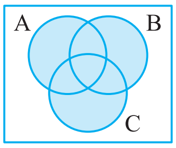
پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۲ (نوبت اول)

۱۶۰۱ (۱) ابتدا عبارت را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$((A-B)'-(B-C))-C=((A-B)'\cap(B-C)')\cap C'$$
$$=((A-B)\cup(B-C)\cup C)' \quad \text{دمورگان}$$

اکنون برای عبارت داخل پرانتز نمودار ون رسم می‌کنیم:



$$(A-B)\cup(B-C)\cup C=A\cup B\cup C$$

در نهایت به‌دست می‌آید

$$\text{عبارت}=(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'=A'\cap(B\cup C)'=A'-(B\cup C)$$

۱۶۰۲ (۲) از جبر گزاره‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\underbrace{(\sim p\wedge(\sim q\wedge r))}_{\text{شرکت‌پذیری}}\vee\underbrace{(q\wedge r)\vee(p\wedge r)}_{\text{توزیع‌پذیری}}$$
$$\equiv\underbrace{((\sim p\wedge\sim q)\wedge r)\vee((p\vee q)\wedge r)}_{\text{توزیع‌پذیری}}\equiv r\wedge(\underbrace{(\sim p\wedge\sim q)}_{\text{دمورگان}}\vee(p\vee q))$$
$$\equiv r\wedge\underbrace{(\sim(p\vee q)\vee(p\vee q))}_{T}\equiv r\wedge T\equiv r$$

۱۶۰۳ (۲) دو نفر خاص را a و b می‌نامیم. این دو نفر را در یک بسته در نظر می‌گیریم: $\boxed{a,b},c,d,e$

تعداد جایگشت‌های این بسته به همراه ۳ نفر دیگر برابر !۴ است. دقت کنید که در هر یک از این جایگشت‌ها به !۲ طریق می‌توانیم a و b را درون بسته جابه‌جا کنیم. بنابراین پاسخ برابر است با $4!\times2!=24\times2=48$

۱۶۰۴ (؟) می‌خواهیم معادلهٔ $x^2-mx+n=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز باشد، یعنی $\Delta>0\Rightarrow m^2-4n>0\Rightarrow m^2>4n$

اکنون حالت‌هایی را که این اتفاق رخ می‌دهد، به‌دست می‌آوریم:

$$n=1\Rightarrow m=3,4,5,6\ ,\quad n=2\Rightarrow m=3,4,5,6$$
$$n=3\Rightarrow m=4,5,6\ ,\quad n=4\Rightarrow m=5,6$$
$$n=5\Rightarrow m=5,6\ ,\quad n=6\Rightarrow m=5,6$$

پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر ۱۷ می‌شود. در نتیجه پاسخ برابر $P=\frac{17}{36}$ است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

۱۶۰۵ (۱) چون A و B ناسازگارند، پس $A\cap B=\varnothing$. اکنون می‌نویسیم

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-(P(A)+P(B))}{1-P(A)}$$
$$=\frac{1-(\frac{1}{6}+\frac{1}{4})}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{10}{12}}=\frac{7}{10}$$

۱۶۰۶ (۳) چون چهار عدد طبیعی زوج یک‌رقمی داریم، پس عددهای به‌دست آمده ۲، ۴، ۶ و ۸ هستند. در نتیجه عددهای فردی که در شرایط مسئله صدق می‌کنند و از روی آن‌ها این اعداد به‌دست آمده‌اند، ۱، ۳، ۷ و ۹ هستند. اکنون محاسبات را انجام می‌دهیم.

دستهٔ اول: ۱ , ۳, ۷, ۹ $\quad \bar{x}=5 \quad \sigma_x^2=\frac{16+4+4+16}{4}=10$

دستهٔ دوم: ۲ , ۴, ۶, ۸ $\quad \bar{y}=5 \quad \sigma_y^2=\frac{9+1+1+9}{4}=5$

$$\begin{cases}CV_x=\frac{\sqrt{10}}{5}\\ CV_y=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}\Rightarrow\frac{CV_x}{CV_y}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=\sqrt{2}$$

۱۶۰۷ (۴) ابتدا نمودار درختی را برای این سؤال رسم می‌کنیم:

