فصل اول : اصل ضرب

در این فصل یکی از اساسی‌ترین اصول شمارش را بیان و با حل چند مسأله روش‌های به‌کارگیری این اصل را آموزش می‌دهیم.

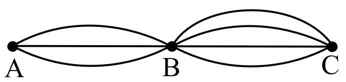
اصل ضرب (صورت ساده)

فرض کنید نحوه‌ی انجام کاری را بتوان به دو مرحله تجزیه کرد. مرحله‌ی اول به m طریق و به ازای هر طریق نحوه ی انجام مرحله‌ی اول، مرحله‌ی دوم به n طریق قابل انجام باشد. در این‌صورت کل کار به mn طریق قابل انجام است.

مسأله‌ی ۱: بین دو شهر A و B سه جاده و بین شهرهای B و C چهار جاده احداث شده است.

الف) به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟

ب) به چند طریق می‌توان از A به C رفت و به A برگشت؟



راه حل: الف) عمل رفتن از A به C را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، رفتن از A به B و مرحله‌ی دوم رفتن از B به C. مرحله‌ی اول را به ۳ طریق می‌توانیم انجام دهیم، زیرا بین A و B سه جاده وجود دارد. حال به هر صورتی که مرحله‌ی اول انجام شود، مرحله‌ی دوم را به ۴ طریق می‌توانیم انجام دهیم، زیرا بین B و C چهار جاده وجود دارد. لذا بنا بر اصل ضرب به $۳\times۴=۱۲$ طریق می‌توان از A به C رفت.

ب) عمل رفت و برگشت را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، رفتن از A به C و مرحله‌ی دوم، برگشت به A. در قسمت قبل دیدیم که به ۱۲ طریق می‌توانیم از A به C برویم، لذا مرحله‌ی اول را به ۱۲ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال به هر صورتی که از A به C برویم مجدداً به ۱۲ طریق می‌توانیم از C به A برگردیم، لذا مرحله‌ی دوم را نیز به ۱۲ طریق می‌توانیم انجام دهیم. در نتیجه بنا بر اصل ضرب به $۱۲\times۱۲=۱۴۴$ طریق می‌توان از A به C رفت و به A برگشت.

مسأله‌ی ۲: **به چند طریق می‌توان کمیته‌ای دو نفره متشکل از یک مرد و یک زن از میان ۵ مرد و ٤ زن انتخاب کرد؟**

راه حل: عمل انتخاب کمیته را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، انتخاب یک مرد و مرحله‌ی دوم، انتخاب یک زن. مرحله‌ی اول را به ۵ طریق می‌توانیم انجام دهیم، زیرا باید یکی از ۵ مرد را انتخاب کنیم. به هر صورتی که مرحله‌ی اول انجام شود، مرحله‌ی دوم را به ۴ طریق می‌توانیم انجام دهیم، زیرا باید یکی از ۴ زن را انتخاب کنیم. پس بنا بر اصل ضرب به $۵\times۴=۲۰$ طریق می‌توان کمیته‌ی دو نفره را انتخاب کرد.

یادداشت: توجه کنید در حل این مسأله می‌توانستیم مرحله‌ی اول را به انتخاب یک زن و مرحله‌ی دوم را به انتخاب یک مرد اختصاص دهیم و با این روش به پاسخ $۴\times۵=۲۰$ برسیم. در واقع در این‌جا ترتیب انتخاب زن و مرد اهمیت ندارد، آن‌چه مهم است این است که چه کسانی عضو کمیته می‌شوند، یعنی اگر ابتدا آقای X و سپس خانم Y انتخاب شود با این‌که ابتدا خانم Y و سپس آقای X انتخاب شود تفاوتی ندارد. تنها چیزی که مهم است این است که آقای X و خانم Y به عنوان اعضای کمیته انتخاب شده‌اند.

مسأله‌ی ۳: **از میان ۷ عضو یک انجمن به چند طریق می‌توان یک رئیس و یک معاون انتخاب کرد؟**

راه حل: عمل انتخاب رئیس و معاون را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، انتخاب رئیس و مرحله‌ی دوم، انتخاب معاون. یکی از ۷ عضو انجمن را باید به عنوان رئیس انتخاب کنیم، لذا مرحله‌ی اول را به ۷ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس از انتخاب رئیس، باید یکی از ۶ عضو باقی‌مانده را به عنوان معاون انتخاب کنیم، لذا مرحله‌ی اول به هر صورتی انجام شود، مرحله‌ی دوم را به ۶ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس بنا بر اصل ضرب به $۷\times۶=۴۲$ طریق می‌توانیم رئیس و معاون را انتخاب کنیم.

