آزمون ۱۰۲

۱- گزینهٔ ۲ بنابر فرض $\frac{AC}{CG}=\frac{DE}{EF}=4$. فرض کنید $CG=x$ و $EF=y$. بنابراین $AG=3x$ و $DF=3y$. اکنون از C به F وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا خطی را که از D موازی BC رسم می‌شود، در نقطهٔ M قطع کند. در این صورت دو مثلث FEC و FDM دارای دو زاویهٔ مساوی‌اند، پس متشابه‌اند. بنابراین

$$\triangle FEC \sim \triangle FDM \Rightarrow \frac{EC}{DM}=\frac{FE}{FD}=\frac{FC}{FM} \xrightarrow[EF=y]{DF=3y}$$

$$\frac{EC}{DM}=\frac{FC}{FM}=\frac{1}{3} \xrightarrow{EC=1} \begin{cases} DM=3 \\ \frac{FM}{FC}=3 \end{cases}$$

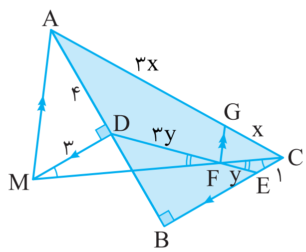
از طرف دیگر مثلث AMD قائم‌الزاویه است، پس

$$AM^2=AD^2+MD^2=4^2+3^2=25 \Rightarrow AM=5$$

در نتیجه

$$\triangle AMC: \frac{AG}{GC}=\frac{MF}{FC}=3 \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} AM \parallel FG$$

$$\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{FG}{AM}=\frac{CG}{AC} \Rightarrow \frac{FG}{5}=\frac{1}{4} \Rightarrow FG=\frac{5}{4}=1/25$$



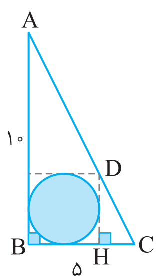
۲- گزینهٔ ۱ در صورتی که قطر دایره برابر 2R باشد، آن‌گاه مطابق شکل $DH=2R$ و $CH=BC-BH=5-2R$. پس با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$\triangle ABC: DH \parallel AB \Rightarrow \frac{DH}{AB}=\frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{2R}{10}=\frac{5-2R}{5}$$

$$10R=50-20R \Rightarrow 30R=50 \Rightarrow R=\frac{5}{3}$$

بنابراین

$$\text{مساحت دایره}=\pi R^2=\pi\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}\pi$$



۳- گزینهٔ ۲ تعداد قطرهای n ضلعی محدب را با d(n) نشان می‌دهیم. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم

$$d(n)-d(n-1)=16 \Rightarrow \frac{1}{2}n(n-3)-\frac{1}{2}(n-1)(n-1-3)=16$$

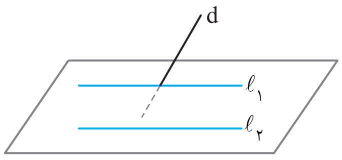
$$\xrightarrow{\text{ضرب در 2}} (n^2-3n)-(n^2-5n+4)=32 \Rightarrow 2n-4=32 \Rightarrow n=18$$

اکنون باید اختلاف تعداد قطرهای ۱۸ضلعی محدب و ۱۶ضلعی محدب را پیدا کنیم.

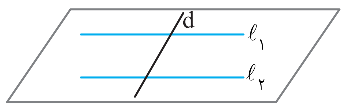
$$d(18)-d(16)=\frac{1}{2}(18)(18-3)-\frac{1}{2}(16)(16-3)$$

