}{۳}\Rightarrow-\frac{۸}{۳}=\frac{a}{۳}\Rightarrow a=-۸$$

بنابراین اختلاف دو مقدار ممکن a برابر ۱۶ است.

۲۹۳۶ (۲) توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x-۱}+۳}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۳-\sqrt{x-۱}}=\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}$$
$$\frac{\sqrt{x+۱}(۳-\sqrt{x-۱})-\sqrt{x+۱}(\sqrt{x-۱}+۳)}{(\sqrt{x-۱}+۳)(۳-\sqrt{x-۱})}=\frac{(\sqrt{x-۱})^۲}{\sqrt{x-۱}}$$
$$\frac{۳\sqrt{x+۱}-\sqrt{x^۲-۱}-\sqrt{x^۲-۱}-۳\sqrt{x+۱}}{۹-(x-۱)}=\sqrt{x-۱}$$
$$\frac{-۲\sqrt{x^۲-۱}}{۱۰-x}=\sqrt{x-۱}\Rightarrow-۲\sqrt{x-۱}\times\sqrt{x+۱}=(۱۰-x)\sqrt{x-۱}$$
$$-۲\sqrt{x+۱}=۱۰-x\ (\text{توجه کنید}\ \sqrt{x-۱}\neq۰)\Rightarrow\sqrt{x+۱}=\frac{x}{۲}-۵$$

اکنون برای اینکه بفهمیم این معادله چند جواب مثبت دارد، نمودارهای تابع‌های دو طرف معادله را رسم می‌کنیم:



از روی این شکل معلوم می‌شود که معادلهٔ مورد نظر یک جواب بزرگ‌تر از ۱۰ دارد، که چون هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کند، پس این جواب قابل قبول است.

۲۹۳۷ (۲) گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $(-۱,-۲)\Rightarrow(-۲,-۱):-۱\neq(-۲)^۳-(-۲)+۱$

گزینهٔ (۲): $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})\Rightarrow(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۸}):\frac{۵}{۸}=(\frac{۱}{۲})^۳-\frac{۱}{۲}+۱$

چون این تساوی درست است، پس جواب گزینهٔ (۲) است. لازم نیست بقیهٔ گزینه‌ها را بررسی کنیم.

۲۹۳۸ (۴) ابتدا توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x)$. بنابراین

$$g(۲x)=۵x^۲+۱۱\xrightarrow{x\to\frac{x}{۲}}g(x)=۵(\frac{x}{۲})^۲+۱۱$$
$$g(x-۷)=۵(\frac{x-۷}{۲})^۲+۱۱$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $y=g(x-۷)$ برابر ۱۱ است.

۲۹۳۹ (۱) باید $-۹+k^۲<۰\Rightarrow k^۲<۹\Rightarrow-۳<k<۳$

بنابراین k یکی از عددهای صحیح ۲−، ۱−، ۰، ۱ و ۲ است، که مجموع آن‌ها برابر صفر است.

۲۹۴۰ (۱) توجه کنید که

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow-\frac{\pi}{4}<-x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{2}$$

بنابراین

$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)>0\Rightarrow\frac{1-m}{2+m}>0$$

جدول تعیین علامت این نامعادله به صورت زیر است:

m	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\frac{1-m}{2+m}$		$-$		$+$	0	$-$	

بنابراین مجموعهٔ مقادیر m بازهٔ $(-2,1)$ است.

۲۹۴۱ (۳) توجه کنید که

$$2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3}\Rightarrow 2(1-\cos^2 x)+\cos^2 x=\frac{4}{3}$$

$$2-\cos^2 x=\frac{4}{3}\Rightarrow\cos^2 x=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

بنابراین

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\tan^2 x=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

۲۹۴۲ (۳) از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع برابر ۱ است. بنابراین

$$c=\frac{\text{ماکزیمم}+\text{مینیمم}}{2}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

۲۹۴۳ (۴) توجه کنید که

$$8\cos x-\tan^2 x=1\Rightarrow 8\cos x=1+\tan^2 x\Rightarrow 8\cos x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

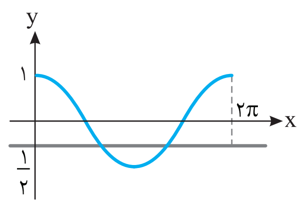
$$8\cos^3 x=1\Rightarrow\cos^3 x=\frac{1}{8}\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون برای اینکه تعداد جواب‌ها در بازهٔ $[0,2\pi]$ را مشخص کنیم، می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم:

k	-1	صفر	1
$2k\pi+\frac{\pi}{3}$	$-2\pi+\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$2\pi+\frac{\pi}{3}$
$2k\pi-\frac{\pi}{3}$	$-2\pi-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$2\pi-\frac{\pi}{3}$

توجه کنید که فقط جواب‌های $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi-\frac{\pi}{3}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ هستند و بقیهٔ جواب‌ها خارج از این بازه هستند. بنابراین معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب دارد. توجه کنید که چون تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر را می‌خواهیم، می‌توانستیم از نمودار هم استفاده کنیم. از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر دوتاست.



۲۹۴۴ (۱) توجه کنید که

$$\log_8 18=m\Rightarrow\log_{2^3}18=\frac{1}{3}\log_2 18=m\Rightarrow\log_2 18=3m$$

$$\log_2(2\times9)=3m\Rightarrow\log_2 2+\log_2 3^2=3m\Rightarrow 1+2\log_2 3=3m$$

$$\log_2 3=\frac{3m-1}{2}$$

از طرف دیگر،

$$\log_4 12=\log_4(3\times4)=\log_4 3+\log_4 4=\log_{2^2}3+1$$

$$=\frac{1}{2}\log_2 3+1=\frac{1}{2}(\frac{3m-1}{2})+1=\frac{3m-1}{4}+1=\frac{3}{4}(m+1)$$

۲۹۴۵ (۳) چون نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

$$f(0)=0\Rightarrow a+b(\frac{1}{2})^0=0\Rightarrow a+b=0\quad(1)$$

همچنین

$$f^{-1}(-1)=-1\Rightarrow f(-1)=-1\Rightarrow a+b(\frac{1}{2})^{-1}=-1\Rightarrow a+2b=-1\quad(2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}a+b=0\\a+2b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$$

بنابراین $a-b=2$.