تست ۱: **۵ جاده به قله‌ی کوهی می‌روند. یک کوهنورد به چند طریق می‌تواند از یک جاده به قله برود و از جاده‌ی دیگر پایین آید؟**

۱) ۹   ۲) ۲۰   ۳) ۲۵   ٤) ٦۲٥

راه حل: عمل رفت و برگشت را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، رفتن به قله و مرحله‌ی دوم، برگشت از قله. مرحله‌ی اول را به ۵ طریق می‌توانیم انجام دهیم، زیرا باید از یکی از ۵ جاده به سمت قله برویم. با توجه به شرط داده شده از هر جاده‌ای به سمت قله برویم، باید از یکی از ۴ جاده‌ی دیگر پایین بیاییم، لذا مرحله‌ی اول به هر صورتی انجام شود، مرحله‌ی دوم را به ۴ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس بنا بر اصل ضرب پاسخ برابر $۵\times۴=۲۰$ است. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

مسأله‌ی ۴: چند عدد دو رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

راه حل: عمل نوشتن عدد دو رقمی را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، نوشتن رقم دهگان و مرحله‌ی دوم، نوشتن رقم یکان. رقم دهگان برابر یکی از ارقام۱، ۲، . . . و ۹ است، لذا مرحله‌ی اول را به ۹ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس از نوشتن رقم دهگان، باید یکی از ۱۰ رقم صفر، ۱، . . . و ۹ را غیر از رقمی که در مرتبه‌ی دهگان نوشته‌ایم در مرتبه‌ی یکان بنویسیم، لذا مرحله‌ی اول به هر صورتی انجام شود، مرحله‌ی دوم را به ۹ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس بنا بر اصل ضرب، $۸۱ = ۹ \times ۹$ عدد دو رقمی با ارقام متمایز وجود دارد (توجه کنید که اعداد ۱ و ۲ زیر دو دایره، نشان دهنده‌ی این است که در مرحله‌ی اول، رقم دهگان ودر مرحله‌ی دوم، رقم یکان نوشته شده است).

(۹)(۹)

۱ ۲

یادداشت: فرض کنید برخلاف آن‌چه در راه حل مسأله ذکر کردیم، مرحله‌ی اول را به نوشتن رقم یکان و مرحله‌ی دوم را به نوشتن رقم دهگان اختصاص دهیم. در این‌صورت چون رقم یکان برابر یکی از ارقام صفر، ۱، . . . و ۹ است، لذا مرحله‌ی اول را به ۱۰ طریق می‌توانیم انجام دهیم.

( )(۱۰)

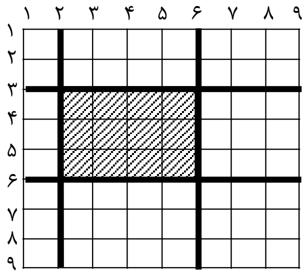
۲ ۱

حال توجه کنید که مرحله‌ی اول به هر صورتی انجام شود، تعداد راه‌های انجام مرحله‌ی دوم عدد ثابتی نیست و بستگی به نحوه‌ی انجام مرحله‌ی اول دارد، زیرا اگر رقم یکان برابر صفر باشد، ۹ انتخاب برای رقم دهگان (هر یک از ارقام ۱ تا ۹) و اگر رقم یکان غیر صفر باشد، ۸ انتخاب برای رقم دهگان (هر یک از ارقام ۱ تا ۹ غیر از رقمی که در مرتبه‌ی یکان قرار گرفته) وجود دارد. لذا این‌جا برای حل مسأله از اصل ضرب نمی‌توانیم کمک بگیریم.

با توجه به آن‌چه ذکر کردیم، در حل برخی مسائل، مانند مسأله‌ی قبل، انتخاب مناسب‌تر ترتیب مراحل انجام کار اهمیت دارد. معمولاً در حل مسائل با استفاده از اصل ضرب، ابتدا مراحلی را در نظر می‌گیریم که به نوعی محدودیت داشته باشند، مثلاً در مسأله‌ی قبل محدودیت رقم دهگان این است که برابر صفر نمی‌تواند باشد، در صورتی که رقم یکان هیچ محدودیتی ندارد. لذا مناسب‌تر این است که ابتدا رقم دهگان و سپس رقم یکان را بنویسیم.

مسأله‌ی ۵: در صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ چند مستطیل ۳×۴ (افقی) وجود دارد؟

راه حل: هر مستطیل ۳×۴ از برخورد دو خط افقی به فاصله‌ی ۳ و دو خط عمودی به فاصله‌ی ۴ ایجاد می‌شود. لذا عمل ساختن یک مستطیل ۳×۴ را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، انتخاب دو خط افقی به فاصله‌ی ۳ و مرحله‌ی دوم، انتخاب دو خط عمودی به فاصله‌ی ۴.



توجه کنید که صفحه‌ی شطرنجی 8×8 همان‌گونه که در شکل ملاحظه می‌کنید از ۹ خط افقی و ۹ خط عمودی تشکیل شده است. برای انتخاب دو خط افقی به فاصله‌ی ۳ باید دو خط افقی با شماره‌های k و $k+3$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند انتخاب کنیم. چون ۹ خط افقی وجود دارد، لذا مقادیر قابل قبول برای k عبارتند از ۱، ۲، . . . و ۶

پس به ۶ طریق می‌توانیم دو خط افقی به فاصله‌ی ۳ انتخاب کنیم و با همین استدلال نتیجه می‌گیریم که به ۵ طریق می‌توان دو خط عمودی به فاصله‌ی ۴ انتخاب کرد. پس مرحله‌ی اول به ۶ طریق قابل انجام است و به ازای هر طریق نحوه‌ی انجام مرحله‌ی اول، مرحله‌ی دوم به ۵ طریق قابل انجام است. لذا در صفحه‌ی شطرنجی 8×8، $6\times 5=30$ مستطیل 3×4 وجود دارد.

