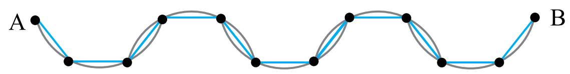
فصل ۱ پایه‌های شمارش

پاسخ تمرین‌های گام المپیاد

۱. مسیر مشخص شده در شکل زیر دارای کم‌ترین تعداد جاده است.



بسته به این‌که در هر مرحله از خط مستقیم یا کمان‌ها استفاده کنیم تعداد حالت‌ها برابر است با: $۲^۷ \times ۳^۴$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

---

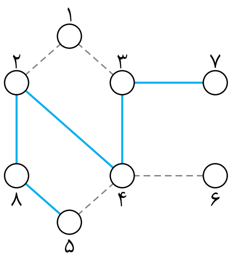
۲. مسیر حرکت باید همواره رو به پایین باشد. در هر حرکت باید به یک ردیف پایین‌تر برویم تا عدد نوشته شده روی مقصد از عددی که روی آن قرار داریم یکی بیش‌تر باشد. برای حرکت رو به پایین در هر مرحله جز مرحله‌ی آخر ۲ انتخاب وجود دارد. پس تعداد حالت‌ها برابر است با $۲^۳ = ۸$. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

---

۳. ابتدا رنگ ناحیه‌ی مرکزی را به ۳ حالت تعیین می‌کنیم. رنگ‌آمیزی ۴ ناحیه‌ی لایه‌ی دوم به ۲ حالت امکان‌پذیر اســت. در ادامه کافی است فقط رنگ یکی از ۸ ناحیه‌ی بیرونی را تعیین کنیم. خواهیم دید که پس از آن رنگ باقی نواحی به طور یکتا تعیین می‌شود. بنابراین پاسخ مسأله $۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۲$ است.

---

۴. توپ‌های ۱، ۲ و ۳ که با خط‌چین به هم متصل‌اند باید هم‌رنگ باشــند. به همین ترتیب برای رنگ‌آمیزی توپ‌های ۴ ، ۵ و ۶ باید از یک رنگ استفاده کنیم. پس ابتدا توپ‌های دسته‌ی اول را با یکی از سه رنگ سبز، زرد و قرمز رنگ می‌کنیم. از آن جا که توپ‌های دسته‌ی دوم با توپ‌های دسته‌ی اول مجاورند، پس برای رنگ‌آمیزی آن‌ها از یکی از دو رنگ باقی‌مانده استفاده می‌کنیم. حالا برای رنگ‌آمیزی توپ‌های ۷ و ۸ به ترتیب ۲ و ۱ حالت وجود دارد. پس تعداد حالت‌ها برابر است با: $۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ = ۱۲$



بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

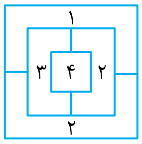
---

۵. برای انتخابِ ترتیبِ رفتن به ســه شــهرِ مشهد ، تبریز و یزد $۳!$ حالت وجود دارد. تعداد حالت‌های انتخاب وسیله‌ی نقلیه در روزهای شنبه تا سه شنبه هم مطابق جدول زیر است.

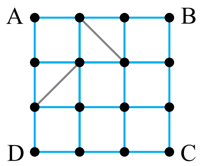
چهارشنبه	سه شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	
اصفهان	؟	؟	؟	اصفهان	شهر
	۲	۳	۲	۳	تعداد وسیله‌های نقلیه

بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با: $۳! \times (۳^۲ \times ۲^۲) = ۲۱۶$. بنابراین گزینه‌ی (۵) درست است.

۶. در تصویر ۵ ساختمان وجود دارد. با شروع از ساختمان مرکزی، در شکل روبه‌رو تعداد حالت‌های ارتفاع هر ساختمان را روی آن نوشته‌ایم. ابتدا ارتفاع ساختمان مرکزی و سپس ارتفاع دو ساختمان سمت چپ و راست آن را تعیین می‌کنیم. ساختمان پایینی با هیچ یک از دو ساختمان راست و چپ هم ارتفاع نیست، پس ارتفاع آن دو حالت مختلف می‌تواند داشته باشد. بالاخره ساختمان بالایی با هیچ یک از سه ساختمان پایینی، چپی و راستی هم ارتفاع نیست و برای تعیین ارتفاع آن فقط یک حالت وجود دارد. در نتیجه $48=1\times2\times2\times3\times4$ حالت وجود دارد. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

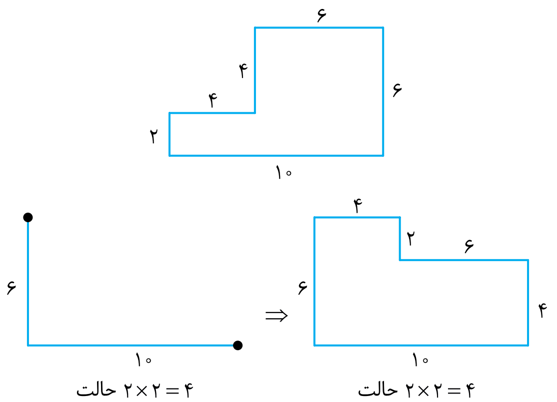


۷. فقط برای رسیدن از نقطه‌ی A به C و B به D پیمایش ۵ پاره‌خط کافی نیست. بنابراین یکی از ۹ مربع موجود در شکل را انتخاب کرده و از میان دو قطر آن قطری که موازی AC است را اضافه می‌کنیم. به همین ترتیب یکی از ۹ مربع را برای اضافه کردن قطری که موازی BD است انتخاب می‌کنیم. در شکل روبه‌رو یکی از این حالت‌ها نمایش داده شده است. پس تعداد حالت‌ها برابر است با $9\times9=81$ و گزینه‌ی (۵) درست است.



