

درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

# هندسه ۲ (یازدهم)

ویراست دوم

حسن محمدیگی، امیرمحمد هویدی



انتشارات  
گنگو

## به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای هندسه سال یازدهم نوشته‌ایم. هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است و هر درس از دو بخش تشکیل شده است:

**۱. خلاصه درس:** در این بخش، ضمن مرور مطالب کتاب درسی، نمونه‌هایی از پرسش‌های چهارگزینه‌ای را نیز حل کرده‌ایم، تا خواننده با تکنیک‌های اصلی حل این‌گونه پرسش‌ها آشنا شود. تقسیم‌بندی درس‌ها مانند کتاب درسی است. چون هدف این کتاب آموزش مهارت‌های حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای است، اثبات قضیه‌ها و نکته‌ها را نیاورده‌ایم.

**۲. پرسش‌های چهارگزینه‌ای:** در پایان هر درس مجموعه‌ای از پرسش‌های چهارگزینه‌ای مربوط به آن درس را آورده‌ایم. در این قسمت، از همه مطالب کتاب درسی پرسش‌هایی طرح کرده‌ایم. علاوه بر این‌ها، تعداد زیادی پرسش تألیفی به همراه پرسش‌های کنکورهای سال‌های قبل را نیز آورده‌ایم. راه‌حل همه پرسش‌ها در فصل چهارم قرار دارد.

برای مطالعه این کتاب، ابتدا باید خلاصه درس را با دقت بخوانید و مطمئن شوید که روش‌های حل پرسش‌های آن را یاد گرفته‌اید. سپس به حل کردن پرسش‌های انتهای درس بپردازید. با این کار، علاوه بر این که مطالب درسی را کامل مرور می‌کنید، با انواع مختلف پرسش‌های چهارگزینه‌ای آشنا می‌شوید.

در این ویراست برخی از پرسش‌های ویراست قبلی را حذف کرده‌ایم و البته تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه کرده‌ایم. همچنین پرسش‌های هر مبحث از درس را به سه دسته تقسیم کرده‌ایم. در دسته اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شود. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در دسته دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های دسته اول است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم. در دسته سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های دسته دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این دسته از پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است. به یاد داشته باشید که سرعت مطالعه هندسه کمتراز درس‌های دیگر است. سعی کنید درباره آن‌چه که می‌خوانید تفکر و تأمل کنید، نه این‌که سرسری مطالب را حفظ کنید. حتماً به استدلال‌ها دقت کنید و مطمئن شوید می‌فهمید که چرا این کارها را در راه‌حل‌ها انجام داده‌ایم. هنگام مطالعه همیشه کاغذ و قلم کنار خود داشته باشید و هرگاه به مسئله‌ای رسیدید، پیش از این که راه‌حل آن را از روی کتاب بخوانید، سعی کنید خودتان آن را حل کنید و اگر نتوانستید آن را حل کنید، راه‌حلش را ببینید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم عاطفه ربیعی و دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و سکینه مختار مدیر واحد فنی و ویرایش تشکر و قدردانی کنیم.

# فهرست

## ◆ فصل اول: دایره

۲	درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره
۱۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۸	درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره
۴۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۵۱	درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی
۶۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

## ◆ فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

۶۸	درس اول: تبدیل‌های هندسی
۸۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۹۰	درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها
۹۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

## ◆ فصل سوم: روابط طولی در مثلث

۱۰۶	درس اول: قضیه سینوس‌ها
۱۱۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۱۷	درس دوم: قضیه کسینوس‌ها
۱۲۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای



- درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها ..... ۱۲۶
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ..... ۱۲۸
- درس چهارم: قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث) ..... ۱۳۲
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ..... ۱۳۷

#### ◆ فصل چهارم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

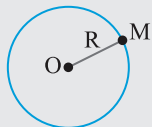
- فصل اول ..... ۱۴۲
- فصل دوم ..... ۱۷۳
- فصل سوم ..... ۱۹۲

#### ◆ فصل پنجم: پاسخنامه کلیدی

- پاسخنامه کلیدی ..... ۲۱۸

## درس اول: مفاهیم اولیه و زوایه‌ها در دایره

### تعریف



فرض کنید  $O$  نقطه‌ای ثابت و  $R$  عددی حقیقی و مثبت باشد. دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  مجموعه تمام نقطه‌هایی از صفحه است که فاصله آن‌ها از نقطه  $O$  برابر  $R$  باشد. در شکل مقابل،  $M \Leftrightarrow OM=R$  روی دایره است.

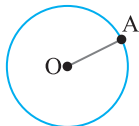
### قرارداد

دایره  $C$  به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  را به صورت  $C(O, R)$  نمایش می‌دهیم.

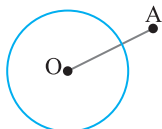
### نکته

دو دایره با شعاع‌های مساوی با هم برابرند.

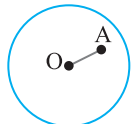
### وضع نقطه و دایره



نقطه  $A$  و دایره  $C(O, R)$  را در نظر بگیرید. وضعیت این نقطه نسبت به دایره یکی از سه حالت زیر است:  
 ۱- نقطه  $A$  روی دایره است.  $OA=R \Leftrightarrow$  روی دایره است.



۲- نقطه  $A$  بیرون دایره است.  $OA>R \Leftrightarrow$  بیرون دایره است.



۳- نقطه  $A$  درون دایره است.  $OA<R \Leftrightarrow$  درون دایره است.

### تست

فرض کنید  $x$  عددی حقیقی باشد. فاصله نقطه  $A$  از مرکز دایره  $C(O, x^2+5x)$  برابر  $6$  است. اگر نقطه  $A$  بیرون این دایره باشد،

برای  $x$  چند مقدار صحیح به دست می‌آید؟

(۴) نامتناهی

(۳) ۲

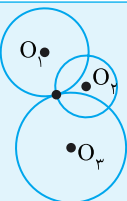
(۲) ۱

(۱) صفر

### راه‌حل

چون  $A$  بیرون دایره است، پس  $R < OA$ ، یعنی  $x^2+5x < 6$ ، بنابراین  $-6 < x < 1$ . همچنین چون  $x^2+5x$  شعاع دایره است، پس  $x^2+5x > 0$  در نتیجه  $-5 < x$  یا  $x > 0$ . از اشتراک ناحیه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود  $0 < x < 1$  یا  $-6 < x < -5$ . پس هیچ مقدار صحیحی برای  $x$  به دست نمی‌آید.

### نکته



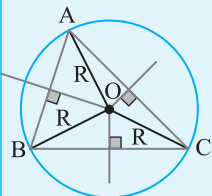
۱- از یک نقطه در صفحه، نامتناهی دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها، هر نقطه دلخواه از صفحه، به غیر از نقطه مورد نظر است.

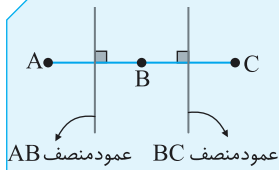
۲- از دو نقطه متمایز  $A$  و  $B$  در صفحه نامتناهی دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  قرار دارند.

**توجه** کوچک‌ترین دایره گذرنده از دو نقطه  $A$  و  $B$ ، دایره‌ای به قطر  $AB$  است.

۳- سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  را در نظر می‌گیریم:

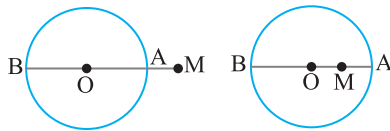
(الف) اگر سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی یک خط راست قرار نداشته باشند، فقط یک دایره از آن‌ها می‌گذرد و مرکز این دایره محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث  $ABC$  است.





ب) اگر سه نقطه  $A, B, C$  روی یک خط راست قرار داشته باشند، هیچ دایره‌ای وجود ندارد که از هر سه نقطه عبور کند. چون عمودمنصف‌های پاره‌خط‌هایی که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند موازی‌اند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

### دورترین و نزدیکترین نقطه دایره به یک نقطه



نقطه  $M$  و دایره  $C(O, R)$  را در نظر بگیرید. با توجه به شکل، در هر دو حالت، در بین نقطه‌های روی دایره،  $A$  نزدیکترین نقطه به  $M$  و نقطه  $B$  دورترین نقطه دایره به  $M$  هستند.  $MA = |OM - R|$ ,  $MB = OM + R$  همچنین

کمترین و بیشترین فاصله نقطه  $A$  خارج دایره از این دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است. شعاع این دایره چقدر است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)



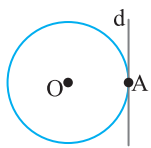
در شکل مقابل،  $M$  نزدیک‌ترین و  $N$  دورترین نقطه دایره تا نقطه  $A$  است. اکنون توجه کنید که  $AM = OA - R = 8$  و  $AN = OA + R = 12$ . با کم کردن برابری‌های به دست آمده می‌توان نوشت  $R = 2$  پس  $2R = 4$ .

تست

راه حل

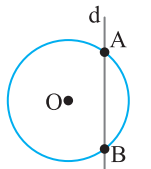
### اوضاع نسبی خط و دایره

خط  $d$  و دایره  $C(O, R)$  را در نظر بگیرید. بر اساس تعداد نقطه‌های مشترک خط  $d$  و دایره  $C(O, R)$ ، این خط با دایره یکی از سه حالت زیر را دارد:



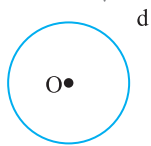
۱- خط  $d$  بر دایره  $C(O, R)$  مماس است.

در این حالت خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک‌اند.



۲- خط  $d$  و دایره  $C(O, R)$  متقاطع‌اند.

در این حالت، خط و دایره دو نقطه مشترک دارند.



۳- خط  $d$  خارج دایره  $C(O, R)$  است.

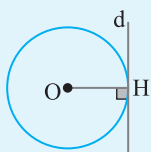
در این حالت، خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.

### نکته

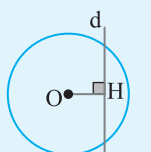
می‌توان وضعیت خط و دایره را با مقایسه فاصله مرکز دایره از خط با شعاع دایره به دست آورد.

دایره  $C(O, R)$  و خط  $d$  را در نظر بگیرید:

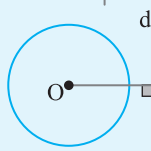
۱- اگر  $OH = R$ ، آن‌گاه خط بر دایره مماس است و برعکس.



۲- اگر  $OH < R$ ، آن‌گاه خط و دایره متقاطع هستند و برعکس.



۳- اگر  $OH > R$ ، آن‌گاه خط خارج دایره است و برعکس.



تست ۳

مرکز دایره  $C(O, 3)$  به فاصله  $2x-1$  از خط  $d$  است. اگر این خط دایره را در دو نقطه قطع کند، حدود  $x$  کدام است؟

- (۱)  $x < 2$       (۲)  $x > 2$       (۳)  $2 < x < 3$       (۴)  $\frac{1}{2} \leq x < 2$

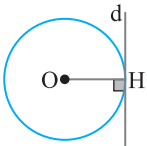
راه حل

چون خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، پس

از طرف دیگر  $2x-1 \geq 0$ ، پس  $x \geq \frac{1}{2}$ . به این ترتیب  $\frac{1}{2} \leq x < 2$ .

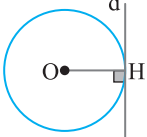
چند مطلب درباره خط مماس بر دایره

۱- اگر خطی در انتهای شعاعی از دایره که روی دایره است، بر آن شعاع عمود باشد، آن‌گاه این خط بر دایره مماس است. به عبارت دیگر، در شکل مقابل، اگر شعاع  $OH$  بر خط  $d$  عمود باشد، آن‌گاه خط  $d$  بر دایره مماس است.



۲- شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است.

به عبارت دیگر، در شکل مقابل، اگر خط  $d$  بر دایره مماس باشد، آن‌گاه شعاع  $OH$  بر خط  $d$  عمود است.



تست ۴

در شکل مقابل طول  $PO$  برابر ۵ و شعاع دایره برابر ۱ است. طول  $PA$  کدام است؟

- (۱)  $6\sqrt{2}$       (۲)  $5\sqrt{2}$       (۳)  $2\sqrt{5}$       (۴)  $2\sqrt{6}$

راه حل

می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. پس مثلث  $OAP$  در رأس  $A$  قائم‌الزاویه است (شکل را ببینید). اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث  $OAP$ ،

$$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}$$

تست ۵

فاصله دورترین نقطه دایره از نقطه  $P$  برابر ۹ و فاصله  $P$  تا مرکز دایره  $\frac{13}{2}$  است. طول مماس رسم شده از نقطه  $P$  بر دایره کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt{2}$       (۲) ۶      (۳)  $\sqrt{13}$       (۴)  $\sqrt{6}$

راه حل

در شکل روبه‌رو دورترین نقطه دایره به نقطه  $P$  نقطه  $A$  است. پس

از طرف دیگر  $OP = \frac{13}{2}$ . در نتیجه  $\frac{13}{2} + R = 9$ ، یعنی  $R = \frac{5}{2}$ . در مثلث قائم‌الزاویه  $OPT$  بنابر قضیه

$$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 6$$

تست ۶

اندازه تصویر مماس  $PT$  روی قطر گذرنده از نقطه  $P$  در دایره‌ای به شعاع  $6/4$  است. اندازه مماس  $PT$  چقدر است؟

- (۱) ۲      (۲) ۴      (۳) ۶      (۴) ۸

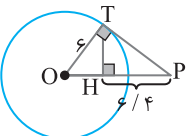
راه حل

راه حل اول می‌دانیم که  $PH$  تصویر  $PT$  روی  $OP$  است و  $PT > PH$ ، پس  $PT > 6/4$  و تنها گزینه‌ای که از  $6/4$  بزرگ‌تر است گزینه (۴) است.

راه حل دوم فرض کنید  $PH$  تصویر مماس  $PT$  روی  $PO$  باشد. در مثلث قائم‌الزاویه  $OTP$ ،

$$OT^2 = OH \times OP \Rightarrow 6^2 = OH(OH + 6/4) \Rightarrow OH^2 + 6/4 OH - 36 = 0$$

$$(OH + 10)(OH - 3/6) = 0 \Rightarrow OH = 3/6, \quad OH = -10 \text{ (غ.ق.)}$$

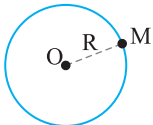


$$\triangle OTP: PT^2 = OP^2 - OT^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow PT = 8$$

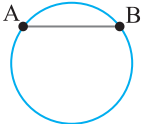
پس اندازه  $OP$  برابر با  $3/6 + 6/4 = 10$  است. در نتیجه

## یادآوری برخی از مفاهیم اولیه

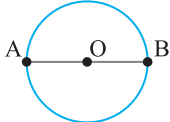
۱- شعاع دایره: پاره‌خطی را که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره است شعاع دایره می‌گوییم. در شکل مقابل، OM شعاع دایره است.



۲- وتر دایره: پاره‌خطی که دو سر آن روی محیط دایره قرار دارد وتر نامیده می‌شود. در شکل مقابل، AB وتر است.

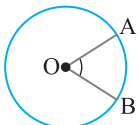


۳- قطر دایره: قطر وتری است که از مرکز دایره می‌گذرد. در شکل مقابل، AB قطر است.

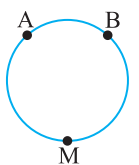


توجه اگر R اندازه شعاع دایره باشد، آن‌گاه اندازه تمام قطرهای این دایره برابر ۲R است.

۴- زاویه مرکزی: زاویه‌ای را که رأس آن مرکز دایره است زاویه مرکزی آن دایره می‌گوییم. در شکل مقابل،  $\widehat{AOB}$  زاویه‌ای مرکزی است.



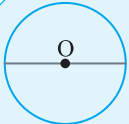
۵- کمان: دو نقطه A و B روی محیط دایره را در نظر بگیرید (شکل را ببینید). این دو نقطه، محیط دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کنند که به آن‌ها، کمان یا قوس می‌گوییم.



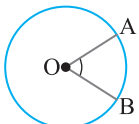
توجه معمولاً کمان ایجاد شده توسط دو نقطه A و B را با  $\widehat{AB}$  نشان می‌دهیم و برای نشان دادن کمان دیگر، از نقطه‌ای کمکی مانند M روی محیط دایره استفاده می‌کنیم (شکل را ببینید) و آن را به صورت  $\widehat{AMB}$  می‌نویسیم.

## نکته

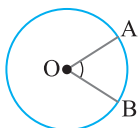
هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که به آن کمان‌ها نیم‌دایره می‌گوییم.



۶- کمان زاویه مرکزی: کمانی از دایره که یک زاویه مرکزی روی محیط دایره ایجاد می‌کند، کمان نظیر آن زاویه نامیده می‌شود. در شکل مقابل، کمان AB کمان نظیر زاویه AOB است.

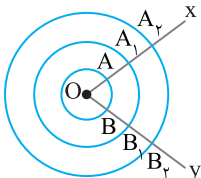


۷- اندازه کمان: اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان است و واحد آن درجه است. در شکل مقابل



$$\widehat{AOB} = \widehat{AB}$$

توجه کنید که نباید اندازه یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت. به شکل روبه‌رو نگاه کنید. سه دایره هم‌مرکز هستند:



$$\widehat{A_3O_3B_3} = \widehat{A_2O_2B_2} = \widehat{A_1O_1B_1} = \widehat{AB}$$

یعنی اندازه کمان‌های AB،  $A_1B_1$  و  $A_2B_2$  برابرند اما طول این کمان‌ها برابر نیستند:

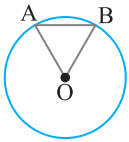
$$\text{طول کمان } A_2B_2 < \text{طول کمان } A_1B_1 < \text{طول کمان } AB$$

## رابطه بین طول و اندازه کمان

بین طول و اندازه کمان تساوی  $\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ}$  برقرار است.

نتیجه اگر L طول کمان AB در دایره C(O, R) باشد و  $\widehat{AB} = \alpha$ ، به‌دست می‌آید  $L = \frac{\alpha \pi R}{180^\circ}$ . توجه کنید که  $\alpha$  برحسب درجه است.