$\frac{1}{3}$ کیسهٔ اول — 0 — قرمز $P_1=0$

$\frac{1}{3}$ کیسهٔ دوم — 1 — قرمز $P_2=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ کیسهٔ سوم — $\frac{2}{10}$ — قرمز $P_3=\frac{1}{15}$

اکنون بنابر قاعدهٔ بیز به‌دست می‌آید:

$$\text{جواب}=\frac{P_2}{P_1+P_2+P_3}=\frac{\frac{1}{3}}{0+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}}=\frac{5}{6}$$

۱۶۰۸ (۳) چون $8\times7=56$، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد داده شده را یک بار بر ۸ و یک بار بر ۷ به‌دست می‌آوریم و با استفاده از ویژگی‌های هم‌نهشتی جواب را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که می‌خواهیم از قاعدهٔ زیر استفاده کنیم:

$$A\overset{m}{\equiv}B,\ A\overset{n}{\equiv}B\Rightarrow A\overset{[m,n]}{\equiv}B$$
$$A=(24^{23}-21^{23})\times9\overset{8}{\equiv}(0-(-3)^{23})\times1\overset{8}{\equiv}(3^2)^{11}\times3\overset{8}{\equiv}1\times3\overset{8}{\equiv}3$$

و

$$A=(24^{23}-21^{23})\times9\overset{7}{\equiv}(3^{23}-0)\times3^2\overset{7}{\equiv}3^{25}\overset{7}{\equiv}(3^6)^4\times3\overset{7}{\equiv}1\times3\overset{7}{\equiv}3$$

بنابراین $A\overset{[7,8]}{\equiv}3\Rightarrow A\overset{56}{\equiv}3$

۱۶۰۹ (۳) پیمانه را ۱۸ در نظر می‌گیریم. به‌دست می‌آید

$$17x+18y\overset{18}{\equiv}987\Rightarrow(-1)x+0\overset{18}{\equiv}-3\Rightarrow x\overset{18}{\equiv}3\Rightarrow x=18k+3$$

مقدار به‌دست آمده را در معادله قرار می‌دهیم:

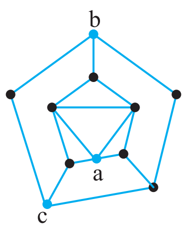
$$17\times18k+51+18y=987\Rightarrow y=52-17k$$

یعنی

$$\begin{cases}x=18k+3\\ y=-17k+52\end{cases}\quad(k=0,1,2,3)$$

۱۶۱۰ (۲) با انتخاب سه رأس a، b و c در شکل یک γ-مجموعه به‌دست می‌آید:

$\{a,b,c\}$



توجه کنید که چون $\gamma\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{11}{5}\right\rceil=3$، با اطمینان $\gamma=3$ را انتخاب می‌کنیم.

۱۶۱۱ ۴ می‌خواهیم مجموع دو عضو این مجموعه برابر ۴۷ شود. بنابراین جفت اعدادی را که مجموع آن‌ها ۴۷ می‌شود، می‌نویسیم

$$\underbrace{۱۲,۳۵ \quad ۱۳,۳۴ \quad \dots \quad ۲۳,۲۴}_{\text{۱۲ دسته}}$$

چون حداقل n برابر ۲۰ است، پس تعداد دسته‌ها باید ۱۹ تا باشد، یعنی ۷ دسته کم داریم. این ۷ دسته را به‌صورت زیر باید در نظر بگیریم:

$$\{۳۶\} \quad \{۳۷\} \quad \dots \quad \{۴۲\}$$

پس بیشترین مقدار m برابر ۴۲ است.

۱۶۱۲ ۳ دو حالت برای بیشترین و کمترین در نظر می‌گیریم:

درجهٔ رئوس در حالت بیشترین: $۳,۷,\underbrace{۸,\dots,۸}_{\text{۱۶تا}}$

$$q_{max}=\frac{\text{مجموع درجات رئوس}}{۲}=\frac{۳+۷+۱۶\times۸}{۲}=۶۹$$

درجهٔ رئوس در حالت کمترین: $\underbrace{۳,\dots,۳}_{\text{۱۶تا}},۴,۸$

$$q_{min}=\frac{\text{مجموع درجات رئوس}}{۲}=\frac{۳\times۱۶+۴+۸}{۲}=۳۰$$

$$q_{max}-q_{min}=۶۹-۳۰=۳۹$$