۸. یکی از این خانه‌ها در شکل روبه‌رو نمایش داده شده است. دیوار افقی به طول ۱۰ می‌تواند در قسمت شمالی یا جنوبی خانه قرار گیرد. دیوار عمودی به طول ۶ هم می‌تواند در قسمت شرقی یا غربی خانه قرار بگیرد. تا این‌جا $2\times2=4$ حالت برای قرار گرفتن ۲ دیوار بلندتر داریم. در مرحله‌ی بعد ترتیب قرار گرفتن دو دیوار افقی به طول ۶ و ۴ و دو دیوار عمودی به طول ۴ و ۲ هر یک به ۲ حالت تعیین می‌شوند. بنابراین در مجموع $2\times2=4$ حالت برای قرار گرفتن دیوارهای کوتاه‌تر داریم.

پاسخ مسأله برابر است با $4\times4=16$ و گزینه‌ی (۳) درست است.

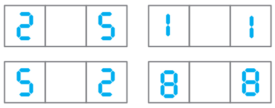


۹. رقم ۳ فقط در کنار رقم ۱ می‌تواند آمده باشد. رقم ۴ هم فقط در کنار رقم ۲ می‌تواند بیاید. پس رقم‌های ۳ و ۴ باید در ابتدا یا انتهای این عدد ۴ رقمی قرار گیرند. با انتخاب جای دو عدد ۳ و ۴، رقم ۲ در کنار ۴ و رقم ۱ در کنار ۳ قرار می‌گیرند. پس فقط دو عدد ۳۱۲۴ و ۴۲۱۳ ویژگی گفته شده را دارند.

۱۰. یک نمایش آینه‌ای به فرم ab:cc:ba است. بنابراین دقیقه‌ی یک ساعت آینه‌ای می‌تواند ۶ مقدار ۰۰، ۱۱، ... و ۵۵ را داشته باشد. از آن‌جا که b علاوه بر یکان ساعت، دهگان ثانیه هم هست پس از ۵ بیش‌تر نیست. بنابراین ساعت می‌تواند هریک از مقادیر ۰۰ تا ۰۵، ۱۰ تا ۱۵ و همچنین ۲۰ تا ۲۳ را داشته باشد. پس برای ساعت ۱۶ حالت وجود داشته و ثانیه هم به طور یکتا عکس مقدار ساعت خواهد بود. پس در طول شبانه روز $6\times16=96$ بار عددی که ساعت نشان می‌دهد آینه‌ای می‌شود. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

۱۱. فقط ارقام صفر، ۱ و ۸ که متقارن بوده به همراه ارقام ۲ و ۵ که قرینه‌ی هم هستند قابل استفاده‌اند. با توجه به این‌که رقم صدگان (چه خود عدد و چه تصویر آن) نمی‌تواند صفر باشد، بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با: $4\times5\times4=80$

بنابراین گزینه‌ی (۱) است.

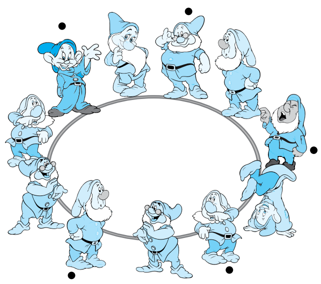


۱۲. برای آن‌که ماشین حساب همان عددی را که می‌بینند نمایش دهد، رقم دهگان می‌تواند ۱، ۰ و ۸ باشد. اما برای یکان و صدگان در مجموع ۴ حالت وجود دارد که به صورت روبه‌رو هستند.
توجه کنید که رقم‌های یکان و صدگان می‌توانند رقم‌های ۲ و ۵ باشند. زیرا تصویر این دو عدد هم زمان قرینه و جابه‌جا شده و در نتیجه رقم‌های یکان و صدگان همان مقادیر قبلی خواهند شد. تعداد حالت‌ها برابر است با $۱۲=۳\times۴$. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

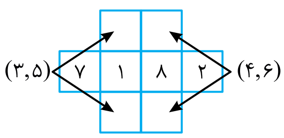
۱۳. برای جایگاه اول ۴ حالت داریم. از آن به بعد برای هر جایگاه دو حالت وجود دارد: اگر حرف قبلی A یا T باشد، فقط حروف C و G می‌توانند بیایند و اگر حرف قبلی C یا G باشد، فقط A و T می‌توانند بیایند. پس تعداد حالت‌ها برابر است با :

$$۴\times۲^{۹}=۲۰۴۸$$

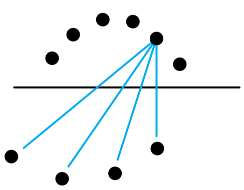
بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.



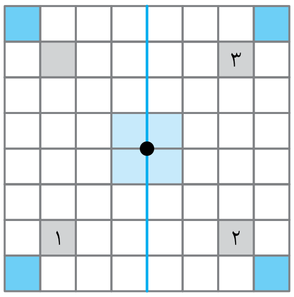
۱۴. یکی از حالت‌های معتبر گردو دادن در شکل روبه‌رو آمده است. مطابق شکل روبه‌رو بین هر دو کوتوله‌ای که گردو گرفته‌اند دقیقاً یک کوتوله آمده که گردو نگرفته و فقط در یک جا دو کوتوله‌ی کنار هم هیچ‌کدام گردو نگرفته‌اند. بنابراین با انتخاب دو کوتوله‌ی کنار هم که گردو نگیرند، عملیات پخش کردن گردو بین این ۱۱ کوتوله به صورت یکتا تعیین می‌شود. پس کافی است دو کوتوله‌ی کنار هم را انتخاب کنیم تا نحوه‌ی پخش کردنِ گردوها مشخص شود که این کار به ۱۱ حالت امکان‌پذیر است (برای این کار یکی از کوتوله‌ها و کوتوله‌ها سمت راستیِ او را انتخاب می‌کنیم). بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