در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۱۲ و طول کمان کوچک‌تر AB برابر  $4\pi$  است. اندازه وتر AB برابر کدام است؟

- (۱)  $6\sqrt{3}$  (۲)  $12\sqrt{3}$   
(۳) ۱۲ (۴)  $6\sqrt{3}$

تست

راه‌حل

طول کمان AB از رابطه زیر برحسب اندازه کمان AB به دست می‌آید:

$$L = \frac{\alpha\pi R}{180^\circ} \Rightarrow 4\pi = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{180^\circ} (\pi \times 12) \Rightarrow 4\pi = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{15^\circ} \times \pi \Rightarrow \text{اندازه کمان AB} = 60^\circ$$

بنابراین اندازه زاویه مرکزی O برابر  $60^\circ$  است. چون  $OA = OB = R$ ، پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه  $AB = 12$ .

طول کمانی با اندازه  $30^\circ$  در دایره‌ای به مرکز O با طول کمانی با اندازه  $45^\circ$  در دایره‌ای به مرکز  $O'$  برابر است. نسبت مساحت دایره به مرکز O به مساحت دایره به مرکز  $O'$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{9}{4}$  (۲)  $\frac{5}{9}$  (۳)  $\frac{6}{9}$  (۴)  $\frac{7}{9}$

تست

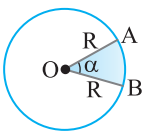
راه‌حل

شعاع دایره‌ها را R و  $R'$  در نظر می‌گیریم. چون  $L = \frac{\alpha\pi R}{180^\circ}$ ، با توجه به فرض تست می‌توان نوشت  $\frac{30^\circ \times \pi R}{180^\circ} = \frac{45^\circ \times \pi R'}{180^\circ}$ . در نتیجه  $\frac{R}{R'} = \frac{3}{2}$ .

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

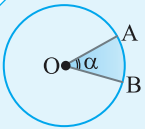
بنابراین  $\frac{S}{S'} = \frac{9}{4}$

### قطاع



به شکل روبه‌رو توجه کنید. به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع آن محدود است **قطاع** می‌گوییم. کمان AB را **کمان قطاع**، R را **شعاع قطاع** و زاویه AOB را **زاویه قطاع** می‌گوییم.

نکته



اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره  $C(O, R)$  برحسب درجه مساوی  $\alpha$  باشد، آن‌گاه مساحت قطاع برابر است با

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

دایره‌ای در قطاع  $60^\circ$  از دایره‌ای به شعاع ۸ محاط شده است. شعاع این دایره کدام است؟

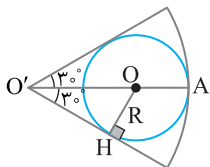
- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴)  $\frac{8}{3}$

تست

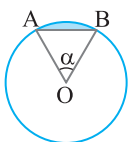
راه‌حل

فرض می‌کنیم دایره به مرکز O در قطاع  $60^\circ$  از دایره به مرکز  $O'$  محاط شده باشد. در این صورت دو دایره مماس داخلی هستند، پس طول خط‌المركز بین آن‌ها مساوی تفاضل شعاع‌های دو دایره است. بنابراین  $OO' = 8 - R$ . از طرف دیگر  $OO'$  نیمساز زاویه  $60^\circ$  است. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه  $OO'H$ ،

$$O'H = 30^\circ \Rightarrow OH = \frac{OO'}{2} \Rightarrow R = \frac{8-R}{2} \Rightarrow 2R = 8-R \Rightarrow R = \frac{8}{3}$$



### قطعه

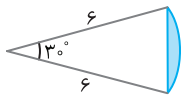


قسمتی از سطح دایره، محصور بین یک کمان و وتر نظیر آن کمان را **قطعه دایره** می‌نامیم.

برای محاسبه مساحت قطعه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

توجه

$$\text{مساحت مثلث (OAB)} - (\text{مساحت قطاع OAB}) = \text{مساحت قطعه } \alpha$$



در قطاع شکل مقابل مساحت قسمت رنگی برابر کدام است؟

۳π (۲)

۳π-۶ (۱)

۶π (۴)

۳π-۹ (۳)

تست  
□□□□

برای محاسبه مساحت قطعه مورد نظر باید مساحت قطاع را منهای مساحت مثلث کنیم:

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{1}{12} \pi (6)^2 = 3\pi$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} (6)(6) \sin 30^\circ = \frac{1}{2} (6)(6) \left(\frac{1}{2}\right) = 9$$

$$\Rightarrow \text{مساحت قطعه} = \text{مساحت قطاع} - \text{مساحت مثلث} = 3\pi - 9$$

راه حل

دو دایره به شعاع‌های ۱ واحد از مرکز یکدیگر گذشته‌اند. مساحت ناحیه مشترک این دو دایره کدام است؟

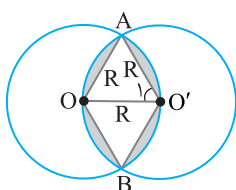
$\frac{2\pi - \sqrt{3}}{3}$  (۴)

$\frac{2\pi - \sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)

$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$  (۲)

$\pi - \sqrt{3}$  (۱)

تست  
□□□□



شکل تست به صورت مقابل است. برای به دست آوردن مساحت ناحیه مشترک باید مساحت لوزی AOB'O' را با مساحت بخش‌های رنگی جمع کنیم. لوزی AOB'O' از دو مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع R تشکیل شده است.

پس  $S_{AOB'O'} = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$ . از طرف دیگر بخش رنگی از چهار قطعه مساوی تشکیل شده است.

مساحت یک قطعه به صورت زیر به دست می‌آید:

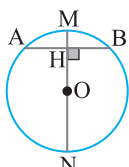
$$\text{مساحت قطعه} = \text{مساحت قطاع } AOO' - S_{AOO'} = \frac{60^\circ}{360^\circ} (\pi R^2) - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی که چهار برابر مساحت این قطعه است مساوی  $4 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$ ، یعنی  $\left( \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) R^2$  است. در نتیجه

$$\text{مساحت خواسته شده} = \text{مساحت لوزی} + \text{مساحت قسمت رنگی} = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 + \left( \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) R^2 \xrightarrow{R=1} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

راه حل

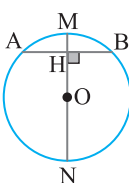
نکاتی در مورد وتر و کمان نظیر آن



۱- در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

به عبارت دیگر، در شکل مقابل اگر قطر MN بر وتر AB عمود باشد، آن‌گاه

$$AH=BH, \quad \widehat{AM}=\widehat{BM}, \quad \widehat{AN}=\widehat{BN}$$



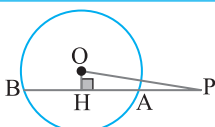
۲- خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

به عبارت دیگر، در شکل روبه‌رو، اگر H وسط وتر AB باشد، آن‌گاه

$$MN \perp AB, \quad \widehat{AM}=\widehat{BM}, \quad \widehat{AN}=\widehat{BN}$$

وسط کمان‌های نظیر یک وتر، مرکز دایره و وسط وتر مورد نظر روی یک خط راست قرار دارند.

نتیجه



در شکل مقابل  $AB=6$ ،  $OH=1$  و  $\widehat{OHA}=90^\circ$ . طول شعاع دایره چقدر است؟

$\sqrt{12}$  (۲)

$\sqrt{13}$  (۱)

$\sqrt{10}$  (۴)

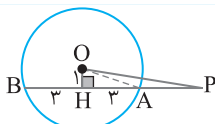
$\sqrt{11}$  (۳)

تست  
□□□□

چون OH بر AB عمود است، پس آن را نصف می‌کند. در نتیجه  $AH = \frac{AB}{2} = 3$ . در مثلث OAH، بنابر

$$\text{قضیه فیثاغورس، } OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

راه حل



تست ۱۳

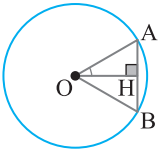
در دایره  $C(O, R)$ ،  $\widehat{AB} = 60^\circ$  و  $AB = 10$ . فاصله  $O$  از وتر  $AB$  کدام است؟

(۴)  $3\sqrt{3}$

(۳)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(۲) ۵

(۱)  $5\sqrt{3}$

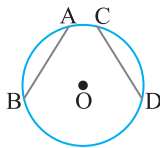


در شکل روبه‌رو مثلث  $OAB$  متساوی‌الساقین است ( $OA = OB$ ) و  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ . پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع  $a$ ، اندازه ارتفاع برابر  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$  است. پس

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}$$

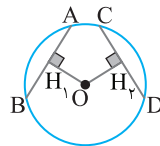
راه‌حل

نکاتی در مورد دو وتر از یک دایره



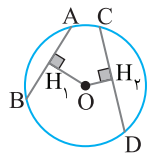
$$AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

۱- کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس. به عبارت دیگر، در شکل مقابل،



$$AB = CD \Leftrightarrow OH_1 = OH_2$$

۲- در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس. به عبارت دیگر، در شکل مقابل،



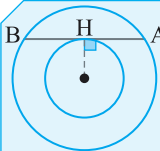
$$AB < CD \Leftrightarrow OH_1 > OH_2$$

۳- در یک دایره، اگر دو وتر نامساوی باشند، آن‌گاه وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس. به عبارت دیگر، در شکل مقابل،

نکته

قطر دایره بزرگ‌ترین وتر دایره است زیرا از مرکز دایره کمترین فاصله را دارد.

نکته



در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز هستند و وتر  $AB$  از دایره بزرگ‌تر، بر دایره کوچک‌تر مماس است. در این صورت  $AH = BH$

تست ۱۴

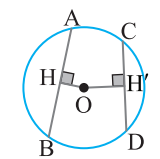
در دایره شکل مقابل اگر  $AB > CD$ ،  $OH = 4x + 2$  و  $OH' = x + 8$ ، کدام رابطه برقرار است؟

(۲)  $-\frac{1}{2} \leq x < 2$

(۱)  $-\frac{1}{2} < x < 2$

(۴)  $0 \leq x < 3$

(۳)  $x < 2$

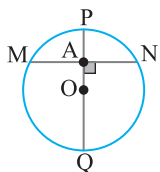


از دو وتر نابرابر در دایره، هرکدام که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است. بنابراین  $AB > CD \Rightarrow OH < OH' \Rightarrow 4x + 2 < x + 8 \Rightarrow x < 2$ . بنابراین  $4x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ ،  $x + 8 > 0 \Rightarrow x > -8$  از طرف دیگر،

راه‌حل

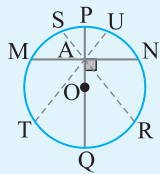
پس  $-\frac{1}{2} \leq x < 2$ .

وتر مینیمم



نقطه  $A$  که مرکز دایره نیست، درون دایره قرار دارد. از این نقطه، نامتناهی وتر می‌گذرد که بزرگ‌ترین آن‌ها قطر دایره است و کوچک‌ترین آن‌ها وتری است که بر قطر گذرنده از  $A$  عمود است. در شکل مقابل،  $PQ$  بزرگ‌ترین وتر گذرنده از  $A$  و  $MN$  کوچک‌ترین وتر گذرنده از  $A$  است که به آن **وتر مینیمم** گذرنده از  $A$  می‌گوییم.

نکته

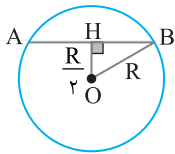


نقطه A که مرکز دایره نیست درون دایره  $C(O, R)$  قرار دارد. در این صورت:  
 ۱- فقط یک وتر به طول  $2R$  وجود دارد که از A می‌گذرد، که همان قطر گذرنده از A است (قطر PQ در شکل).  
 ۲- فقط یک وتر مینیمم وجود دارد که از A می‌گذرد (وتر MN در شکل).  
 ۳- دو وتر به طول L که در این جا L بین اندازه وتر مینیمم و قطر دایره است وجود دارد که از A می‌گذرند (وترهای RS و TU در شکل).

تست ۱۵

از نقطه H به فاصله  $\frac{R}{2}$  از مرکز دایره  $C(O, R)$  وتری مینیمم در دایره رسم کرده‌ایم. طول این وتر مینیمم کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}R$       (۲)  $\sqrt{2}R$       (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}R$       (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}R$



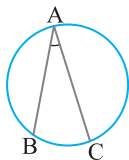
در شکل روبه‌رو AB وتر مینیمم است. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OBH،

$$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

اکنون می‌توان نوشت  $AB = 2BH = \sqrt{3}R$ .

راه‌حل

زاویه محاطی



زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره است و ضلع‌های آن دو وتر از دایره هستند، زاویه محاطی می‌گوییم. در شکل مقابل،  $\hat{BAC}$  زاویه‌ای محاطی است.

نکته

اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف اندازه کمان روبه‌روی آن است، یعنی در شکل بالا،  $\hat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BC}$ .

نتایج بسیار مهم

۱- در هر دایره اندازه زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان، با هم برابرند.

$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

۲- اندازه زاویه محاطی روبه‌رو به قطر دایره برابر  $90^\circ$  است.

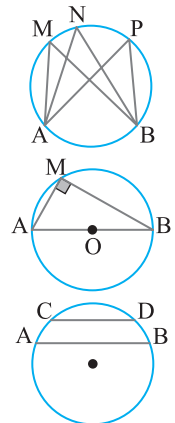
در شکل روبه‌رو، اگر AB قطر دایره باشد، آن‌گاه

$$\hat{AMB} = 90^\circ$$

۳- کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند.

در شکل مقابل، اگر دو وتر AB و CD با هم موازی باشند، آن‌گاه

$$\widehat{AC} = \widehat{BD}$$



تذکر

توجه کنید که عکس مطلب بالا لزوماً درست نیست.

تست ۱۶

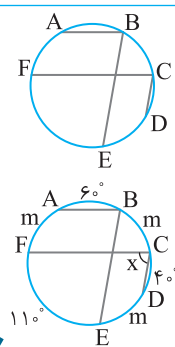
در شکل روبه‌رو، اگر  $AB \parallel FC$ ،  $CD \parallel BE$ ،  $\widehat{AB} = 6^\circ$ ،  $\widehat{CD} = 4^\circ$  و  $\widehat{EF} = 11^\circ$ ، اندازه زاویه FCD کدام است؟

- (۱)  $9^\circ$       (۲)  $55^\circ$   
 (۳)  $7^\circ$       (۴)  $8^\circ$

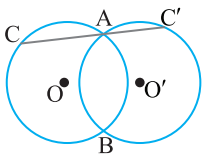
می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند. پس  $\widehat{AF} = \widehat{BC} = \widehat{DE} = m$ . از طرف دیگر محیط دایره برابر  $360^\circ$  است. بنابراین  $360^\circ = 3m + 6^\circ + 11^\circ + 4^\circ$ . پس  $m = 5^\circ$ . اکنون می‌توان نوشت

$$\widehat{FCD} = \frac{1}{2} \widehat{FED} = \frac{1}{2} (11^\circ + 5^\circ) = 8^\circ$$

راه‌حل

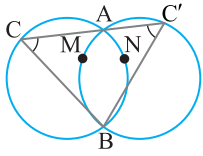


تست ۱۷



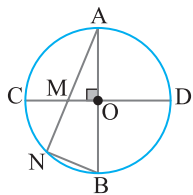
در شکل روبه‌رو، دو دایرهٔ مساوی متقاطع‌اند. قاطع  $CAC'$  را رسم می‌کنیم. مثلث  $CBC'$  همواره .....  
 (۱) متساوی‌الاضلاع است.  
 (۲) قائم‌الزاویه است.  
 (۳) متساوی‌الساقین است.  
 (۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

راه‌حل



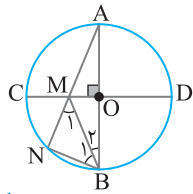
چون دو دایره مساوی هستند، پس  $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$ . از طرف دیگر،  $\widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{AMB}$  و  $\widehat{C}' = \frac{1}{2}\widehat{ANB}$ . در نتیجه  $\widehat{C} = \widehat{C}'$ ، یعنی  $BC = BC'$ . پس مثلث  $CBC'$  متساوی‌الساقین است.

تست ۱۸



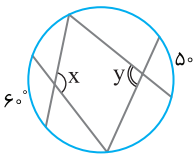
در شکل مقابل، دو قطر  $AB$  و  $CD$  بر هم عمودند. اگر  $MN = NB$ ، اندازهٔ زاویهٔ  $A$  کدام است؟  
 (۱)  $۲۲/۵^\circ$   
 (۲)  $۳۰^\circ$   
 (۳)  $۴۵^\circ$   
 (۴)  $۶۰^\circ$

راه‌حل



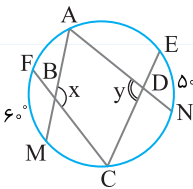
چون  $MN = NB$ ، پس مثلث  $MNB$  متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر،  $\widehat{N} = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ . پس  $\widehat{M}_1 = \widehat{A} + \widehat{B}_1$  و  $\widehat{M}_1 = \widehat{B}_1 = 45^\circ$ . اکنون توجه کنید که  $\widehat{M}_1 = \widehat{B}_1 = 45^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 22/5^\circ$  و  $MA = MB \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}_1$ .