$$=9\times15-8\times13=135-104=31$$

۴- گزینهٔ ۴ در شکل (۱) خط‌های ℓ_1 و ℓ_2 موازی‌اند و خط d خط ℓ_1 را قطع کرده است ولی با خط ℓ_2 متنافر است. پس d و ℓ_2 می‌توانند متنافر باشند. از طرف دیگر، در شکل (۲)، خط d در صفحهٔ دو خط موازی ℓ_1 و ℓ_2 است و خط ℓ_1 را قطع می‌کند. بنابراین خط d خط ℓ_2 را نیز قطع می‌کند. پس d و ℓ_2 می‌توانند متقاطع هم باشند ولی d نمی‌تواند با ℓ_2 موازی باشد، زیرا اگر d موازی ℓ_2 باشد، چون ℓ_1 و ℓ_2 با هم موازی‌اند، پس d موازی ℓ_1 است (زیرا دو خط موازی با یک خط با هم موازی‌اند) و این خلاف فرض است. پس d موازی ℓ_2 نیست.



شکل (۱)



شکل (۲)

۵- گزینهٔ ۴ ارتفاع AH در ذوزنقهٔ محیطی ABCD را رسم می‌کنیم. پس $AH=4$. بنابراین

$$\triangle ADH: \hat{D}=60^\circ \Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AD \xrightarrow{AH=4} 4=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$$

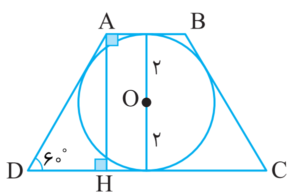
$$AD=\frac{8}{\sqrt{3}} \qquad (1)$$

از طرف دیگر

$$\text{محیطی } ABCD \Rightarrow AD+BC=AB+DC \xrightarrow{AD=BC}$$

$$2AD=AB+DC \xrightarrow{\text{از (1)}} AB+DC=\frac{16}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AH(AB+DC)=\frac{1}{2}(4)\left(\frac{16}{\sqrt{3}}\right)=\frac{32}{\sqrt{3}}$



۶- گزینهٔ ۳ در شکل چهارضلعی AMDN محاطی است، پس

$$\hat{A}+\hat{D}_2=180^\circ$$

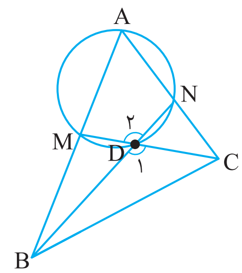
از طرف دیگر $\hat{D}_1$ زاویهٔ بین دو نیمساز داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در مثلث ABC است، پس

$$\hat{D}_1=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2} \qquad (1)$$

در ضمن $\hat{D}_1=\hat{D}_2$ ، بنابراین

$$\hat{A}+\hat{D}_2=180^\circ \xrightarrow{\text{از } (1)} \hat{A}+90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}=180^\circ \Rightarrow \frac{3}{2}\hat{A}=90^\circ$$

$$\hat{A}=60^\circ$$



۷- گزینهٔ ۲ در شکل $A(1,4)$ و $B(3,2)$ نقاط تلاقی دو دایره به مراکز O و O' و شعاع R است. بنابر فرض سؤال $OO'=2AB$، پس

$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\Rightarrow OO'=4\sqrt{2}$$

اکنون معادلهٔ خط OO' را به‌دست می‌آوریم، چون OO' عمودمنصف AB است، پس شیب OO' عکس قرینهٔ شیب AB است و خط OO' از نقطهٔ M وسط AB می‌گذرد.

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{4-2}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1\Rightarrow m_{OO'}=1$$

$$M \text{ وسط } AB \Rightarrow M=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{1+3}{2},\frac{2+4}{2}\right)=(2,3)$$

بنابراین معادلهٔ خط‌المرکزین دو دایره عبارت است از

$$OO': y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-3=1(x-2)\Rightarrow y=x+1$$