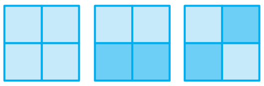
۱۵. هر یک از دو خانه‌ی وسط جدول با تمام خانه‌های دیگر جز یک خانه مجاورند. بنابراین فقط اعداد ۱و ۸ می‌توانند در این خانه‌ها قرار بگیرند. زیرا سایر اعداد، هرکدام با ۲ عدد دیگر دقیقاً یک واحد اختلاف دارند و در صورتی که در خانه‌های وسط جدول بیایند، آن‌گاه اختلاف آن‌ها با عدد قرار گرفته در یکی از خانه‌های مجاور دقیقاً برابر ۱ می‌شود. پس ابتدا اعداد ۱ و ۸ را به ۲ حالت در خانه‌های مرکزی قرار می‌دهیم. سپس جای ارقام ۲ و ۷ مطابق جدول روبه‌رو به طور یکتا تعیین می‌شود.
در پایان ارقام ۳ و ۵ در کنار هم و ارقام ۴ و ۶ در کنار هم باید در بالا و پایین جدول قرار گیرند. از آن‌جا که رقم ۳ نمی‌تواند در خانه‌های مجاور با ۲ بیاید و به همین ترتیب رقم ۶ هم در خانه‌های مجاور با ۷ نباید قرار گیرد، بنابراین هر یک از جفت اعداد (۳, ۵) و (۴, ۶) دقیقاً با همین ترتیب باید در بالا و پایین جدول قرار گیرند. برای انتخاب جفتی که بالای جدول قرار می‌گیرند، دو حالت داریم. پس در مجموع $۴=۲\times۲$ حالت برای قرار دادن اعداد ۱ تا ۸ در جدول وجود دارد. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



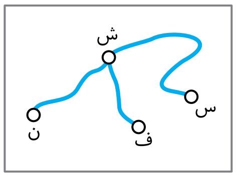
۱۶. برای هر نقطه‌ی (x, y) ، x نشان‌دهنده‌ی طول و y نشان‌دهنده‌ی عرض آن نقطه است. ۶ تا از این نقاط عرض مثبت دارند و بالای محور xها هستند و ۴ تای باقی‌مانده هم پایین محور xها قرار دارند. هرکدام از ۶ نقطه‌ی بالایی را به هر یک از ۴ نقطه‌ی پایینی که وصل کنیم پاره خط واصل آن‌ها محور xها را قطع می‌کند. پس $۲۴=۴\times۶$ پاره‌خط محور xها را قطع می‌کنند. بنابراین گزینه‌ی (۵) درست است.



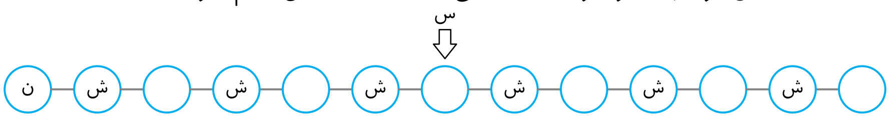
۱۷. ابتدا ۶۴ خانه‌ی جدول را به ۶۴ دسته‌ی ۴ تایی تقسیم می‌کنیم، به‌طوری‌که خانه‌های هر دسته نسبت به خط عمودی مرکزی یا خط افقی مرکزی یا نقطه‌ی وسط قرینه باشند. در شکل روبه‌رو تعدادی از این دسته‌های ۴تایی مشخص شده‌اند. رنگ‌آمیزی دو خانه که در یک دسته نیستند هیچ ارتباطی به هم ندارند. پس کافی است تعداد حالت‌های رنگ‌آمیزی ۴ خانه‌ی یک دسته را به‌دست آوریم.



برای رنگ‌آمیزی هر ۴ خانه می‌توان از یکی از سه الگوی روبه‌رو استفاده کرد. از آن‌جا که ۳ رنگ در اختیار داریم الگوی سمت چپ به ۳ حالت و دو الگوی دیگر هر کدام به $۶=۲\times۳$ حالت امکان‌پذیر است. پس برای هر ۴ خانه $۱۵=۶+۶+۳$ حالت و در مجموع $۱۵^{۱۶}$ حالت برای رنگ‌آمیزی همه‌ی خانه‌های جدول وجود دارد. بنابراین گزینه‌ی (۵) درست است.



۱۸. در شکل روبه‌رو، برای نمایش هر شهر فقط از اولین حرف آن استفاده کرده‌ایم. از آن‌جا که سه شهر دیگر فقط به شکرستان راه دارند، پس جهانگرد در طی سفرش مدام به شکرستان آمده و سپس یکی از ۳ شهر دیگر را انتخاب کرده و به آن سفر می‌کند. بعد از آن دوباره به شکرستان بازگشته و به همین ترتیب سفر خود را ادامه می‌دهد تا بلیط‌هایش تمام شود.



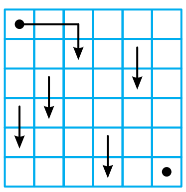
شکل بالا نشان می‌دهد که جهانگرد در هر مرحله به کدام شهر رفته است. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود جهانگرد مجبور است یکی در میان به شکرستان برود. از آن‌جا که او می‌خواهد فقط یک بار به سماقستان برود، بنابراین مسأله معادل این است که به چند طریق می‌توان ۶ دایره‌ی خالی باقی‌مانده در شکل بالا را با حروف «س، ف ، ن» پر کرد به طوری که فقط یک بار از حرف «س» استفاده شود. ابتدا جای تنها حرف «س» را به ۶ حالت تعیین می‌کنیم، سپس برای هر دایره ۲ حالت باقی می‌ماند که با «ف» یا «ن» پر شود. این کار به $۱۹۲=۲^{۵}\times۶$ حالت امکان‌پذیر است.