تست ۱۹



در دایرهٔ شکل مقابل مقدار  $x + y$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $۲۳۵^\circ$   
 (۲)  $۲۲۵^\circ$   
 (۳)  $۲۱۵^\circ$   
 (۴)  $۱۱۰^\circ$

راه‌حل



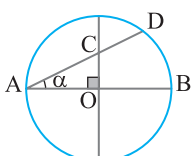
با توجه به شکل زیر در چهارضلعی  $ABCD$  مجموع زاویه‌های داخلی  $۳۶۰^\circ$  است. از طرف دیگر، زاویه‌های  $A$  و  $C$  محاطی هستند. بنابراین

$$\begin{cases} \widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{MCN} \\ \widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{FAE} \end{cases} \quad \xrightarrow{+} \quad \widehat{A} + \widehat{C} = \frac{1}{2}(\widehat{MCN} + \widehat{FAE})$$

در ضمن  $360^\circ = \widehat{MCN} + 5^\circ + \widehat{FAE} + 6^\circ \Rightarrow \widehat{MCN} + \widehat{FAE} = 25^\circ$ . بنابراین  $\widehat{A} + \widehat{C} = \frac{25^\circ}{2} = 12.5^\circ$ . اکنون در چهارضلعی  $ABCD$  می‌نویسیم

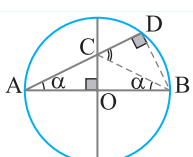
$$\widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow 12.5^\circ + x + y = 360^\circ \Rightarrow x + y = 235^\circ$$

تست ۲۰



در شکل مقابل دو قطر دایره بر هم عمود هستند. نسبت  $\frac{CD}{CA}$  برابر با کدام است؟  
 (۱)  $۲ \sin^2 \alpha$   
 (۲)  $۲ \cos^2 \alpha$   
 (۳)  $\cos 2\alpha$   
 (۴)  $\sin 2\alpha$

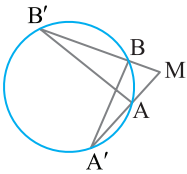
راه‌حل



نقطه‌های  $C$  و  $D$  را به  $B$  وصل می‌کنیم. چون قطرهای دایره بر هم عمود هستند، پس  $BC = CA$ . در نتیجه  $\widehat{BCD} = \widehat{A} + \widehat{ABC} = \alpha + \alpha = 2\alpha$ . پس  $\widehat{BCD}$  زاویهٔ خارجی مثلث  $ABC$  است. پس  $\widehat{A} = \widehat{ABC} = \alpha$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ  $BCD$ ، بنابر تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نوشت  $\cos(\widehat{BCD}) = \frac{CD}{BC}$ . در نتیجه

$$\frac{CD}{CA} = \cos 2\alpha$$



در دایره شکل مقابل اگر  $MA=4$ ،  $BB'=9$ ،  $AB'=12$  و  $A'B=9$ ، طول  $AA'$  کدام است؟

- (۱) ۶  
(۲) ۵  
(۳) ۸  
(۴) ۴

تست ۲۱

$$\begin{cases} \hat{A}' = \hat{B}' \\ \hat{M} = \hat{M} \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle A'BM \sim \triangle B'MA'$$

در زاویه محاطی  $A'$  و  $B'$  روبه‌رو به کمان  $AB$  هستند، پس مساوی‌اند. در نتیجه

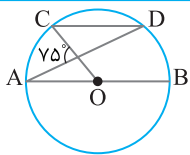
$$\frac{MA}{MB} = \frac{AB'}{A'B} = \frac{MB'}{MA'} \Rightarrow \frac{4}{MB} = \frac{12}{9} = \frac{MB+9}{4+AA'}$$

بنابراین اضلاع نظیر این دو مثلث متشابه، متناسب‌اند:

$$\frac{4}{MB} = \frac{12}{9} \Rightarrow MB=3, \quad \frac{12}{9} = \frac{MB+9}{4+AA'} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{3+9}{4+AA'} \Rightarrow AA'=5$$

از این تساوی‌ها نتیجه می‌گیریم

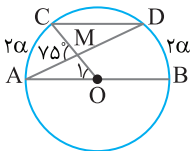
راه‌حل



در دایره شکل مقابل O مرکز دایره است و  $CD \parallel AB$ . اندازه کمان  $CD$  چقدر است؟

- (۱)  $50^\circ$   
(۲)  $80^\circ$   
(۳)  $75^\circ$   
(۴)  $37/5^\circ$

تست ۲۲

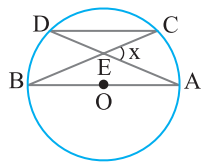


در شکل مقابل فرض می‌کنیم  $\widehat{BD}=2\alpha$ . چون  $AB \parallel CD$ ، پس کمان‌های محصور بین این دو وتر با هم برابرند، یعنی  $\widehat{AC}=\widehat{BD}=2\alpha$ . زاویه  $A$ ، زاویه محاطی مقابل به کمان  $BD$  و زاویه مرکزی مقابل به کمان  $AC$  است، بنابراین  $\hat{O}_1 = \widehat{AC} = 2\alpha$  و  $\hat{A} = \frac{1}{2}\widehat{BD} = \alpha$ . زاویه  $AMC$ ، زاویه خارجی برای مثلث  $OMA$  است، پس

$$\widehat{AMC} = \hat{O}_1 + \hat{A} \Rightarrow 75^\circ = 2\alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = 25^\circ$$

اکنون به دست می‌آید  $\widehat{CD} = 180^\circ - (\widehat{BD} + \widehat{AC}) = 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

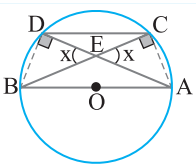
راه‌حل



در دایره مقابل وتر  $DC$  را موازی قطر  $AB$  رسم کرده‌ایم. نسبت مساحت مثلث  $ECD$  به مساحت مثلث  $EAB$  کدام است؟

- (۱)  $\sin x$   
(۲)  $\cos x$   
(۳)  $\cos^2 x$   
(۴)  $\sin^2 x$

تست ۲۳



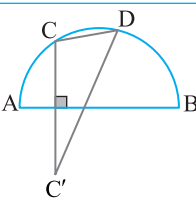
از  $A$  به  $C$  و از  $D$  به  $B$  وصل می‌کنیم. در این صورت دو زاویه  $BDA$  و  $ACB$  محاطی روبه‌رو به قطر هستند، پس قائمه هستند. با توجه به تعریف کسینوس در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$\triangle ACE: \cos x = \frac{EC}{EA} \quad (1), \quad \triangle BDE: \cos x = \frac{ED}{EB} \quad (2)$$

اکنون می‌توانیم نسبت مساحت دو مثلث  $EAB$  و  $ECD$  را به صورت زیر به دست آوریم:

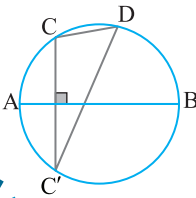
$$\frac{S_{ECD}}{S_{EAB}} = \frac{\frac{1}{2} EC \times ED \sin(180^\circ - x)}{\frac{1}{2} EA \times EB \sin(180^\circ - x)} = \frac{EC \times ED}{EA \times EB} \xrightarrow{(1), (2)} \frac{S_{ECD}}{S_{EAB}} = \cos x \times \cos x = \cos^2 x$$

راه‌حل



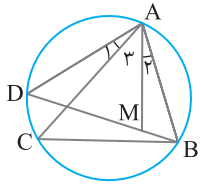
وتر  $CD$  به طول ثابت  $L$  روی نیم‌دایره‌ای به قطر  $AB$  ( $L < AB = 2R$ ) در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌لغزد. اگر  $C'$  قرینه نقطه  $C$  نسبت به  $AB$  باشد، اندازه زاویه  $CC'D$  چه وضعی دارد؟  
(۱) وضع مشخصی ندارد.  
(۲) همواره افزایش می‌یابد.  
(۳) همواره کاهش می‌یابد.  
(۴) همواره ثابت است.

تست ۲۴



نیم‌دایره را کامل می‌کنیم تا به یک دایره به قطر  $AB$  برسیم. چون قطر  $AB$  محور تقارن است، پس  $C'$  روی دایره قرار می‌گیرد و چون وتر  $CD$  طول ثابت دارد، پس کمان  $CD$  اندازه ثابت دارد. بنابراین زاویه محاطی  $CC'D$  که روبه‌روی کمان با اندازه ثابت  $CD$  قرار دارد، اندازه ثابتی دارد.

راه‌حل



در شکل مقابل  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  حاصل  $AD \times BC$  برابر کدام است؟

- BM × AC (۲)
- BD × BM (۴)

- DM × AC (۱)
- AB × CD (۳)

تست ۲۵

راه حل

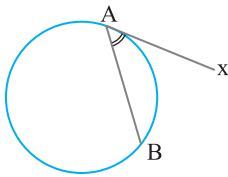
دو زاویه محاطی C و D روبه‌رو به کمان AB هستند. پس مساوی‌اند. در ضمن  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ . اگر به دو طرف این تساوی اندازه زاویه  $A_3$  را اضافه

کنیم، نتیجه می‌گیریم  $\hat{BAC} = \hat{DAM}$ . بنابراین

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{D} \\ \hat{BAC} = \hat{DAM} \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle ABC \sim \triangle AMD$$

اکنون نسبت اضلاع نظیر این دو مثلث را می‌نویسیم:  $\frac{BC}{DM} = \frac{AC}{AD}$ . در نتیجه  $AD \times BC = DM \times AC$ .

### زاویه ظلی



زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره است، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است، زاویه ظلی می‌نامند. در شکل مقابل  $\hat{BAX}$  زاویه‌ای ظلی است.

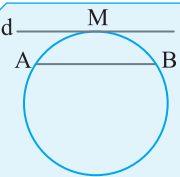
تذکر

کمانی از دایره که درون زاویه ظلی قرار دارد، کمان نظیر یا کمان روبه‌رو به زاویه ظلی است. در شکل بالا  $\widehat{AB}$  کمان نظیر زاویه ظلی  $BAX$  است.

### قضیه

اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف اندازه کمان روبه‌روی آن است. به عبارت دیگر در شکل بالا،  $\hat{BAX} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$ .

### نکته



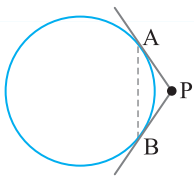
در شکل مقابل، خط d در نقطه M بر دایره مماس است و وتر AB با خط d موازی است. در این صورت

$$\widehat{AM} = \widehat{MB}$$

تست ۲۶

کمان AB به اندازه  $70^\circ$  را بر دایره‌ای اختیار کرده و در نقطه‌های A و B، دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه P قطع کنند. بزرگ‌ترین زاویه مثلث PAB کدام است؟

- ۴۰° (۱)
- ۷۰° (۲)
- ۱۱۰° (۳)
- ۸۰° (۴)



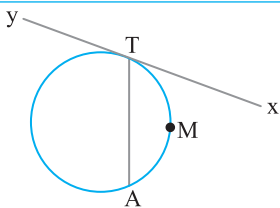
در شکل روبه‌رو زاویه‌های A و B در مثلث PAB، زاویه ظلی هستند. بنابراین  $\hat{A} = \hat{B} = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ$ . اکنون به دست می‌آید  $\hat{P} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (35^\circ + 35^\circ) = 110^\circ$ . بنابراین بزرگ‌ترین زاویه مثلث PAB برابر  $110^\circ$  است.

راه حل

تست ۲۷

در شکل مقابل اندازه زاویه  $ATx$  برابر  $\alpha + 11^\circ$  و اندازه کمان AMT برابر  $3\alpha - 4^\circ$  است. اندازه زاویه  $ATy$  کدام است؟

- ۱۰۷° (۱)
- ۶۲° (۳)
- ۷۳° (۲)
- ۱۵۴/۵° (۴)



زاویه  $ATx$  زاویه ظلی است، پس اندازه آن نصف کمان مقابلش است. پس

$$\hat{ATx} = \frac{1}{2} \widehat{AMT} \Rightarrow \alpha + 11^\circ = \frac{1}{2} (3\alpha - 4^\circ) \Rightarrow 2\alpha + 22^\circ = 3\alpha - 4^\circ \Rightarrow \alpha = 62^\circ$$

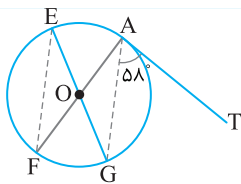
بنابراین  $\widehat{AMT} = 3\alpha - 4^\circ = 3 \times 62^\circ - 4^\circ = 146^\circ$ . در نتیجه  $\widehat{AT} = 360^\circ - \widehat{AMT} = 360^\circ - 146^\circ = 214^\circ$ . چون زاویه  $ATy$  زاویه ظلی

روبه‌رو به کمان AT است، پس  $\hat{ATy} = \frac{1}{2} \widehat{AT} = \frac{214^\circ}{2} = 107^\circ$ .

راه حل

۲۸ تست  
 دو قطر AF و GE در دایره‌ای به مرکز O مفروض هستند. مماس AT در نقطه A بر دایره رسم شده است. اگر زاویه TAG برابر  $58^\circ$  باشد، اندازه زاویه محاطی AFE کدام است؟

- ۱)  $32^\circ$       ۲)  $58^\circ$       ۳)  $64^\circ$       ۴)  $151^\circ$



$$\widehat{TAG} = \frac{1}{2} \widehat{AG} \Rightarrow 58^\circ = \frac{1}{2} \widehat{AG}$$

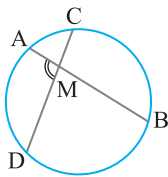
در شکل روبه‌رو زاویه TAG، زاویه ظلّی است، پس

یعنی  $\widehat{AG} = 116^\circ$ . چون EG قطر دایره است، پس  $\widehat{AE} + \widehat{AG} = 180^\circ$  در نتیجه  $\widehat{AE} + 116^\circ = 180^\circ$ . بنابراین  $\widehat{AE} = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$ . زاویه AFE زاویه محاطی روبه‌رو به کمان AE است، بنابراین

$$\widehat{AFE} = \frac{1}{2} \widehat{AE} = \frac{1}{2} \times 64^\circ = 32^\circ$$

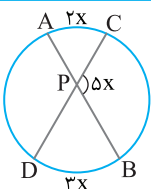
راه‌حل

### زاویه بین دو وتر



اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدود است. به عبارت دیگر در شکل روبه‌رو،

$$\widehat{AMD} = \frac{1}{2} (\widehat{AD} + \widehat{BC})$$



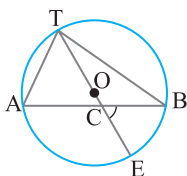
۲۹ تست  
 در شکل مقابل  $\widehat{AC} = 2x$ ،  $\widehat{BD} = 3x$  و  $\widehat{CPB} = 5x$ . مقدار x کدام است؟

- ۱)  $20^\circ$       ۲)  $24^\circ$       ۳)  $32^\circ$       ۴)  $36^\circ$

با توجه به شکل  $\widehat{APC} = 180^\circ - 5x$ . از طرف دیگر، زاویه APC زاویه بین دو وتر متقاطع است، بنابراین  $\widehat{APC} = \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD})$ .

$$180^\circ - 5x = \frac{1}{2} (2x + 3x) \quad \text{در نتیجه } x = 24^\circ$$

راه‌حل



۳۰ تست  
 در شکل مقابل O مرکز دایره است،  $\widehat{A} = 65^\circ$  و  $\widehat{B} = 35^\circ$ . اندازه زاویه C چند درجه است؟

- ۱)  $60^\circ$       ۲)  $61^\circ$       ۳)  $62^\circ$       ۴)  $63^\circ$

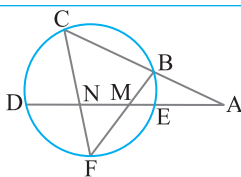
چون  $\widehat{A} = 65^\circ$ ، پس  $\frac{1}{2} \widehat{BT} = 65^\circ$  یعنی  $\widehat{BT} = 130^\circ$ . چون ET قطر دایره است، پس

$$\widehat{BE} = 180^\circ - \widehat{BT} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

از طرف دیگر چون  $\widehat{B} = 35^\circ$ ، پس  $\frac{1}{2} \widehat{AT} = 35^\circ$  یعنی  $\widehat{AT} = 70^\circ$ . زاویه C زاویه بین دو وتر متقاطع است، پس

$$\widehat{C} = \frac{1}{2} (\widehat{AT} + \widehat{BE}) = \frac{1}{2} (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ$$

راه‌حل



۳۱ تست  
 اگر F وسط کمان DE باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

- ۱)  $\widehat{F} = 2\widehat{A}$       ۲)  $\widehat{CBF} + \widehat{CNE} = 180^\circ$   
 ۳)  $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{ABM}$       ۴)  $\widehat{CND} + \widehat{BMA} = 90^\circ$

$$\widehat{CBF} = \frac{1}{2} (\widehat{CD} + \widehat{DF}) \quad (1)$$

زاویه CBF زاویه محاطی است، پس

$$\widehat{CNE} = \frac{1}{2} (\widehat{DF} + \widehat{EC}) \quad (2)$$

زاویه CNE زاویه بین دو وتر متقاطع است، پس

$$\widehat{CBF} + \widehat{CNE} = \frac{\widehat{CD} + \widehat{DF} + \widehat{FE} + \widehat{EC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \quad \text{می‌نویسیم } \widehat{DF} = \widehat{FE} \quad \text{و با توجه به این که (۲) و (۱) از جمع تساوی‌های (۱) و (۲) با توجه به این که}$$

راه‌حل

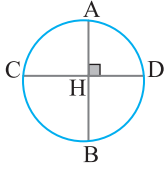


تست ۳۲ دو وتر AB و CD از دایره‌ای بر هم عمودند و اندازه‌های دو کمان از چهار کمان حاصل  $90^\circ$  و  $80^\circ$  است. اندازه یکی از دو کمان دیگر کدام است؟

تست ۳۲

- (۱)  $95^\circ$       (۲)  $80^\circ$       (۳)  $100^\circ$       (۴)  $110^\circ$

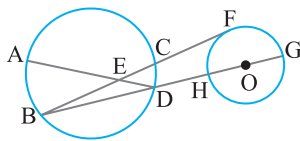
راه‌حل



کمان‌های مقابل نمی‌توانند  $90^\circ$  و  $80^\circ$  باشند، چون دیگر زاویه H قائمه نخواهد بود، پس دو کمان مجاور  $90^\circ$  و  $80^\circ$  هستند. فرض می‌کنیم اندازه کمان AD برابر با  $80^\circ$  و اندازه کمان AC برابر با  $90^\circ$  باشد. در این صورت

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD}) \Rightarrow 90^\circ = \frac{1}{2}(90^\circ + \widehat{BD}) \Rightarrow \widehat{BD} = 90^\circ$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC}) \Rightarrow 90^\circ = \frac{1}{2}(80^\circ + \widehat{BC}) \Rightarrow \widehat{BC} = 100^\circ$$



تست ۳۳ در شکل مقابل  $\widehat{AB} = 90^\circ$ ،  $\widehat{AEB} = 55^\circ$  و خط گذرنده از وتر BD از مرکز O عبور می‌کند. اگر BF مماس بر دایره به مرکز O مماس باشد، اندازه کمان FH چند درجه است؟

تست ۳۳

- (۱)  $50^\circ$       (۲)  $60^\circ$       (۳)  $70^\circ$       (۴)  $80^\circ$

راه‌حل

زاویه AEB زاویه بین دو وتر متقاطع است، پس

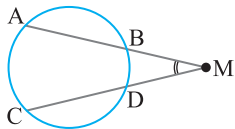
$$\widehat{AEB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD}) \Rightarrow 55^\circ = \frac{1}{2}(90^\circ + \widehat{CD}) \Rightarrow \widehat{CD} = 20^\circ$$

زاویه B زاویه محاطی روبه‌رو به کمان CD است، پس

$$\hat{B} = \frac{1}{2}\widehat{CD} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

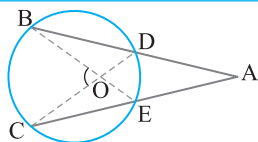
اکنون اگر از مرکز O به نقطه تماس F وصل کنیم، شعاع OF بر خط مماس BF عمود است. بنابراین مثلث OBF قائم‌الزاویه است. پس  $\widehat{BOF} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$ . چون  $\widehat{BOF} = 90^\circ$ ، زاویه مرکزی است، پس با کمان FH هم‌اندازه است. بنابراین  $\widehat{FH} = 80^\circ$ .