۲۹۴۶ (۴) اگر $x_1,\dots,x_9$ داده‌ها باشند و $\bar{x}$ میانگین آن‌ها باشد، طبق فرض،

$$(x_1-\bar{x})^2=(x_2-\bar{x})^2=\cdots=(x_8-\bar{x})^2=(+1\ \text{یا}\ -1)^2=1$$

و $(x_9-\bar{x})^2=0$. بنابراین

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_8-\bar{x})^2+(x_9-\bar{x})^2}{9}=\frac{8\times1+0}{9}=\frac{8}{9}$$

در نتیجه $\sigma=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

۲۹۴۷ (۱) میانگین و میانهٔ داده‌ها برابر است. فرض کنید این مقدار برابر a باشد. در این‌صورت میانگین و میانهٔ داده‌های جدید برابر $a+2$ است، که اختلاف آن‌ها صفر است.

۲۹۴۸ (۲) توجه کنید که اگر $x\to2^+$، آن‌گاه $x^3\to8^+$، پس $[x^3]=8$.

بنابراین

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x}{3x^2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2}{3x}=\frac{1}{3}$$

۲۹۴۹ (۳) توجه کنید که

$$\lim_{x\to1^+}(4-[x])g(x)=\lim_{x\to1^+}(4-1)g(x)=\lim_{x\to1^+}3g(x)=6$$

بنابراین $\lim_{x\to1^+}g(x)=\frac{6}{3}=2$، یعنی $\lim_{x\to1^+}g(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}=2$

چون $\lim_{x\to1^+}|x-1|=0$، پس $\lim_{x\to1^+}\sqrt{ax^2+bx+c}=0$، یعنی $x=1$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است. از طرف دیگر، $x=1$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت زیر رادیکال باشد چون در غیر این صورت درجهٔ $x-1$ در صورت از درجهٔ $x-1$ در مخرج کمتر و مقدار حد بی‌نهایت می‌شود. بنابراین باید صورت $g(x)$ به‌صورت $\sqrt{a(x-1)^2}$ باشد. پس

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|}=2\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{a}|x-1|}{|x-1|}=2\Rightarrow\sqrt{a}=2\Rightarrow a=4$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{|x-1|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x-1|}{|x-1|}=2$$

۲۹۵۰ (۱) توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^{۳}}{x}=\lim_{x\to ۰}(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^{۳}$$
$$=(\sqrt{\frac{۰+۱}{۰+۹}})^{۳}=(\frac{۱}{۳})^{۳}=\frac{۱}{۲۷}$$

۲۹۵۱ (۴) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که شیب خط $۴y-۳x=n$ برابر با $\frac{۳}{۴}$ است. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x^{۲}+mx+۱}{x+۳}\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x+m)(x+۳)-(۱)(x^{۲}+mx+۱)}{(x+۳)^{۲}}$$
$$=\frac{x^{۲}+۶x+۳m-۱}{(x+۳)^{۲}}$$

چون شیب خط مماس با $f'(۱)$ برابر است، پس

$$f'(۱)=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۱+۶+۳m-۱}{۱۶}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۲+m}{۴}=۱\Rightarrow m=۲$$

بنابراین $f(x)=\frac{x^{۲}+۲x+۱}{x+۳}\Rightarrow f(۱)=\frac{۱+۲+۱}{۱+۳}=۱$

چون نقطهٔ $(۱,f(۱))$، یعنی $(۱,۱)$ روی خط $۴y-۳x=n$ نیز قرار دارد، پس

$$۴\times۱-۳\times۱=n\Rightarrow n=۱$$

بنابراین $m+n=۲+۱=۳$.

راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد خط مماس و تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x^{۲}+mx+۱}{x+۳}=\frac{۳x+n}{۴}\Rightarrow ۴(x^{۲}+mx+۱)=(x+۳)(۳x+n)$$
$$۴x^{۲}+۴mx+۴=۳x^{۲}+nx+۹x+۳n$$
$$x^{۲}+(۴m-n-۹)x+۴-۳n=۰$$

چون $x=۱$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به‌صورت $(x-۱)^{۲}$ است. بنابراین $x^{۲}+(۴m-n-۹)x+۴-۳n=(x-۱)^{۲}=x^{۲}-۲x+۱$

در نتیجه
$$\begin{cases}۴m-n-۹=-۲\\ ۴-۳n=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=۲\\ n=۱\end{cases}$$

پس $m+n=۲+۱=۳$.

۲۹۵۲ (۲) چون نقطهٔ $(۰,۴)$ روی نمودار تابع قرار دارد و ماکزیمم نسبی تابع است، پس

$$f(۰)=۴\Rightarrow c=۴\Rightarrow f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+۴$$
$$f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b$$
$$f'(۰)=۰\Rightarrow b=۰\Rightarrow f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+۴$$

اگر طول نقطهٔ تماس نمودار با محور طول‌ها برابر $x_{۰}$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases}f(x_{۰})=۰\\ f'(x_{۰})=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{۰}^{۳}+ax_{۰}^{۲}+۴=۰ & (۱)\\ ۳x_{۰}^{۲}+۲ax_{۰}=۰ & (۲)\end{cases}$$

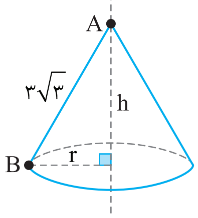
از تساوی (۲) به‌دست می‌آید $x_{۰}(۳x_{۰}+۲a)=۰\Rightarrow x_{۰}=۰$ یا $x_{۰}=-\frac{۲a}{۳}$

نقطهٔ با طول صفر نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. بنابراین طول نقطهٔ مینیمم نسبی برابر $-\frac{۲a}{۳}$ است. اکنون از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$(-\frac{۲a}{۳})^{۳}+a(-\frac{۲a}{۳})^{۲}+۴=۰$$
$$-\frac{۸a^{۳}}{۲۷}+\frac{۴a^{۳}}{۹}+۴=۰\Rightarrow\frac{۴a^{۳}}{۲۷}=-۴\Rightarrow a^{۳}=-۲۷\Rightarrow a=-۳$$

بنابراین $x_{۰}=-\frac{۲(-۳)}{۳}=۲$.