---

۱۹. با توجه به توضیحات مسأله هر یک از مشتریانِ ۱ تا ۴۳ می‌توانسته‌اند به هر یک از ۳ باجه مراجعه کنند. حتی مشتریان ۲ و ۳ با این‌که ممکن است ۲ تا از باجه‌ها خالی از مشتری باشند هر دو به همان باجه‌ای مراجعه کنند که مشتری ۱ به آن رفته بود. در ادامه ۴۴ به باجه‌ی ۱ مراجعه کرده و همچنان تا ساعت ۱۲ در همان باجه مانده است. پس افراد ۴۵ تا ۴۷ به باجه‌ی دوم یا سوم مراجعه کرده و سپس آن باجه را ترک کرده‌اند. در پایان ۴۸ به باجه‌ی ۲ مراجعه کرده و بعد از آن هم ۴۹ و ۵۰ هر دو به باجه‌ی ۳ رفته‌اند. بنابراین $۳^{۴۳}\times۲^{۳}$ حالت می‌توان برای مراجعه‌ی این افراد به باجه‌ها در نظر گرفت و گزینه‌ی (۱) درست است.

---

۲۰. در هر حرکت می‌توانیم به یکی از نقاط بالایی یا راستی برویم. در هر صورت بعد از ۶ حرکت به یکی از نقاطی که با دایره‌ی پررنگ مشخص شده خواهیم رسید. بنابراین این کار به $۶۴=۲^{۶}$ حالت امکان‌پذیر است و گزینه‌ی (۱) درست است.

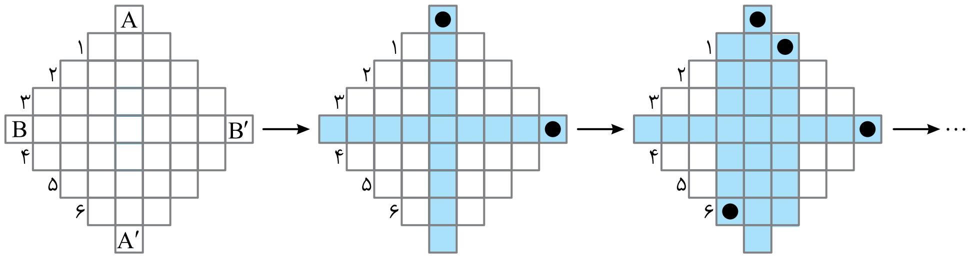


۲۱. مجید در هر سطر پس از تعدادی حرکت به راست یا چپ به سطر پایین‌تر می‌رود و در سطر بعد هم به همین ترتیب پس از چند حرکتِ افقی به سطر پایین‌تر می‌رود و این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهد تا به سطر پایینی برسد و در آن‌جا هم احیاناً با چند حرکت به راست به مقصد می‌رسد. پس کافی است بدانیم مجید در هر سطر کدام خانه را برای پایین رفتن انتخاب می‌کند. در شکل روبه‌رو یکی از حالت‌های انتخاب شده نمایش داده شده است. پس او به $۶^{۵}$ حالت می‌تواند به مقصدش برسد. بنابراین گزینه‌ی (۵) درست است.

---

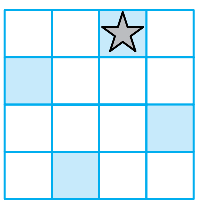
۲۲. از هر رنگ یکی از بشــقاب‌ها باید در ســینی اول بماند و دیگری به ســینی دوم برود. پس کافی است انتخاب کنیم که از میان هر دو بشقاب هم‌رنگ کدام یک روی همان سینی بماند و کدام بشقاب به سینی دیگر منتقل شود. از آن‌جا که از هر رنگ دقیقاً ۲ بشــقاب داریم، پس به $۲^{۵} = ۳۲$ حالت می‌توان بشــقاب‌های ماندنی و رفتنی را انتخاب کرد. در این صورت انتقال بشقاب‌ها به طور یکتا انجام می شود. مثلاً اگر پایین‌ترین بشقاب ماندنی سبز باشد، اول از همه بشقاب سبزِ دیگر را روی سینی دوم می‌گذاریم. حالا به رنگ دومین بشــقاب ماندنی از پایین نگاه می‌کنیم و بشــقاب هم رنگِ آن را روی بشــقاب سبز سینی دوم می‌گذاریم و این کار را به همین ترتیب تا بشقاب پنجم ادامه می‌دهیم. بنابراین به $۲^{۵} = ۳۲$ حالت می‌توان این کار را انجام داد و گزینه‌ی (۱) درست است.

۲۳. این جدول ۹ ســطر و ۹ ســتون دارد. پس برای آن‌که بتوانیم ۸ خانه از جدول انتخاب کنیم که هیچ دوتایی هم‌ســطر و هم‌ستون نباشند، از میان دو خانه‌ی A و A' دست کم یکی از آن‌ها باید انتخاب شود، به همین ترتیب از میان دو خانه‌ی B و B' یکی از آن‌ها باید انتخاب شود. برای انتخاب یکی از خانه‌های A و A' و یکی از خانه‌های B و B' در مجموع $۲\times۲=۴$ حالت وجود دارد. در این‌صورت از هریک از ۶ سطر دیگر باید یک خانه انتخاب کنیم تا تعداد خانه‌های انتخاب شده به ۸ برسد.
در مجموع به ۲ حالت می‌توان ۲ خانه‌ی انتخاب شده از سطرهای ۱ و ۶ را مطابق جدول زیر انتخاب کرد. به همین ترتیب به ۲ حالت می‌توان خانه‌های انتخاب شده از سطرهای ۲ و ۵ و خانه‌های انتخاب شده از سطرهای ۳ و ۴ را انتخاب کرد.