### زاویه بین امتداد دو وتر



اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدود هستند. به عبارت دیگر، در شکل مقابل،

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$$



تست ۳۴ در شکل مقابل  $\hat{A} = 27^\circ$  و  $\widehat{BOC} = 71^\circ$ . اندازه کمان BC چند درجه است؟

تست ۳۴

- (۱)  $98^\circ$       (۲)  $100^\circ$       (۳)  $102^\circ$       (۴)  $104^\circ$

راه‌حل

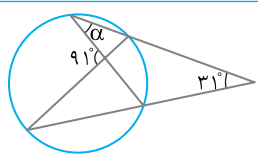
زاویه A زاویه بین امتداد دو وتر است، پس

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\widehat{BC} - \widehat{DE}) \Rightarrow 27^\circ = \frac{1}{2}(\widehat{BC} - \widehat{DE}) \Rightarrow \widehat{BC} - \widehat{DE} = 54^\circ \quad (1)$$

زاویه BOC زاویه بین دو وتر متقاطع است، پس

$$\widehat{BOC} = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE}) \Rightarrow 71^\circ = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE}) \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{DE} = 142^\circ \quad (2)$$

با جمع کردن برابری‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید  $\widehat{BC} = 98^\circ$ ، بنابراین  $\widehat{BC} = 98^\circ$ .



تست ۳۵ در شکل مقابل اندازه  $\alpha$  کدام است؟

تست ۳۵

- (۱)  $15^\circ$       (۲)  $22/5^\circ$       (۳)  $60^\circ$       (۴)  $30^\circ$

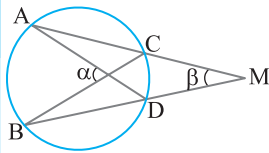
راه‌حل

با توجه به شکل مقابل

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD}), \quad \widehat{ANC} = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$$

یعنی  $\widehat{AC} + \widehat{BD} = 182^\circ$  و  $\widehat{AC} - \widehat{BD} = 62^\circ$ . زاویه A، زاویه محاطی مقابل به کمان BD است. بنابراین

$$\hat{A} = \alpha = \frac{1}{2}\widehat{BD} = 30^\circ$$



در شکل مقابل اگر  $\alpha$  به اندازه  $30^\circ$  از  $\beta$  بیشتر باشد، اندازه کمان CD چند درجه است؟

تست ۳۶

- ۳۰ (۱)  
۶۰ (۳)

۱۵ (۲)

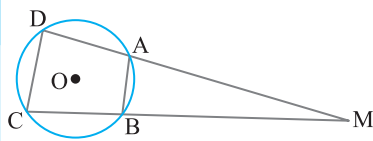
(۴) نمی توان معلوم کرد.

راه حل

$\alpha$  اندازه زاویه بین دو وتر متقاطع و  $\beta$  اندازه زاویه بین امتداد دو وتر است، بنابراین  $\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD})$  و  $\beta = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD})$ .

بنابر فرض  $\alpha = \beta + 30^\circ$ . بنابراین

$$\frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD}) = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD}) + 30^\circ \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{AB} - \widehat{CD} + 60^\circ \Rightarrow 2\widehat{CD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 30^\circ$$



در دایره شکل مقابل اگر  $AB = R$  و  $CD = R\sqrt{2}$ ، اندازه زاویه M چند درجه است؟ (R شعاع دایره است.)

تست ۳۷

- ۳۰ (۱)  
۲۰ (۳)

۲۲/۵ (۲)

۱۵ (۴)

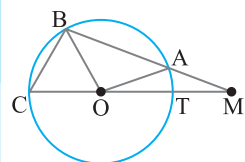
راه حل

از مرکز O به نقطه های A و B وصل می کنیم. در این صورت مثلث OAB مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع R است ( $OA = OB = AB = R$ ). پس اندازه زاویه مرکزی AOB برابر  $60^\circ$  است.

بنابراین  $\widehat{AB} = 60^\circ$ . از طرف دیگر اگر از O به نقطه های C و D وصل کنیم،  $OC = OD = R$  و  $CD = R\sqrt{2}$ . بنابراین مثلث OCD قائم الزاویه است، زیرا  $CD^2 = OD^2 + OC^2$ . پس اندازه زاویه مرکزی COD برابر  $90^\circ$  است. بنابراین  $\widehat{CD} = 90^\circ$ .

در ضمن زاویه M زاویه بین امتداد دو وتر است، بنابراین

$$\widehat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{CD} - \widehat{AB}) = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$$



در شکل مقابل، دایره  $C(O, R)$  مفروض است. از نقطه M خارج از دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است،  $AM = R$  و  $\widehat{M} = 20^\circ$ . طول وتر BC کدام است؟

تست ۳۸

- R (۱)  
 $\frac{R\sqrt{3}}{2}$  (۳)

$R\sqrt{2}$  (۲)

$\frac{2\sqrt{3}R}{3}$  (۴)

راه حل

راهنمای اول چون  $OA = AM = R$ ، مثلث AOM متساوی الساقین است و  $\widehat{AOM} = \widehat{M} = 20^\circ$ . در نتیجه  $\widehat{AT} = 20^\circ$ . زاویه بین امتداد دو

وتر دایره است، پس

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AT}}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{\widehat{BC} - 20^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 60^\circ \Rightarrow BC = BO = CO = R$$

راهنمای دوم در شکل مقابل چون  $OA = AM$ ، پس مثلث AOM متساوی الساقین است و  $\widehat{AOM} = \widehat{AMO} = 20^\circ$

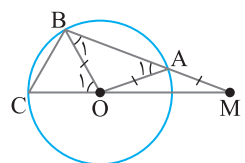
زاویه  $\widehat{A_1}$  زاویه خارجی مثلث OAM است، بنابراین  $\widehat{A_1} = \widehat{AOM} + \widehat{AMO} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$ . توجه

کنید که  $OA = OB = R$ ، پس  $\widehat{B_1} = \widehat{A_1} = 40^\circ$ . زاویه  $\widehat{O_1}$  زاویه خارجی مثلث OBM است، پس

$\widehat{O_1} = \widehat{B_1} + \widehat{M} = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$ . اکنون توجه کنید که مثلث OBC، متساوی الساقین است و زاویه رأس

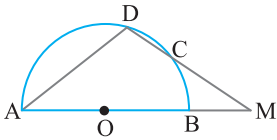
آن  $60^\circ$  است. پس این مثلث متساوی الاضلاع است، در نتیجه

$$BC = OB = R$$



تست ۳۹

در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره به قطر AB است، AMD مثلثی متساوی الساقین است و  $\widehat{DC} = 18^\circ$  . اندازه زاویه M چند درجه است؟



- |        |        |
|--------|--------|
| ۲۹ (۲) | ۳۳ (۱) |
| ۳۶ (۴) | ۳۹ (۳) |

راه حل

چون مثلث AMD متساوی الساقین است، پس  $\hat{A} = \hat{M} = \alpha$  . زاویه A زاویه محاطی در دایره است، پس

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\widehat{DC} + \widehat{BC}) \xrightarrow{\hat{A} = \alpha} \widehat{DC} + \widehat{BC} = 2\alpha \Rightarrow 18^\circ + \widehat{BC} = 2\alpha \quad (1)$$

از طرف دیگر زاویه M زاویه بین امتداد دو وتر است، پس

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{BC}) \xrightarrow{\hat{M} = \alpha} \widehat{AD} - \widehat{BC} = 2\alpha \quad (2)$$

در ضمن AB قطر دایره است، پس

$$\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{BC} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{DC} = 18^\circ} \widehat{AD} + \widehat{BC} = 162^\circ \quad (3)$$

$$\begin{cases} \widehat{AD} - \widehat{BC} = 2\alpha \\ \widehat{AD} + \widehat{BC} = 162^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2\widehat{AD} = 162^\circ - 2\alpha \quad (4)$$

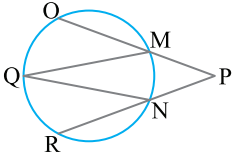
از تساوی های (۲) و (۳) به دستگاه زیر می رسمیم:

$$2(2\alpha - 18^\circ) = 162^\circ - 2\alpha \Rightarrow 6\alpha = 198^\circ \Rightarrow \hat{M} = \alpha = 33^\circ$$

اکنون از تساوی های (۱) و (۴) نتیجه می گیریم

تست ۴۰

در شکل مقابل،  $\widehat{OQ} = 53^\circ$  و  $\widehat{RQ} = 45^\circ$  . مجموع اندازه زاویه های P و Q چند درجه است؟



- |        |        |
|--------|--------|
| ۴۹ (۲) | ۴۶ (۱) |
| ۵۵ (۴) | ۵۲ (۳) |

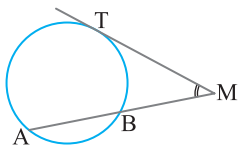
راه حل

زاویه Q زاویه محاطی است، پس  $\hat{Q} = \frac{1}{2}\widehat{MN}$  و زاویه P زاویه بین امتداد دو وتر است، پس  $\hat{P} = \frac{1}{2}(\widehat{OQR} - \widehat{MN})$  ، از جمع تساوی های به دست

آمده نتیجه می شود  $\hat{P} + \hat{Q} = \frac{1}{2}(\widehat{OQR} - \widehat{MN} + \widehat{MN}) = \frac{1}{2}\widehat{OQR}$  . کمان OQR مجموع دو کمان OQ و RQ است، پس اندازه آن مساوی

$$\hat{P} + \hat{Q} = \frac{98^\circ}{2} = 49^\circ \text{ ، بنابراین } \widehat{OQR} = 45^\circ + 53^\circ = 98^\circ \text{ است}$$

زاویه بین مماس و وتر

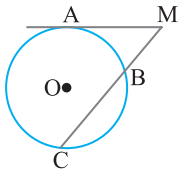


در شکل مقابل خط MT مماس بر دایره است و از M قاطع MA را بر دایره رسم کرده ایم. در این صورت

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{TA} - \widehat{TB})$$

تست ۴۱

در دایره  $C(O, 5)$  اگر  $\hat{M} = 5^\circ$  و  $\widehat{BC} = 11^\circ$  ، طول کمان AC برابر کدام است؟



- |                         |                      |
|-------------------------|----------------------|
| $\frac{175}{36}\pi$ (۲) | $\frac{\pi}{10}$ (۱) |
| $\frac{163}{36}\pi$ (۴) | $\frac{\pi}{11}$ (۳) |

راه حل

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{AB}) \Rightarrow 5^\circ = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{AB}) \Rightarrow \widehat{AC} - \widehat{AB} = 10^\circ$$

اندازه زاویه M از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\widehat{AC} + \widehat{AB} + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{AB} = 250^\circ$$

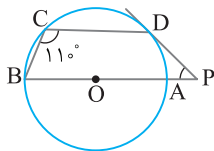
از طرف دیگر اندازه کمان BC برابر  $11^\circ$  است. بنابراین

$$\begin{cases} \widehat{AC} + \widehat{AB} = 250^\circ \\ \widehat{AC} - \widehat{AB} = 10^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2\widehat{AC} = 260^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 130^\circ$$

از دو تساوی به دست آمده اندازه کمان AC را پیدا می کنیم:

$$L = \frac{\alpha \pi R}{180^\circ} \Rightarrow \text{طول کمان AC} = \frac{130^\circ}{180^\circ} (\pi \times 5) = \frac{175}{36}\pi$$

اکنون طول کمان AC را به صورت مقابل به دست می آوریم:



در شکل مقابل AB قطر دایره است و  $\hat{C}=11^\circ$ . اندازه زاویه P کدام است؟ (PD در نقطه D بر دایره مماس است.)

- ۵۰° (۱)  
۶۰° (۲)  
۴۵° (۳)  
۵۵° (۴)

تست ۴۲

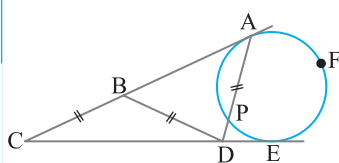
راه حل

چون AB قطر دایره است، پس  $\widehat{AB}=180^\circ$ . زاویه C محاطی است، پس اندازه آن نصف اندازه کمان مقابلش است. بنابراین

$$\hat{C} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{AD}) \Rightarrow 11^\circ = \frac{1}{2}(180^\circ + \widehat{AD}) \Rightarrow \widehat{AD} = 4^\circ$$

در نتیجه  $\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{AD} = 180^\circ - 4^\circ = 176^\circ$ . از طرف دیگر زاویه P زاویه بین امتداد یک وتر و خط مماس است. پس اندازه آن نصف

$$\hat{P} = \frac{1}{2}(\widehat{BCD} - \widehat{AD}) = \frac{1}{2}(176^\circ - 4^\circ) = 86^\circ$$



در دایره شکل مقابل  $BC=BD=DA$  و  $\hat{C}=25^\circ$ . مقدار  $\widehat{AFE} - \widehat{PE}$  برابر کدام است؟

- ۱۰۰° (۱)  
۱۲۵° (۲)  
۷۵° (۳)  
۱۵۰° (۴)

تست ۴۳

راه حل

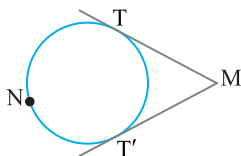
در شکل مقابل زاویه  $B_1$  زاویه خارجی مثلث متساوی الساقین BCD است. اگر فرض کنیم  $\hat{C} = \hat{D} = \alpha$ . آن گاه  $\hat{B}_1 = \hat{C} + \hat{D} = 2\alpha$ . مثلث ABD نیز متساوی الساقین است، پس  $\hat{A}_1 = 2\alpha$ . در نتیجه اندازه زاویه  $D_1$  که زاویه خارجی مثلث ACD است برابر  $3\alpha = 75^\circ$  است.