۲۹۵۳ (۲) اگر شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r و ارتفاع آن برابر با h باشد، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$r^{۲}+h^{۲}=AB^{۲}=(۳\sqrt{۳})^{۲}=۲۷$$

پس $r^{۲}=۲۷-h^{۲}$. از طرف دیگر، حجم مخروط برابر است با

$$V=\frac{\pi}{۳}r^{۲}h=\frac{\pi}{۳}(۲۷-h^{۲})h=-\frac{\pi}{۳}h^{۳}+۹\pi h\Rightarrow V'=-\pi h^{۲}+۹\pi$$
$$V'=۰\Rightarrow-\pi h^{۲}+۹\pi=۰\Rightarrow h^{۲}=۹\Rightarrow h=-۳\text{(غ.ق.ق)},\ h=۳$$

۲۹۵۴ (۳) شرایط انتخاب کتاب‌ها را می‌توان به‌صورت زیر حالت‌بندی کرد:

حالت ۱: هیچ‌کدام از کتاب‌های ریاضی، فیزیک و زیست را انتخاب نکنیم. در این‌صورت باید هر چهار کتاب را از بین چهار کتاب دیگر انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۴}=۱$ طریق ممکن است.

حالت ۲: کتاب ریاضی را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید حتماً کتاب زیست را هم انتخاب کنیم اما کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم. بنابراین باید از بین چهار کتاب باقی‌مانده دو تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۲}=۶$ طریق ممکن است.

حالت ۳: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب زیست را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۳}=۴$ طریق ممکن است.

حالت ۴: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب فیزیک را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید کتاب زیست را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۳}=۴$ طریق ممکن است.

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد انتخاب‌های ممکن برابر است با $۱+۶+۴+۴=۱۵$.

۲۹۵۵ (۲) اگر A پیشامد شیوع بیماری و B پیشامد بهبود باشد، آن‌گاه $P(A)=۰/۰۸$ و $P(B|A)=۰/۵$. در این صورت احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=۰/۰۸\times۰/۵=۰/۰۴$$

۲۹۵۶ (۱) نقطهٔ B محل برخورد خطوط AB و BC است. پس مختصات آن جواب‌های دستگاه معادله‌های این دو خط هستند:

$$\begin{cases}y+۲x=۷\\ ۲y-۷x=-۱۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲y-۴x=-۱۴\\ ۲y-۷x=-۱۹\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}-۱۱x=-۳۳$$
$$x=۳\Rightarrow y=۱$$

پس باید فاصلهٔ نقطهٔ $B(۳,۱)$ را از خط $۴y-۳x-۱۷=۰$ به‌دست آوریم که برابر است با

$$BH=\frac{|۴\times۱-۳\times۳-۱۷|}{\sqrt{۴^{۲}+(-۳)^{۲}}}=\frac{۲۲}{۵}=۴/۴$$

۲۹۵۷ (۴) چون $DE\|BC$، پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۵}{۵+۷}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{۵}{۱۲}$$

بنابراین

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}}=\frac{BC}{DE}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۲۹۵۸ (۲) چون قطر کوچک بیضی برابر ۱۸ است، پس $۲b=۱۸$، یعنی $b=۹$. همچنین $c=۱۲$. بنابراین $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}=۹^{۲}+۱۲^{۲}=۲۲۵\Rightarrow a=۱۵$

بنابراین خروج از مرکز برابر است با $e=\frac{c}{a}=\frac{۱۲}{۱۵}=۰/۸$.

۲۹۵۹ (۱) **راه‌حل اول** ابتدا پرانتزها را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}\sqrt{۵}+(\sqrt{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$A=\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$$

$$A^۲=۳-\sqrt{۵}+۳+\sqrt{۵}-۲\sqrt{۳-\sqrt{۵}}\sqrt{۳+\sqrt{۵}}=۶-۲\sqrt{(۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵})}$$
$$=۶-۲\sqrt{۹-۵}=۶-۲\sqrt{۴}=۶-۲\times۲=۲$$

توجه کنید که چون $\sqrt{۳-\sqrt{۵}}<\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$، پس A عددی منفی است. در نتیجه $A=-\sqrt{۲}$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times(-\sqrt{۲})=-۱$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}\sqrt{۵}+(\sqrt{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۲}\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۲}\sqrt{۳+\sqrt{۵}}\right)$$
$$=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}-\sqrt{۶+۲\sqrt{۵}}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^۲}-\sqrt{(۱+\sqrt{۵})^۲}\right)$$
$$=\frac{۱}{۲}\left(|۱-\sqrt{۵}|-|۱+\sqrt{۵}|\right)=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱-۱-\sqrt{۵})=\frac{۱}{۲}(-۲)=-۱$$

۲۹۶۰ (۴) فرض می‌کنیم $a_n=An^۲+Bn+C$. در این صورت بنابر فرض،

$$\begin{cases}A=-\frac{۱}{۷۰}a_۵=-\frac{۱}{۵}\\ a_۵=۱۴\\ a_۷=۱۷/۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{۱}{۵}\times۵^۲+۵B+C=۱۴\\ -\frac{۱}{۵}\times۷^۲+۷B+C=۱۷/۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}۵B+C=۱۹\\ ۷B+C=۲۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=۴\\ C=-۱\end{cases}$$

بنابراین
$$a_n=-\frac{۱}{۵}n^۲+۴n-۱\Rightarrow\begin{cases}a_{۱۵}=-\frac{۱}{۵}\times۱۵^۲+۴\times۱۵-۱=۱۴\\ a_۱=-\frac{۱}{۵}\times۱^۲+۴\times۱-۱=\frac{۱۴}{۵}\end{cases}$$

در نتیجه $\frac{a_{۱۵}}{a_۱}=۵$، پس $a_{۱۵}$ پنج برابر $a_۱$ است.