در حالت کلی اصل ضرب در مسأله‌هایی که بتوان نحوه‌ی انجام کار را به چند مرحله تجزیه کرد کاربرد دارد.

اصل ضرب (صورت کلی)

فرض کنید نحوه‌ی انجام کاری را بتوان به k مرحله تجزیه کرد. مرحله‌ی اول به n_1 طریق قابل انجام باشد، به هر روشی که مرحله‌ی اول انجام شود، مرحله‌ی دوم به n_2 طریق قابل انجام باشد، . . . و به هر روشی که مراحل اول تا $k-1$ام انجام شوند، مرحله‌ی kام به n_k طریق قابل انجام باشد. در این صورت کل کار به $n_1n_2...n_k$ طریق قابل انجام است.

مسأله‌ی ۶: الف) چند کلمه‌ی سه حرفی با حروف a، b، c، d، e و f می‌توان نوشت؟

ب) در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟

ج) در چند کلمه هر سه حرف متمایزند؟

راه حل: عمل نوشتن کلمه‌ی سه حرفی را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، نوشتن حرف اول، مرحله‌ی دوم، نوشتن حرف دوم و مرحله‌ی سوم، نوشتن حرف سوم.

○ ○ ○
۱ ۲ ۳

الف) باید یکی از ۶ حرف داده شده را در جایگاه شماره‌ی ۱ بنویسیم و پس از آن یکی از این ۶ حرف را در جایگاه شماره‌ی ۲ و در نهایت یکی از این حروف را در جایگاه شماره‌ی ۳ بنویسیم. لذا مرحله‌ی اول را به ۶ طریق، به ازای هر طریق نحوه‌ی انجام مرحله‌ی اول، مرحله‌ی دوم را نیز به ۶ طریق و به ازای هر طریق نحوه‌ی انجام مراحل اول و دوم، مرحله‌ی سوم را نیز به ۶ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس بنا بر اصل ضرب، $6\times 6\times 6=216$ کلمه‌ی سه حرفی با ۶ حرف داده شده وجود دارد.

۶ ۶ ۶
۱ ۲ ۳

ب) باید یکی از ۶ حرف را در جایگاه شماره‌ی ۱ بنویسیم، لذا مرحله‌ی اول را به ۶ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس از نوشتن حرف اول، باید حرفی غیر از حرف نوشته شده در جایگاه اول را در جایگاه شماره‌ی ۲ بنویسیم (زیرا حرف اول و دوم کلمه نباید یکسان باشند) لذا مرحله‌ی دوم را به ۵ طریق می‌توانیم انجام دهیم. در نهایت باید حرفی غیر از حرف نوشته شده در جایگاه دوم را در جایگاه شماره‌ی ۳ بنویسیم، (زیرا حرف دوم و سوم کلمه نباید یکسان باشند) لذا مرحله‌ی سوم را نیز به ۵ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس بنا بر اصل ضرب، در ۱۵۰ = ۵×۵×۶ کلمه حروف مجاور متمایزند.

۶ ۵ ۵
۱ ۲ ۳

ج) در این قسمت برای حرف اول، ۶ انتخاب وجود دارد. چون حرف اول و دوم نباید یکسان باشند، لذا برای حرف دوم، ۵ انتخاب وجود دارد و چون حرف سوم نباید با دو حرف دیگر کلمه برابر باشد، لذا برای حرف سوم، ۴ انتخاب وجود دارد. پس بنا بر اصل ضرب، در ۱۲۰ = ۴×۵×۶ کلمه هر سه حرف متمایزند.

۶ ۵ ۴
۱ ۲ ۳

تست ۲: چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳ و ٤ می‌توان نوشت؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۲۵ ۳) ۳۰۰ ٤) ۳۷۵

راه حل: توجه کنید وقتی در صورت سؤال شرطی برای متمایز بودن ارقام ذکر نکرده فرض بر این است که به کار بردن رقم تکراری مجاز است. چهار جایگاه در یک ردیف در نظر می‌گیریم. برای رقم هزارگان، ۴ انتخاب وجود دارد، زیرا هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ را در این جایگاه می‌توانیم قرار دهیم. برای هر یک از رقم‌های صدگان و دهگان، ۵ انتخاب وجود دارد، زیرا هر یک از ۵ رقم داده شده را در این جایگاه‌ها می‌توانیم قرار دهیم و در نهایت برای رقم یکان، ۳ انتخاب وجود دارد، زیرا باید یکی از ارقام صفر، ۲ و ۴ را در این جایگاه قرار دهیم تا عدد حاصل زوج شود. نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر ۳۰۰ = ۳×۵×۵×۴ است. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

۴ ۵ ۵ ۳
۱ ۲ ۳ ۴

مسأله‌ی ۷: چند عدد سه رقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد؟

راه حل: سه جایگاه در نظر می‌گیریم. چون رقم یکان باید فرد و رقم صدگان باید غیر صفر باشد، لذا ابتدا رقم یکان، سپس رقم صدگان و در نهایت رقم دهگان را می‌نویسیم.