از طرف دیگر زاویه  $D_1$  زاویه بین امتداد یک وتر و خط مماس است. بنابراین

$$\hat{D}_1 = \frac{1}{2}(\widehat{AFE} - \widehat{PE}) \Rightarrow 75^\circ = \frac{1}{2}(\widehat{AFE} - \widehat{PE}) \Rightarrow \widehat{AFE} - \widehat{PE} = 150^\circ$$



### زاویه بین دو مماس



از نقطه M مماس‌های MT و  $MT'$  را بر دایره  $C(O, R)$  رسم کرده‌ایم. در این صورت

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{TNT'} - \widehat{TT'})$$

در یک دایره، اندازه کمان AB برابر با  $70^\circ$  است. اندازه زاویه بین مماس‌هایی که در نقطه‌های A و B بر دایره رسم می‌شوند، کدام است؟

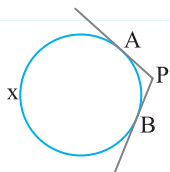
- ۸۰° (۱)  
۱۰۰° (۲)  
۱۱۰° (۳)  
۹۰° (۴)

تست ۴۴

راه حل

اگر اندازه کمان AB برابر با  $70^\circ$  باشد، آن گاه اندازه کمان AxB برابر با  $290^\circ$  است. اگر فرض کنیم مماس‌های مرسوم در نقطه‌های A و B بر دایره در نقطه P

$$\hat{P} = \frac{1}{2}(\widehat{AxB} - \widehat{AB}) = \frac{1}{2}(290^\circ - 70^\circ) = 110^\circ$$



در شکل مقابل MA و MB بر دایره به قطر AC مماس هستند. اگر  $\widehat{OBC} = 50^\circ$ ، اندازه زاویه M برابر کدام است؟

- ۴۰° (۱)  
۱۰۰° (۲)  
۵۰° (۳)  
۸۰° (۴)

تست ۴۵

راه حل

در دایره داده شده زاویه M زاویه بین دو مماس MA و MB است. بنابراین  $\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{ACB} - \widehat{AB})$ . در ضمن مثلث متساوی الساقین است،

پس  $\widehat{BOC} = 180^\circ - (2 \times 50^\circ) = 80^\circ$  و چون  $\widehat{BOC}$  زاویه مرکزی در این دایره است، پس  $\widehat{BC} = 80^\circ$ ، بنابراین  $\widehat{AB} = 100^\circ$  و

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{ACB} - \widehat{AB}) = \frac{1}{2}(260^\circ - 100^\circ) = 80^\circ$$



تست ۴۶

در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. زاویه A برابر کدام است؟

(۲)  $\alpha + \beta$

(۱)  $\frac{\alpha + \beta}{2}$

(۴)  $\frac{\alpha + \beta}{4}$

(۳)  $2\alpha + 2\beta$

راه‌حل

با توجه به شکل مقابل، اندازه زاویه‌های B و C را برحسب کمان‌های مقابل آن‌ها می‌نویسیم. در این صورت

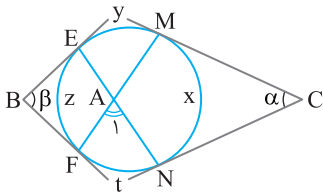
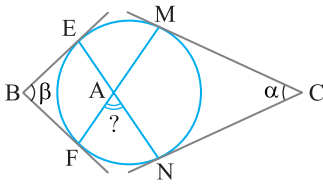
$$\widehat{B} = \frac{(y+x+t)-z}{2} \Rightarrow y+x+t-z=2\beta, \quad \widehat{C} = \frac{(y+z+t)-x}{2} \Rightarrow y+z+t-x=2\alpha$$

از جمع دو تساوی بالا نتیجه می‌گیریم

$$2(y+t) = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow y+t = \alpha + \beta \quad (۱)$$

از طرف دیگر

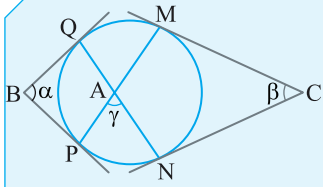
$$\widehat{A}_1 = \frac{y+t}{2} \xrightarrow{\text{از (۱)}} \widehat{A}_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$



نکته

در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. در این صورت

$$\alpha + \beta = \widehat{MQ} + \widehat{NP} \quad \text{یا} \quad \alpha + \beta = 2\gamma$$



تست ۴۷

در شکل روبه‌رو، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند. اگر وتر CD،  $\sqrt{2}$  برابر اندازه شعاع دایره باشد، اندازه زاویه EDF کدام است؟

(۲)  $30^\circ$

(۱)  $25^\circ$

(۴)  $60^\circ$

(۳)  $35^\circ$

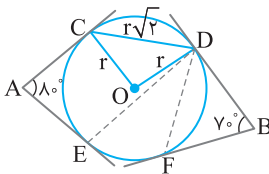
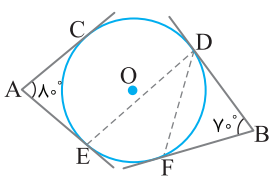
راه‌حل

در شکل مقابل O مرکز دایره و r اندازه شعاع دایره است. چون وتر CD برابر  $r\sqrt{2}$  است پس طول اضلاع مثلث OCD در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند، بنابراین  $\widehat{COD} = 90^\circ$ . در نتیجه  $\widehat{CD} = 90^\circ$ . بنابر نکته بیان شده،

$$\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{CD} + \widehat{EF} \Rightarrow 80^\circ + 70^\circ = 90^\circ + \widehat{EF}$$

یعنی  $\widehat{EF} = 60^\circ$ . زاویه EDF، زاویه محاطی روبه‌رو به کمان EF است، بنابراین

$$\widehat{EDF} = \frac{1}{2} \widehat{EF} = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$



مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

۱- اگر فاصله نزدیک‌ترین نقطه خط  $d$  از مرکز دایره  $C(O, 2\sqrt{5})$  برابر  $3\sqrt{2}$  باشد، وضعیت نسبی خط  $d$  و دایره  $C$  کدام است؟

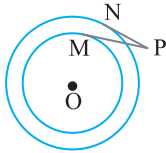
- (۱) مماس (۲) متقاطع (۳) نامتقاطع (۴) نامشخص

۲- مرکز تمام دایره‌هایی به شعاع ثابت  $R$  که بر خط مفروض  $d$  مماس‌اند روی کدام شکل قرار می‌گیرند؟

- (۱) خط (۲) دو خط موازی (۳) دو خط عمود بر هم (۴) دایره

۳- پاره‌خط‌های  $PM$  و  $PN$  بر دایره‌های  $C(O, 3)$  و  $C'(O, 4)$  مماس هستند. اگر  $PM=4$ ، طول  $PN$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $2/5$  (۳)  $3/5$  (۴) ۳



۴- کمترین و بیشترین فاصله نقطه  $A$  از دایره  $C(O, R)$  برابر ۵ و ۹ است. طول مماسی که از نقطه  $A$  بر دایره رسم شده است، چند برابر شعاع دایره است؟

- (۱)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$  (۲)  $3\sqrt{5}$  (۳)  $6\sqrt{5}$  (۴)  $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

۵- در دایره  $C(O, 4)$  طول وتر  $AB$  برابر  $\sqrt{32}$  است. طول کمان بزرگ‌تر  $AB$  در این دایره برابر کدام است؟

- (۱)  $5\pi$  (۲)  $6\pi$  (۳)  $4\pi$  (۴)  $8\pi$

۶- در دایره  $C(O, R)$  طول کمان  $AB$  برابر  $4\pi$  و مساحت قطاع  $OAB$  برابر  $12\pi$  است. مساحت دایره برابر کدام است؟

- (۱)  $28\pi$  (۲)  $32\pi$  (۳)  $36\pi$  (۴)  $48\pi$

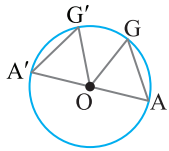
۷- در دایره  $C(O, R)$  دو وتر  $AG'$  و  $A'G'$  برابرند. نسبت مساحت‌های دو مثلث  $OAG'$  و  $OA'G'$  کدام است؟

(۱) بیشتر از ۱ است

(۲) کمتر از ۱ است.

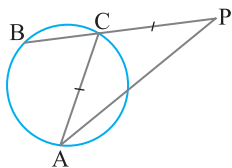
(۳) برابر با ۱ است.

(۴) هر سه گزینه می‌تواند درست باشد.



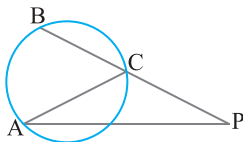
۸- در شکل روبه‌رو، اگر اندازه زاویه  $P$  برابر  $32^\circ$  و مثلث  $ACP$  متساوی‌الساقین باشد، اندازه کمان  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $69^\circ$  (۲)  $74^\circ$  (۳)  $86^\circ$  (۴)  $128^\circ$



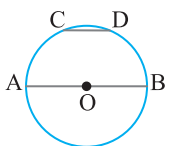
۹- در شکل مقابل اگر اندازه زاویه  $P$  برابر با  $27^\circ$  باشد و مثلث  $ACP$  در رأس  $C$  متساوی‌الساقین باشد، اندازه کمان  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $106^\circ$  (۲)  $98^\circ$  (۳)  $92^\circ$  (۴)  $108^\circ$



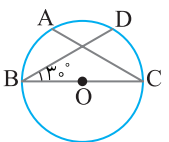
۱۰- در دایره  $C(O, 4)$ ، اگر  $AB \parallel CD$  و  $\widehat{CD} = 45^\circ$ ، طول کمان  $BD$  چقدر است؟

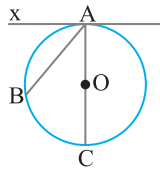
- (۱)  $\frac{2\pi}{3}$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{\pi}{4}$



۱۱- در شکل مقابل،  $BC$  قطر دایره و  $D$  وسط کمان  $AC$  است و  $\widehat{DBC} = 30^\circ$ . اندازه زاویه  $ACB$  چند درجه است؟

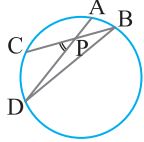
- (۱)  $20^\circ$  (۲)  $60^\circ$  (۳)  $45^\circ$  (۴)  $30^\circ$





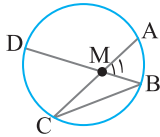
۱۲- در شکل مقابل اندازه زاویه ظلی BAX برابر  $50^\circ$  است. اندازه کمان BC بر حسب درجه کدام است؟

- ۷۰ (۱)      ۷۵ (۲)      ۸۰ (۳)      ۸۵ (۴)



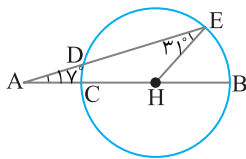
۱۳- در شکل مقابل  $\hat{D} = \frac{1}{2} \hat{B}$ . اندازه زاویه P چند برابر اندازه کمان AB است؟

- $\frac{2}{3}$  (۱)      ۱ (۲)       $\frac{3}{2}$  (۳)      ۲ (۴)



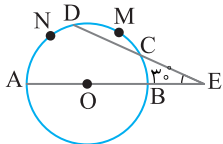
۱۴- در شکل مقابل  $\hat{C} = \frac{1}{3} \hat{B}$ . اندازه زاویه  $M_1$  چند برابر اندازه کمان AB است؟

- ۲ (۱)       $\frac{5}{2}$  (۲)      ۱ (۳)       $\frac{3}{2}$  (۴)



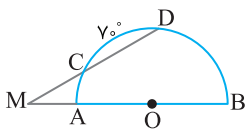
۱۵- در شکل روبه‌رو  $\hat{A} = 17^\circ$  و  $\hat{E} = 31^\circ$  و H وسط قطر CB است. اندازه کمان CD کدام است؟

- ۱۴ (۱)      ۱۹ (۲)      ۲۲ (۳)      ۲۴ (۴)



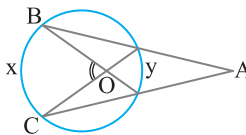
۱۶- در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است،  $\widehat{DMC} = 3^\circ$  و  $\hat{E} = 3^\circ$ . اندازه کمان AND کدام است؟

- ۸۵ (۱)      ۹۵ (۲)      ۱۰۵ (۳)      ۱۱۵ (۴)



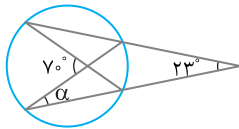
۱۷- در شکل مقابل O مرکز نیم‌دایره به قطر AB است و  $\widehat{DMB} = 3^\circ$ . اندازه کمان AC چند درجه است؟

- ۲۵ (۱)      ۳۵ (۲)      ۱۵ (۳)      ۳۰ (۴)



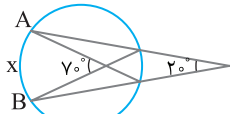
۱۸- در شکل مقابل  $\hat{A} = 27^\circ$  و  $\hat{O} = 71^\circ$ . نسبت  $\frac{x}{y}$  برابر کدام است؟

- $\frac{49}{22}$  (۱)       $\frac{49}{11}$  (۲)       $\frac{98}{42}$  (۳)       $\frac{98}{22}$  (۴)



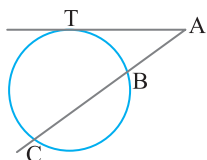
۱۹- در شکل مقابل اندازه  $\alpha$  برابر کدام است؟

- $23/5^\circ$  (۱)       $23^\circ$  (۲)       $24^\circ$  (۳)       $24/5^\circ$  (۴)



۲۰- در شکل مقابل اندازه کمان AxB چند درجه است؟

- ۷۵ (۱)      ۸۰ (۲)      ۹۰ (۳)      ۹۵ (۴)



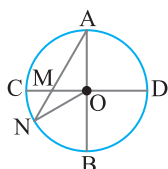
۲۱- در شکل روبه‌رو AT مماس بر دایره است و  $\widehat{BC} = \widehat{TC} = 2\widehat{BT}$ . اندازه زاویه A چند درجه است؟

- ۱۸ (۱)      ۷۲ (۲)      ۱۴۴ (۳)      ۳۶ (۴)

### مفاهیم اولیه و زوایه‌ها در دایره

۲۲- فاصله نزدیک‌ترین نقطه خط d تا دایره  $C(O, 2x-1)$  برابر  $3-x$  است. اگر خط و دایره نقطه مشترکی نداشته باشند، حدود x کدام است؟

- $x < 3$  (۱)       $\frac{1}{2} < x < 3$  (۲)       $3 < x$  (۳)      هیچ مقداری برای x نداریم. (۴)

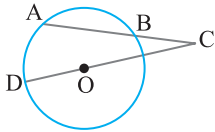


۲۳- در شکل مقابل، دو قطر AB و CD و برهم عمودند  $OM = MN$ . اندازه زاویه A چقدر است؟

- $20^\circ$  (۱)       $30^\circ$  (۲)       $22/5^\circ$  (۳)       $45^\circ$  (۴)

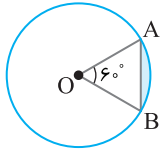
۲۴- دو خط  $m$  و  $n$  در نقطه  $A$  متقاطع اند. چند دایره به شعاع  $۴$  می‌توان رسم کرد طوری که مرکزشان روی  $n$  باشد و خط  $m$  بر آنها مماس باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نامتناهی



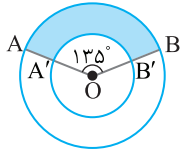
۲۵- در شکل مقابل، طول  $BC$  مساوی شعاع دایره است. اگر  $\hat{C} = 2^\circ$ ، اندازه کمان  $AD$  چند درجه است؟

- (۱)  $40^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $50^\circ$  (۴)  $60^\circ$



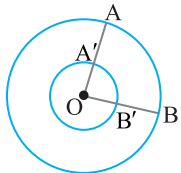
۲۶- در شکل مقابل، در دایره به مرکز  $O$  مساحت قطعه رنگی برابر  $9\sqrt{3} - 6\pi$  است. مجموع طول کمان  $AB$  و طول وتر  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $\pi + 3$  (۲)  $\pi + 6$  (۳)  $2(\pi + 3)$  (۴)  $2(\pi + 6)$



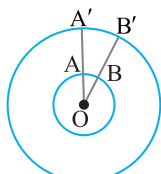
۲۷- دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O, 2R)$  را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر مساحت قسمت رنگی  $18\pi$  باشد، طول کمان  $AB$  برابر کدام است؟

- (۱)  $4\pi$  (۲)  $6\pi$  (۳)  $2\pi$  (۴)  $3\pi$



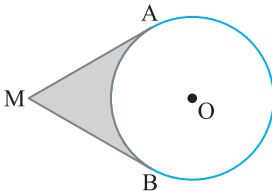
۲۸- دو دایره  $C'(O, \frac{2}{3}R)$  و  $C(O, \frac{2}{3}R)$  مفروض‌اند. اگر طول کمان  $A'B'$  برابر ۶ باشد، طول کمان  $AB$  برابر کدام است؟

- (۱)  $13$  (۲)  $13/5$  (۳)  $12$  (۴)  $12/5$



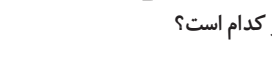
۲۹- دو دایره  $C(O, 2)$  و  $C'(O, 5)$  مفروض‌اند. اگر مساحت قطاع  $OAB$  برابر یک واحد مربع باشد، طول کمان  $A'B'$  چند واحد است؟

- (۱) ۲ (۲)  $2/5$  (۳) ۳ (۴)  $3/5$



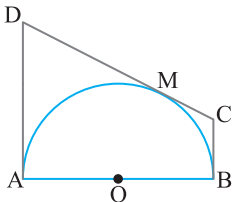
۳۰- در دایره  $C(O, 1)$  زاویه بین مماس‌های  $MA$  و  $MB$  برابر  $60^\circ$  است. مساحت قسمت رنگی کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$  (۲)  $3\sqrt{3}-\pi$  (۳)  $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $3\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$



۳۱- در دایره  $C(O, R)$  اگر اندازه کمان  $AB$  برابر  $60^\circ$  و اندازه وتر  $AB$  برابر  $3\sqrt{3}$  متر باشد، کمترین فاصله  $O$  از  $AB$  برابر کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲)  $15\sqrt{3}$  (۳) ۱۰ (۴)  $10\sqrt{3}$



۳۲- در شکل مقابل پاره‌خط‌های  $AD$ ،  $DC$  و  $BC$  بر نیم‌دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  مماس هستند. اگر  $M$  روی نیم‌دایره تغییر کند، حاصل ضرب  $AD \times BC$  کدام است؟

- (۱)  $R^2$  (۲)  $2R^2$  (۳)  $3R^2$  (۴)  $4R^2$

۳۳- در دایره‌ای به قطر  $10$  واحد، وتر  $AB$  به طول  $8$  واحد رسم شده است. نقطه  $C$  روی دایره متحرک است. بیشترین مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

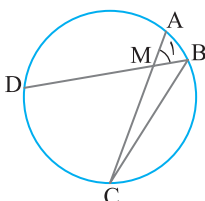
- (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴) ۴۸

۳۴- دایره‌ای به شعاع  $4$  و نقطه  $M$  به فاصله  $1$  از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آنها ۲ باشد و از  $M$  بگذرد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) نامتناهی

۳۵- در دایره‌ای به قطر  $26$  واحد، فاصله نقطه  $P$  تا مرکز دایره  $5$  واحد است. اندازه کوچک‌ترین وتر از دایره که از نقطه  $P$  می‌گذرد، کدام است؟

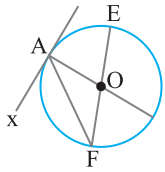
- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴



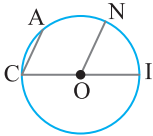
۳۶- در شکل مقابل  $\hat{C} = \frac{1}{4}\hat{B}$ . اندازه زاویه  $M_1$  چند برابر اندازه کمان  $AB$  است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{4}{3}$



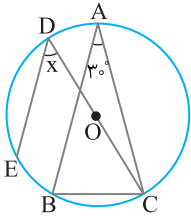


- ۳۷- در شکل مقابل Ax بر دایره به مرکز O مماس بوده و اندازه زاویه FAX برابر  $56^\circ$  است. اندازه کمان AE کدام است؟
- (۱)  $68^\circ$  (۲)  $66^\circ$  (۳)  $64^\circ$  (۴)  $62^\circ$



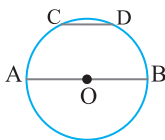
- ۳۸- در شکل مقابل، CI قطر دایره است و  $CA \parallel ON$ . اگر  $\widehat{AC} = 50^\circ$ ، اندازه زاویه NOI چند درجه است؟