۲۹۶۱ (۲) طول رأس سهمی $f(x)=-ax^۲+ax+۲$ برابر است با

$$-\frac{a}{۲(-a)}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با

$$f(\tfrac{۱}{۲})=-a(\tfrac{۱}{۲})^۲+a(\tfrac{۱}{۲})+۲=-\frac{a}{۴}+\frac{a}{۲}+۲=\frac{a+۸}{۴}$$

طول رأس سهمی $g(x)=۲bx^۲-bx-۱$ برابر است با $-\frac{-b}{۲(۲b)}=\frac{۱}{۴}$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با $g(\tfrac{۱}{۴})=۲b(\tfrac{۱}{۴})^۲-b(\tfrac{۱}{۴})-۱=\frac{-b-۸}{۸}$

اکنون توجه کنید که نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{a+۸}{۴})$ روی سهمی g است، پس مختصات آن در معادلهٔ سهمی g صدق می‌کنند:

$$\frac{a+۸}{۴}=۲b(\tfrac{۱}{۲})^۲-b(\tfrac{۱}{۲})-۱=\frac{b}{۲}-\frac{b}{۲}-۱=-۱\Rightarrow a+۸=-۴\Rightarrow a=-۱۲$$

بنابراین $f(x)=۱۲x^۲-۱۲x+۲$. چون نقطهٔ $(\frac{۱}{۴},\frac{-b-۸}{۸})$ روی این سهمی است، پس مختصات آن در معادلهٔ این سهمی صدق می‌کنند:

$$\frac{-b-۸}{۸}=۱۲(\tfrac{۱}{۴})^۲-۱۲(\tfrac{۱}{۴})+۲=\frac{۳}{۴}-۳+۲=-\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{-b-۸}{۸}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow b=-۶$$

بنابراین $b-a=-۶-(-۱۲)=۶$.

۲۹۶۲ (۲) **راه‌حل اول** ابتدا نامعادله‌های $-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$ را با استفاده از جدول تعیین علامت حل می‌کنیم. برای حل کردن نامعادلهٔ $\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$ جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-۱		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$\frac{۱-۳x}{x+۱}$		$-$		$+$		$-$	

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$ مجموعهٔ $(-\infty,-۱)\cup(\frac{۱}{۳},+\infty)$ است.

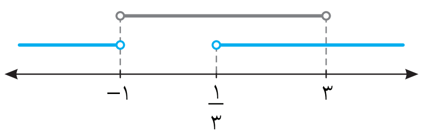
برای حل کردن نامعادلهٔ $-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}$ ابتدا آن را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}\Rightarrow\frac{۱-۳x}{x+۱}+۲>۰\Rightarrow\frac{۱-۳x+۲x+۲}{x+۱}>۰\Rightarrow\frac{۳-x}{x+۱}>۰$$

اکنون جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
$\frac{۳-x}{x+۱}$		$-$		$+$		$-$	

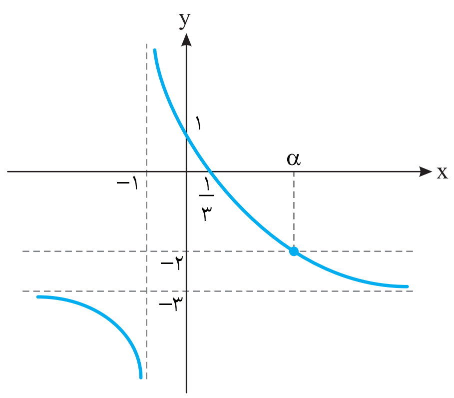
پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۳-x}{x+۱}>۰$ مجموعهٔ $(-۱,۳)$ است. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اشتراک مجموعه‌های جواب‌های دو نامعادله‌ای است که حل کردیم، که با توجه به شکل زیر برابر $(\frac{۱}{۳},۳)$ است.



اکنون توجه کنید که $\frac{۱}{۳}<x<۳\Rightarrow\frac{۱}{۶}<\frac{x}{۲}<\frac{۳}{۲}\Rightarrow[\frac{x}{۲}]=۰$ یا ۱

یعنی مجموعهٔ مقادیر $[\frac{x}{۲}]$ دو عضو دارد.

راه‌حل دوم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱-۳x}{x+۱}$ به‌صورت زیر است:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازهٔ $(\frac{۱}{۳},\alpha)$ است. برای پیدا کردن α، توجه کنید که α طول نقطهٔ برخورد خط $y=-۲$ و نمودار تابع f است. بنابراین α جواب معادلهٔ زیر است:

$$-۲=\frac{۱-۳x}{x+۱}\Rightarrow-۲x-۲=۱-۳x\Rightarrow x=۳$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازهٔ $(\frac{1}{3},3)$ است. اکنون توجه کنید که

$$\frac{1}{3}<x<3\Rightarrow \frac{1}{6}<\frac{x}{2}<\frac{3}{2}\Rightarrow [\frac{x}{2}]=0 \text{ یا } 1$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر $[\frac{x}{2}]$ دو عضو دارد.

۲۹۶۳ (۳) ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(ax+2)(b-x)-7x^2=abx-ax^2+2b-2x-7x^2$$
$$=-(a+7)x^2+(ab-2)x+2b$$

چون تابع f ثابت است، پس ضریب‌های جمله‌های شامل x باید صفر باشند:

$$-(a+7)=0\Rightarrow a=-7$$
$$ab-2=0\Rightarrow -7b-2=0\Rightarrow b=-\frac{2}{7}$$

پس ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=2b=-\frac{4}{7}$ است و برد آن مجموعهٔ $\{-\frac{4}{7}\}$ است.