بنابراین در مجموع به $۴\times۲\times۲\times۲=۳۲$ حالت می‌توان ۸ تا از خانه‌های جدول را انتخاب کرد. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

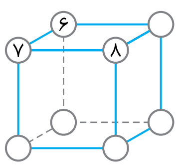
۲۴. ابتدا محاسبه می‌کنیم که هر معدن چقدر به مجموع ارزش همه‌ی مزرعه‌ها اضافه می‌کند. پس کافی اســت ببینیم هریک از خانه‌های دارای معدن در چند مســتطیل می‌آیند. برای تولید مســتطیلی که خانه‌ی ســتاره‌دار درآن بیاید، ابتدا یک خط افقی برای ســقف مستطیل و یک خط افقی برای کف مستطیل در نظر می‌گیریم. این کار به $۱\times۴=۴$ حالت امکان‌پذیر است. همچنین برای انتخاب خطوط عمودی سمت چپ و راست این مستطیل $۲\times۳=۶$ حالت وجود دارد. پس این خانه در $۴\times۶=۲۴$ مستطیل آمده است. به طور مشابه هر یک از ۳ معدن دیگر هم در ۲۴ مزرعه آمده‌اند. پس مجموع ارزش همه‌ی مزرعه‌ها برابر است با:

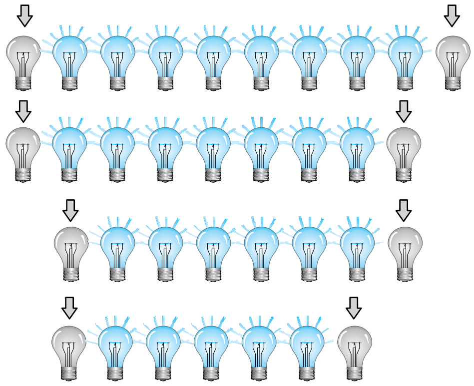


$$۴\times۲۴=۹۶$$

بنابراین گزینه‌ی (۵) درست است.

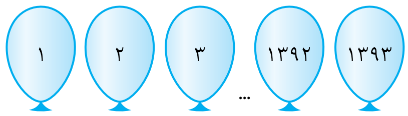
۲۵. شــکل روبه‌رو را که برای نمایش ســاده‌تر از آن استفاده کرده‌ایم در نظر بگیرید. برای انتخابِ محل قطعات ۸، ۷ و ۶ مطابق شکل روبه‌رو به ترتیب ۸، ۳ و ۲ حالت وجود دارد. در هریک از این حالت‌ها بــه ۳ حالت می‌توان جای ۵ قطعه‌ی باقی‌مانده را تعیین کرد. بنابراین این مار به $۸\times۳\times۲\times۳=۱۴۴$ حالت می‌تواند در یک جعبه‌ی مکعبی به ضلع ۲ جا شود و گزینه‌ی (۵) درست است.





۲۶. روشن شدن لامپ‌ها را از آخر به اول دنبال می‌کنیم. لامپ‌های شماره‌ی ۱ یا ۱۰ می‌توانند آخرین لامپ روشن شده باشند. لامپ قبلی هم به همین ترتیب از ابتدا یا انتهای ردیف لامپ‌های روشن انتخاب می‌شود. بنابراین تا زمانی که فقط یک لامپ روشن بماند، در هر مرحله ۲ حالت برای آخرین لامپی که تا آن زمان روشن شده می‌توان در نظر گرفت. در شکل روبه‌رو سه مرحله‌ی پایانی روشن کردن لامپ‌ها برای یکی از حالت‌ها آمده است. در این حالت لامپ دهم آخرین لامپی است که روشن شده، در مرحله‌ی قبل لامپ اول و پیش از آن هم لامپ نهم روشن شده است.

بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با $۲^۹ = ۵۱۲$ و گزینه‌ی (۲) درست است.



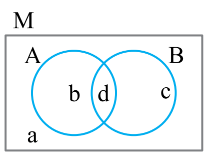
۲۷. بادکنک‌ها را از ۱ تا ۱۳۹۳ از چپ به راست شماره‌گذاری کنید. هیچ بادکنکی سمتِ چپ بادکنک شماره‌ی ۱ نیست. بنابراین از میان بادکنک‌های دیگر حداکثر یکی از آن‌ها می‌تواند قبل از بادکنک شماره‌ی ۱ بترکد. در غیر این‌صورت بیش از یک بادکنک از سمتِ راست بادکنک شماره‌ی ۱ ترکیده است. در حالی که هیچ بادکنکی سمتِ چپِ آن نیست که بترکد و به این ترتیب شرط سؤال برآورده نمی‌شود. به طور مشابه حداکثر یک بادکنک می‌تواند قبل از بادکنک انتهای ردیف، با شماره‌ی ۱۳۹۳، بترکد. با توجه به این نکته می‌توان دریافت که اول از همه باید بادکنک‌های ابتدا و انتهای ردیف را بترکانیم. با تکرار استدلالی مشابه قبل، هر بار از بین بادکنک‌های باقی‌مانده باید دو بادکنکِ ابتدا و انتهای ردیف ترکانده شوند. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به بادکنک وسطی برسیم. در هر کدام از این مراحل ۲ حالت وجود دارد که از بین بادکنک‌های باقی مانده، اول بادکنک ابتدای ردیف ترکانده شود یا بادکنک انتهای ردیف. پس تعداد حالت‌ها برابر است با $۲^{۶۹۶}$. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

---

۲۸. در صورتی که مجموع وزن هر شتر و دو برابر وزن نفر (واحد شمارش شتر، نفر است!) جلویی‌اش بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد، مطابق جدول زیر می‌توان وزن هر شتر را با داشتن وزن شتر جلویی محاسبه کرد.