- (۱)  $55^\circ$  (۲)  $60^\circ$  (۳)  $65^\circ$  (۴)  $70^\circ$



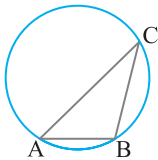
- ۳۹- در شکل مقابل O مرکز دایره و مثلث ABC متساوی الساقین ( $AB=AC$ ) است. اگر  $AB \parallel DE$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱)  $30^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $60^\circ$  (۴)  $90^\circ$



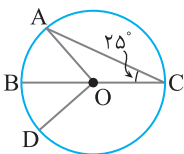
- ۴۰- در دایره  $C(O, R)$ ، اگر  $AB \parallel CD$  و  $\widehat{CD} = 50^\circ$ ، اندازه زاویه DCB کدام است؟

- (۱)  $30^\circ$  (۲)  $\frac{65^\circ}{2}$  (۳)  $\frac{55^\circ}{2}$  (۴)  $25^\circ$



- ۴۱- در دایره شکل مقابل  $\widehat{ACB} = 30^\circ$  و  $AB = 6$ . طول کمان کوچکتر AB برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{\pi}{3}$  (۳)  $\pi$  (۴)  $2\pi$



- ۴۲- در دایره  $C(O, r)$  مساحت قطاع BOD برابر  $\frac{16\pi}{9}$  است. طول کمان ABD برابر کدام است؟

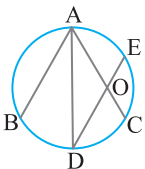
- (۱)  $\frac{4}{3}\pi$  (۲)  $\frac{3}{2}\pi$  (۳)  $\pi$  (۴)  $2\pi$

- ۴۳- در دایره ای قطر AB و وتر CD را طوری رسم می‌کنیم که  $AB \parallel CD$ . حاصل  $|\widehat{ACD} - \widehat{ADC}|$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $30^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $60^\circ$  (۴)  $90^\circ$

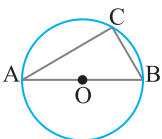
- ۴۴- دو قطر AB و CD در دایره ای به مرکز O مفروض‌اند. مماس AT در نقطه A را بر دایره رسم کرده‌ایم. اگر  $\widehat{TAD} = 60^\circ$ ، اندازه زاویه ABC چند درجه است؟

- (۱)  $30^\circ$  (۲)  $60^\circ$  (۳)  $120^\circ$  (۴)  $56^\circ$



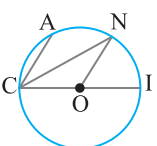
- ۴۵- در دایره شکل مقابل  $AB \parallel DE$ ،  $\widehat{AOD} = 120^\circ$  و AD نیمساز زاویه BAC است. اندازه کمان BD چند درجه است؟

- (۱)  $30^\circ$  (۲)  $60^\circ$  (۳)  $45^\circ$  (۴)  $40^\circ$



- ۴۶- در دایره  $C(O, R)$  اگر  $BC = 1$  و  $AC = \sqrt{3}$ ، طول کمان AC چند برابر  $\pi$  است؟

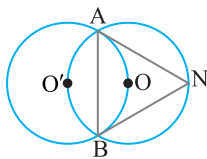
- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$



- ۴۷- در شکل مقابل، CI قطر دایره است و  $CA \parallel ON$ . اگر اندازه زاویه ACO برابر با  $75^\circ$  درجه باشد، اندازه زاویه CNO کدام است؟

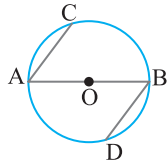
- (۱)  $37/5^\circ$  (۲)  $30^\circ$  (۳)  $25^\circ$  (۴)  $32/5^\circ$

۴۸- دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R)$  هر یک از مرکز دیگری می‌گذرند و در نقطه‌های  $A$  و  $B$  متقاطع‌اند. اندازه زاویه  $\angle ANB$  چند درجه است؟



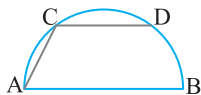
- (۱) ۴۵  
(۲) ۴۰  
(۳) ۶۰  
(۴) ۵۰

۴۹- در دایره  $C(O, 5)$  وترهای  $AC$  و  $BD$  موازی‌اند. اگر  $AC=6$ ، محیط چهارضلعی  $ACBD$  کدام است؟



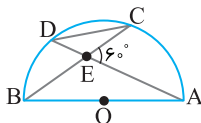
- (۱) ۱۸  
(۲) ۲۶  
(۳) ۲۸  
(۴) ۳۶

۵۰- در نیم‌دایره‌ای به قطر  $AB=1$ ، وتر  $CD=6$  موازی با  $AB$  رسم شده است. طول  $AC$  کدام است؟



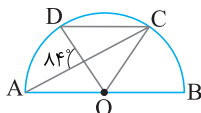
- (۱)  $2\sqrt{5}$   
(۲)  $5\sqrt{2}$   
(۳)  $3\sqrt{2}$   
(۴)  $2\sqrt{3}$

۵۱- در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث  $CDE$  به مساحت مثلث  $ABE$  کدام است؟



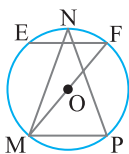
- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳)  $\frac{1}{4}$   
(۴)  $\frac{3}{4}$

۵۲- در شکل مقابل O مرکز نیم‌دایره است. اگر وتر  $CD$  موازی قطر  $AB$  باشد، اندازه کمان  $DC$  برابر کدام است؟



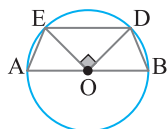
- (۱)  $68^\circ$   
(۲)  $64^\circ$   
(۳)  $56^\circ$   
(۴)  $54^\circ$

۵۳- در دایره  $C(O, R)$  شکل مقابل اگر  $\angle MNP=40^\circ$ ،  $MN=PN$  و  $EF \parallel MP$ ، اندازه زاویه  $\angle MFE$  چند درجه است؟



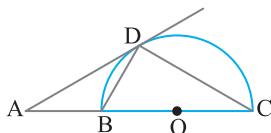
- (۱)  $70^\circ$   
(۲)  $50^\circ$   
(۳)  $40^\circ$   
(۴)  $20^\circ$

۵۴- وتر  $DE$  از دایره  $C(O, 3)$  با قطر  $AB$  موازی است و  $\angle DOE=90^\circ$ . مساحت چهارضلعی  $ABDE$  چقدر است؟



- (۱)  $\frac{9}{2}(\sqrt{2}+1)$   
(۲)  $5(\sqrt{2}+1)$   
(۳)  $5(2\sqrt{2}-1)$   
(۴)  $\frac{9}{2}(2\sqrt{2}-1)$

۵۵- در شکل مقابل،  $AD$  بر نیم‌دایره مماس است و  $AB=BD$ . اندازه زاویه  $\angle DCB$  چند درجه است؟

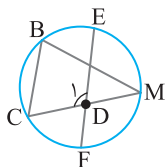


- (۱) ۴۵  
(۲) ۴۰  
(۳) ۶۰  
(۴) ۳۰

۵۶- اندازه زاویه بین دو وتر متقاطع  $AB$  و  $CD$  درون دایره‌ای، برابر  $60^\circ$  است. اگر اندازه دو کمان از چهار کمان حاصل  $80^\circ$  و  $110^\circ$  باشد، تفاضل اندازه دو کمان دیگر چند درجه است؟

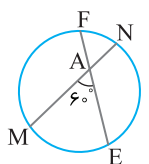
- (۱) ۶۰  
(۲) ۹۰  
(۳) ۱۲۰  
(۴) ۱۳۵

۵۷- در شکل مقابل M وسط کمان  $EF$  است و اندازه کمان  $BC$  برابر با  $80^\circ$  است. مجموع اندازه زاویه‌های  $B$  و  $D_1$  چند درجه است؟



- (۱) ۱۶۰  
(۲) ۱۷۵  
(۳) ۱۸۰  
(۴) ۲۳۰

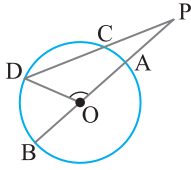
۵۸- در دایره  $C(O, 12)$  اندازه زاویه بین دو وتر  $MN$  و  $EF$  برابر  $60^\circ$  است. مجموع طول کمان‌های  $ME$  و  $FN$  برابر کدام است؟



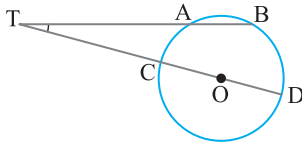
- (۱)  $6\pi$   
(۲)  $16\pi$   
(۳)  $12\pi$   
(۴)  $8\pi$

۵۹- در دایره‌ای امتداد دو وتر مساوی  $AB$  و  $CD$  در بیرون آن، زاویه  $80^\circ$  می‌سازند و کمان‌های داخل این زاویه به نسبت ۱ و ۵ هستند. اندازه کمان  $AB$  چند درجه است؟

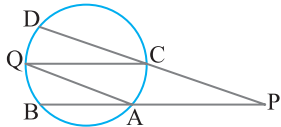
- (۱) ۵۰  
(۲) ۵۵  
(۳) ۶۰  
(۴) ۶۵



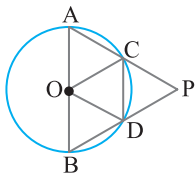
- ۶۰- در شکل مقابل قطر AB دایره است و  $\hat{P}=20^\circ$  . اگر  $\widehat{CD}=90^\circ$  ، اندازه زاویه DOA چند درجه است؟
- |         |         |
|---------|---------|
| ۱۱۵ (۱) | ۱۱۰ (۲) |
| ۱۲۰ (۳) | ۱۰۰ (۴) |



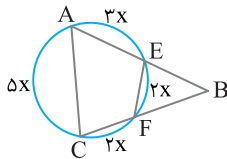
- ۶۱- در شکل روبه‌رو O مرکز دایره‌ای به شعاع R است. اگر  $\hat{T}=15^\circ$  و  $\widehat{BD}=75^\circ$  ، طول وتر AB کدام است؟
- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| $\frac{2}{3}R$ (۱) | R (۲)              |
| $\frac{4}{3}R$ (۳) | $\frac{5}{6}R$ (۴) |



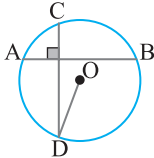
- ۶۲- در شکل روبه‌رو، نقطه‌های A ، B ، C ، D و Q روی دایره هستند و اندازه کمان‌های BQ و QD به ترتیب ۴۲ و ۳۸ درجه است. مجموع اندازه دو زاویه P و Q چند درجه است؟
- |        |        |
|--------|--------|
| ۸۰ (۱) | ۴۰ (۲) |
| ۳۸ (۳) | ۷۲ (۴) |



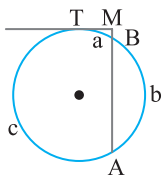
- ۶۳- در شکل مقابل، AB قطر دایره و طول CD با شعاع دایره برابر است. اندازه زاویه P چند درجه است؟
- |        |        |
|--------|--------|
| ۳۰ (۱) | ۴۵ (۲) |
| ۶۰ (۳) | ۷۵ (۴) |



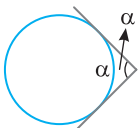
- ۶۴- در شکل مقابل اندازه زاویه B چند درجه است؟
- |        |        |
|--------|--------|
| ۴۵ (۲) | ۳۰ (۱) |
| ۶۰ (۴) | ۵۰ (۳) |



- ۶۵- در دایره شکل مقابل دو وتر عمود بر هم AB و CD رسم شده‌اند. اگر اندازه زاویه ODC برابر با  $20^\circ$  باشد،  $\widehat{BC}-\widehat{AC}$  چند درجه است؟
- |        |        |
|--------|--------|
| ۴۰ (۲) | ۲۰ (۱) |
| ۲۵ (۴) | ۵۰ (۳) |

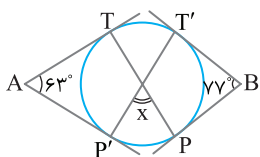


- ۶۶- در شکل مقابل  $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$  . اندازه زاویه M چند درجه است؟
- |        |        |
|--------|--------|
| ۸۰ (۲) | ۷۰ (۱) |
| ۷۵ (۴) | ۹۰ (۳) |

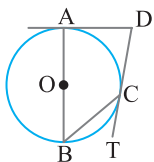


- ۶۷- با توجه به شکل مقابل اندازه  $\alpha$  برابر کدام است؟
- |        |        |
|--------|--------|
| ۹۰ (۲) | ۶۰ (۱) |
| ۵۰ (۴) | ۳۰ (۳) |

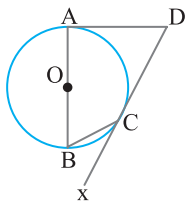
- ۶۸- دو نقطه A و B دایره‌ای را نسبت به ۳ و ۵ تقسیم کرده‌اند. اندازه زاویه بین مماس‌های رسم شده از این دو نقطه بر دایره چند درجه است؟
- |        |        |
|--------|--------|
| ۹۰ (۴) | ۶۰ (۳) |
| ۴۵ (۲) | ۳۰ (۱) |



- ۶۹- در شکل مقابل اندازه x برابر کدام است؟
- |        |        |
|--------|--------|
| ۸۰ (۲) | ۷۵ (۱) |
| ۷۰ (۴) | ۶۰ (۳) |



- ۷۰- در دایره شکل مقابل به مرکز O ، AD و CD بر دایره مماس‌اند و  $\widehat{BCT}=40^\circ$  . اندازه زاویه D چند درجه است؟
- |        |        |
|--------|--------|
| ۸۰ (۲) | ۵۰ (۱) |
| ۴۵ (۴) | ۴۰ (۳) |



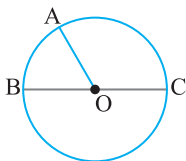
۷۱- در دایره شکل مقابل به مرکز O و شعاع ۳، AD و DC بر دایره مماس‌اند و  $\widehat{BCx} = 35^\circ$ . طول کمان AC چقدر است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{6}$   
 (۲)  $\frac{11\pi}{12}$   
 (۳)  $\frac{11\pi}{6}$   
 (۴)  $2\pi$

### مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

۷۲- چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره C مماس باشند و با خط  $\Delta$  در خارج دایره زاویه  $60^\circ$  بسازند؟

- (۱) ۴  
 (۲) ۲  
 (۳) ۱  
 (۴) نامتناهی

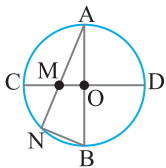


۷۳- در دایره به مرکز O طول کمان AB برابر  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$  و مساحت قطاع AOB برابر  $\pi$  است. فاصله A از قطر BC برابر کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$   
 (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 (۴)  $2\sqrt{3}$

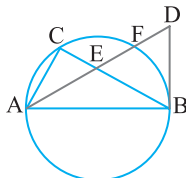
۷۴- دو وتر موازی به طول‌های ۴ و ۱۰ در دو طرف مرکز دایره‌ای به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که فاصله مرکز دایره تا وتر کوچک‌تر، دو برابر فاصله مرکز تا وتر بزرگ‌تر است. طول وتری که موازی این دو وتر است و دقیقاً وسط فاصله آن دو قرار می‌گیرد، چقدر است؟

- (۱) ۱۲  
 (۲) ۱۱  
 (۳) ۹  
 (۴) ۸



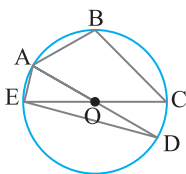
۷۵- در شکل مقابل، دو قطر AB و CD بر هم عمودند و  $MN = NB$ . اندازه زاویه A چه کسری از قائمه است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
 (۲)  $\frac{1}{6}$   
 (۳)  $\frac{1}{3}$   
 (۴)  $\frac{1}{5}$



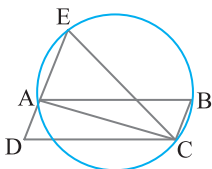
۷۶- در شکل مقابل قطر دایره، AD نیمساز زاویه A و BD بر دایره مماس است. نسبت تصویر BD روی AD به تصویر BE روی AD برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲) ۱  
 (۳)  $\sqrt{2}$   
 (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$



۷۷- در شکل مقابل دایره به مرکز O و شعاع ۶ است. اگر  $AB = 6$  و  $BC = 6\sqrt{2}$ ، مساحت مثلث ADE برابر کدام است؟

- (۱) ۱۲  
 (۲) ۱۶  
 (۳) ۳۶  
 (۴) ۱۸



۷۸- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و دایره محیطی مثلث ABC امتداد AD را در E قطع کرده است. اگر  $AB = 10$ ،  $BC = 3$  و  $AE = 5$ ، مساحت مثلث DEC برابر کدام است؟

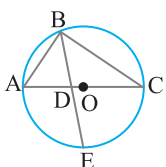
- (۱) ۱۵  
 (۲)  $4\sqrt{21}$   
 (۳)  $8\sqrt{21}$   
 (۴) ۳۰

۷۹- زاویه محاطی BAC را در یک دایره در نظر بگیرید. نیمساز این زاویه، دایره را در نقطه D قطع می‌کند. از D خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند. اگر شعاع دایره ۵ باشد،  $AB = 3$  و  $DE = 7$ ، طول وتر AC کدام است؟

- (۱) ۳  
 (۲) ۷  
 (۳) ۴  
 (۴) ۶

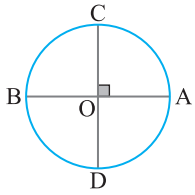
۸۰- در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ۶ واحد، دایره‌ای به قطر طول مستطیل، ضلع مقابل آن را در دو نقطه M و N قطع می‌کند. فاصله این دو نقطه چند واحد است؟

- (۱) ۴  
 (۲)  $2\sqrt{6}$   
 (۳) ۵  
 (۴)  $4\sqrt{2}$



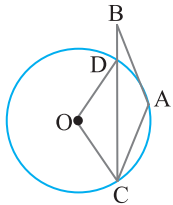
۸۱- در شکل مقابل BD نیمساز زاویه B و AC قطر دایره است. اگر مساحت مثلث ABC برابر S باشد، کدام رابطه درست است؟

- (۱)  $2S = BD \times BC$   
 (۲)  $2S = BD \times BE$   
 (۳)  $2S = AB \times AC$   
 (۴)  $2S = BE \times AC$