○ ○ ○
۲ ۳ ۱

رقم یکان باید برابر ۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹ باشد، لذا برای این رقم ۵ انتخاب وجود دارد. پس از نوشتن رقم یکان باید یکی از ارقام ۱ تا ۹ را غیر از رقمی که در مرتبه‌ی یکان قرار گرفته در مرتبه‌ی صدگان قرار دهیم، لذا برای رقم صدگان، ۸ انتخاب وجود دارد و در نهایت باید یکی از ارقام صفر تا ۹ را غیر از دو رقمی که در مرتبه‌های یکان و صدگان قرار گرفته‌اند در مرتبه‌ی دهگان قرار دهیم، لذا برای رقم دهگان، ۸ انتخاب وجود دارد. پس بنا بر اصل ضرب، $۵\times۸\times۸=۳۲۰$ عدد سه رقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد.

۸ ۸ ۵
۲ ۳ ۱

مسأله‌ی ۸: مجموعه‌ی $X=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

راه حل: برای ساخت یک زیر مجموعه از X باید برخی از اعضای X را سفید و بقیه را سیاه کنیم (سفید به معنای انتخاب و سیاه به معنای حذف است). مثلاً چنان‌چه همه‌ی اعضا را سیاه کنیم، زیرمجموعه‌ی ϕ و چنان‌چه اعضای ۲ و ۵ را سفید و بقیه را سیاه کنیم، زیرمجموعه‌ی $\{۲,۵\}$ به دست می‌آید. لذا عمل ساخت یک زیرمجموعه از X را به ۵ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، تعیین رنگ عدد ۱، . . . و مرحله‌ی پنجم تعیین رنگ عدد ۵. چون هر یک از اعداد را مستقل از بقیه به ۲ طریق می‌توانیم رنگ کنیم، لذا طبق اصل ضرب، به $۲^۵$ طریق می‌توان یک زیرمجموعه از X را بسازیم، پس X، $۲^۵$ زیرمجموعه دارد.

در حالت کلی قضیه‌ی زیر درست است.

قضیه‌ی ۱: **یک مجموعه‌ی n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد.**

مسأله‌ی ۹: **در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $X=\{۱,۲,...,۱۰\}$ کوچک‌ترین عضو برابر ۳ و بزرگ‌ترین عضو برابر ۹ است؟**

راه حل: مشابه راه حل مسأله‌ی قبل عمل ساخت یک زیرمجموعه از X را به ۱۰ مرحله تجزیه می‌کنیم. چون می‌خواهیم کوچک‌ترین عضو زیر مجموعه برابر ۳ باشد، لذا اعداد ۱ و ۲ باید حذف شوند و عدد ۳ باید انتخاب شود و چون می‌خواهیم بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه برابر ۹ باشد، لذا عدد ۹ باید انتخاب و عدد ۱۰ باید حذف شود. هر یک از اعداد باقی‌مانده، یعنی اعداد ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸، را می‌توانیم انتخاب یا حذف کنیم. پس برای هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۹ و ۱۰، یک انتخاب و برای هر یک از ۵ عدد دیگر، ۲ انتخاب وجود دارد، لذا به $۲^۵$ طریق می‌توانیم زیرمجموعه‌ای از X بسازیم که کوچک‌ترین عضو آن برابر ۳ و بزرگ‌ترین عضو آن برابر ۹ باشد.

مسأله‌ی ۱۰: یک قطار با ۲۰ مسافر در ۳ ایستگاه توقف می‌کند. مسافرین این قطار به چند طریق می‌توانند در این ایستگاه‌ها پیاده شوند؟

راه حل: مسافرین قطار را به ترتیب با $A_۱$، . . . و $A_{۲۰}$ نام‌گذاری می‌کنیم. عمل پیاده شدن مسافرین را به ۲۰ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، تعیین ایستگاهی که $A_۱$ پیاده می‌شود، . . . و مرحله‌ی بیستم، تعیین ایستگاهی که $A_{۲۰}$ پیاده می‌شود. چون قطار در ۳ ایستگاه توقف می‌کند، لذا برای هر مسافر مستقل از بقیه ۳ انتخاب وجود دارد، پس هر یک از ۲۰ مرحله به ۳ طریق قابل انجام‌اند، لذا بنا بر اصل ضرب، مسافرین به $۳^{۲۰}$ طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده می‌شوند.

یادداشت: ممکن است این سؤال پیش آید که چرا عمل پیاده شدن مسافرها را به ۳ مرحله تجزیه نکردیم؟

به این‌صورت که مرحله‌ی اول برای تعیین مسافرهایی باشد که در ایستگاه اول پیاده می‌شوند، مرحله‌ی دوم برای تعیین مسافرهایی که در ایستگاه دوم پیاده می‌شوند و مرحله‌ی سوم برای تعیین مسافرهایی که در ایستگاه سوم پیاده می‌شوند. چنان‌چه به این صورت عمل کنیم، برای مرحله‌ی اول $۲^{۲۰}$ انتخاب وجود دارد، زیرا در واقع باید زیرمجموعه‌ای از ۲۰ مسافر در ایستگاه اول پیاده شوند و بنا بر قضیه‌ی قبل، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ۲۰ مسافر برابر $۲^{۲۰}$ است. حال پس از پیاده شدن تعدادی مسافر در ایستگاه اول، تعداد روش‌های انجام مرحله‌ی دوم عدد ثابتی نیست و به تعداد افرادی که در ایستگاه اول پیاده شده‌اند بستگی دارد (مثلاً اگر در ایستگاه اول ۷ نفر پیاده شده باشند، برای ایستگاه دوم $۲^{۱۳}$ انتخاب و اگر در ایستگاه اول ۴ نفر پیاده شده باشند، برای ایستگاه دوم $۲^{۱۶}$ انتخاب وجود دارد). پس این‌جا برای حل مسأله از اصل ضرب نمی‌توانیم استفاده کنیم.