۲۹۶۴ (۴) تبدیل‌های گفته شده را به‌ترتیب روی نمودار تابع f انجام می‌دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{۱ واحد به راست}}y=f(x-1)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x}}$$
$$y=-f(x-1)\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=-f(x-1)-2$$

اگر تابع نهایی را g بنامیم، آن‌گاه

$$g(x)=-f(x-1)-2=-\frac{1}{x-1}-2=\frac{-1-2x+2}{x-1}=\frac{1-2x}{x-1}$$

اکنون توجه کنید طول‌های نقطه‌های برخورد نمودارهای تابع‌های f و g جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1-2x}{x-1}\Rightarrow x-1=x-2x^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

چون نقطه‌های برخورد روی نمودار تابع f هستند، عرض آن‌ها برابر $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$ و $f(-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{2}$ است. بنابراین نقطه‌های برخورد $(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})$ و $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2})$ هستند که فاصلهٔ هر دو آن‌ها از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\pm\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۲۹۶۵ (۲) **راه‌حل اول** توجه کنید که مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$ و از طرف دیگر برابر a^2+b^2-12 است. همین طور، حاصل‌ضرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر $a+b-1$ است. بنابراین

$$\begin{cases} a+b=a^2+b^2-12 \\ ab=a+b-1 \end{cases}$$

چون $S=a+b$ را می‌خواهیم، پس از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ به‌دست می‌آوریم:

$$a+b=(a+b)^2-2ab-12\Rightarrow S=S^2-2(S-1)-12$$
$$S=S^2-2S+2-12\Rightarrow S^2-3S-10=0$$
$$(S+2)(S-5)=0\Rightarrow S=-2,S=5$$

چون a و b عددهایی طبیعی‌اند، پس مجموعشان مثبت است، یعنی $S=-2$ قابل قبول نیست و در نتیجه $S=5$.

راه‌حل دوم چون حاصل‌ضرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر $a+b-1$ است، پس

$$ab=a+b-1\Rightarrow a+b-ab-1=0\Rightarrow a(1-b)+b-1=0$$
$$(1-b)(a-1)=0\Rightarrow a=1 \text{ یا } b=1$$

از طرف دیگر، مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$ و از طرف دیگر برابر a^2+b^2-12 است. بنابراین $a+b=a^2+b^2-12$. پس اگر $a=1$، آن‌گاه

$$1+b=1+b^2-12\Rightarrow b^2-b-12=0\Rightarrow (b-4)(b+3)=0$$
$$b=4 \text{ یا } b=-3 \text{ (غ.ق.ق)}$$

در این حالت $a+b=5$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر $b=1$، آن‌گاه $a=4$ و باز هم $a+b=5$.

۲۹۶۶ (۱) توجه کنید که

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{1}{2-\sqrt{2-x}}=\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$
$$\frac{2-\sqrt{2-x}-(\sqrt{2-x}+2)}{(\sqrt{2-x}+2)(2-\sqrt{2-x})}=\frac{(\sqrt{2-x})^2}{5\sqrt{2-x}}\Rightarrow \frac{-2\sqrt{2-x}}{4-(2-x)}=\frac{\sqrt{2-x}}{5}$$

چون $x=2$ مخرج کسر سمت راست معادله را صفر می‌کند، بنابراین جواب معادله نیست، یعنی $x\neq 2$، پس $\sqrt{2-x}\neq 0$. در نتیجه می‌توانیم دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $\sqrt{2-x}$ تقسیم کنیم. به این ترتیب، به دست می‌آید

$$\frac{-2}{2+x}=\frac{1}{5}\Rightarrow 2+x=-10\Rightarrow x=-12$$

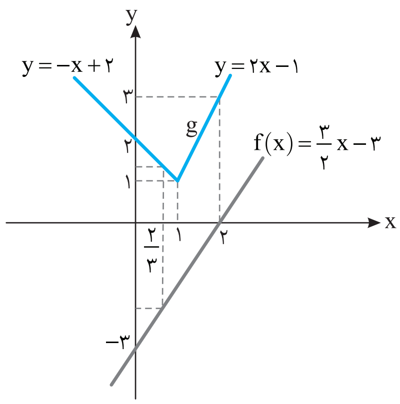
بنابراین معادلهٔ مورد نظر جواب مثبت ندارد.

۲۹۶۷ (۱) گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $(9,-2)\Rightarrow(-2,9):\ 9=-3(-2)^3+2(-2)-11$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب است. دیگر لازم نیست گزینه‌های دیگر را بررسی کنیم.

۲۹۶۸ (۲) ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را از روی شکل پیدا می‌کنیم:



برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ فرض می‌کنیم $a=f^{-1}(-2)$. در این صورت $f(a)=-2$. پس

$$f(a)=-2\Rightarrow \frac{3}{2}a-3=-2\Rightarrow a=\frac{2}{3}\Rightarrow f^{-1}(-2)=\frac{2}{3}$$

در نتیجه

$$(gof^{-1})(-2)=g(f^{-1}(-2))=g(\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$$

همچنین $g(0)=2$، پس

$$(gog)(0)=g(g(0))=g(2)=3$$

پس

$$(gof^{-1})(-2)\times(gog)(0)=\frac{4}{3}\times 3=4$$

۲۹۶۹ (۴) دامنهٔ تابع g مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ روبه‌رو است: $x^2f(x)\geq 0$

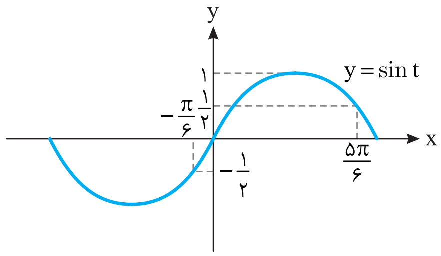
به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$x^2f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2f(x)\geq 0$ بازهٔ $(-\infty,3]$ است که عددهای صحیح نامنفی در آن ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند و تعداد آن‌ها چهارتاست.