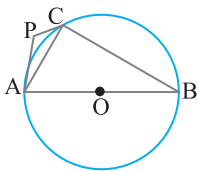
۸۲- در شکل مقابل، دو قطر AB و CD بر هم عمودند. از نقطه دلخواه M واقع بر کمان AC مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم تا امتداد CD را در نقطه P قطع کند. اگر  $\widehat{MPO} = 28^\circ$ ، اندازه زاویه MBA کدام است؟

- (۱)  $14^\circ$  (۲)  $28^\circ$  (۳)  $56^\circ$  (۴)  $52^\circ$



۸۳- در شکل مقابل اگر طول مماس AB با طول وتر AC مساوی باشد، کدام گزینه درست است؟

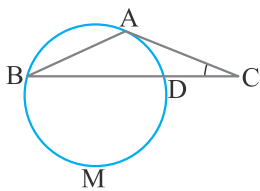
- (۱)  $\widehat{O} = 2\widehat{B}$  (۲)  $\widehat{O} = 3\widehat{B}$  (۳)  $\widehat{O} = 4\widehat{B}$  (۴)  $\widehat{O} = 6\widehat{B}$



۸۴- در دایره شکل مقابل قطر AB دایره است،  $BC = 2\sqrt{3}$  و  $AC = 2$ . اگر PA و PC بر دایره مماس باشند، اندازه زاویه P برابر کدام است؟

- (۱)  $60^\circ$  (۲)  $90^\circ$  (۳)  $110^\circ$  (۴)  $120^\circ$

### کنکور سراسری



۸۵- در شکل مقابل، مماس AC بر دایره با وتر AB از دایره برابرند، اگر کمان DMB برابر  $222^\circ$  درجه باشد، زاویه C چند درجه است؟

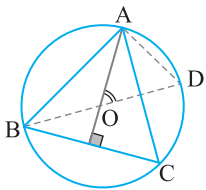
خارج از کشور ریاضی - ۹۱

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

۸۶- دو دایره به شعاع‌های ۴ و  $\frac{5}{10}$  واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

ریاضی - ۹۲

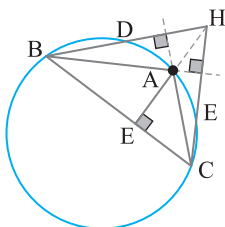
- (۱) ۸ (۲)  $4\sqrt{5}$  (۳)  $4\sqrt{6}$  (۴) ۱۰



۸۷- در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه AOD برابر کدام است؟

ریاضی - ۹۲

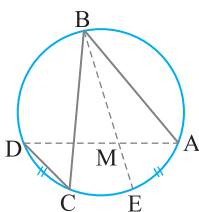
- (۱)  $\widehat{OBC}$  (۲)  $\widehat{CAD}$  (۳)  $\widehat{OAC}$  (۴)  $\widehat{ADO}$



۸۸- در شکل روبه‌رو نقطه H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است. زاویه AHD با کدام زاویه برابر است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

- (۱)  $\widehat{CAE}$  (۲)  $\widehat{ABC}$  (۳)  $\widehat{ADH}$  (۴)  $\widehat{AHC}$



۸۹- در شکل مقابل  $AB = 6$ ،  $BC = 8$ ،  $CD = 3$  و  $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ ، اندازه AM کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{2}{25}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{2}{75}$

۹۰- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ( $AB = AC$ ) نقطه O در امتداد AC، مرکز دایره‌ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این

ریاضی - ۹۴

دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟

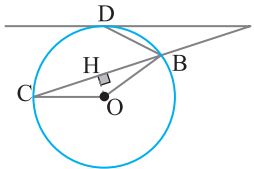
- (۱) متساوی‌الساقین (۲) قائم‌الزاویه (۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین (۴) غیرمشخص

۹۱- دو دایره متقاطع در نقطه A مشترک اند. خط گذرا بر A دو دایره مفروض را در B و C قطع می کند. مماس ها بر هر دایره در B و C در نقطه M متقاطع اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می ماند؟  
 خارج از کشور ریاضی - ۹۴

- MA (۱) محیط (۲) مساحت (۳) زاویه BMC (۴)

۹۲- در مثلث ABC ( $AB=AC$ )، دایره ای در B و C بر ساقها مماس است. اگر  $BC=6$  و ارتفاع  $AH=4$ ، شعاع این دایره کدام است؟  
 خارج از کشور ریاضی - ۹۵

- (۱)  $3/25$  (۲)  $3/5$  (۳)  $3/75$  (۴)  $4/5$

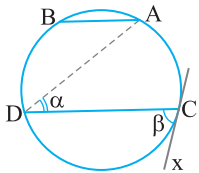


۹۳- در شکل مقابل AD مماس بر دایره به مرکز O و OH عمود بر AC است. اگر  $\widehat{DBC} = 2\widehat{DAC}$ ، زاویه COH چند برابر زاویه DAC است؟  
 ریاضی - ۹۷

- (۱)  $2/5$  (۲) ۳ (۳)  $3/5$  (۴) ۴

۹۴- در مثلث متساوی الساقین ABC، خط گذرا بر رأس A قاعده BC و دایره محیطی مثلث را به ترتیب در نقطه های D و E قطع می کند. مقدار  $AD \times AE$  برابر کدام است؟  
 خارج از کشور ریاضی - ۹۷

- (۱)  $BD \times BC$  (۲)  $CD \times CB$  (۳)  $AC^2$  (۴)  $BC^2$

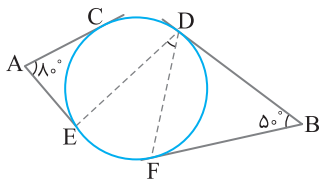


۹۵- در شکل روبه رو، وتر AB برابر شعاع دایره،  $AB \parallel CD$ ،  $\beta = 2\alpha$ ،  $Cx$  مماس بر دایره است. اندازه کمان BD چند درجه است؟  
 ریاضی - ۹۸

- (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۰ (۴) ۷۵

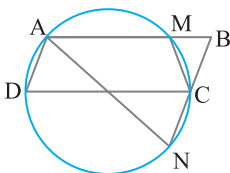
۹۶- در مثلث ABC داریم  $AB=AC=17$  و  $BC=16$ ، دایره ای به مرکز B و شعاع ۲۵ واحد، خطی را که از رأس A موازی BC رسم شود، در نقطه D قطع می کند. فاصله نقطه C از خط BD، کدام است؟  
 خارج از کشور ریاضی - ۹۸

- (۱)  $7/2$  (۲)  $8/4$  (۳)  $9/6$  (۴)  $10/2$



۹۷- در شکل روبه رو، اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه EDF چند درجه است؟  
 خارج از کشور ریاضی - ۹۸

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰



۹۸- در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است. تعداد مثلث های متساوی الساقین، کدام است؟  
 خارج از کشور ریاضی - ۹۹

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

## فصل اول

### پاسخ پرسش های چهار گزینه ای

۳ فرض کنید زاویه مرکزی مقابل به کمان AB، برابر  $\alpha$  (درجه) باشد.

مساحت قطاع OAB در دایره به شعاع R برابر است با

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{\alpha \pi R^2}{360} = \frac{\alpha \pi R^2}{360} = 12\pi \quad (1)$$

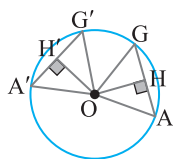
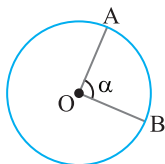
همچنین طول کمان AB به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{طول کمان AB} = \frac{\alpha \pi R}{180} = \frac{\alpha \pi R}{180} = 4\pi \quad (2)$$

از تقسیم تساوی (1) بر (2) نتیجه می گیریم

$$\frac{\alpha \pi R^2}{360} = \frac{12\pi}{4\pi} \Rightarrow \frac{R}{2} = 3 \Rightarrow R = 6$$

بنابراین  $\pi R^2 = \pi(6)^2 = 36\pi$  مساحت دایره.



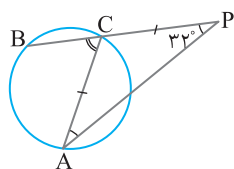
۷ دو وتر AG و A'G' مساوی اند.

پس از مرکز دایره به یک فاصله اند.

بنابراین عمودهای OH و OH' برابرند.

در نتیجه دو مثلث OAG و OA'G' قاعده و ارتفاع مساوی دارند.

بنابراین هم مساحت اند.



۸ چون CA=CP، پس

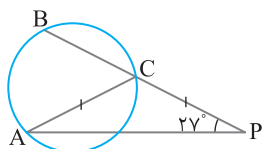
زاویه ACB زاویه خارجی مثلث CAP است.

بنابراین  $\hat{A} = \hat{P} = 32^\circ$

$\hat{ACB} = \hat{A} + \hat{P} = 32^\circ + 32^\circ = 64^\circ$

چون ACB محاطی است، پس

$\widehat{AB} = 128^\circ$ ، یعنی  $\frac{1}{2}\widehat{AB} = 64^\circ$



۹ چون AC=CP، پس

همچنین، زاویه ACB، زاویه خارجی مثلث ACP است.

بنابراین  $\hat{A} = \hat{P} = 27^\circ$

$\hat{ACB} = \hat{A} + \hat{P} = 27^\circ + 27^\circ = 54^\circ$

از طرف دیگر  $\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$  در نتیجه

$\widehat{AB} = 108^\circ$ ، یعنی  $\frac{\widehat{AB}}{2} = 54^\circ$

۱۰ چون کمان های بین دو وتر موازی مساوی اند، پس  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$  در

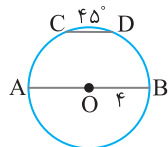
ضمن AB قطر دایره است. بنابراین

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ$$

$$2\widehat{BD} + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 67.5^\circ$$

از طرف دیگر،  $L = \frac{\alpha \pi R}{180}$ ، پس

$$\text{طول کمان BD} = \frac{67.5^\circ}{180} \times \pi \times 4 = \frac{3\pi}{2}$$



۱۱ اندازه هر زاویه محاطی مساوی نصف کمان مقابلش است، پس

$$\hat{B} = \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow 3^\circ = \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 6^\circ$$

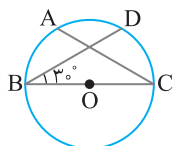
چون D وسط کمان AC است، پس

$\widehat{AD} = 6^\circ$  و چون BC قطر دایره است، پس

$$\widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{CD} = 180^\circ$$

$$\widehat{AB} + 6^\circ + 6^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 168^\circ$$

بنابراین  $\hat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{168^\circ}{2} = 84^\circ$



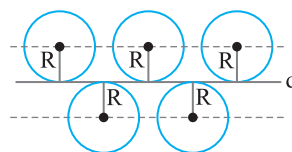
۱ فاصله نزدیک ترین نقطه خط d از مرکز دایره C طول عمودی است که

از O بر d وارد می شود. اگر OH عمود بر d باشد، آن گاه  $OH = 3\sqrt{2}$  چون

$OH < R$  پس  $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$  بنابراین خط d دایره را در دو نقطه قطع می کند.

۲ مرکز این دایره ها از خط d به فاصله معلوم R هستند. پس مرکز این

دایره ها روی دو خط موازی با d و به فاصله R از d واقع هستند.



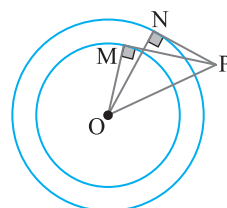
۳ از مرکز O به نقطه های تماس M و N وصل می کنیم. در این صورت

شعاع های OM و ON به ترتیب بر خط های مماس PM و PN عمود هستند. از قضیه

پیتاگورس در مثلث های قائم الزاویه ایجاد شده به دست می آید

$$\triangle OPM: PM^2 + OM^2 = OP^2 \Rightarrow 16 + 9 = OP^2 \Rightarrow OP = 5$$

بنابراین  $\triangle OPN: PN^2 + ON^2 = OP^2 \Rightarrow PN^2 + 16 = 25 \Rightarrow PN = 3$

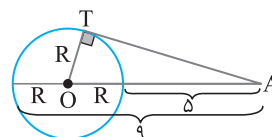


۴ بنا بر فرض مسئله،  $OA - R = 5$  و  $OA + R = 9$ ، با حل دستگاه

حاصل از این دو معادله به دست می آید  $OA = 7$  و  $R = 2$ . اکنون در مثلث قائم الزاویه

OAT بنا بر قضیه پیتاگورس،  $AT = \sqrt{OA^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$

در نتیجه  $\frac{AT}{R} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$



۵ از مرکز O به نقطه های A و B وصل

می کنیم. در این صورت طول ضلع های مثلث OAB در

رابطه پیتاگورس صدق می کنند:  $AB^2 = OA^2 + OB^2$

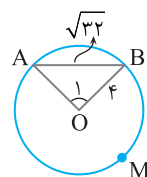
بنابراین مثلث OAB قائم الزاویه است و  $\hat{O}_1 = 90^\circ$  در

نتیجه اندازه کمان AB برابر  $90^\circ$  است. بنابراین اندازه

کمان AMB برابر  $270^\circ - 90^\circ = 180^\circ$  است. طول کمان

AMB برابر است با

$$\text{طول کمان AMB} = \frac{270^\circ}{180} \times \pi \times 4 = 6\pi$$

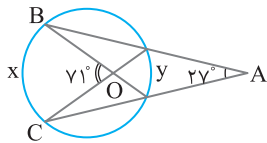


۱۸ ۱ با توجه به شکل می نویسیم

$$\hat{A} = 27^\circ \Rightarrow \frac{x-y}{2} = 27^\circ, \quad \hat{O} = 71^\circ \Rightarrow \frac{x+y}{2} = 71^\circ$$

$$\begin{cases} x-y=54^\circ \\ x+y=142^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=196^\circ \Rightarrow x=98^\circ \quad \text{بنابراین}$$

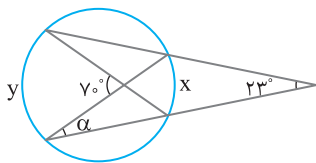
پس  $y=44^\circ$ . در نتیجه  $\frac{x}{y} = \frac{98}{44} = \frac{49}{22}$



۱۹ ۱ با توجه به اندازه‌های روی شکل می نویسیم  $23^\circ = \frac{y-x}{2}$  و

$$\begin{cases} y-x=46^\circ \\ y+x=14^\circ \end{cases} \xrightarrow{-} 2x=94^\circ \Rightarrow x=47^\circ \quad \text{در نتیجه } \frac{y+x}{2} = 7^\circ$$

$\alpha$  اندازه زاویه محاطی رو به رو به کمان  $47^\circ$  است. بنابراین  $\alpha = \frac{47^\circ}{2} = 23^\circ/5$



۲۰ ۳ زاویه P زاویه بین امتداد دو وتر متقاطع است. پس

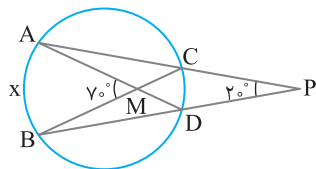
$$\hat{P} = \frac{\widehat{AxB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{\widehat{AxB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AxB} - \widehat{CD} = 40^\circ \quad (1)$$

زاویه M زاویه بین دو وتر متقاطع است. پس

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AxB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 7^\circ = \frac{\widehat{AxB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AxB} + \widehat{CD} = 14^\circ \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} \widehat{AxB} - \widehat{CD} = 40^\circ \\ \widehat{AxB} + \widehat{CD} = 14^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2\widehat{AxB} = 118^\circ \Rightarrow \widehat{AxB} = 59^\circ$$

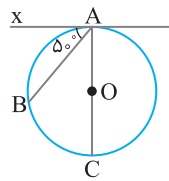
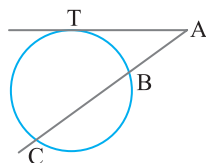


۲۱ ۳ محیط هر دایره  $360^\circ$  است. بنابراین

$$\widehat{TC} + \widehat{BC} + \widehat{BT} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 36^\circ$$

در نتیجه  $\widehat{BT} = 72^\circ$  و  $\widehat{TC} = 144^\circ$ . پس اندازه زاویه A برابر است با

$$\hat{A} = \frac{\widehat{TC} - \widehat{BT}}{2} = \frac{144^\circ - 72^\circ}{2} = 36^\circ$$



۱۲ ۳ چون  $\widehat{B\hat{A}x} = 50^\circ$ . پس  $\frac{1}{2}\widehat{AB} = 50^\circ$

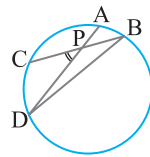
یعنی  $\widehat{AB} = 100^\circ$ . چون AC قطر دایره است. پس  $\widehat{BC} = 180^\circ - \widehat{AB} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

۱۳ ۳ چون  $\hat{D} = \frac{1}{2}\hat{B}$  پس

$$\frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\widehat{CD}) \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{1}{2}\widehat{CD}$$

همچنین

$$\hat{P} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD}) = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + 2\widehat{AB}) = \frac{3}{2}\widehat{AB}$$



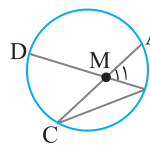
۱۴ ۱ زاویه‌های B و C زاویه‌های محاطی در دایره هستند. از فرض تست

$$\hat{C} = \frac{1}{3}\hat{B} \Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{1}{3}(\frac{\widehat{CD}}{2}) \Rightarrow \widehat{CD} = 3\widehat{AB}$$

نتیجه می‌شود

از طرف دیگر زاویه  $M_1$  زاویه بین دو وتر متقاطع است. پس

$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{AB} + 3\widehat{AB}}{2} = 2\widehat{AB}$$

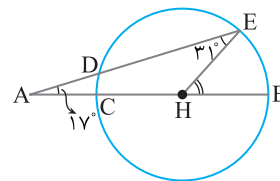


۱۵ ۱ زاویه EHB زاویه خارجی مثلث AEH است. پس

$$\widehat{EHB} = \hat{A} + \hat{E} = 17^\circ + 31^\circ = 48^\circ$$

در نتیجه  $\widehat{BE} = 48^\circ$ . از طرف دیگر.