مسأله‌ی ۱۱: به چند طریق می‌توان ۵ جایزه‌ی مختلف را بین ۲۰ دانش‌آموز یک کلاس تقسیم کرد به‌طوری که به هیچ فردی بیش از یک جایزه نرسد؟

راه حل: چون جایزه‌ها متمایزند، لذا آن‌ها را به ترتیب با $J_۱$، . . . و $J_۵$ نام‌گذاری می‌کنیم. عمل تقسیم جوایز را به ۵ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، توزیع $J_۱$، . . . و مرحله‌ی پنجم، توزیع $J_۵$. جایزه‌ی $J_۱$ را باید به یکی از ۲۰ دانش آموز بدهیم، لذا برای $J_۱$، ۲۰ انتخاب وجود دارد. پس از توزیع $J_۱$، جایزه‌ی $J_۲$ باید به یکی از ۱۹ نفر باقی‌مانده برسد، لذا برای $J_۲$، ۱۹ انتخاب وجود دارد. پس از توزیع $J_۱$ و $J_۲$، جایزه‌ی $J_۳$ را باید به یکی از ۱۸ نفر باقی‌مانده بدهیم، لذا برای $J_۳$، ۱۸ انتخاب وجود دارد و به همین ترتیب برای $J_۴$، ۱۷ و برای $J_۵$، ۱۶ انتخاب وجود دارد. پس بنا بر اصل ضرب، به $۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸ \times ۱۷ \times ۱۶$ طریق می‌توانیم جایزه‌ها را توزیع کنیم به‌طوری که به هیچ فردی بیش از یک جایزه نرسد.

یادداشت: توجه کنید در حل این مسأله بحث روی دانش‌آموزان فایده‌ای ندارد. زیرا به نفر اول باید حداکثر یکی از ۵ جایزه را بدهیم و لذا برای نفر اول ۶ انتخاب وجود دارد (یا به نفر اول جایزه نمی‌دهیم و یا یکی از ۵ جایزه را به او می‌دهیم).

حال باید حداکثر یکی از جایزه‌های باقی‌مانده را به نفر دوم بدهیم. اگر به نفر اول جایزه نداده باشیم، برای نفر دوم ۶ انتخاب و اگر به نفر اول جایزه داده باشیم، برای نفر دوم ۵ انتخاب وجود دارد، لذا تعداد انتخاب‌های نفر دوم عدد ثابتی نیست و برای حل مسأله از این طریق از اصل ضرب نمی‌توانیم استفاده کنیم.

تست ۳: یک واگن ۱۰ کوپه دارد. ٦ نفر را به چند طریق می‌توان در کوپه‌های این واگن توزیع کرد؟ (کوپه‌ها متمایزند و توجه کنید که هر ٦ نفر را می‌توان به یک کوپه فرستاد).

۱) ١٦　　۲) ٦٠　　۳) $۶^{۱۰}$　　٤) $۱۰^{۶}$

راه حل: عمل توزیع افراد را به ۶ مرحله تقسیم می‌کنیم. مرحله‌ی اول، تعیین کوپه‌ی نفر اول، . . . و مرحله‌ی ششم، تعیین کوپه‌ی نفر ششم. چون ۱۰ کوپه‌ی متمایز وجود دارد، لذا هر یک از این افراد را مستقل از دیگران به ۱۰ طریق می‌توان به یکی از کوپه‌ها فرستاد، لذا به $۱۰^{۶}$ طریق می‌توان ۶ نفر را در کوپه‌های واگن توزیع کرد. بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

مسأله‌ی ۱۲: یک امتحان از ۸ تست چهار گزینه‌ای تشکیل شده است. یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به این سؤالات پاسخ دهد به‌طوری که:

الف) پاسخ دادن به هر تست الزامی باشد (یعنی از هر تست یکی از ٤ گزینه را به عنوان پاسخ علامت بزند)؟

ب) پاسخ دادن به همه‌ی تست‌ها الزامی نباشد؟

راه حل: عمل پاسخ دادن به تست‌ها را به ۸ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، پاسخ دادن به تست شماره‌ی ۱، . . . و مرحله‌ی هشتم، پاسخ دادن به تست شماره‌ی ۸. در قسمت الف، هر یک از این ۸ مرحله به ۴ طریق قابل انجام‌اند، زیرا دانش‌آموز باید یکی از ۴ گزینه‌ی هر تست را علامت بزند. پس پاسخ قسمت الف، برابر $۴^{۸}$ است. در قسمت ب، هر یک از ۸ مرحله به ۵ طریق قابل انجام‌اند، زیرا علاوه بر این‌که دانش‌آموز می‌تواند یکی از ۴ گزینه‌ی هر تست را علامت بزند، می‌تواند به این تست پاسخ ندهد. پس پاسخ قسمت ب، برابر $۵^{۸}$ است.