وزن نفر جلویی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
وزن شتر	۱۳	۱۱	۹	۷	۵	۳	۱	۱۴	۱۲	۱۰	۸	۶	۴	۲	۱۵

بنابراین در صورتی که وزن اولین شتر تعیین شود، آن‌گاه وزن باقی شترها به طور یکتا تعیین می‌شود. پس تعداد حالت‌ها برابر است با تعداد حالت‌های وزن اولین شتر که ۱۵ حالت است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



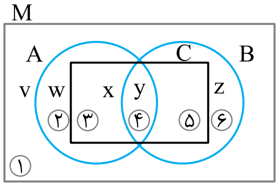
۲۹. مطابق شکل روبه‌رو دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ی مرجعِ $M=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را به ۴ ناحیه‌ی a، b، c و d تقسیم می‌کنند. از آن‌جا که $A\cap B$ دقیقاً یک عضو دارد، پس باید یکی از اعداد ۱ تا ۵ را برای این‌که در ناحیه‌ی d قرار بگیرد انتخاب کنیم. سپس برای انتخاب ناحیه‌ی هر یک از ۴ عدد باقی‌مانده، بسته به این‌که هر یک از این اعداد در کدام یک از ۳ ناحیه‌ی a، b و c بیایند، ۳ حالت داریم.

پاسخ مسأله برابر است با: $۵\times۳^۴ = ۴۰۵$

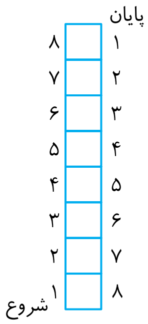
---

۳۰. با توجه به شـرط مسـأله، نمودار ون سه زیرمجموعه‌ی A، B و C از مجموعه‌ی مرجع $M=\{v, w, x, y, z\}$ به شـکل روبه‌رو درمی‌آید. به این ترتیب ۶ ناحیه‌ی مختلف درون M ایجاد می‌شود. پس برای تعیین وضعیت هر یک از حروف v تا z، ۶ حالت وجود دارد و پاسخ مسأله برابر $۶^۵=۷۷۷۶$ است. مثلاً به ازای قرارگیری حروف v تا z مطابق نمودار روبه‌رو مجموعه‌های A، B و C به صورت روبه‌رو تعیین می‌شوند: $A=\{w, x, y\}, B=\{y, z\}, C=\{x, y\}$

بنابراین گزینه‌ی (۵) درست است.



۳۱. بسته به این‌که از کدام خط افقی برای گذر از ستون چپ به راست استفاده کنیم ۹ مسیر وجود دارد. در کنار هر ضلع عمودی، تعداد مسـیرهای به طول ۹ در جدول ناقصی که از حذف آن ضلع به‌دسـت می‌آید نوشـته شـده اسـت. همچنین با حذف هر ضلع افقی دقیقاً یک مسیر حذف می‌شـود و لـذا قیمت جدولـی که از حـذف ضلع‌های افقـی به‌دسـت می‌آید ۸ اسـت. بنابراین $S=\{۱, ۲, \ldots, ۸\}$ و گزینه‌ی (۴) درست است.

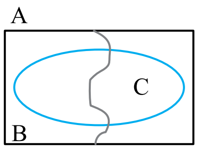


۳۲. ابتدا با خیال راحت مقدار سه رقم سمت چپ این عدد را به $۳^۳=۲۷$ حالت تعیین می‌کنیم. حالا بر حسب این‌که مجموع این سه رقم بر ۳ چه باقی‌مانده‌ای داشته باشد، مقدار رقم سمت راست به طور یکتا تعیین می‌شود. در صورتی که باقی‌مانده‌ی مجموع این سه رقم بر ۳ برابر صفر باشد رقم سمت راست برابر ۳ و در صورتی که باقی‌مانده‌ی مجموع‌شان بر ۳ برابر ۱ یا ۲ باشد، رقم سمت راست به ترتیب ۵ و ۷ خواهد بود. بنابراین پاسخ مسأله همان ۲۷ است و گزینه‌ی (۲) درست است.

۳۳. عدد ۳۱ را کنار می‌گذاریم. ۷ عدد دیگر هر کدام برای آمدن و نیامدن در زیرمجموعه‌ی مورد نظر دو حالت دارند. پس تا این‌جا $۲^۷=۱۲۸$ زیرمجموعه تولید شده است. حالا در صورتی که مجموع اعداد انتخاب شده فرد باشد عدد ۳۱ را به آن‌ها اضافه می‌کنیم و در غیر این صورت ۳۱ به زیرمجموعه اضافه نمی‌شـود. بنابراین آمدن یا نیامدن ۳۱ به طور یکتا تعیین می‌شـود و به این ترتیب مجموع اعدادِ هر کدام از این ۱۲۸ زیرمجموعه، برابر با یک عدد زوج خواهد شد. بنابراین گزینه‌ی (۵) درست است.

۳۴. فرض کنید B یک زیرمجموعه‌ی k عضوی باشـد. بنابراین از بین این k عضو بایستی تعداد فردی از آن‌ها را برای مجموعه‌ی C انتخاب کنیم که این کار به $۲^{k-۱}$ حالت امکان‌پذیر است. همچنین از بین $۱۰-k$ عضو دیگرِ مجموعه‌ی A هم تعداد دلخواهی از آن‌ها را برای مجموعه‌ی C انتخاب می‌کنیم که این کار هم به $۲^{۱۰-k}$ حالت امکان‌پذیر است. پس تعداد حالت‌ها برابر است با: $۲^{k-۱}\times۲^{۱۰-k}=۲^۹$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.