۲۹۷۰ (۲) ابتدا توجه کنید که $-\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}\Rightarrow-\frac{\pi}{6}<2x<\frac{5\pi}{6}$

پس اگر $t=2x$، آن‌گاه $-\frac{\pi}{6}<t<\frac{5\pi}{6}$ و در نتیجه از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که $-\frac{1}{2}<\sin t\le 1$.



بنابراین باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$-\frac{1}{2}<\frac{m-1}{4}\le1\Rightarrow-2<m-1\le4\Rightarrow-1<m\le5\Rightarrow m\in(-1,5]$$

۲۹۷۱ (۳) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که از تساوی داده شده به‌دست می‌آید:

$$\sin x+\cos x=\frac{6\sqrt{5}}{10}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$1+2\sin x\cos x=\frac{9}{5}\Rightarrow2\sin x\cos x=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{2}{5}$$

چون مجموع و حاصل‌ضرب $\sin x$ و $\cos x$ را داریم، پس $\sin x$ و $\cos x$ جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند:

$$t^2-\frac{3}{\sqrt{5}}t+\frac{2}{5}=0\xrightarrow{\times5}5t^2-3\sqrt{5}t+2=0$$

$$t=\frac{3\sqrt{5}\pm\sqrt{(3\sqrt{5})^2-4(5)(2)}}{2\times5}=\frac{3\sqrt{5}\pm\sqrt{5}}{10}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ t=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$$

در نتیجه $\sin x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ ,\ \cos x=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=2$

یا $\cos x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ ,\ \sin x=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}$

راه‌حل دوم توجه کنید که بنابر فرض $\sin x+\cos x=\frac{6\sqrt{5}}{10}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$1+\sin2x=\frac{9}{5}\Rightarrow\sin2x=\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5}$$

اکنون توجه کنید

$$\sin2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}\Rightarrow2+2\tan^2x=5\tan x$$

$$2\tan^2x-5\tan x+2=0\Rightarrow\tan x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(2)}}{2\times2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm3}{4}$$

پس $\tan x=2$ یا $\tan x=\frac{1}{2}$.

۲۹۷۲ (۴) از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که

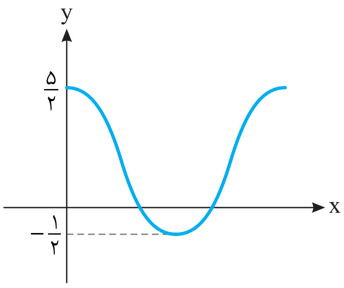
$$\frac{5}{2}=\text{ماکزیمم تابع}\Rightarrow|a|+c=\frac{5}{2}\ ,\quad -\frac{1}{2}=\text{مینیمم تابع}\Rightarrow-|a|+c=-\frac{1}{2}$$

اگر این تساوی‌ها را جمع کنیم، به‌دست می‌آید $2c=2$، پس $c=1$. از طرف دیگر،

$$|a|+c=\frac{5}{2}\Rightarrow|a|+1=\frac{5}{2}\Rightarrow|a|=\frac{3}{2}$$

چون گزینه‌ها همگی عددهایی منفی‌اند، پس $a=-\frac{3}{2}$ و در نتیجه $ac=-\frac{3}{2}$.

توجه کنید که اگر $a=\frac{3}{2}$، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=\frac{3}{2}\cos bx+1$ می‌شود که نمودار آن به‌صورت زیر است (که شبیه نمودار داده شده نیست):



۲۹۷۳ (۲) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos(-(x-\frac{\pi}{3}))=\cos(\frac{\pi}{3}-x)$$

اکنون توجه کنید که چون $x+\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}-x$ متمم یکدیگرند، پس

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{3}-x)$$

در نتیجه معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{3})=1\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{3}-x)\cos(\frac{\pi}{3}-x)=1$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{3}-x)=1\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{3}-x)=\pm1\Rightarrow\frac{\pi}{3}-x=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{3}-k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-2	-1	0	1
$\frac{\pi}{3}-k\pi$	$2\pi+\frac{\pi}{3}$	$\pi+\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{-2\pi}{3}$

بنابراین جواب‌ها در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر $\pi+\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ هستند، که تعداد آن‌ها دوتاست.

راه‌حل دوم چون $\sin(x+\frac{\pi}{6})$ و $\cos(x-\frac{\pi}{3})$ عددهایی در بازهٔ $[-1,1]$ هستند و حاصل‌ضربشان برابر ۱ شده است، یا هر دو ۱ هستند یا هر دو ۱− هستند. بنابراین

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{6})=1\\ \cos(x-\frac{\pi}{3})=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{3}=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

یا

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{6})=-1\\ \cos(x-\frac{\pi}{3})=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{3}=\pi\end{cases}\Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$$

پس معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب دارد.

۲۹۷۴ (۳) توجه کنید که $\log_2 3=a\Rightarrow2^a=3$

$$\log_8 b=\frac{2}{3}(1+a)\Rightarrow8^{\frac{2}{3}(1+a)}=b\Rightarrow(2^3)^{\frac{2}{3}(1+a)}=b\Rightarrow2^{2(1+a)}=b$$

$$(2^{1+a})^2=b\Rightarrow(2\times2^a)^2=b\Rightarrow(2\times3)^2=b\Rightarrow b=36$$

بنابراین

$$\log(3b-8)=\log(3\times36-8)=\log100=2$$

۲۹۷۵ (۱) چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(\frac{1}{2},1)$ می‌گذرد، پس

$$f(\frac{1}{2})=1\Rightarrow\sqrt[3]{2^{\frac{a}{2}+b}}=1\Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b}=1\Rightarrow\frac{a}{2}+b=0$$

از طرف دیگر،

$$f^{-1}(8)=5\Rightarrow f(5)=8\Rightarrow\sqrt[3]{2^{5a+b}}=8\Rightarrow 2^{5a+b}=8^3=2^9\Rightarrow 5a+b=9$$

بنابراین

$$\begin{cases}\frac{a}{2}+b=0\\ 5a+b=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}$$

در نتیجه $a-b=2+1=3$.