فصل ۱

اصل ضرب

سوالات چهارگزینه‌ای و مسائل

۱- یک سازنده‌ی میز تحریر در ۳ اندازه و ۵ طرح مختلف میز تولید می‌کند. این سازنده چند نوع مختلف میز تحریر می‌تواند تولید کند؟

۱) ۸ ۲) ۱۵ ۳) $۳^{۵}$ ۴) $۵^{۳}$

۲- یک تاس و یک سکه را پرتاب کرده‌ایم. چند حالت مختلف ممکن است پدید آید؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۳۶ ۴) ۶۴

۳- از میان ۷ زوج (زن و شوهر) به چند طریق می‌توان یک مرد و یک زن انتخاب کرد به‌طوری که همسر یک‌دیگر نباشند؟

۱) ۱۳ ۲) ۴۲ ۳) ۲۶ ۴) ۸۴

٤- یک عدد سه رقمی را متقارن گوییم هرگاه رقم یکان و صدگان آن برابر باشند (مثلاً اعداد ۲۷۲ و ٤٤٤ متقارن‌اند). چند عدد سه رقمی متقارن وجود دارد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۸۱۰

۵- از میان ۵ کلاس اولی، ۳ کلاس دومی و ۲ کلاس سومی به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۳ نفره تشکیل داد به‌طوری که از هر کلاس دقیقاً یک نفر عضو کمیته باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

٦- چند عدد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام صفر، ۱، ۲ و ۵ وجود دارد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۷- با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳ و ٤ چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۸۱ ۲) ۹۲ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

۸- با ارقام ۱، ۲، ۳، ٤ و ۵ چند عدد سه رقمی فرد با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

۹- می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که سمت راست آن‌ها یکی از حروف a، b، c و d و سمت چپ آن‌ها عددی دو رقمی با ارقام ناصفر نوشته شده باشد. چند کارت مختلف می‌توانیم بسازیم؟

۱) ۳۲۴ ۲) ۳۶۰ ۳) ۲۴۳ ۴) ۱۸۰

۱۰- از بین ۱۲ کارمند یک اداره به چند طریق می‌توان یک معاون، یک منشی و یک حسابدار انتخاب کرد؟

۱) ۲۲۰ ۲) ۴۴۰ ۳) ۹۹۰ ۴) ۱۳۲۰

۱۱- چند ماتریس 3×3 با درایه‌های صفر و ۱ وجود دارد؟

۱) ۵۱۲ ۲) ۲۵۶ ۳) ۸۱ ۴) ۷۲

۱۲- چند مربع 3×3 در یک صفحه‌ی شطرنجی 10×7 وجود دارد؟

۱) ۲۸ ۲) ۴۰ ۳) ۳۵ ۴) ۳۲

۱۳- یک صفحه‌ی شطرنجی 8×8 در نظر بگیرید که خانه‌های آن به‌طور معمول سیاه و سفید شده‌اند. به چند طریق می‌توان دو خانه‌ی غیر هم‌رنگ از این صفحه‌ی شطرنجی انتخاب کرد؟

۱) 64×32 ۲) 32×32 ۳) 64×31 ۴) 32×31

۱٤- با مفروضات سؤال قبل بگویید به چند طریق می‌توان دو خانه‌ی غیر هم‌رنگ از صفحه‌ی شطرنجی انتخاب کرد به‌طوری که این دو خانه در یک سطر یا یک ستون باشند؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۱۲۸ ۴) ۶۴

۱۵- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{1,2,...,10\}$ کوچک‌ترین عضو برابر ۳ است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

١٦- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{1,2,...,10\}$ اعداد ۳ و ۷ وجود دارند ولی اعداد ۱، ۲ و ۸ وجود ندارند؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۱۷- پس از ضرب، حاصل عبارت زیر چند جمله‌ی متمایز خواهد داشت؟

$$(a+b)(c+d)(e+f+g+h)$$

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۸- می‌خواهیم هر یک از اعداد جدول زیر را پاک کنیم و به جای آن عددی طبیعی کوچک‌تر از آن قرار دهیم. به چند طریق می‌توانیم این‌کار را انجام دهیم؟

۴	۲	۳
۵	۳	۲
۲	۲	۴

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴

۱۹- هر چراغ راهنما سه لامپ به رنگ‌های سبز، زرد و قرمز دارد که در هر لحظه فقط یکی از آن‌ها روشن است. ۷ چراغ راهنمای مختلف چند وضعیت را می‌توانند نشان دهند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۱ ۳) 7^3 ۴) 3^7

۲۰- ۲ نفر نامزد ریاست جمهوری هستند. ۱۰۰ نفر در یک حوزه‌ی رأی‌گیری شرکت کرده‌اند. این ۱۰۰ نفر به چند طریق می‌توانند رأی دهند به‌طوری که هر فرد حداکثر به یک نفر رأی دهد؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۳۰۰ ۳) 2^{100} ۴) 3^{100}

۲۱- ۵ توپ از رنگ‌های مختلف در اختیار داریم. این توپ‌ها را به چند طریق می‌توانیم بین ۳ پسربچه تقسیم کنیم؟ (توجه کنید می‌توانیم هر ۵ توپ را به یک نفر هم بدهیم).