۳۵. برای تولید زیرمجموعه‌هایی که مجموع اعضای آن بر ۸ بخش‌پذیر است، ابتدا اعداد ۱، ۲ و ۴ را کنار می‌گذاریم و از میان ۷ عدد باقی‌مانده از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ تعدادی از آن‌ها را به طور دلخواه انتخاب می‌کنیم. پس تا اینجا $۲^۷$ زیرمجموعه تولید کرده‌ایم. سپس مطابق شکل روبه‌رو بسته به این‌که جمع اعضای هر زیرمجموعه بر ۸ چه باقی‌مانده‌ای داشـته باشد اعداد ۱، ۲و ۴ را به زیرمجموعه اضافه می‌کنیم. مثلاً در صورتی که باقی‌مانده‌ی مجموع اعداد انتخاب شـده بر ۸ برابر ۳ باشـد، بایستی اعداد ۱ و ۴ را به آن‌ها اضافه کنیم تا جمع‌شان بر ۸ بخش‌پذیر شود. بنابراین $۲^۷$ زیرمجموعه می‌توان تولید کرد که مجموع اعضایش بر ۸ بخش‌پذیر باشد. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

	۱	۲	۴
۰			
۱	✓	✓	✓
۲		✓	✓
۳	✓		✓
۴			✓
۵	✓	✓	
۶		✓	
۷	✓		

۳۶. عامــل اول ۷ را کنار می‌گذاریم. برای تعیین توان‌های ســایر عوامل $۸۴۰=(۴+۱)\times(۳+۱)\times(۵+۱)\times(۶+۱)$ حالت وجود دارد. حالا اگر از بین عوامل ۲، ۳، ۵ و ۱۳ تعداد زوجی از آن‌ها توان غیر صفر داشــتند، آن‌گاه عدد ۷ را در آن‌ها ضرب می‌کنیم تا تعــداد عوامل اول فرد شــود و در غیر این صــورت ۷ را در آن‌ها ضرب نمی‌کنیم تا تعداد عوامل فــرد باقی بماند. پس تعداد چنین مقسوم‌علیه‌هایی همان ۸۴۰ تا است. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

---

۳۷. ابتــدا تعــداد حالت‌هــای ۲ جایگاه اول را تعیین می‌کنیــم. در هر کدام از این دو جایگاه اعداد ۱ تــا ۴ بدون هیچ نگرانی می‌توانند بیایند. از آن پس برای هر جایگاه ۲ حالت وجود دارد. اگر مجموع دو عدد قبلیِ این جایگاه زوج باشد، آن‌گاه فقط اعداد ۲ و ۴ و اگر مجموع دو عدد قبلی فرد باشــد، آن‌گاه اعداد ۱ و ۳ می‌توانند بیایند. در شــکل زیر تعداد حالت‌های هر جایگاه نشــان داده شده است. بنابراین پاسخ مسأله برابر است با: $۴^۲\times۲^{۱۱}=۲^{۱۵}$

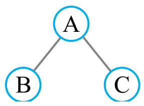
۴	۴	۲	۲	۲	۲	...

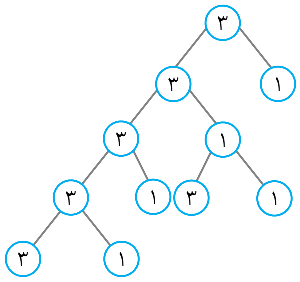
بنابراین گزینه‌ی (۲) است.

---

۳۸. کافی اســت مجموعه‌های A و B را انتخاب کنیم. در این صورت مجموعه‌ی C به طور یکتا تعیین می‌شــود. برای هر کدام از مجموعه‌های A و B، $۲^۵=۳۲$ حالت وجود دارد. پس تعداد حالت‌ها برابر است با: $۲^۵\times۲^۵=۲^{۱۰}$

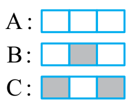
بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.





۳۹. از روش یکتایی در حالت اســتفاده می‌کنیم. فرض کنید بخواهیم ۳ دایره‌ی A، B و C را با برقراری شرط مسأله رنگ‌آمیزی کنیم. ابتدا هر کدام از دو دایره‌ی A و B را به ۳ حالت رنگ‌آمیــزی می‌کنیم. حالا برای رنگ‌آمیزی دایــره‌ی C فقط یک حالت وجود دارد. اگر A و B هم‌رنگ باشند، آن‌گاه C باید با هر دوِ آن‌ها هم‌رنگ باشد و در صورتی که A و B غیرهم‌رنگ باشند، آن‌گاه C باید به رنگ سوم در بیاید.

با به کارگیری همین شــیوه تعداد حالت‌های رنگ آمیزی هر دایره مطابق شکل روبه‌رو به‌دست می‌آید. بنابراین پاسخ مسأله برابر با $۳^۶=۷۲۹$ است و گزینه‌ی (۳) درست است.



۴۰. از روش یکتایی در حالت استفاده می‌کنیم. با توجه به شرط اول و سوم رنگ‌آمیزی هر سطر می‌تواند به یکی از ۳ شکل روبه‌رو باشد.

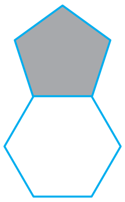
با توجه به شــرط دوم هیچ دو ســطرِ متوالی به شکل A نیستند و با توجه به شرط سوم هیچ دو سطر متوالی هم‌زمان به شکل B و به شــکل C نیســتند. ابتدا سطر اول را به سه حالت رنگ‌آمیزی می‌کنیم. از آن‌جا که هیچ دو سطر متوالی هم شکل نیستند، پس از آن برای رنگ‌آمیزی هر سطر ۲ حالت وجود دارد. پس پاسخ مسأله برابر است با $۳\times۲^۹=۱۵۳۶$. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

---

۴۱. غیر از آدم و حوا و فرزندانشان هر یک از ما انسان‌ها فرزند ۲ نفر و نوه‌ی ۴ نفریم. بنابراین:

$$\frac{n'}{n}\simeq\frac{۴\times M}{۲\times M}=۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) است.