۲۹۷۶ (۴) توجه کنید که $\sigma=2$، پس $\sigma^2=2^2=4$. از طرف دیگر،

$$\sigma^2=\frac{a^2+0^2+(-1)^2+b^2+(-1)^2+3^2}{6}=\frac{a^2+b^2+11}{6}=4$$

پس $a^2+b^2+11=6\times4=24\Rightarrow a^2+b^2=13 \qquad (1)$

چون مجموع اختلاف‌های داده‌ها از میانگین برابر صفر است، پس

$$a+0+(-1)+b+(-1)+3=0\Rightarrow a+b=-1\Rightarrow a=-1-b$$

در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$(-1-b)^2+b^2=13\Rightarrow 1+b^2+2b+b^2=13\Rightarrow 2b^2+2b=12$$

$$b^2+b-6=0\Rightarrow b=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1)(-6)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}$$

در نتیجه $b=-3$ یا $b=2$. اگر $b=2$، آن‌گاه $a=-1-b=-3$ که چون طبق فرض $a>0$، پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین $b=-3$.

۲۹۷۷ (۳) فرض می‌کنیم داده‌ها به‌صورت مرتب شده باشند:

$$\underbrace{x_1,x_2,\dots,x_k}_{\text{داده‌های کوچک‌تر از میانه}}\ \underset{\text{میانه}}{\overset{;}{\uparrow}}\ \underbrace{x_{k+1},\dots,x_{2k}}_{\text{داده‌های بزرگ‌تر از میانه}}$$

فرض کنید $\bar{x}_1$ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه و $\bar{x}_2$ میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه باشد، یعنی

$$\bar{x}_1=\frac{x_1+\dots+x_k}{k}\ ,\ \bar{x}_2=\frac{x_{k+1}+\dots+x_{2k}}{k}$$

اگر دو طرف این تساوی‌ها را در k ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$k\bar{x}_1=x_1+\dots+x_k\ ,\ k\bar{x}_2=x_{k+1}+\dots+x_{2k}$$

از طرف دیگر، بنابر فرض $-\bar{x}_1=\bar{x}_2-6$، پس $\bar{x}_1+\bar{x}_2=6$. اکنون توجه کنید که میانگین کل داده‌ها برابر است با

$$\frac{(x_1+\dots+x_k)+(x_{k+1}+\dots+x_{2k})}{2k}=\frac{k\bar{x}_1+k\bar{x}_2}{2k}=\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}=\frac{6}{2}=3$$

۲۹۷۸ (۴) توجه کنید که اگر $x\to(-1)^+$، آن‌گاه $[x]=-1$ و

$$x>-1\Rightarrow -x<1\Rightarrow[-x]=0$$

همچنین

$$x>-1\Rightarrow x+1>0\Rightarrow|x+1|=x+1$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{|x+1|+[x]}{x-[-x]}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x+1+(-1)}{x-0}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x}{x}=1$$

۲۹۷۹ (۱) توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^2+x+1}}{x+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax}}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

در نتیجه $f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1}$. از طرف دیگر، اگر $x\to(-1)^-$، آن‌گاه

$$x<-1\Rightarrow\frac{1}{x}>-1\Rightarrow[\frac{1}{x}]=-1$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(-1)^-}[\frac{1}{x}]f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(-1)\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1}=-\sqrt{\frac{1}{4}-1+1}=-\frac{1}{2}$$

۲۹۸۰ (۲) **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x\sqrt{x}}{2x^2+x-1}-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{2(x-1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+(1-x)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(2x\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(2x\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\frac{-(2+1+1)}{2(1+1)(2+1-1)}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x\sqrt{x}}{2x^2+x-1}-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{2(x-1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{2(2x^2+x-1)}$$

اکنون توجه کنید بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt{x}+2x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-4x-1}{1}$$

$$=2+2\times\frac{1}{2}-4-1=-2$$

همچنین

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{2(2x^2+x-1)}=\frac{1}{2(2+1-1)}=\frac{1}{4}$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$(-2)\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

۲۹۸۱ (۳) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که شیب خط $y=2x+b$ برابر با 2 است. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x+a}{ax+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\times(ax+1)-a(x+a)}{(ax+1)^2}=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2}$$

بنابراین

$$f'(1)=\frac{1-a^2}{(a+1)^2}=\frac{(1-a)(1+a)}{(a+1)^2}=\frac{1-a}{1+a}$$

چون شیب خط مماس با $f'(1)$ برابر است، پس

$$2=\frac{1-a}{1+a}\Rightarrow 2+2a=1-a\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x+1}\Rightarrow f(1)=\frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+1}=1$$

چون نقطهٔ $(1,f(1))=(1,1)$ روی خط $y=2x+b$ قرار دارد، پس

$$1=2\times1+b\Rightarrow b=-1$$

در نتیجه $a-b=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$.

راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد خط و تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$2x+b=\frac{x+a}{ax+1}\Rightarrow 2ax^2+2x+abx+b=x+a$$

$$2ax^2+(1+ab)x+b-a=0$$

چون $x=1$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به‌صورت $2a(x-1)^2$ است. بنابراین $2ax^2+(1+ab)x+b-a=2a(x^2-2x+1)=2ax^2-4ax+2a$

در نتیجه

$$\begin{cases}1+ab=-4a\\ b-a=2a\end{cases}$$

از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید $b=3a$ و در نتیجه معادلهٔ اول می‌شود

$$1+a(3a)=-4a\Rightarrow 3a^2+4a+1=0\Rightarrow a=-1,\ a=-\frac{1}{3}$$

اگر $a=-1$، آن‌گاه $f(x)=\frac{x-1}{-x+1}=-1$، یعنی f تابعی ثابت می‌شود که خط $y=2x+b$ بر آن مماس نیست. بنابراین $a=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه $b=3a=-1$.

بنابراین $a-b=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$.