۱) ۱۵ ۲) 5^3 ۳) 3^5 ۴) ۸

مسائل فصل اول

۱- در چند کلمه‌ی ۵ حرفی با حروف a، b، c، d، e، f، g و h:

الف) حروف مجاور متمایزند؟

ب) هر سه حرف مجاور متمایزند؟

ج) حروف اول و آخر صدا دارند؟

د) فقط حروف اول و آخر صدا دارند؟

۲- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{1,2,...,10\}$ اختلاف بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو برابر ۷ است؟

۳- الف) با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳، ٤، ۵ و ٦ چند عدد ٤ رقمی فرد می‌توان نوشت؟

ب) در چند تا از این اعداد هر چهار رقم متمایزند؟

٤- ٤ جعبه‌ی مختلف و ۷ رنگ در اختیار داریم:

الف) به چند طریق می‌توانیم هر جعبه را با یکی از رنگ‌ها رنگ کنیم؟

ب) در چند حالت هیچ دو جعبه‌ای هم‌رنگ نیستند؟

۵- به چند طریق می‌توان سه مهره‌ی مختلف را در سه خانه از صفحه‌ی شطرنجی 8×8 قرار داد به‌طوری که هیچ دوتا هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند؟

٦- در ردیف اول یک کلاس، ٤ صندلی وجود دارد. از بین ۱۳ دانش‌آموز این کلاس به چند طریق ٤ نفر می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند؟

فصل ۱

اصل ضرب

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۲)

چون میزها در ۳ اندازه و از هر اندازه در ۵ طرح تولید می‌شوند، لذا بنابر اصل ضرب ۳×۵ = ۱۵ نوع میز تحریر قابل تولید است.

۲- گزینه‌ی (۲)

برای تاس ۶ انتخاب و برای سکه ۲ انتخاب وجود دارد، لذا یک تاس و یک سکه، ۶×۲ = ۱۲ حالت مختلف را می‌توانند نشان دهند.

۳- گزینه‌ی (۲)

یک مرد را به ۷ طریق می‌توان انتخاب کرد و برای هر انتخاب یک مرد، زن را به ۶ طریق می‌توان انتخاب کرد، زیرا هریک از زن‌ها غیر از همسر مرد انتخاب شده را می‌توان انتخاب نمود. پس به ۷×۶ = ۴۲ طریق می‌توان یک مرد و یک زن انتخاب کرد به‌طوری که همسر یکدیگر نباشند.

۴- گزینه‌ی (۱)

رقم صدگان را به ۹ طریق و رقم دهگان را به ۱۰ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم و پس از آن رقم یکان به‌صورت منحصربه‌فرد انتخاب می‌شود، زیرا رقم یکان باید با رقم صدگان برابر باشد. پس ۱×۱۰×۹ = ۹۰ عدد سه رقمی متقارن وجود دارد.

۹ ۱۰ ۱

۱ ۲ ۳

۵- گزینه‌ی (۱)

عمل انتخاب کمیته را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم، ابتدا انتخاب یک کلاس اولی، سپس انتخاب یک کلاس دومی و در نهایت انتخاب یک کلاس سومی. این ۳ مرحله را به‌ترتیب به ۵، ۳ و ۲ طریق می‌توانیم انجام دهیم، لذا کمیته را به ۵×۳×۲ = ۳۰ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم.

۶- گزینه‌ی (۱)

رقم صدگان برابر ۱، ۲ یا ۵، رقم دهگان برابر ۰، ۱، ۲ یا ۵ و رقم یکان برابر ۰ یا ۵ است، لذا برای این سه رقم به ترتیب ۳، ۴ و ۲ انتخاب وجود دارد، پس پاسخ برابر ۳×۴×۲ = ۲۴ است. ۲ ۴ ۳

۷- گزینه‌ی (۳)

تعداد انتخاب‌های رقم‌های عدد به‌ترتیب ار چپ به راست عبارتند از:

۴	۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴	۵

پس پاسخ برابر $۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۹۶$ است.

۸- گزینه‌ی (۳)

برای رقم یکان ۳ انتخاب وجود دارد (یکی از ارقام ۱، ۳ یا ۵) و پس از آن برای رقم‌های دهگان و صدگان به‌ترتیب ۴ و ۳ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر $۳ \times ۴ \times ۳ = ۳۶$ است.

۳	۴	۳
۳	۲	۱

۹- گزینه‌ی (۱)

$۹\ ۹\ ۴ = ۹ \times ۹ \times ۴ = ۳۲۴$

۱۰- گزینه‌ی (۴)

برای معاون، منشی و حسابدار به ترتیب ۱۲، ۱۱ و ۱۰ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر $۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ = ۱۳۲۰$ است.

۱۱- گزینه‌ی (۱)

هر درایه ۲ انتخاب دارد و چون ماتریس ۳×۳، ۹درایه دارد، پس به $۲^۹$ طریق می‌توان ماتریس را تشکیل داد.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

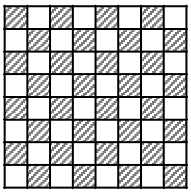
۱۲- گزینه‌ی (۲)

صفحه شطرنجی ۱۰×۷ از ۸ خط افقی و ۱۱ خط عمودی تشکیل شده است. برای تشکیل یک مربع ۳×۳ باید دو خط افقی به فاصله ۳ و دو خط عمودی به فاصله‌ی ۳ انتخاب کنیم. اگر ۸ خط افقی را به‌ترتیب با اعداد ۱ تا ۸ نشان دهیم، باید دو خط با شماره‌های k و $k+۳$ را انتخاب کنیم. مقادیر قابل قبول برای k عبارتند از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، لذا به ۵ طریق می‌توانیم دو خط افقی به فاصله‌ی ۳ انتخاب کنیم. به‌طور مشابه به ۸ طریق می‌توانیم دو خط عمودی به فاصله‌ی ۳ انتخاب کنیم، پس $۵ \times ۸ = ۴۰$ مربع ۳×۳ در صفحه‌ی شطرنجی ۱۰×۷ وجود دارد.