مراکز دو دایره روی خط $y=x+1$ قرار دارند، پس اگر $O,O'(\alpha,\beta)$ باشد، آن‌گاه $\beta=\alpha+1$. پس مختصات مراکز دایره‌ها به صورت $O,O'(\alpha,\alpha+1)$ است. در ضمن $OM=O'M=\frac{OO'}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$. در نتیجه

$$\left.\begin{matrix} O,O'(\alpha,\alpha+1) \\ M(2,3)\end{matrix}\right\}\Rightarrow OM=O'M=\sqrt{(\alpha-2)^2+(\alpha+1-3)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2(\alpha-2)^2}=2\sqrt{2}\Rightarrow 2(\alpha-2)^2=8\Rightarrow(\alpha-2)^2=4$$

$$\begin{cases}\alpha-2=2\Rightarrow\alpha=4\Rightarrow\beta=\alpha+1=5\Rightarrow O'(4,5)\\ \alpha-2=-2\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow\beta=\alpha+1=1\Rightarrow O(0,1)\end{cases}$$

شعاع دایره‌ها برابر است با

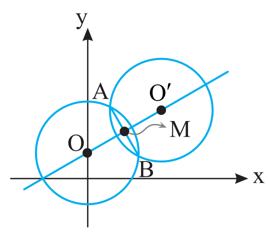
$$R=OA=\sqrt{(0-1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

دایرهٔ به مرکز O' محور xها را قطع نمی‌کند.

$$O \text{ معادلهٔ دایرهٔ به مرکز}: (x-0)^2+(y-1)^2=10 \xrightarrow{y=0}$$

$$x^2+1=10\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=3 \text{ یا } -3$$

یعنی این دایره محور xها را در نقاط $(3,0)$ و $(-3,0)$ قطع می‌کند و فاصلهٔ این دو نقطه برابر ۶ است.



۸- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{|2+0+3a|}{\sqrt{1+a^2}}\xrightarrow{\text{توان } 2}\frac{25}{2}=\frac{4+9a^2+12a}{1+a^2}$$

$$25+25a^2=8+18a^2+24a\Rightarrow 7a^2-24a+17=0$$

دیده می‌شود که مجموع ضرایب این معادلهٔ درجهٔ دوم صفر است $(7-24+17=0)$. بنابراین $a=1$ یا $a=\frac{17}{7}$.

$$a \text{ اختلاف مقادیر}=\frac{17}{7}-1=\frac{10}{7}$$

۹- گزینهٔ ۳

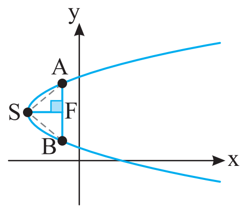
$$y^2-x-4y+2=0\Rightarrow y^2-4y=x-2$$

$$(y-2)^2-4=x-2\Rightarrow(y-2)^2=x+2$$

پس این سهمی افقی رو به راست با رأس $S(-2,2)$ است و $4a=1\Rightarrow a=\frac{1}{4}$

پس شکل این سهمی به صورت زیر است و اگر F کانون سهمی باشد، آن‌گاه AB وتر کانونی این سهمی به طول $4a$، یعنی ۱ است و $SF=a=\frac{1}{4}$. بنابراین

$$S_{ASB}=\frac{1}{2}SF\times AB=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)(1)=\frac{1}{8}$$



۱۰- گزینهٔ ۱

$$D=ABC=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\0&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x&-1\\1&1&x\\x&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&x+1&x-1\\x&-x+2&x\\-x-2&-3&-2x+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+5&\bigcirc&x+1\\\bigcirc&0&\bigcirc\\-2x-7&\bigcirc&-3\end{bmatrix}$$

بنابراین

مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$x+5-3=x+1-2x-7\Rightarrow 2x=-8\Rightarrow x=-4$$

۱۱- گزینهٔ ۲

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&2&-3\\3&-2&4\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بر حسب ستون اول}}$$

$$|A|=1(-1)^2\begin{vmatrix}2&-3\\-2&4\end{vmatrix}+3(-1)^4\begin{vmatrix}-1&2\\2&-3\end{vmatrix}$$

$$=1(8-6)+3(3-4)=2-3=-1$$

بنابراین $\big||A|A\big|=|A|^3|A|=|A|^4=(-1)^4=1$