۲۹۸۲ (۱) توجه کنید که

$$f(x)=x^3+ax^2-2bx-4\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax-2b$$

بنابراین $f'(0)=-2b\Rightarrow 0=-2b\Rightarrow b=0$

پس $f'(x)=3x^2+2ax$. پس

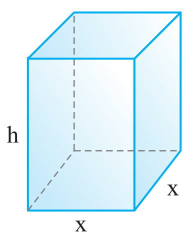
$$f'(-2)=3\times(-2)^2+2a(-2)=12-4a\Rightarrow 0=12-4a\Rightarrow a=3$$

بنابراین $f(x)=x^3+3x^2-4$. اکنون توجه کنید که

$$f(0)=-4\ ,\ f(-2)=-8+12-4=0$$

در نتیجه نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع $(0,-4)$ و $(-2,0)$ هستند، که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(-2-0)^2+(0-(-4))^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

۲۹۸۳ (۲) توجه کنید که مساحت کل این قوطی حلبی درباز برابر است با مجموع مساحت قاعده و مساحت چهار وجه آن، که اگر طول ضلع قاعده برابر x و ارتفاع قوطی برابر h باشد، می‌شود $S=x^2+4xh$ از طرف دیگر، حجم این قوطی برابر است با مساحت قاعدهٔ آن ضرب در ارتفاع آن، که می‌شود x^2h. بنابر فرض $x^2h=4$، پس $h=\frac{4}{x^2}$ و در نتیجه



$$S=x^2+4xh=x^2+4x\times\frac{4}{x^2}=x^2+\frac{16}{x}$$

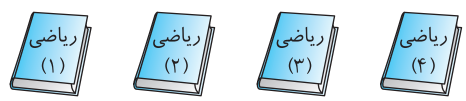
باید مینیمم مطلق S را حساب کنیم. توجه کنید که $S'=2x-\frac{16}{x^2}$

$$S'=0\Rightarrow 2x-\frac{16}{x^2}=0\Rightarrow 2x=\frac{16}{x^2}\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$$

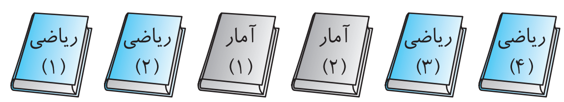
بنابراین مینیمم مطلق S به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$S=2^2+\frac{16}{2}=12$$

۲۹۸۴ (۳) ابتدا کتاب‌های ریاضی را در قفسه می‌چینیم. این کار به $4!$ طریق ممکن است.

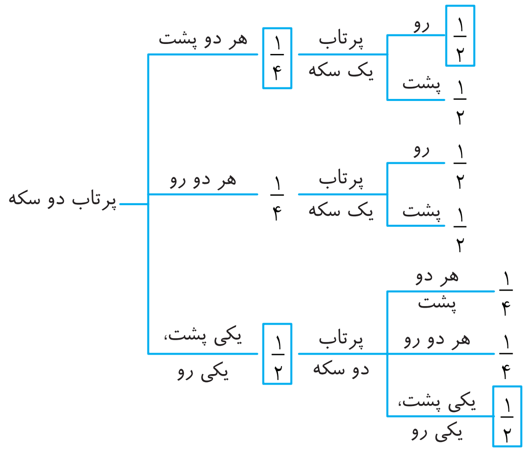


اکنون توجه کنید که برای اینکه موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به‌جز کتاب‌های اول و آخر) متفاوت باشد، کتاب‌های آمار باید بین کتاب‌های ریاضی (۲) و ریاضی (۳) قرار بگیرند (شکل زیر را ببینید). این کار به $2!$ طریق ممکن است.



در نتیجه طبق اصل ضرب پاسخ مسئله برابر است با $4!\times2!=48$.

۲۹۸۵ (۴) نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود احتمال اینکه دقیقاً دو سکه پشت بیایند برابر است با

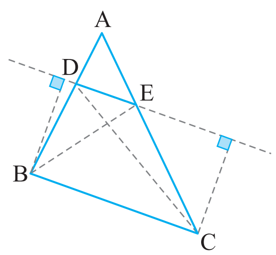
$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

۲۹۸۶ (۳) ابتدا معادلهٔ خط BC را می‌نویسیم. چون این خط از نقطه‌های $B(3,3)$ و $C(7,11)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-3=\frac{11-3}{7-3}(x-3)\Rightarrow y-3=2(x-3)\Rightarrow y-3=2x-6\Rightarrow 2x-y-3=0$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,9)$ از این خط برابر است با $AH=\frac{|2\times1-9-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

۲۹۸۷ (۴) ابتدا توجه کنید که بنابر اندازه‌های داده شده، $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}$



در نتیجه بنابر عکس قضیهٔ تالس $DE||BC$. بنابراین ارتفاع وارد از رأس C در مثلث CDE با ارتفاع وارد از رأس B در مثلث BDE برابر است. چون قاعدهٔ DE در این دو مثلث هم مشترک است. پس مساحت این دو مثلث برابر است، یعنی نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ۱ است.

۲۹۸۸ (۲) ابتدا شعاع و مرکز دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2+y^2-4x+2y=0\Rightarrow \text{مرکز}: O_1\left(-\frac{-4}{2},-\frac{2}{2}\right)=(2,-1)$$

$$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+2^2-4\times0}=\sqrt{5}$$

$$x^2+y^2-2y-2=0\Rightarrow \text{مرکز}: O_2\left(-\frac{0}{2},-\frac{-2}{2}\right)=(0,1)$$

$$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+(-2)^2-4\times(-2)}=\sqrt{3}$$

اکنون توجه کنید که $O_1O_2=\sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}\simeq2\times1.4=2.8$

از طرف دیگر،

$$r_1+r_2=\sqrt{5}+\sqrt{3}\simeq2.2+1.7=3.9$$

$$|r_1-r_2|=|\sqrt{5}-\sqrt{3}|\simeq2.2-1.7=0.5$$

چون $|r_1-r_2|<O_1O_2<r_1+r_2$، پس دایره‌ها متقاطع‌اند.