۴۲. برای این‌که پیوندی بین تعداد تکه‌های سفید و سیاه برقرار کنیم، تعداد خطوط مرزی بین آن‌ها را می‌شماریم. از آن‌جا که ۱۲ پنج ضلعی داریم که اطراف آن‌ها توسط تکه‌های شش‌ضلعی پوشانده شده است. بنابراین $۵\times۱۲=۶۰$ خط مانند شکل روبه‌رو بین تکه‌های سیاه و سفید وجود دارد. از طرفی اطراف هر شش‌ضلعی با ۳ پنج‌ضلعی و ۳ شش ضلعی پوشانده شده، پس اگر تعداد شش ضلعی‌ها را با s نمایش دهیم، آن‌گاه تعداد این خطوط مرزی برابر با $۳\times s$ خواهد بود، بنابراین: $۳\times s=۶۰\Rightarrow s=۲۰$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

---

a	b	c	۵ یا ۰

شکل (۱)

۴۳. از روش یکتایی در حالت استفاده می‌کنیم. از آن‌جا که اعداد مورد نظر مضرب ۵ هستند رقم یکان آن‌ها فقط می‌تواند صفر یا ۵ باشد. حالا هر تعداد رقم که از سمت راست جدا کنیم مضرب ۵ است. پس مطابق شکل (۱) رقم a، اعداد $\overline{ab}$ و $\overline{abc}$ هیچ‌کدام نباید مضرب ۳ باشند، در غیر این صورت عدد تقسیمی خواهد شد. ارقام را برحسب باقی‌مانده‌شان بر ۳ به‌دسته‌های روبه‌رو تقسیم می‌کنیم (شکل (۲)).

I	II	III
۰	۱	۲
۳	۴	۵
۶	۷	۸
۹		

شکل (۲)

رقم a از دسته‌ی I نیست پس به ۶ حالت می‌توان آن را انتخاب کرد. برای آن‌که $\overline{ab}$ مضرب ۳ نشود، اگر باقی‌مانده‌ی a بر ۳ برابر ۱ باشد، آن‌گاه b فقط از دسته‌ی III نمی‌تواند باشد و اگر باقی‌مانده‌ی a بر ۳ برابر ۲ باشد، آن‌گاه b فقط از دسته‌ی II نمی‌تواند باشد. بنابراین برای انتخاب b همواره ۷ حالت وجود دارد. حالا برای آن‌که $\overline{abc}$ مضرب ۳ نشود، اگر باقی‌مانده‌ی a+b بر ۳ برابر ۱ بود آن‌گاه c از دسته‌ی III نباید انتخاب شود و اگر باقی‌مانده‌ی a+b بر ۳ برابر ۲ بود، آن‌گاه c از دسته‌ی II نمی‌تواند باشد. بنابراین در هر صورت برای رقم c نیز ۷ حالت وجود دارد. پس تعداد اعداد غیر تقسیمی مضرب ۵ برابر است با: $۲\times۶\times۷\times۷=۵۸۸$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

---

۴۴. از آن‌جا که این اعداد عاملِ اول بیش از ۱۵ ندارند پس دارای تجزیه‌ای به شکل زیر هستند:

$$۲^{؟}\times۳^{؟}\times۵^{؟}\times۷^{؟}\times۱۱^{؟}\times۱۳^{؟}$$

همچنین این اعداد بر هیچ عدد مکعب کاملِ بزرگ‌تر از یک بخش‌پذیر نیستند، پس در تجزیه‌ی آن‌ها توان هیچ عدد اولی نمی‌تواند بیش‌تر از ۲ باشد. مثلاً اگر تعداد عوامل ۵، ۳ تا یا بیش‌تر باشد، آن‌گاه مقدار توان سایر اعداد اول هر چه باشد، عددِ مورد نظر بر $۵^۳$ بخش‌پذیر است. در نتیجه توانِ هریک از این اعداد اول می‌تواند یکی از مقادیر ۰، ۱ یا ۲ باشد و تعداد حالات برابر است با: $۳^۶=۷۲۹$. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

---

۴۵. تجزیه‌ی عدد n به یکی از دو شکل $p^{۳۴}$ و یا $p^۶\times q^۴$ بوده و در نتیجه تجزیه‌ی $n^۲$ به یکی از دو شکل $p^{۶۸}$ و یا $p^{۱۲}\times q^۸$ خواهد بود. بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های آن ۶۹ یا ۱۱۷ خواهد بود.

---

۴۶. با توجه به این‌که تجزیه‌ی ۲۰۰۸ به صورت $۲۰۰۸=۲۵۱\times۲^۳$ است، فقط تعداد عواملِ اول ۲ و ۲۵۱ دو عدد $۱۳۸۷!+۱۴۳۰$ و $۲۰۰۸\times(۱۳۸۷!+۱۴۳۰)$ با هم متفاوت بوده و سایر عوامل به تعداد برابری در این دو عدد آمده‌اند و برای ما اهمیتی ندارند. از آن‌جا که عدد $۱۳۸۷!+۱۴۳۰$ عامل ۲۵۱ ندارد و فقط یک عاملِ اولِ ۲ دارد، در نتیجه می‌توان تجزیه‌ی دو عدد بالا را به صورت زیر نوشت:

$$۱۳۸۷!+۱۴۳۰=۲^۱\times\boxed{?}$$

$$۲۰۰۸\times(۱۳۸۷!+۱۴۳۰)=۲^۴\times۲۵۱\times\boxed{?}$$

در دو تساوی بالا قسمتی از تجزیه‌ی دو عدد را که یکسان هستند با $\boxed{?}$ نشان داده‌ایم. اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عددِ n را با d(n) نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$\frac{d(۲۰۰۸\times(۱۳۸۷!+۱۴۳۰))}{d(۱۳۸۷!+۱۴۳۰)}=\frac{۵\times۲\times d(\boxed{?})}{۲\times d(\boxed{?})}=۵$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.