۱۳- گزینه‌ی(۲)

چون در صفحه‌ی شطرنجی ۳۲ خانه‌ی سفید و ۳۲ خانه‌ی سیاه وجود دارد، لذا به ۳۲طریق می‌توانیم خانه‌ای سفید و به ۳۲طریق می‌توانیم خانه‌ای سیاه انتخاب کنیم، پس پاسخ برابر ۳۲×۳۲ است.

۱۴- گزینه‌ی (۱)



به ۳۲ طریق می‌توانیم یک خانه‌ی سفید انتخاب کنیم. با توجه به شکل زیر هر خانه‌ی سفید با ۴ خانه‌ی سیاه هم سطر و با ۴ خانه‌ی سیاه هم‌ستون است، لذا برای هر انتخاب خانه‌ی سفید به ۸ طریق می‌توان خانه‌ای سیاه هم سطر یا هم‌ستون با آن انتخاب کرد، پس پاسخ برابر $۲۵۶ = ۸ \times ۳۲$ است.

۱۵- گزینه‌ی (۳)

اعضای ۱ و ۲ را باید حذف کنیم و ۳ را باید در زیر مجموعه قرار دهیم، لذا برای این ۳ عدد یک انتخاب وجود دارد. هریک از ۷ عدد باقی‌مانده را هم می‌توانیم انتخاب کنیم و هم می‌توانیم حذف کنیم، لذا برای هریک، ۲ انتخاب وجود دارد، پس پاسخ برابر $۱۲۸ = ۲^۷$ است.

۱۶- گزینه‌ی (۳)

برای هریک از اعداد ۳، ۷، ۱، ۲ و ۸ یک انتخاب و برای هریک از ۵ عدد باقی‌مانده ۲ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر $۳۲ = ۲^۵$ است.

۱۷- گزینه‌ی (۳)

هر جمله از حاصل ضرب $(a+b)(c+d)(e+f+g+h)$ از ضرب ۳ متغیر تشکیل می‌شود که یک متغیر از پرانتز اول، یکی از پرانتز دوم و دیگری از پرانتز سوم انتخاب می‌شود. برای متغیر اول ۲ انتخاب، برای متغیر دوم ۲ انتخاب و برای متغیر سوم ۴ انتخاب وجود دارد، لذا عبارت فوق پس از ضرب پرانتزها $۱۶ = ۴ \times ۲ \times ۲$ جمله‌ی متمایز خواهد داشت.

۱۸- گزینه‌ی (۴)

اگر در یک خانه از جدول عدد n نوشته شده باشد، پس از پاک کردن این عدد باید یکی از اعداد ۱ تا $n-۱$ را در این خانه بنویسیم، لذا برای آن $n-۱$ انتخاب وجود دارد. حال چون در جدول اولیه به‌ترتیب اعداد ۳، ۲، ۴، ۲، ۳، ۵، ۴، ۲ و ۲ نوشته شده است، لذا پس از پاک‌کردن اعداد جدول، برای این ۹ خانه به ترتیب ۲، ۱، ۳، ۱، ۲، ۴، ۳، ۱ و ۱ انتخاب وجود دارد، پس پاسخ برابر حاصل‌ضرب این ۹ عدد یعنی برابر ۱۴۴ است.

۱۹- گزینه‌ی (۴)

هر چراغ راهنما مستقل از بقیه ۳ انتخاب دارد، لذا در یک لحظه‌ی خاص، ۷ چراغ راهنما $۳^۷$ وضعیت را می‌توانند نشان دهند.

۲۰- گزینه‌ی (۴)

هر رأی دهنده مستقل از بقیه ۳ انتخاب دارد (یا به نفر اول رأی دهد، یا نفر دوم و یا به هیچ‌کدام). پس ۱۰۰ نفر به $۳^{۱۰۰}$ طریق می‌توانند رأی دهند.

۲۱- گزینه‌ی (۳)

هر توپ را باید به یکی از ۳ پسربچه بدهیم، لذا برای هر توپ ۳ انتخاب وجود دارد. پس بـه $۳^۵$ طریـق می‌توانیم توپ‌ها را بین ۳ پسربچه تقسیم کنیم.

پاسخ مسائل

۱- **الف)** ۸×۷^۴ **ب)** $۸\times۷\times۶^۳$ **ج)** $۲^۲\times۸^۳$ **د)** $۲^۲\times۶^۳$

۲- ۳×۲^۶

۳- **الف)** $۶\times۷\times۷\times۳$ **ب)** $۳\times۵\times۵\times۴$

٤- **الف)** $۷^۴$ **ب)** $۷\times۶\times۵\times۴$

۵- $۶۴\times۴۹\times۳۶$

٦- $۱۳\times۱۲\times۱۱\times۱۰$