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\widehat{BE} - \widehat{CD}) \Rightarrow 17^\circ = \frac{1}{2}(48^\circ - \widehat{CD}) \Rightarrow \widehat{CD} = 14^\circ$$



۱۶ ۳ چون  $\hat{E} = 30^\circ$  پس

$$\frac{1}{2}(\widehat{AND} - \widehat{BC}) = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AND} - \widehat{BC} = 60^\circ \quad (1)$$

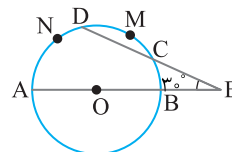
از طرف دیگر چون AB قطر دایره است. پس

$$\widehat{AND} + \widehat{BC} + \widehat{DMC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AND} + \widehat{BC} + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{AND} + \widehat{BC} = 150^\circ \quad (2)$$

در نتیجه

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم  $\widehat{AND} = 105^\circ$ .



۱۷ ۱ چون AB قطر دایره است. پس

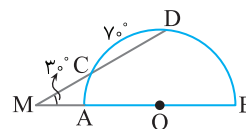
$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + 7^\circ + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{BD} = 11^\circ$$

از طرف دیگر زاویه M زاویه بین امتداد دو وتر متقاطع است. بنابراین

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} - \widehat{AC} = 60^\circ$$

از تساوی‌های به دست آمده به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \widehat{AC} + \widehat{BD} = 11^\circ \\ \widehat{BD} - \widehat{AC} = 60^\circ \end{cases} \xrightarrow{-} 2\widehat{AC} = 49^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 24^\circ$$





۲۷ ۲ مساحت قسمت رنگی، تفاضل مساحت‌های دو قطاع OAB و OA'B' است:

$$18\pi = \text{مساحت قطاع } OA'B' - \text{مساحت قطاع } OAB$$

$$18\pi = \frac{135^\circ}{360^\circ} \pi (2R)^2 - \frac{135^\circ}{360^\circ} \pi R^2 \Rightarrow 18\pi = \frac{135^\circ}{360^\circ} \times 3\pi R^2$$

$$18\pi = \frac{9}{8} \pi R^2 \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$$

$$\text{بنابراین } AB = \frac{135^\circ \pi (2R)}{180^\circ} = \frac{3 \times \pi \times 8}{4} = 6\pi$$

۲۸ ۲ چون طول کمانی از یک دایره به شعاع R که زاویه مرکزی رو به‌رو به آن

کمان برابر  $\alpha$  (درجه) باشد برابر  $\frac{\alpha \pi R}{180^\circ}$  است. پس طول کمان A'B' برابر است با

$$A'B' = \frac{\alpha}{180^\circ} (\pi \times \frac{2}{3} R) \Rightarrow \frac{\alpha}{180^\circ} \times \frac{2}{3} \pi R = \frac{9}{180^\circ} \pi R \Rightarrow \frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{9}{2\pi R}$$

پس

$$AB = \frac{\alpha}{180^\circ} (\pi \times \frac{3}{2} R)$$

$$\frac{9}{180^\circ} \pi R = \frac{\alpha}{180^\circ} (\pi \times \frac{3}{2} R) \Rightarrow \alpha = \frac{9}{3} = 3^\circ$$

۲۹ ۲ زاویه AOB را  $\alpha$  (با واحد درجه) در نظر می‌گیریم:

$$OAB \text{ قطاع } \Rightarrow \frac{\alpha}{360^\circ} \pi R^2 = 1 \Rightarrow R = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha}{360^\circ} \times 4\pi = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{90^\circ}{\pi}$$

بنابراین  $\alpha = \frac{90^\circ (\pi \times 5)}{180^\circ \pi} = \frac{5}{2} = 2.5^\circ$

۳۰ ۱ از مرکز O به نقاط تماس A و B وصل می‌کنیم. در این صورت زاویه‌های A و B قائمه‌اند. همچنین چهارضلعی OAMB کایت است. پس دو قطر OM و AB برهم عمودند و OM نیمساز زاویه M است. بنابراین

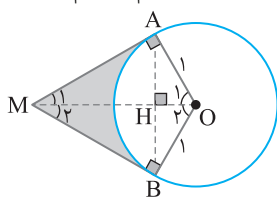
$$\triangle OAM: \hat{M}_1 = 30^\circ \Rightarrow OA = \frac{OM}{2} \Rightarrow OA = 1 \Rightarrow OM = 2$$

$$\triangle OAH: \hat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} OA \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس  $AB = 2AH = \sqrt{3}$ . بنابراین  $S_{AOBM} = \frac{1}{2} AB \times OM = \frac{1}{2} (\sqrt{3}) (2) = \sqrt{3}$

$$\text{مساحت قطاع } OAB = \frac{\alpha \pi R^2}{360^\circ} = \frac{120^\circ \pi (1)^2}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

از طرف دیگر، مساحت قسمت رنگی برابر تفاضل مساحت چهارضلعی OAMB و مساحت قطاع OAB است. پس  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$



۳۱ ۲ راه‌حل اول از مرکز O به وتر AB عمود OH رسم می‌کنیم. اندازه زاویه مرکزی AOB برابر  $60^\circ$  است. بنابراین  $\hat{O}_1 = 30^\circ$ . در ضمن عمود OH وتر

AB را نصف می‌کند، پس  $BH = 1.5$ . بنابراین در مثل قائم‌الزاویه OBH،

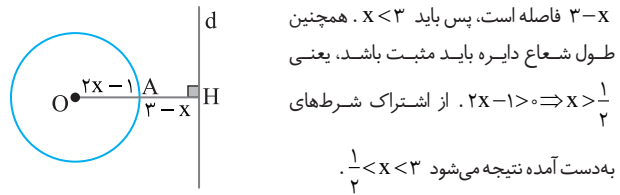
$$\tan \hat{O}_1 = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{1.5}{OH}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.5}{OH} \Rightarrow OH = \frac{4.5}{\sqrt{3}} = 1.5\sqrt{3}$$

راه‌حل دوم اندازه زاویه مرکزی AOB برابر  $60^\circ$  است. چون  $OA = OB$ ، پس مثلث

$$OAB \text{ متساوی‌الاضلاع است. بنابراین } OH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = 1.5\sqrt{3}$$

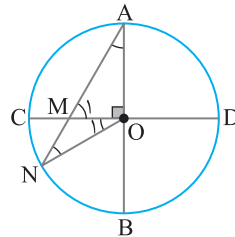
۲۲ ۲ از مرکز O عمود OH را بر خط d رسم می‌کنیم تا دایره را در A قطع کند. در این صورت نقطه A نزدیک‌ترین نقطه دایره تا خط است. پس  $AH = 3 - x$ . بنابراین  $OH = 2x - 1 + 3 - x = x + 2$ . از طرف دیگر، چون خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند، پس  $R < OH$ . در نتیجه  $2x - 1 < x + 2$ . بنابراین  $x < 3$ . از طرف دیگر چون



۲۳ ۲ دو مثلث OAN و OMN متساوی‌الساقین هستند. پس

$$OM = MN \Rightarrow \hat{N} = \hat{O}_1, \quad OA = ON \Rightarrow \hat{A} = \hat{N}$$

از طرف دیگر، زاویه  $M_1$  زاویه خارجی مثلث OMN است. بنابراین



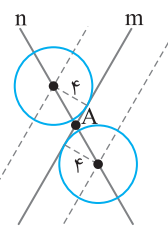
$$\hat{M}_1 = \hat{N} + \hat{O}_1 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{N} \Rightarrow \hat{M}_1 = 2\hat{N}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه OAM می‌نویسیم

$$\hat{A} + \hat{M}_1 + \hat{O} = 180^\circ$$

$$\hat{N} + 2\hat{N} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{N} = 30^\circ$$

چون  $\hat{A} = \hat{N}$ ، پس  $\hat{A} = 30^\circ$ .



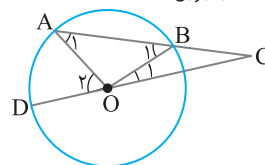
۲۴ ۳ مرکز دایره‌هایی که بر خط m مماس هستند و شعاع آن‌ها ۴ است، روی دو خط موازی با m و به فاصله ۴ از خط m قرار دارند. اگر این دو خط موازی را رسم کنیم، هریک از آن‌ها خط n را در یک نقطه قطع می‌کند. پس دو نقطه روی خط n قرار دارد که مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ هستند و خط m بر این دایره‌ها مماس است.

۲۵ ۴ از مرکز O به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. اگر شعاع دایره باشد،

$$\begin{cases} BC = R \\ OB = R \end{cases} \Rightarrow OB = BC \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{C}$$

بنابر فرض تست،

همچنین  $OB = OA = R$ . در نتیجه  $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ . از طرف دیگر، زاویه  $B_1$  زاویه خارجی مثلث OBC است، پس  $\hat{B}_1 = \hat{O}_1 + \hat{C}$ . در نتیجه  $\hat{B}_1 = 2\hat{C}$ . در ضمن زاویه  $O_1$  زاویه خارجی مثلث OAC است. بنابراین  $\hat{O}_1 = \hat{A}_1 + \hat{C} = \hat{B}_1 + \hat{C} = 2\hat{C} + \hat{C} = 3\hat{C}$ . چون  $\hat{C} = 2^\circ$ ، پس  $\hat{O}_1 = 6^\circ$  و چون  $\hat{O}_1$  زاویه مرکزی در این دایره است، اندازه آن با اندازه کمان مقابلش برابر است. بنابراین  $\widehat{AD} = 6^\circ$ .



۲۶ ۳ اگر شعاع دایره باشد، مساحت قطعه رنگی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\text{مساحت مثلث } OAB - \text{مساحت قطاع } OAB = \text{مساحت قطعه}$$

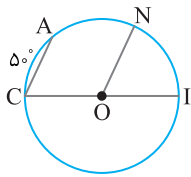
$$6\pi - 9\sqrt{3} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin 60^\circ \Rightarrow 6\pi - 9\sqrt{3} = \frac{1}{6} \pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$$

$$3(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} R^2 \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6$$

بنابراین

در ضمن مثلث OAB متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ است. پس  $AB = 6$ . در نتیجه

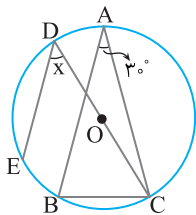
$$AB + \text{طول وتر } AB = 2\pi + 6 = 2(\pi + 3)$$



**۳۸ ۳** چون CI قطر دایره است، پس  $\widehat{AC} + \widehat{ANI} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{AC} = 5^\circ} \widehat{ANI} = 135^\circ$

بنابراین اندازه زاویه محاطی C برابر است با  $\widehat{C} = \frac{\widehat{ANI}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$

از طرف دیگر، از قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود  $\begin{cases} CA \parallel ON \\ \Rightarrow \widehat{NOI} = \widehat{C} = 67.5^\circ \end{cases}$  مورب CI

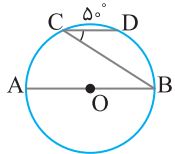


**۳۹ ۲** چون  $\widehat{A} = 30^\circ$ ، پس  $\widehat{BC} = 60^\circ$ ، از طرف دیگر مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین  $\widehat{B} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 30^\circ$

کمان‌های بین دو وتر موازی، مساوی‌اند:  $AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{BE} = 30^\circ$

زاویه EDC زاویه محاطی است، پس  $x = \frac{\widehat{BE} + \widehat{BC}}{2} = \frac{30^\circ + 60^\circ}{2} = 45^\circ$

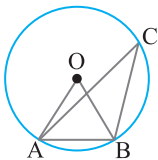
**۴۰ ۲** کمان‌های بین دو وتر موازی، مساوی‌اند. بنابراین  $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$



از طرف دیگر،  $\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ$ ، چون زاویه DCB محاطی است، پس اندازه آن نصف  $2\widehat{BD} + 5^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 67.5^\circ$

کمان روبه‌رو به خود است:  $\widehat{DCB} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{67.5^\circ}{2}$

**۴۱ ۴** زاویه ACB محاطی است، پس اندازه آن برابر  $\frac{\widehat{AB}}{2}$  است، در نتیجه  $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، بنابراین

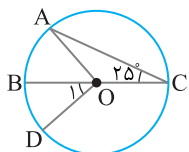


اگر از مرکز دایره به نقاط A و B وصل کنیم، مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه شعاع دایره برابر AB و مساوی ۶ است، پس

$$\text{طول کمان AB} = \frac{6^\circ \times \pi \times 6}{180^\circ} = 2\pi$$

**۴۲ ۴** اگر اندازه زاویه مرکزی BOD برابر  $\alpha$  درجه باشد، آن‌گاه مساحت قطاع BOD به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{مساحت قطاع BOD} = \frac{\alpha \pi R^2}{360^\circ} \Rightarrow \frac{16\pi}{9} = \frac{\widehat{O}_1 \pi (4)^2}{360^\circ} \Rightarrow \widehat{O}_1 = 40^\circ$$

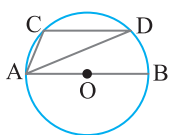


از طرف دیگر زاویه محاطی C برابر  $25^\circ$  است، پس  $\widehat{AB} = 50^\circ$ ، در نتیجه  $\widehat{AOD} = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$

پس  $\text{طول کمان ABD} = \frac{\alpha \pi R}{180^\circ} = \frac{90^\circ \times \pi \times 4}{180^\circ} = 2\pi$

**۴۳ ۴** می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی در دایره مساوی‌اند، بنابراین

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$



از طرف دیگر، دو زاویه ACD و ADC محاطی هستند، پس اندازه هر کدام آن‌ها نصف کمان مقابلشان است:  $\widehat{ADC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$  و  $\widehat{ACD} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BD}}{2}$

بنابراین  $|\widehat{ACD} - \widehat{ADC}| = \left| \frac{\widehat{AB} + \widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \right|$ ، چون  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$  و  $\widehat{AB}$  قطر

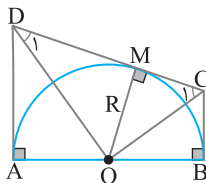
دایره است، پس  $|\widehat{ACD} - \widehat{ADC}| = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

**۳۲ ۱** شعاع OM بر خط مماس DC عمود است. در ضمن شعاع OB

بر خط مماس BC و شعاع OA بر خط مماس AD عمود است. بنابراین  $OB = OM \Rightarrow$  OC نیمساز زاویه C است.

$OA = OM \Rightarrow$  OD نیمساز زاویه D است.

در ضمن مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره مساوی‌اند، پس  $DM = AD$  و  $MC = BC$ . از طرف دیگر دو مماس AD و BC بر AB عمودند، پس موازی‌اند. در نتیجه بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،



$$\widehat{D} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{C}_1 = 90^\circ$$

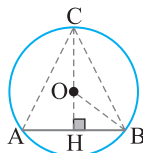
$$\widehat{DOC} = 90^\circ$$

پس مثلث ODC قائم‌الزاویه است. از رابطه طولی در این مثلث نتیجه می‌شود

$$OM^2 = DM \times MC \Rightarrow R^2 = AD \times BC$$

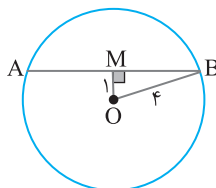
**۳۳ ۱** مطابق شکل، در صورتی بیشترین مساحت مثلث ABC به دست

می‌آید که طول ارتفاع CH بیشترین مقدار ممکن باشد و این موضوع زمانی اتفاق می‌افتد که CH در راستای قطر دایره باشد. چون ارتفاع CH ضلع AB را نصف می‌کند، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است. بنابراین  $\begin{cases} OB = 5 \\ BH = 4 \end{cases} \Rightarrow OH = \sqrt{25 - 16} = 3$



از طرف دیگر،  $CH = OH + OC = 8$ ، بنابراین بیشترین مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$



**۳۴ ۳** وتر AB گذرنده از نقطه M و عمود بر OM کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است.

اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث OBM،  $MB = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$

$$AB = 2\sqrt{15}$$

پس طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M برابر  $2\sqrt{15}$  است و چون  $2 < 2\sqrt{15}$ ، پس هیچ تری به طول ۲ از نقطه M نمی‌گذرد.

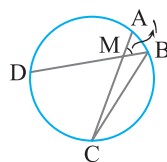
**۳۵ ۴** کوچک‌ترین وتر گذرنده از نقطه P و تری است که بر قطر گذرنده از P عمود

باشد. بنابراین اگر وتر CD از P گذشته و بر قطر AB عمود باشد، آن‌گاه CD کوتاه‌ترین وتر گذرنده از P است. در ضمن چون قطر AB بر وتر CD عمود است، پس AB وتر CD را نصف می‌کند، یعنی P وسط CD است. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث OCP،

$$OC^2 = OP^2 + CP^2$$

$$13^2 = 5^2 + CP^2 \Rightarrow CP = 12$$

بنابراین  $CD = 2CP = 24$



**۳۶ ۱** زاویه  $M_1$  زاویه خارجی مثلث

MBC است. بنابراین  $\widehat{M}_1 = \widehat{C} + \widehat{B}$ ، از طرف دیگر  $\widehat{B} = \widehat{C}$ ، در نتیجه  $\widehat{M}_1 = 56^\circ$ ، در ضمن

زاویه C محاطی روبه‌رو به کمان AB است، پس  $\widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}$ ، در نتیجه  $\widehat{M}_1 = \frac{56^\circ}{2} \times 2 = 56^\circ$

**۳۷ ۱** می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس

بر خط مماس عمود است، پس  $\widehat{A}_1 = 90^\circ - \widehat{FAX} = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$ ، چون

$OA = OF$ ، پس  $\widehat{F} = \widehat{A}_1 = 34^\circ$ ، از طرف

دیگر،  $\widehat{F} = \frac{1}{2} \widehat{AE}$ ، پس  $34^\circ = \frac{1}{2} \widehat{AE}$

در نتیجه  $\widehat{AE} = 68^\circ$

